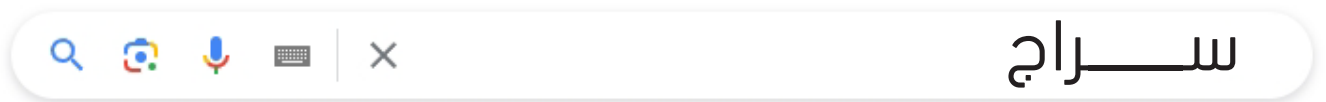


تم تحميل الملف من
موقع **سراج التعليمي**



للمزيد اكتب
في جوجل



حمل تطبيق **سراج التعليمي**



الدوال والمعادلات التربيعية

1



Copyright © 2010 by McGraw-Hill Education. All rights reserved. Chapter 2 is 2010. McGraw-Hill Education. All rights reserved. Chapter 2 is 2010. McGraw-Hill Education. All rights reserved.

لماذا؟

التحويل يمكن تمثيل قيمة السهم في إحدى الشركات بالدالة $f(x) = x^2 - 12x + 75$. وبتمثيل هذه الدالة التربيعية بيانياً، يمكننا التكون بصورة مدروسة بأداء السهم في المستقبل القريب.

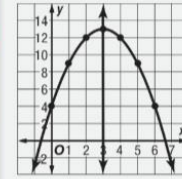
الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- حل معادلات تربيعية بالتمثيل البياني
- تحليل الدوال باستخدام الفرق والتناسب

السابق

لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي.



مثال:

اسأل: كم عدد الأجزاء المتساوية للقطع المكافئ التي تنشئ محور التماثل؟ **اثنان**

الدوال والمعادلات التربيعية

مخطط الوحدة

التقويم تشخيصي		التقويم تشخيصي		التقويم تشخيصي	
الدرس		الدرس		الدرس	
45 min: 1 day	90 min: 0.5 day	45 min: 0.5 day	90 min: 0.5 day	45 min: 1.5 day	90 min: 1 day
1-2	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
العنوان		العنوان		العنوان	
حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني		مختبر الجبر: معدل تغير الدالة التربيعية		تمثيل الدوال التربيعية بيانياً	
<ul style="list-style-type: none"> حل المعادلات التربيعية بالرسوم البيانية. قدّر حلول المعادلات التربيعية بالرسوم البيانية. 		<ul style="list-style-type: none"> استخدم الدالة التربيعية المعطاة للتحقق من معدل تغير الدالة التربيعية. 		<ul style="list-style-type: none"> تحليل خصائص الرسوم البيانية للدوال التربيعية. رسم الدوال التربيعية بيانياً. 	
الاهداف		الاهداف		الاهداف	
جذر مزدوج				<ul style="list-style-type: none"> الدالة التربيعية الصيغة القياسية القطع المكافئ محور التماثل قيمة الرأس القيمة الصغرى القيمة العظمى 	
المفردات الرئيسية					
تمثيلات متعددة					

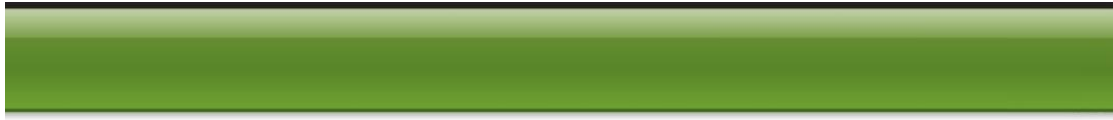


45 min: 0.5 day 90 min: 0.5 day	توسيع 1-3	45 min: 1.5 day 90 min: 0.5 day	الدراس 1-3	45 min: 0.5 day 90 min: 0.5 day	توسيع 1-2
	مختبر الجبر: أوجد القيمة العظمى أو الصغرى	حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع	مختبر تقنية التمثيل البياني: المتباينات التربيعية		
	<ul style="list-style-type: none"> استخدم الحاسبة البيانية لحل نظام معادلة تربيعية ومعادلة خطية. 	<ul style="list-style-type: none"> طبق تحويلات الدوال التربيعية. طبق تغييرات الأبعاد بغيثاس والانعكاسات على الدوال التربيعية. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من المتباينات التربيعية. 		
		تحويل تحويل تغيير الأبعاد بغيثاس الانعكاس نموذج قيمة الرأس			

الدوال والمعادلات التربيعية

مخطط الوحدة

45 min: 1.5 day 90 min: 1 day	الدرس 1-5	45 min: 1 day 90 min: 0.75 day	الدرس 1-4	0.5 day : 45 min 0.25 day : 90 min	استكشاف 1-4
	الأعداد المركبة	حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل	مختبر تقنية التمثيل البياني: تمثيل بيانات من الحياة اليومية		العنوان
	<ul style="list-style-type: none">تنفيذ عمليات مع أعداد تحليلية صرفة.قم بتنفيذ العمليات باستخدام الأعداد المركبة.	<ul style="list-style-type: none">اكتب المعادلات التربيعية في شكل نقاط.حل المعادلات التربيعية بواسطة التحليل.	<ul style="list-style-type: none">استخدم الحاسبة البيانية لنمذجة نقاط البيانات التي ترسم منحنى الدالة التربيعية كأشعب منحنى.		الأهداف
	وحدة تحليلية عدد تحليلي بحث عدد مركب مترافقات مركبة	الشكل المحلل طريقة FOIL			المفردات الرئيسية
					تمثيلات متعددة



45 min: 1 day 90 min: 0.5 day	الدرس 1-6	التوسع 1 day : 45 min 0.5 day : 90 min	1-5B	45 min: 0.5 day 90 min: 0.5 day	التوسع 1-5
	القانون العام والمميز	مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات التربيعية		مختبر الجبر: المستوى المركب	
	<ul style="list-style-type: none"> حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام. استخدم المميز لتحديد عدد جذور الدالة التربيعية ونوعها. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدم آلة حاسبة تحتوي على نظام حاسوب جبري لحل المعادلات التربيعية. 		<ul style="list-style-type: none"> استخدم الدالة التربيعية المعطاة للتحقق من معدل تغير الدالة التربيعية. 	
	القانون العام المميز				
	التقويم التكويني اختبار نصف الوحدة				

الدوال والمعادلات التربيعية

مخطط الوحدة

الوحدة 1

45 min: 0.5 day 90 min: 0.5 day		التوسع 1-7	45 min: 1.5 day 90 min: 0.75 day	الدرس 1-7
		مختبر الجبر: الدوال التربيعية ومعدل التغير	تحويلات الدوال التربيعية	العنوان
			<ul style="list-style-type: none"> تطبيق الإزاحات على الدوال التربيعية. تطبيق تغيير الأبعاد على الدوال التربيعية كتابة دالة تربيعية بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية ذات الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ 	الأهداف
				المفردات الأساسية
				تمثيلات متعددة



التوسيع 1-8 1 day : 45 min 0.5 day : 90 min		تدوين 1-8 1 day : 45 min 0.5 day : 90 min	
مختبر تقنية التمثيل البياني: المزيد من المتباينات التربيعية		المتباينات التربيعية	
<ul style="list-style-type: none"> استخدام آلة حاسبة بيانية للتحقق من المتباينة التربيعية. 		<ul style="list-style-type: none"> رسم تمثيل بياني للمتباينة التربيعية المكونة من المتغيرين. حل المتباينات التربيعية بمنهج واحد. 	
		المتباينة التربيعية	
			

الدوال والمعادلات التربيعية التقويم

الوصف	التشخيص
الاستعداد للوحدة 1 نسخة الطالب	بداية الوحدة 1
السابق، الحالي، لماذا؟ نسخة الطالب	الاستجابة للتدخل نسخة المعلم
أثناء/بعد كل درس	بداية كل درس
تمرين موجه نسخة الطالب، كل مثال التحقق من فهمك نسخة الطالب مسائل مهارات التفكير العليا نسخة الطالب مسائل المراجعة الشاملة نسخة الطالب أمثلة إضافية نسخة المعلم انتهى! نسخة المعلم الخطوة 4، قوّم نسخة المعلم	التدريس المتميز نسخة المعلم
اختبار نصف الوحدة	اختبار نصف الوحدة
اختبار نصف الوحدة نسخة الطالب	ما قبل اختبار الوحدة
دليل دراسة الوحدة والمراجعة نسخة الطالب تدريب على الاختبار نسخة الطالب تدريب على الاختبار القياسي نسخة الطالب	

تشخيصي

التقويم

التقويم التحصيلي

الوحدات 1 الدوال والمعادلات التربيعية التعليم المتغير

الخيار 3 أعلى من المستوى ١م

أرّم كرة التنس وأنت واقف في الجزء الأمامي من الوحدة. واطلب من الطلاب وصف كيف يمكن تشكيل مسار الكرة عن طريق دالة تربيعية. إذا كانت معدات الفيديو متاحة، فقم بإنشاء شبكة على الحائط واطلب من مجموعات الطلاب تسجيل مسار الكرة المرمية أمام الجدار. اطلب من الطلاب كتابة معادلة دالة تمثل مسار الكرة. ينبغي لكل مجموعة تحليل الدالة ومقارنة النتائج بالمسار الفعلي للكرة.

الخيار 1 الوصول لكل المتعلمين ١م ٢م ٣م ٤م

تبادلي قسّم الطلاب في مجموعات صغيرة. بما أن هناك العديد من المهام تدخل في الرسوم البيانية للدوال التربيعية، فاطلب من أعضاء المجموعة تقرير المهام التي ينبغي إكمالها من أجل الرسم البياني لدالة معينة. على سبيل المثال، من الممكن أن يكون عضو واحد مسؤولاً عن إيجاد معادلة محور التناظر، والثاني يستبدل القيم لتحديد النقاط في الرسم البياني، والثالث يرسم البيانات والمنحنى للقطع المكافئ.

الخيار 2 قريب من المستوى ٢م

ارسم ثلاثة أعمدة كبيرة على السبورة. وسم بتسمية الأعمدة كما يلي: "جذرين حقيقيين"، "جذر حقيقي"، و"لا يوجد جذور حقيقية". اطلب من المتطوعين كتابة المعادلة التربيعية لكل عمود من الأعمدة. اطلب من الوحدة استخدام المميز للتحقق مما إذا كان المتطوعون على صواب أم لا. وبعد ذلك، استخدم القانون العام لإيجاد جذور المعادلات التي لديها جذور حقيقية.

الدوال والمعادلات التربيعية

التركيز على المحتوى الرياضي

تخطيط رأسي

تخطيط رأسي

موضوعات ذات صلة قبل الصف 8

- تقريب قيمة الأعداد غير النسبية لأنها تنشأ من مواقف المشاكل

موضوعات سابقة من الرياضيات المتكاملة II

- إيجاد قيم دالة محددة
- تبسيط التعبيرات كثيرة الحدود وتحليلها إلى عوامل كما يلزم في مواقف المسائل
- تحليل الرسوم البيانية للدوال الخطية والأسية واستخلاص النتائج

الوحدة 1

موضوعات ذات صلة من الرياضيات

المتكاملة II

- تحديد ورسم الأشكال العامة للدوال الأصلية التربيعية
- تحليل الرسوم البيانية للدوال التربيعية واستخلاص النتائج
- إقامة روابط بين حلول (جذور) المعادلات التربيعية، والأصناف الخاصة بالدوال المرتبطة بها، والتقاطعات الأفقية للرسم البياني للدالة
- حل المعادلات التربيعية باستخدام نماذج مادية وجداول ورسم بياني، وطرق جبرية
- استخدم خصائص الدالة الأصلية التربيعية لرسم الرسوم البيانية ذات الصلة
- تحليل الدوال مع الفروق المتتالية والنسب
- تعريف ورسم الدوال الخاصة بيانياً.

بعد الوحدة 1

التحضير لدورة للرياضيات المتكاملة III

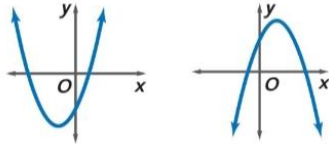
- ربط تمثيلات الدوال التربيعية مثل التوضيحات الجبرية والجدولية والبيانية واللفظية
- تحديد دالة تربيعية من جذورها أو رسمها البياني
- تحديد حلول الدوال التربيعية باستخدام الرسوم البيانية والجداول والطرق الجبرية

مراجعة درس بدرس

1-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

الشكل القياسي للدالة التربيعية هو $y = ax^2 + bx + c$ حيث تكون $a \neq 0$.

- إذا كانت a قيمة موجبة، يفتح القطع المكافئ لأعلى وقمة الرأس هو القيمة الصغرى للدالة.
- إذا كانت a قيمة سالبة، يفتح القطع المكافئ لأسفل وقمة الرأس هو القيمة العظمى للدالة.

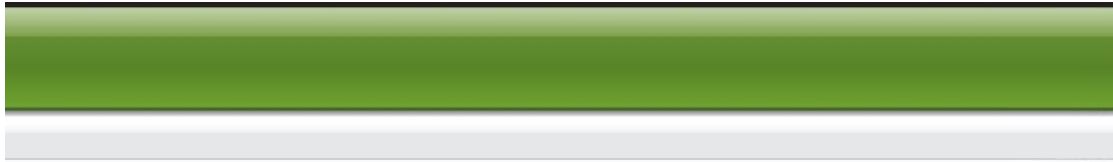


يسمى الخط الذي يقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين **محور التناظر**. معادلة محور التناظر للرسم البياني $y = ax^2 + bx + c$ هو $x = -\frac{b}{2a}$.

1-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

تسمى حلول المعادلة التربيعية **الجذور**. جميع المعادلات التربيعية لها اثنين من الجذور. الجذور كما يلي:

- جذرين حقيقيين-عندما يتقاطع القطع المكافئ مع المحور الأفقي x عند نقطتين مميزتين.
- جذر حقيقي مزدوج-عندما تكون قمة رأس القطع المكافئ في المحور الأفقي x ، أو
- اثنين من الجذور التخيلية-عندما لا يتقاطع القطع المكافئ مع المحور الأفقي x .



1-3 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

إذا كان التعبير التربيعي في طرف واحد من المعادلة، في الشكل $ax^2 + bx + c = n$ ، عبارة عن مربع مثالي و $n \geq 0$ ، يمكن حل المعادلة عن طريق أخذ الجذر التربيعي لكل طرف، ورغم ذلك، بما أن بعض التعبيرات التربيعية تمثل مربعات كامل، فقد يتم استخدام طريقة تدعى **إكمال المربع**.

لحل معادلة تأخذ الشكل $x^2 + bx + c = 0$ عن طريق إكمال المربع، اعزل حدود x^2 و bx في طرف واحد من المعادلة. إيجاد نصف b والقيمة التربيعية له. ثم أضف هذه الكمية لكل طرف من أطراف المعادلة، حل عن طريق التحليل إلى عوامل وأخذ الجذر التربيعي لكل طرف من أطراف المعادلة، إذا كان الطرف الأيمن عددًا غير سالب، إذا كان المعامل x^2 لا يساوي 1، فقم بتقسيم كل مدة عن طريق المعامل قبل إكمال المربع.

1-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

حل معادلة تربيعية بالعمولة،

■ تأكد أن المعادلة في شكل $ax^2 + bx + c = 0$ ،

■ حلل التعبير كثيرة الحدود،

■ عين كل عامل ليساوي صفر،

■ ثم حل المعادلات الناتجة عن ذلك.

عند العمولة، يتم إعادة كتابة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أو أكثر كنتاج ضرب كثيرة الحدود ولكل منها درجة أقل. التقنيات المستخدمة في حل المعادلات التربيعية وتشمل أساليب تحليل المعادلات ثلاثية الحدود العامة وثلاثية حدود المربع الكامل، والتربيعات المختلفة.

1-5 الأعداد المركبة

في هذا الدرس تم تقديم رمز جديد i ، بالإضافة إلى نظام عددي جديد يسمى نظام الأعداد المركبة، نظام الأعداد الحقيقية هو مجموعة جزئية من هذا النظام العددي الجديد. الأعداد المركبة هي أعداد في صورة $a + bi$ ، حيث أن a و b أعداد حقيقية و i عدد تربيعه -1 ، $i = \sqrt{-1}$. العدد المركب في صورة bi يسمى عدد تخيلي بحت.

العدد المركب $a + bi$ يمكن التعامل معه كشئ واحد، والعمليات على الأعداد المركبة تتبع خصائص عمليات جمع وطرح، ضرب وقسمة العدد ثنائي الحد، باستثناء واحد. هذا الاستثناء يستبدل i^2 بـ -1 حينما i^2 تظهر في التعبير.

1-6 القانون العام والمميز

القانون العام يمكن أن تستخدم في حل معادلة في شكل $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث أن $a \neq 0$ ، لتحديد جذور المعادلة، استبدل معاملات a و b و

الثابت c في الصيغة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ومن ثم تبسيط العبارة.

العبارة في القانون العام التي تظهر تحت شعار الجذر، $b^2 - 4ac$ ، تسمى التمييز. ويمكن استخدام هذه القيمة لتحديد عدد ونوع جذور المعادلة.

- إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ، سيكون هناك جذرين حقيقيين.
 - إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ ، سيكون هناك جذر حقيقي واحد فقط.
 - إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ، سيكون هناك جذرين مركبين.
- التحقق من التمييز قد يوفر تدريب سريع عند حل المعادلات التربيعية.

1-7 تحويلات الدوال التربيعية

المعادلات التربيعية يمكن أن تكون مكتوبة في شكل هندسي، $y = a(x - h)^2 + k$ ، حيث تكون رأس الرسم البياني للمعادلة في (h, k) ويكون محور التناظر هو الخط $x = h$. قيمة k تحدد الإزاحة الرأسية للرسم البياني. قيمة h تحدد إزاحة الأفقية للرسم البياني. قيمة a تحدد اتجاه فتح الرسم البياني وشكل القطع المكافئ.

- إذا كان $a > 0$ ، الرسم البياني يكون مفتوح إلى الأعلى.
- إذا كان $a < 0$ ، الرسم البياني يكون مفتوح إلى الأسفل.

1-8 المتباينات التربيعية

النهج المتبع في التمثيلات البيانية للمتباينات التربيعية يشبه التمثيلات البيانية للمتباينات الخطية. أولاً، تُرسم التمثيلات البيانية للمعادلة التربيعية ذات الصلة وبعد ذلك يتم تحديد نقطة داخل القطع المكافئ. إذا كانت النقطة هي حل المتباينة، إذن تُظلل المنطقة داخل القطع المكافئ. ثم تُظلل المنطقة الخارجية النطاق

حل متباينة تربيعية ذات متغير واحد جبرياً يشبه تمامًا حل متباينة خطية. الفرق يقع في حقيقة أن العديد من المتباينات التربيعية ليس لها حل واحد بل حلين. وهذا يعني أن ينقسم خط الأعداد إلى ثلاث أجزاء، اختيار قيمة من كل جزء على خط الأعداد يكشف أي مجموعة أو مجموعات من الحلول صحيحة. ستكون مجموعة حل المتباينات التربيعية في كثير من الأحيان متباينة مركبة.

سؤال مهم

لماذا نستخدم طرقاً مختلفة لحل مسائل الرياضيات؟ قد تكون إحدى الوسائل أسهل من الأخرى. اعتماداً على المعلومات المقدمة، يعتمد الأمر أيضاً على مدى احتياجك لإجابة تقريبية أو دقيقة. على سبيل المثال، يمكنك تقريب الإجابة باستخدام الرسم البياني أو الرياضيات الذهنية، ويمكنك إيجاد إجابة دقيقة باستخدام الأساليب الجبرية.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد أجب على التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة	تمرين سريع															
<p>استخدم جدولاً بالقيم لتمثيل كل معادلة بيانياً.</p> <p>1-7. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.</p> <p>1. $y = x + 3$ 2. $y = 2x + 2$</p> <p>3. $y = -2x - 3$ 4. $y = 0.5x - 1$</p> <p>5. $4x - 3y = 12$ 6. $3y - 6 = 9x$</p> <p>7. المخبرات: بحوزة أحمد 100 AED لشراء جهاز للألعاب، وهو يخطط لأخذ 10 AED كل أسبوع. مثل بيانياً معادلة لبيان المبلغ الكلي w أسبوعاً.</p>	<p>مثال 1 (مستخدم في الدرس 2-51)</p> <p>استخدم جدولاً بالقيم لتمثيل $y = 3x + 1$ بيانياً.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y = 3x + 1</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-1</td> <td>3(-1) + 1</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>3(0) + 1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3(1) + 1</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3(2) + 1</td> <td>7</td> </tr> </tbody> </table>	x	y = 3x + 1	y	-1	3(-1) + 1	-2	0	3(0) + 1	1	1	3(1) + 1	4	2	3(2) + 1	7
x	y = 3x + 1	y														
-1	3(-1) + 1	-2														
0	3(0) + 1	1														
1	3(1) + 1	4														
2	3(2) + 1	7														
<p>حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا، وإن كان كذلك، فحلله إلى عوامله.</p> <p>8. $a^2 + 12a + 36$ 9. $x^2 + 5x + 25$ 10. $x^2 - 12x + 32$ 11. $x^2 + 20x + 100$</p> <p>12. $4x^2 + 28x + 49$ 13. $k^2 - 16k + 64$ 14. $a^2 - 22a + 121$ 15. $5t^2 - 12t + 25$</p>	<p>مثال 2 (مستخدم في الدرس 2-54)</p> <p>حدد ما إذا كان $x^2 - 10x + 25$ ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا، وإن كان كذلك، فحلله إلى عوامله.</p> <p>1. هل الحدة الأول مربع كامل؟ نعم</p> <p>2. هل الحدة الأخير مربع كامل؟ نعم</p> <p>3. هل يساوي الحدة الأوسط $2(1)(5)$؟ نعم</p> <p>$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$</p>															
<p>أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$ و $b = -1$ و $c = 0$ و $d = 2.5$.</p> <p>16. $a - 3$ 17. $2a + 1$ 18. $4 - b$ 19. $\left \frac{1}{2}b - 2\right$ 20. $12 - 4c$ 21. $2c - 3 + 1$ 22. $4d - 6$ 23. $3d - 2 - 8$</p>	<p>مثال 3 (مستخدم في الدرس 2-57)</p> <p>أوجد قيمة x if $2x + 1 - 7 = 1$ إذا كان $x = -1$.</p> <p>$2x + 1 - 7 = 2(-1) + 1 - 7$ $x = -1$</p> <p>$= -2 + 1 - 7$ $= -1 - 7$ $= 1 - 7$ $= -6$</p>															

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك®

رُكّز يكتب الطلاب عن خصائص الدوال التربيعية حيث تم تقديمها في دروس هذا الوحدة.

درّس اطلب من الطلاب عمل المطويات وتسميتها كما هو موضح. ينبغي للطلاب استخدام القسم المناسب لملئه في أمثلة كل خاصية من الخصائص المدرجة. ينبغي للطلاب كتابة توضيح مختصر تحت كل مثال يوضح كيف أن هذه الخاصية تتعلق بالمفاهيم الثلاثة الأخرى في المطوية.

وقت الاستخدام قم بتشجيع الطلاب على الإضافة إلى المطويات الخاصة بهم في أثناء عملهم خلال الوحدة واستخدامها للمراجعة لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك هذه الوحدة. لكي تستعد، حدّد المفردات المهمة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة السابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المفردات الجديدة

quadratic function	دالة تربيعية
parabola	قطع مكافئ
axis of symmetry	محور التماثل
vertex	رأس
minimum	القيمة الصغرى
maximum	القيمة العظمى
double root	جذر مكرر
transformation	التحويل
completing the square	إكمال المربع
Quadratic Formula	صيغة تربيعية
discriminant	الميز
step function	دالة درجية
greatest integer function	دالة أكبر عدد صحيح
absolute value function	دالة القيمة المطلقة

مراجعة المفردات

الجال هو كافة القيم المحتملة للمتغير المستقل x .
العامل الرئيس هو معامل الحدّ الأول في كثيرة حدود مكتوبة بالصيغة القياسية.
البدى هو كافة القيم المحتملة للمتغير التابع y .

x	y
0	3
2	5
4	7
6	9

في الدالة المبثلة في الجدول،
الجال هو $\{0, 2, 4, 6\}$ ، والبدى هو $\{3, 5, 7, 9\}$.

الخطوات منظّم الدراسة

الدوال والمعادلات التربيعية شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة عن الدوال التربيعية. وأبدأ بورقة من الدفتر.



1 اطو الورقة بالاتجاه الطولي بحيث تحاذي حافة الورقة مع خط الهامش.



2 اطو الورقة طوتين بالاتجاه العرضي بحيث تصبح لديك أربعة مقاطع.



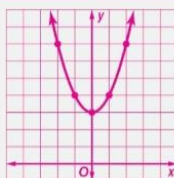
3 افرد الورقة وفتحها على طول الطيات على اللسان الأمامي فقط.

4 اكتب اسم كل مقطع كما هو موضح.

إجابات إضافية (تباين موجهة)

$$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$$

$$\{ 3 \leq y \mid y \} = R$$



x	y
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7

1.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

السابق: الدوال الخطية

الحالي: الدوال التربيعية

لماذا؟



تعد نافورة أورلاندو بفلوريدا في الولايات المتحدة الأمريكية نموذجاً عرجس فريد ومتناسق بين الماء والأضواء والموسيقى. تطلق الرشاشات الماء بشكل يمكن تشبيهه بنموذجاً بمعادلات تربيعية. ويمكنك تشييل هذه المعادلات بيانياً لتوضيح مسار الماء.

1 تحليل خواص التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
2 تشييل الدوال التربيعية بيانياً.

• فيمت بتشيل الدوال الخطية والأسية بيانياً.

1 التركيز

تخطيط رأسي

قبل الدرس 1-1 ارسم الدوال الخطية بيانياً.

الدرس 1-1 حلل خصائص الرسم البياني للدوال التربيعية. ارسم الدوال التربيعية بيانياً.

بعد الدرس 1-1 طَبِّقْ الإزاحات، وتغييرات الأبعاد بمضباس، والانعكاسات على الدوال التربيعية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ في الدرس.

اطرح السؤال:

• يمكن تشكيل شكل مجرى المياه بواسطة $y = -8x^2 - 49x - 75$. هل هي معادلة خطية؟ اشرح. لا، لأنها تحتوي على حد x^2 .

• هل مجرى المياه خطي؟ لا.

• كيف تصف الشكل الذي ستكونه المياه عندما تخرج من آلة الرش؟ الإجابة النموذجية: منحني متمائل يسمى قطع مكافئ.

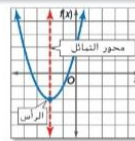
التدريس بالتكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية اسحب نظام إحداثي مشترك على السبورة. استخدم هذه الأمثلة الموجودة في أرجاء الدرس الذي تدرسه والتي توضح رسم الدوال التربيعية بيانياً.

المفردات الجديدة
دالة تربيعية
quadratic function
صيغة قياسية
standard form
قطع مكافئ
parabola
محور التماثل
axis of symmetry
رأس
vertex
القيمة الصغرى
minimum
القيمة العظمى
maximum

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكيفية

المفهوم الأساسي الدوال التربيعية



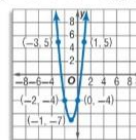
الدالة الأصلية: $f(x) = x^2$
الصيغة القياسية: $f(x) = ax^2 + bx + c$
نوع التمثيل البياني: قطع مكافئ
محور التماثل: $x = -\frac{b}{2a}$
التقاطع مع المحور الرأسي: c

عندما يكون $a > 0$ فإن التمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$ مفتوح إلى الأعلى، والنقطة الأكثر انخفاضاً على التمثيل البياني هي **القيمة الصغرى**. وعندما يكون $a < 0$ فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل. النقطة الأعلى هي **القيمة العظمى**. وتبادل القيمة العظمى أو الصغرى رأس القطع المكافئ.

مثال 1: تمثيل قطع مكافئ بيانياً

استخدم جدول قيم لتمثيل $y = 3x^2 + 6x - 4$ بيانياً. واذكر المجال وال المدى.

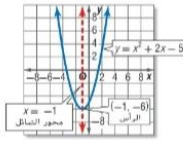
مكّن الأزواج المرتبة بيانياً واربطها لتشكيل تمثيل بياني منظم. يمتد القطع المكافئ إلى ما لا نهاية. والمجال هو عبارة عن الأعداد الحقيقية كلها، والمدى هو $y \geq -7$. لأن -7 هي القيمة الصغرى.



x	y
1	5
0	-4
-1	-7
-2	-4
-3	5

تمرين موجّه

1. استخدم جدول قيم لتمثيل $y = x^2 + 3$ بيانياً. واذكر المجال وال المدى. انظر الهامش.



ندكر أن الأشكال التي تتبع بالنمائل هي تلك الأشكال التي يتطابق نصفها ثنائياً.

القطع المكافئ ممتثل بالنسبة إلى محور النمائل. وكل نقطة تقع على القطع المكافئ على يسار محور النمائل لها نقطة ممتثل على النصف الآخر. والدالة متزايدة على أحد جانبي محور النمائل ومتناقصة على الآخر.

عند تحديد الخواص من تمثيل بياني، فالأسهل غالباً تحديد موقع الرأس أولاً. وهو يعادل النقطة العظمى أو الصغرى للتمثيل البياني.

مثال 2 تحديد الخواص من التمثيلات البيانية

أوجد الرأس ومعادلة محور النمائل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

الخطوة 1

أوجد الرأس.
نظراً لأن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى، فالرأس يقع عند النقطة الصغرى للقطع المكافئ. وهو يقع عند النقطة $(-1, 0)$.

الخطوة 2

أوجد محور النمائل. محور النمائل هو المستقيم المار بالرأس والذي يقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين. وهو يقع عند $x = -1$.

الخطوة 3

أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y . نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y . ونقع كذلك عند $(0, 1)$. إذا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي 1.

الخطوة 1

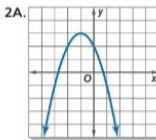
أوجد الرأس.
القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل، إذا يقع الرأس عند النقطة العظمى $(2, 3)$.

الخطوة 2

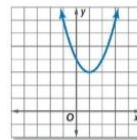
أوجد محور النمائل. يقع محور النمائل على المستقيم $x = 2$.

الخطوة 3

أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y . نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y . ونقع كذلك عند $(0, -1)$. إذا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي -1.



2B.



تمرين موجّه

- 2A. الرأس $(-1, 3)$ ، محور النمائل $x = -1$ ، التقاطع مع المحور الرأسي $y = 2$ ، محور النمائل $x = 1$ ، التقاطع مع المحور الرأسي $y = 4$.

1 خصائص الدوال التربيعية

يوضح المثال 1 طريقة استخدام

جدول قيم لرسم دالة تربيعية بيانياً.

يوضح المثال 2 طريقة إيجاد قيمة

الرأس، ومعادلة لمحور النمائل، والتقاطع

مع المحور الرأسي y للقطع المكافئ

من رسم بياني. **يوضح المثال 3** طريقة

إيجاد قيمة الرأس، ومعادلة لمحور النمائل،

والتقاطع مع المحور الرأسي y من

معادلة. **يوضح المثال 4** طريقة تحديد

ما إذا كانت الدالة تحتوي على قيمة

القيمة العظمى أو الصغرى. وكيفية إيجاد

هذه القيم.

التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد

كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب

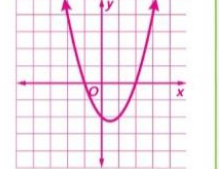
للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم جدول القيم لرسم

ذكر المجال والنطاق. $y = x^2 - x - 2$. بيانياً.

المجال والنطاق.



المجال: جميع الأعداد الحقيقية؛
النطاق:

$$\{y | y \geq -2\frac{1}{4}\}$$

نصيحة دراسية
خواص الدوال عند تحديد خواص دالة، فإن من الأسهل في أغلب الأحيان تحديد محور التمثيل أولاً.

نصيحة دراسية
التقاط مع المحور الراسي y الإحداثي الراسي y نقطة التقاطع مع المحور الراسي y هو أيضاً الحد الثابت (c) للدالة التربيعية بالصيغة القياسية.

تمرين 3 تحديد الخواص من الدوال

أوجد الرأس ومعادلة محور التمثيل والتقاط مع المحور الراسي y لكل دالة.

a. $y = 2x^2 + 4x - 3$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التمثيل
 $x = -\frac{4}{2 \cdot 2}$ $b = 4$ و $a = 2$
 $x = -1$ بنسبة

معادلة محور التمثيل هي $x = -1$.

لإيجاد الرأس، استخدم القيمة التي توصلت إليها لمحور التمثيل على أنها الإحداثي الأفقي x للرأس. وأوجد الإحداثي الراسي y باستخدام المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية
 $y = 2x^2 + 4x - 3$
 $= 2(-1)^2 + 4(-1) - 3$ $x = -1$
 $= -5$ بنسبة

نقطة رأس القطع هي $(-1, -5)$.

يحدد التقاطع مع المحور الراسي y دائماً عند $(0, c)$. إذاً التقاطع مع المحور الراسي y هو $(0, -3)$.

b. $y = -x^2 + 6x + 4$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التمثيل
 $x = -\frac{6}{2(-1)}$ $b = 6$ و $a = -1$
 $x = 3$ بنسبة

معادلة محور التمثيل هي $x = 3$.

المعادلة الأصلية
 $y = -x^2 + 6x + 4$
 $= -(3)^2 + 6(3) + 4$ $x = 3$
 $= 13$ بنسبة

نقطة رأس القطع هي $(3, 13)$.

التقاط مع المحور الراسي y عند $(0, 4)$.

تمرين موجّه

3A. $y = -3x^2 + 6x - 5$

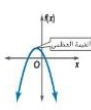
3B. $y = 2x^2 + 2x + 2$

ستتعلم في ما يلي كيفية تحديد ما إن كان الرأس نقطة عظمى أو صغرى.

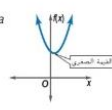
المفهوم الأساسي القيم العظمى والصغرى

الشرح

- التمثيل البياني لـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$
- مفتوح إلى الأعلى وله قيمة صغرى إذا كان $a > 0$.
 - مفتوح إلى الأسفل وله قيمة عظمى إذا كان $a < 0$.
 - مدى دالة تربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها، أو جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من القيمة العظمى أو المساوية لها.



a سالب



a موجب

أمثلة

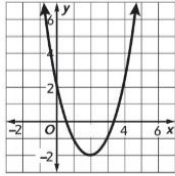
3A. الرأس $(1, -2)$.
محور التمثيل $x = 1$.
التقاط مع المحور الراسي y هي -5 .

3B. الرأس $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. محور

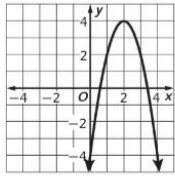
التمثيل $x = -\frac{1}{2}$.
التقاط مع المحور الراسي y هي 2 .

أمثلة إضافية

2 أوجد قيمة الرأس، ومعادلة محور التمثيل، والتقاط مع المحور الراسي y .



a. قيمة الرأس: $(2, -2)$. محور التمثيل: $x = 2$. التقاطع مع المحور الراسي y : 2 .



b. قيمة الرأس: $(2, 4)$. محور التمثيل: $x = 2$. التقاطع مع المحور الراسي y : -4 .

3 أوجد قيمة الرأس، ومعادلة محور التمثيل، والتقاط مع المحور الراسي y .

a. $y = -2x^2 - 8x - 2$
 $(-2, 6)$, $x = -2$, -2

b. $y = 3x^2 + 6x - 2$
 $(-1, -5)$, $x = -1$, -2

مثال إضافي

ادرس الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

a. حذد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى .

في الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ نجد أن $a = -2$, $b = -4$, $c = 6$

نظراً أن a سالب، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل، إذاً للدالة قيمة عظمى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القبضة العظمى هي الإحداثي الرأسي y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $-1 = \frac{4}{2(-2)} = \frac{-b}{2a}$

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6 \quad \text{الأصلية}$$

$$f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6 \quad x = -1$$

$f(-1) = 8$

الغضبة العظمى هي 8.

C. اذكر مجال الدالة ومداها.

المجال هو الأعداد الحقيقية كلها. أما المدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو المساوية لها. أو $\{y \mid y \leq 8\}$.

اقتیه!

القيمة العظمى والصغرى λ
 تتسبب إيجاد كلا إحدائهما الرأس
 (x, y) . القيمة الصغرى أو
 العظمى هي الإحداثي الراسي y .

مراجعة المفردات

المجال والمدى المجال هو مجموعة كافة القيم الممكنة للمتغير مستقل X والمدى هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع Y .

4C. D = جميع الأعداد الحقيقية.

$$R = \{y \mid y \geq -3\}$$

2 مثل الدوال التربيعية بيانًا

يوضح المثال 5 طريقة استخدام خصائص الدالة التربيعية لتمثيل الدوال بيانياً. **يوضح المثال 6** طريقة تحليل التمثيل البياني للدالة التربيعية لحل المسائل الواقعية.

تہرین **موجہ**

ادرس الدالة $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$

4A. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة معظمى أو قيمة صفري. صفري

4B. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى. -3

4C. اذكر مجال الدالة ومداها.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

المفهوم الأساسي تمثيل الدوال التربيعية

الخطوة 1 أوجد معادلة محور التناقل.

الخطوة 2 أوجد الرأس وحدد ما إذا كان قيمة عظمى أو صغرى.

الخطوة 3 أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y .

الخطوة 4 استخدم التماثل لإيجاد نقاط إضافية على التمثيل البياني. عند الضرورة.

الخطوة 5 جمل النقاط بمنحنى متصل.

8 | الدرس 1-1 | تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

التركيز على المحتوى الرياضي

قيمة الرأس تعرف نقطة القيمة العظمى أو القيمة الصغرى باسم **قيمة الرأس**. عند كتابة دالة تربيعية بالصيغة القياسية $y = ax^2 + bx + c$ ، وكان a موجباً، يفتح القطع المتكافئ لأعلى، وتمثل قيمة الرأس قيمة صغرى. عندما يكون a سالباً، يفتح القطع المتكافئ لأسفل، وتمثل قيمة الرأس قيمة عظمى.

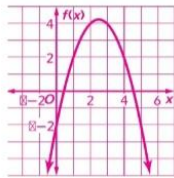
انتبه!
تجنب الوقوع في الأخطاء أخبر الطلاب بأنه لا يجب أن تكون رسومات القطع المتكافئ الخاصة بهم مثالية. ومع ذلك، لا يجب على الطلاب ربط النقاط بخطوط مستقيمة. يُعد مرور المنحنى خلال أزواج الأوامر المرسومة أمراً مهماً.

التماثل والتتمثيل البياني

عندما يستخدم الطلاب التماثل لرسم حالات القطع المكافئ، لا يحتاجون سوى إيجاد نقاط قليلة ثم عكس هذه النقاط عبر خط التماثل فقط. قد ترغب في أن تقترح على الطلاب التحقق من النقاط المعكوسة أحياناً عن طريق استبدالها في المعادلة الأصلية.

مثال إضافي

5 ارسم $f(x) = -x^2 + 5x - 2$ بيانياً.



مثال 5: تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مَسَّ $f(x) = x^2 + 4x + 3$ بيانياً.

الخطوة 1 أوجد معادلة محور التماثل.

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{صيغة معادلة محور التماثل}$$

$$x = \frac{-4}{2 \cdot 1} \text{ or } -2 \quad b = 4 \text{ و } a = 1$$

الخطوة 2 أوجد الرأس وحدد ما إذا كان قيمة عظمى أو صغرى.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$= (-2)^2 + 4(-2) + 3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= -1 \quad x = -2$$

$$\text{بشوط}$$

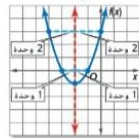
يقع الرأس عند $(-2, -1)$. ونظراً أن a موجب، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأعلى. والرأس قيمة صغرى.

الخطوة 3 أوجد التقاطع مع المحور الرأسي y .

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$= (0)^2 + 4(0) + 3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 3 \quad x = 0$$



الخطوة 4 يرسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متساويين. ولذلك إذا كانت هناك نقطة على طرف، فإن هناك نقطة مطابقة على الطرف الآخر وتبعد المسافة نفسها عن محور التماثل ولها القيمة y نفسها.

الخطوة 5 صل النقاط بمنحنى منظم.

تمرين موجّه: مَسَّ كل دالة مما يلي بيانياً.

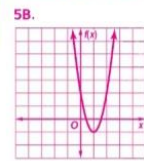
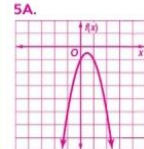
5A. $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

5B. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

ثمة فروق عامة بين الدوال الخطية والتربيعية.

الدوال التربيعية	الدوال الخطية	المعادلة
$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	$y = mx + b$	$y = mx + b$
2	1	الدرجة
قطع مكافئ	مستقيم	التمثيل البياني
$a > 0$: y متناقصة إلى يسار محور التماثل ومنتزعة إلى يمينه.	$m > 0$: y متزايدة في المجال بأكمله.	تزايد/تناقص
$a < 0$: y متزايدة إلى يسار محور التماثل ومنتزعة إلى يمينه.	$m < 0$: y متناقصة في المجال بأكمله.	
$a > 0$: عندما تزايد x ، تناقص y في النصف الأيسر وعندما تزايد x ، تناقص y في النصف الأيمن.	$m > 0$: عندما تزايد x ، تزايد y وعندما تناقص x ، تناقص y .	المسلك الطرقي
$a < 0$: عندما تزايد x ، تناقص y في النصف الأيسر وعندما تزايد x ، تناقص y في النصف الأيمن.	$m < 0$: عندما تزايد x ، تناقص y وعندما تناقص x ، تزايد y .	

نصيحة دراسية
التماثل والتقاطعات عند تحديد مواقع نقطتين تقعان على جهتين متماكستين من محور التماثل. فإن النقطتين ليسا متساويتا البعد عن محور التماثل فحسب، بل هما متساويتا البعد عن الرأس أيضاً.



التدريس المتميز

مماثل: يحتاج الطلاب إلى عرض مرئي لفهم مفهوم قيمة الرأس ومحور التماثل.

إذا: اطلب من الطلاب إنشاء جدول من القيم ورسم $y = x^2 + 6x + 8$ بيانياً على ورقة رسم بياني. اطلب من الطلاب رفع ورقتهم إلى مصدر الضوء وطي القطع المتكافئ إلى نصفين بحيث يتطابق الجانبان تماماً. اطلب من الطلاب استخدام حزم الطي على ورقتهم غير المخطوبة لتحديد مكان قيمة الرأس، ومحور التماثل، والقيمة الصغرى. $x = -3; -1$

لقد استخدمت ما تعرفه عن الدوال التربيعية والخطوط المكافئة والتناظر أو التنايل لإعداد تشيلات بيانية. ويملك تحليل هذه التشيلات البيانية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال من الحياة اليومية 6 استخدام التشيل البياني لدالة تربيعية

الانتباه إلى المدرسة يقذف مجلس طلاب مدرسة ثانوية قيثامًا بين جموع الطلاب كلما سجل الفريق المضيف هدفًا. يمكن تمثيل ارتفاع القيثام بالدالة $h(x) = -16x^2 + 48x + 6$. حيث $h(x)$ ارتفاع القيثام بالأمتار بعد x ثانية.

a. مثل الدالة بيانيًا.

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{معادلة محور التنايل}$$

$$x = \frac{-48}{2(-16)} \text{ or } \frac{3}{2} \quad b = 48 \text{ و } a = -16$$

معادلة محور التنايل هي $x = \frac{3}{2}$. إذا الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{3}{2}$

$$y = -16x^2 + 48x + 6$$

$$= -16\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

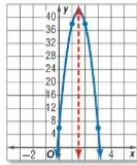
$$= -16\left(\frac{9}{4}\right) + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= -36 + 72 + 6 \text{ or } 42$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

بسط



يقع الرأس عند $\left(\frac{3}{2}, 42\right)$.
لنوجد نقطة أخرى. اختر قيمة لـ x تساوي 0 وعوض.
تقع نقطتنا الجديدة عند $(0, 6)$ والنقطة المتناظرة لها
على الطرف الآخر من محور التنايل هي $(3, 6)$.
كّر ذلك واختر قيمة لـ x تساوي 1 لتحصل على $(1, 38)$
وتكون النقطة المتناظرة لها هي $(2, 38)$ اربط النقطتين
لتحصل على منحنى منتظم.

b. ما الارتفاع الذي يقذف منه القيثام؟

يقذف القيثام حين يساوي الزمن 0. أو عند التناطح مع المحور الرأسى y .
إذا، قذف القيثام من ارتفاع 6 أقدام فوق سطح الأرض.

c. ما أقصى ارتفاع يبلغه القيثام؟ ومتى وصل إلى الارتفاع الأقصى؟

يعادل الارتفاع الأقصى للقيثام للرأس.
إذا يبلغ القيثام ارتفاعًا أقصى مقداره 42 مترًا. ويكون الزمن حينها $\frac{3}{2}$ أو 1.5 ثانية بعد القذف.

تمرين موجّه

6. **النتج** يشارك عدنان في منافسة رمي الرمح. ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالمعادلة $y = -16x^2 + 64x + 6$. حيث y ارتفاع الرمح بالأمتار بعد مرور x ثانية.

- A. مثل بيانيًا مسار الرمح.
B. ما الارتفاع الذي رُمي منه الرمح؟ **6 ft**
C. ما هو أقصى ارتفاع للرمح؟ **70 ft**



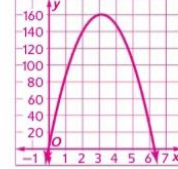
الربط بالحياة اليومية
حوالي 1 طالب من كل 17 طالب من طلاب الصف الثاني عشر يلعبون كرة القدم. سيذهبون للعب في مدرسة NCAA الرابطة الوطنية للاعبين الرياضيين بين الكليات. المصنوع: الرابطة الوطنية للاعبين الرياضيين بين الكليات

مثال إضافي

6 **الرمية بالسهم** أطلق عمر سهمًا.

يمكن تمثيل ارتفاع السهم بواسطة $y = -16x^2 + 100x + 4$. حيث y الارتفاع الذي وصل له السهم بالقدم وتمثل x الثواني المستغرقة بعد إطلاق السهم في الهواء.

a. ارسم ارتفاع السهم بيانيًا.



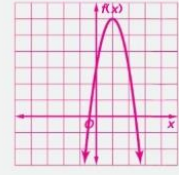
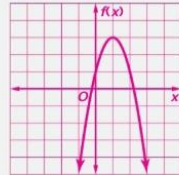
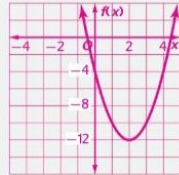
b. ما الارتفاع الذي وصل إليه السهم؟ **4 ft**

c. ما هو أقصى ارتفاع للسهم؟ **160 1/4 ft**

إجابات إضافية

- 13a. القيمة العظمى
13b. 1
13c. $D = \{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ y \mid y \leq 1 \}$
14a. القيمة العظمى
14b. 3
14c. $D = \{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ y \mid y \leq 3 \}$
15a. القيمة العظمى
15b. 6
15c. $D = \{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ y \mid y \leq 6 \}$
16a. القيمة العظمى
16b. 2
16c. $D = \{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ y \mid y \leq 2 \}$

10 | الدرس 1-1 | تشيل الدوال التربيعية بيانيًا



10 | الدرس 1-1 | تشيل الدوال التربيعية بيانيًا

3 التمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-21 للتحقق من الفهم.

استخدم الرسم البياني الموجود أسفل هذه الصفحة لتخصيص الواجبات المنزلية للطالب.

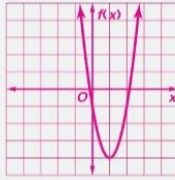
تنبيه حول التمارين

ورق الرسم البياني بالنسبة للتمارين 1-4، و17-27، و52-58، و63، و68. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

تدريس التمارين الرياضية

الاستدلال يفهم الطلاب المنطوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها فيها منطوقًا خلال حالات المشكلة. في التمرين 21، ناقش مع الطلاب سبب كون معامل x^2 سالبًا.

إجابات إضافية



20.



21a

التحقق من فهمك

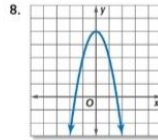
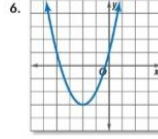
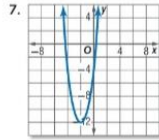
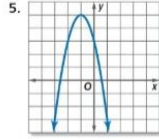
مثال 1

استخدم جدول قيم لتمثيل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمداى.

- $y = 2x^2 + 4x - 6$
- $y = x^2 + 2x - 1$
- $y = x^2 - 6x - 3$
- $y = 3x^2 - 6x - 5$

مثال 2

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.



- الرأس (5, -1)، محور التماثل $x = -1$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي 3
- الرأس (3, -2)، محور التماثل $x = -2$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي 1
- الرأس (12, -2)، محور التماثل $x = -2$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي -4
- الرأس (5, 0)، محور التماثل $x = 0$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي 5
- الرأس (2, 1)، محور التماثل $x = 1$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي -1
- الرأس (1, 2)، محور التماثل $x = 10$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي 15
- الرأس (2, 1)، محور التماثل $x = 10$ ، التقاطع مع المحور الرأسي y هي 5

مثال 3

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y للتمثيل البياني لكل دالة.

- $y = -3x^2 + 6x - 1$
- $y = -x^2 + 2x + 1$
- $y = x^2 - 4x + 5$
- $y = 4x^2 - 8x + 9$

مثال 4

- احسب كل دالة مما يلي.
- حدد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.
- اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.
- ما مجال الدالة ومداها؟

- $y = -x^2 + 4x - 3$
- $y = -3x^2 + 6x + 3$
- $y = -x^2 - 2x + 2$
- $y = -2x^2 + 8x - 6$

مثال 5

مثل كل دالة بيانيًا. 17-20. انظر الهامش.

- $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$
- $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$
- $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$
- $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

مثال 6

- الاستنتاج: يهدف بيلواتي كرة في الهواء. ويمكن شغل ارتفاع الكرة بالعلاقة $y = -16x^2 + 16x + 5$ حيث x تمثل الزمن بالثانية.
- مثل هذه الدالة بيانيًا. انظر الهامش.
- ما الارتفاع الذي ترمى منه الكرة؟ 5 أقدام
- ما أقصى ارتفاع للكرة؟ 9 ft

محور التماثل والرأس: 0. محاور التماثل والرأس: 0. محاور التماثل والرأس: 0.

خيارات الواجب المنزلي المتغير

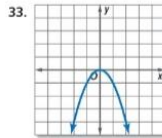
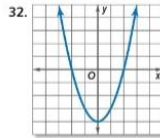
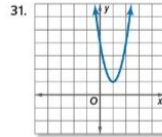
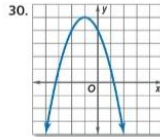
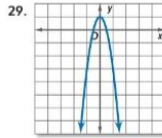
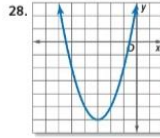
المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين	
أساسي	22-58, 68, 69, 71-92	23-57 أعداد فردية، 75-78	22-58 أعداد زوجية، 68, 69, 71-74, 79-92
رئيسي	23-63 أعداد فردية، 64-69, 71-92	22-58, 75-78	59-69, 71-74, 79-92
متقدم	59-92		

التبرين وحل المسائل

استخدم جدول قيم تمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال وال المدى. 22-27. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

22. $y = x^2 + 4x + 6$ 23. $y = 2x^2 + 4x + 7$ 24. $y = 2x^2 - 8x - 5$
25. $y = 3x^2 + 12x + 5$ 26. $y = 3x^2 - 6x - 2$ 27. $y = x^2 - 2x - 1$

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.



أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل دالة. 34-42. انظر الهامش.

34. $y = x^2 + 8x + 10$ 35. $y = 2x^2 + 12x + 10$ 36. $y = -3x^2 - 6x + 7$
37. $y = -x^2 - 6x - 5$ 38. $y = 5x^2 + 20x + 10$ 39. $y = 7x^2 - 28x + 14$
40. $y = 2x^2 - 12x + 6$ 41. $y = -3x^2 + 6x - 18$ 42. $y = -x^2 + 10x - 13$

ادرس كل دالة مما يلي. 43-51. انظر الهامش.
a. حدد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.
b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.
c. ما مجال الدالة ومداهما؟

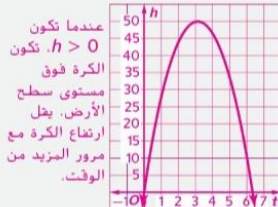
43. $y = -2x^2 - 8x + 1$ 44. $y = x^2 + 4x - 5$ 45. $y = 3x^2 + 18x - 21$
46. $y = -2x^2 - 16x + 18$ 47. $y = -x^2 - 14x - 16$ 48. $y = 4x^2 + 40x + 44$
49. $y = -x^2 - 6x - 5$ 50. $y = 2x^2 + 4x + 6$ 51. $y = -3x^2 - 12x - 9$

مثل كل دالة بيانيًا. 52-57. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.
52. $y = -3x^2 + 6x - 4$ 53. $y = -2x^2 - 4x - 3$ 54. $y = -2x^2 - 8x + 2$
55. $y = x^2 + 6x - 6$ 56. $y = x^2 - 2x + 2$ 57. $y = 3x^2 - 12x + 5$

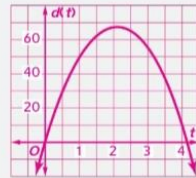
إجابات إضافية

34. قمة الرأس $(-4, -6)$. محور التماثل $x = -4$. y التقاطع مع المحور الرأسي 10.
35. قمة الرأس $(-3, -8)$. محور التماثل $x = -3$. y التقاطع مع المحور الرأسي 10.
36. قمة الرأس $(-1, 10)$. محور التماثل $x = -1$. y التقاطع مع المحور الرأسي 7.
37. قمة الرأس $(-3, 4)$. محور التماثل $x = -3$. y التقاطع مع المحور الرأسي -5.
38. قمة الرأس $(-2, -10)$. محور التماثل $x = -2$. y التقاطع مع المحور الرأسي 10.
39. قمة الرأس $(2, -14)$. محور التماثل $x = 2$. y التقاطع مع المحور الرأسي 14.
40. قمة الرأس $(3, -12)$. محور التماثل $x = 3$. y التقاطع مع المحور الرأسي 6.
41. قمة الرأس $(1, -15)$. محور التماثل $x = 1$. y التقاطع مع المحور الرأسي -18.
42. قمة الرأس $(5, 12)$. محور التماثل $x = 5$. y التقاطع مع المحور الرأسي -13.

- 43a. القيمة العظمى 9. 43b. $D = \{x | x \leq 9\}$. 43c. $R = \{y | y \leq 9\}$.
44a. القيمة الصغرى -9. 44b. $D = \{x | x \geq -9\}$. 44c. $R = \{y | y \geq -9\}$.
45a. القيمة الصغرى -48. 45b. $D = \{x | x \geq -48\}$. 45c. $R = \{y | y \geq -48\}$.
46a. القيمة العظمى 50. 46b. $D = \{x | x \leq 50\}$. 46c. $R = \{y | y \leq 50\}$.
47a. القيمة العظمى 33. 47b. $D = \{x | x \leq 33\}$. 47c. $R = \{y | y \leq 33\}$.
48a. القيمة الصغرى -56. 48b. $D = \{x | x \geq -56\}$. 48c. $R = \{y | y \geq -56\}$.
49a. القيمة العظمى 4. 49b. $D = \{x | x \leq 4\}$. 49c. $R = \{y | y \leq 4\}$.
50a. القيمة الصغرى 4. 50b. $D = \{x | x \geq 4\}$. 50c. $R = \{y | y \geq 4\}$.
51a. القيمة العظمى 3. 51b. $D = \{x | x \leq 3\}$. 51c. $R = \{y | y \leq 3\}$.



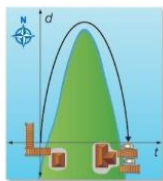
63a



58a

عندما تكون $h > 0$ ، تكون الكرة فوق مستوى سطح الأرض. يظل ارتفاع الكرة مع مرور المزيد من الوقت.

البنية يمكن أن يرجع الطلاب المتفوقون في الرياضيات إلى الخلف للحصول على نظرة عامة والتعرف على منظور التغيير. في التمرين 66، اطلب من الطلاب توضيح طريقة ارتباط دوال الجذر التربيعي والدوال المربعة.



58. **رياضة الزوارق** أرست هداية زورقها في نقطة على الساحل الغربي خور دي. ثم شرعت بالإبحار إلى مرسى دي. يمكن تبثيل المسافة التي تقطعها هداية بالنسبة إلى الزمن بالمعادلة $d = -16t^2 + 66t$ حيث تمثل d عدد الأمتار التي تقطعها خلال t دقيقة.

- a. مثل هذه الدالة بيانياً. انظر الهامش.
b. ما العدد الأقصى الذي قطعته من الأمطار؟ 68 m تقريباً
c. كم استغرقت حتى وصلت إلى ميناء الجزيرة؟ 4 min تقريباً

8 **حاسبة التمثيل البياني** مثل كل دالة بيانيًا. واستخدم خاصية TRACE لإيجاد الرأس على التمثيل البياني. قَرِّب إلى أقرب جزء من الألف عند الضرورة. 59-62. انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات

59. $y = 4x^2 + 10x + 6$ $(-1.25, -0.25)$ 60. $y = 8x^2 - 8x + 8$ $(0.5, 6)$

61. $y = -5x^2 - 3x - 8$ **(-0.3, -7.55)** 62. $y = -7x^2 + 12x - 10$ **(0.857, -4.857)**

63. **الجولف** يستطيع لاعب الجولف الهاوي أن يضرب الكرة بسرعة ابتدائية نحو الأعلى مقدارها 31.3 مترًا في الثانية. ويمكن تمثيل الارتفاع بالعلاقة $h = -4.9t^2 + 31.3t$ حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد مرور t ثانية.

- a. مثل هذه الحالة سيأتينا ما الذي تشكك أجزاء التشكيل البنياني التي تكون فيها $t > 0$ في سياق هذه الحالة؟ وما الذي يشكك السلوك الطيفي للتشكيل البنياني؟
- b. ما الارتفاع الذي تخضع منه الكرة؟ 0 m
- c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟ 50.0 m تقريباً
- d. كم استغرقت الكرة لتصلحده بالأرض؟ 6.4 s تقريباً
- e. اذكر البدي و المجال المتعولين لهذا البوصف.
- $D = \{t | 0 \leq t \leq 6.4\}$; $R = \{h | 0 \leq h \leq 50.0\}$

64. **جميع التبرعات** تتبع القرعة الموسيقية أزهرا لشراء ملاين جديدة. وفي العام الماضي، كانت القرعة تباع الزهرة الواحدة بـ 5 AED. حيث باعت حينئذ 150 زهرة. وتوفي رفع السعر هذا العام، ولكنها تتوقع أن تتخفف البيعات بمقدار 10 AED مقابل كل زيادة مقدارها 1 AED. ويتم التنبؤ ببيع البيعات R الناتج عن بيع الأزهرا بالدرهم الإماراتي بالادلة $(10p - 150) + 5p$. حيث p عدد زيادات السعر البالغة احادا 1 AED.

$$R = -10p^2 + 100p + 750$$

- b. أوجد الضيق العظمى للدالة. 1000
- c. ما السعر الذي ينبغي أن تبيع به الزهور للحصول على أكبر إيرادات للبيع؟ اشرح استنتاجك. 10 AED، 10 الإجابة النموذجية: ينبغي أن يبيع الإيراد الأصلي من خلال 5 زيادات مقداره 1 AED. وكان السعر الأصلي 5 AED. ولذلك ينبغي أن يباعي السعر الجديد 10 AED.
- 65 القدم كرتة 90 في مستوى سطح الأرض بسرعة ابتدائية نحو الأعلى مقداره 20 متر في الثانية. تعطي المعادلة $h(t) = -16t^2 + 90t$ (h ذن الكرتة t ثانية.

a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟ 74 m
b. متى تبلغ الكرة ارتفاع 126 متر؟ 2.625 ثانية و 3 ثوانٍ

- 66d. $D = \{x \mid x \leq -3 \text{ أو } x \geq 3\}$, $f(x) = x^2 - 9$ البنية. افترض أن $f(x) = x^2 - 9$

66d. $D = \{x | x \leq -3 \text{ أو } x \geq 3\}$, $R = \{y | y \geq 0\}$ 66. البنية. افترض أن $f(x) = x^2 - 9$

- a. ما مجال الدالة $f(x)$ ؟ (جميع الأعداد الحقيقية)
 b. ما مدى الدالة $f(x)$ ؟ $\{f(x) \mid f(x) \geq -9\}$
 c. ما قيم x التي تجعل الدالة $f(x)$ سالبة؟ $\{x \mid -3 < x < 3\}$
 d. عندما يكون x عدداً حقيقياً، فما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ومداها؟

4 التقويم

نشر الفائدة أنشئ عدة نسخ لجميع الرسوم الخمسة للدوال التربيعية. اعط رسماً بيانياً واحداً لكل طالب. عندما يقادر الطلاب الحجرة، اطلب منهم إبلاغك بإحداثيات قيم الرأس للقطع المكافئ لتحديد ما باعتبارها قيم عظمى أو قيم صغرى.

إجابات إضافية

68. الإجابة النموذجية $y = 4x^2 + 3x + 5$. اكتب معادلة محور التماثل. $x = -\frac{b}{2a}$. من المعادلة، $b = 3$ و $a = 4$. لذلك فإن $2a = 8$ و $a = 4$. استبدل هذه القيم الخاصة بـ a و b في المعادلة $y = ax^2 + bx + c$.
71. $(-1, 9)$. الإجابة النموذجية لقد رسمت النقاط المقدمة بيانياً. ورسمت القطع المكافئ الذي سيمر عبرها. لقد حسبت المساحات فوق قمة الرأس وأعلاها وفعلت الشيء نفسه على الجانب المقابل من الخط $x = 2$.

تدريب على الاختبار المعياري

77. ما مدى الدالة $f(x) = -4x^2 - \frac{1}{2}$ ؟
A {جميع الأعداد الصحيحة التي تساوي أو تزيد عن $\frac{1}{2}$ }
B {جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة}
C {جميع الأعداد الحقيقية}
D {جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي $\frac{1}{2}$ }

78. **إجابة قصيرة** يوصل خبثس الجرائد مقابل مبلغ إضافي من المال. وهو يبدأ بتوصيل الجرائد عند الساعة 3:15 P.M. وينتهي عند الساعة 5:05 P.M. فكم يستغرق خبثس لينهي جولة التوصيل؟ **ساعة و 50 دقيقة**

79. أي مما يلي معادلة مستقيم يمر بالنقطة $(-5, 2)$ ويتعامد على $2x + 4y = 8$ ؟
A $y = 2x + 10$
B $y = -\frac{1}{2}x - 4$
C $y = 2x - 9$
D $y = -2x - 1$

76. **الهندسة** تبلغ مساحة الدائرة 36π وحدة مربعة. إذا ضاعفت نصف قطر الدائرة، فكم تكون مساحة الدائرة الجديدة؟
A 36π وحدة مربعة
B 72π وحدة مربعة
C 1296π وحدة مربعة
D 144π وحدة مربعة

مراجعة شاملة

- حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله. (الدرس 1-9)
79. $4x^2 + 4x + 1$ نعم؛ $(2x + 1)^2$ 80. $4x^2 - 20x + 25$ نعم؛ $(2x - 5)^2$ 81. $9x^2 + 8x + 16$ no
حلّل كل كثيرة حدود إن أمكن إلى عواملها الأولية. فإن كان لا يمكن تحليل كثيرة الحدود، فاكتب أولية. (الدرس 1-8)
82. $n^2 - 16$ $(n - 4)(n + 4)$ 83. $x^2 + 25$ أولية 84. $9 - 4a^2$ $(3 - 2a)(3 + 2a)$
أوجد ناتج ضرب كل مما يلي. (الدرس 1-3)
85. $(b - 7)(b + 3)$ $b^2 - 4b - 21$ 86. $(c - 6)(c - 5)$ $c^2 - 11c + 30$ 87. $(2x - 1)(x + 9)$ $2x^2 + 17x - 9$
88. **الوحدات المتعددة** يمكن تمثيل عدد ولادات النواجم الأربعة Q في دولة ما خلال السنوات الأخيرة بالدالة $Q = -0.5t^2 + 11.7t^2 - 21.5t + 218.6$ ، حيث t تمثل عدد الأعوام منذ 2002. ما العدد المتوقع من ولادات النواجم الأربعة في هذه الدولة لعام 2017؟ (الدرس 1-1)
89. **الغابات** يمكن تقدير عدد الأمطار من الأنواع B الناتجة عن الجذع باستخدام القانون $B = \frac{L}{16}(D^2 - 8D + 16)$ ، حيث B هو قطر الجذع بالسنتيمترات و L هو طول الجذع بالأمتار. فبالنسبة للجذع الذي يبلغ طولها 16 متراً، ما القطر الذي يعطي تقريباً 256 مم من الأمطار؟ (الدرس 1-9) **20 m**

مراجعة المهارات

- أوجد نقطة تقاطع التمثيل البياني لكل معادلة مع المحور الأفقي x .
90. $x + 2y = 10$ 10 91. $2x - 3y = 12$ 6 92. $3x - y = -18$ -6

التدريس المتميز

الملاحظ أخبر الطلاب بأن صواريخ الألعاب النارية مصممة للانفجار في أعلى نقطة. يُمثل الارتفاع بواسطة المعادلة $h = -4.9t^2 + 34.2t + 1.6$. حيث تمثل h ارتفاع الصاروخ بالمتر بعد t ثانية. ما الوقت والارتفاع اللذان سينفجر عندهما الصاروخ؟ **سينفجر الصاروخ بعد مرور حوالي 3.5 ثانية وعند ارتفاع يبلغ 61 m تقريباً.**

مختبر الجبر معدل تغير الدالة التربيعية



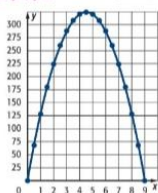
يُطلق صاروخ اختياري من الأرض نحو الأعلى بسرعة 144 متراً في الثانية. تمثل المعادلة $y = -16x^2 + 144x$ ارتفاع الصاروخ y بالأمتر بعد x ثانية. سنستخدم باستخدام هذه الدالة دراسة معدل تغير الدالة التربيعية.

النشاط

الخطوة 1 أنسخ الجدول الوارد أدناه.

x	0	0.5	1	1.5	...	9.0
y						
معدل التغير						

(0.5, 68), (1, 128), (1.5, 180),
(2, 224), (2.5, 260), (3, 288),
(3.5, 308), (4, 320), (4.5, 324),
(5, 320), (5.5, 308), (6, 288),
(6.5, 260), (7, 224), (7.5, 180),
(8, 128), (8.5, 68), (9, 0)



الخطوة 2 أوجد قيمة y المقابلة لكل قيمة x من 0 إلى 9.

الخطوة 3 مثل الأزواج المرتبة (x, y) بيانياً على وري شبيكي. وصل النقاط.

بمحنى منتظم. لاحظ أن الدالة تزايد عند $0 < x < 4.5$ وتتناقص عند $4.5 < x < 9$.

الخطوة 4 تذكر أن معدل التغير هو التغير في y مقسوماً على التغير في x . أوجد معدل التغير لكل فترة مدتها نصف ثانية في x و y .

136, 120, 104, 88, 72, 56, 40, 24, 8, -8, -24, -40, -56, -72, -88, -104, -120, -136

تبايرين

استخدم الدالة التربيعية $y = x^2$. 1-44 انظر ملحق إجابات الوحدة 1

- أنشئ جدولاً للدالة شبيهاً بالجدول الوارد في هذا النشاط باستخدام $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. وأوجد قيم y المقابلة لقيم x .
- مثل الأزواج المرتبة على وري شبيكي. وصل النقاط بمحنى بياني منتظم. صف متى تزايدت الدالة ومتى تناقصت.
- أوجد معدل تغير كل عمود بدءاً من -3 إلى x . وقارن معدلات التغير حين تزايدت الدالة وحين تناقصت.
- تحدّد إذا أسقط جسم من ارتفاع 100 متر في الهواء، وكانت مقاومة الهواء مهملة، فسيسقط الجسم بسرعة يمكن تمثيلها بالدالة $f(x) = -16x^2 + 100$ ، حيث $f(x)$ تمثل ارتفاع الجسم بالأمتر بعد x ثانية. أعد جدولاً شبيهاً بجدول التمرين 1. اختر قيمة ملائمة لـ x . أملاً قيم x وقيم y ومعدلات التغير. وقارن معدلات التغير. وصف أي أنماط تلاحظها.

16 | التوسع 1-1 | مختبر الجبر، معدل تغير الدالة التربيعية

1 التركيز

الهدف استخدم دالة تربيعية مُعطاة للتحقق من معدل التغير لدالة تربيعية.

المواد التي يحتاجها كل طالب

- ورق الرسم البياني

نصيحة للتدريس

سيحتاج الطلاب إلى إعداد جدول به 19 عموداً للخطوة 1 من النشاط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب إلى مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة. مع مزج القدرات. اطلب من المجموعات إتمام النشاط.

اسأل:

- ما هي القيم العظمى والصغرى للمحور الأفقي x والمحور الرأسي y التي تحتاجها عند رسم النظام الإحداثي للدالة في النشاط؟

x : 0 إلى 9، y : 0 إلى 324

- كيف يختلف معدل تغير دالة تربيعية عن معدل تغير دالة خطية؟
- أي دالة خطية لها معدل تغير ثابت، ومن ثم فهي لن تغير العلامات أبداً. معدل تغير دالة تربيعية عبارة عن قيمة موجبة في بعض الفترات وقيمة سالبة في فترات أخرى.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التبايرين 1-4.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التبايرين من 1-3 لتقويم مدى فهم الطلاب لمعدل التغير في دالة تربيعية.

من التطبيق إلى النظرية

اطلب من الطلاب مراجعة الموقف في النشاط. اسأل الطلاب عن كيف أن المعادلة ومعدل التغير الخاص بها سيتأثران إذا تم إطلاق السهم التمثيلي من الأرض مع سرعة تصاعديّة تقدر بـ 44 m/sec.

المعادلة (التي تتضمن المعاملات المقربة) ستكون $h = -5t^2 + 44t$. بما أن المتر يساوي 3.3 ft، فيتم تقسيم المعاملات في المعادلة قدم لكل

ثانية بنسبة 3.3 المتغيرات لا تتأثر. سيتغير معدل التغير وفقاً لذلك.

حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

1-2

1 التركيز

تخطيط رأسي

قبل الدرس 1-2 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الدرس 1-2 حل المعادلات التربيعية بالرسم البياني. قُدِّر حلول المعادلات التربيعية بالرسم البياني.

بعد الدرس 1-2 حدّد الدوال التربيعية من البيانات المعطاة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** قسم من الدرس.

اطرح السؤال:

■ إذا كانت التقاطعات مع المحور الأفقي تمثل النقطة التي يلتقي خلالها القطع المكافئ بالأرض فما الذي يمثل المحور x الأرض؟

■ ما التقاطعات مع المحور الأفقي x الموجودة في الرسم البياني للمعادلة؟ $0, 127$

■ ما معادلة محاور التماثل؟ $x = 63.5$

■ ما المسافة بين النقاط التي يلتقي خلالها القطع المكافئ بالأرض؟ 127 ft

لماذا؟

الحالي

السابق



● لعبة دورتون أربنا في كارولينا الشمالية بالولايات المتحدة شكل قطعين مكافئين متقاطعين. ويمكن تمثيل شكلي القطعين المكافئين بالمعادلة $127x - x^2 = y$ ، حيث x عرض القطع المكافئ و y طوله بالقدم. ويمكن استخدام نقاط تقاطع التمثيل البياني لهذه الدالة مع المحور الأفقي x لإيجاد المسافة بين نقاط التقاء القطع المكافئ مع الأرض.

1 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني.

2 تقدير حلول المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني.

● لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

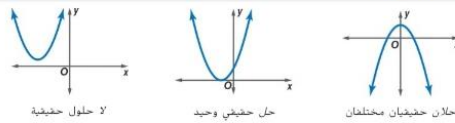
المفردات الجديدة

جذر مكرر (double root)

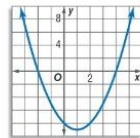
ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراجعة الدقة.

1 الحل بالتمثيل البياني يمكن كتابة المعادلات التربيعية بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، وكتابة دالة تربيعية في صورة معادلة، عوض عن y أو $f(x)$ بـ 0. تذكر أنه يمكن تحديد حلول معادلة أو جذورها بإيجاد نقاط تقاطع التمثيل البياني المرتبط بها مع المحور الأفقي x .

المفهوم الأساسي: حلول المعادلات التربيعية



مثال 1 جذران



حلّ $x^2 - 2x - 8 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 2x - 8$ بيانياً.

يبدو أن نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x تقع عند النقطتين -2 و 4 . ولذلك فالجذور هما -2 و 4 .

التحقق تحقق من الحل في المعادلة الأصلية. المعادلة الأصلية

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 2x - 8 = 0 & & x^2 - 2x - 8 = 0 \\ (-2)^2 - 2(-2) - 8 \stackrel{?}{=} 0 & \text{بسط} & (4)^2 - 2(4) - 8 \stackrel{?}{=} 0 \\ 0 = 0 \checkmark & x = -2 \text{ أو } x = 4 & 0 = 0 \checkmark \end{array}$$

1A-1B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات البيانية.

تمرين **موجه** حلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

1A. $-x^2 - 3x + 18 = 0$ 3, -6 1B. $x^2 - 4x + 3 = 0$ 1, 3

كان الحلان في المثال 1 عددين مختلفين. ويكون الجذران في بعض الأحيان عدداً واحداً يدعى **الجذر المكرر**.

مثال 2 الجذر المكرر

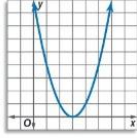
خُنْ $x^2 - 6x = -9$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

$$x^2 - 6x = -9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

المعادلة الأصلية
أضف 9 إلى كل طرف



الخطوة 2 مثل الدالة المرتبطة بيانياً
 $f(x) = x^2 - 6x + 9$

الخطوة 3 عتّن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x . ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور الأفقي x . ولذلك، ثمة حل وحيد فقط، وهو 3.

التحقق

حلّ باستخدام التحليل إلى العوامل.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = 3$$

المعادلة الأصلية
حلّ إلى العوامل.
خاصية ناتج الضرب الصفري
أضف 3 إلى كل طرف.

الحل الوحيد هو 3.

تمرين **موجه**

2A-2B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع

خُنْ كل معادلة بالتمثيل البياني. على التمثيلات البيانية.

2A. $x^2 + 25 = 10x$ 2B. $x^2 = -8x - 16$

في بعض الأحيان لا تكون الجذور أعداداً حقيقية. ويمكن أن يكون للمعادلات التربيعية حلّان حقيقيان أو حل واحد أو ألا يكون لها حلول حقيقية. وقد قادتنا المعادلات التربيعية ذات الحلول التي ليست أعداداً حقيقية إلى توسيع نظام الأعداد ليتيح حلولاً لهذه المعادلات. وتدعى تلك الأعداد بالأعداد المركبة. وستدرس الأعداد المركبة في الجبر 2.

مثال 3 لا جذور حقيقية

خُنْ $2x^2 - 3x + 5 = 0$ بالتمثيل البياني.

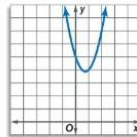
الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

الخطوة 2 مثل الدالة المرتبطة بيانياً.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

الخطوة 3 حدد نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x . ليس للتمثيل البياني نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x . ولذلك فليس لهذه المعادلة حلول من الأعداد الحقيقية. مجموعة الحلول هي \emptyset .



3A-3B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على

خُنْ كل معادلة بالتمثيل البياني. التمثيلات البيانية.

3A. $-x^2 - 3x = 5$ 3B. $-2x^2 - 8 = 6x$

انتبه!

الدقة قد تبدو حلول المعادلة التي غر عليها من التمثيل البياني دقيقة، فتتحقق منها في المعادلة الأصلية للتحقق.

1 الحل بالرسم البياني

يوضح المثال 1 كيفية استخدام الرسم

البياني لإيجاد جذري المعادلة التربيعية.

يوضح المثال 2 كيفية استخدام الرسم

البياني لإيجاد الجذر المزدوج للمعادلة

التربيعية. **يوضح المثال 3** كيفية

استخدام رسم بياني لتحديد معادلة

تربيعية ليس لها حلول بأعداد حقيقية.

التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد

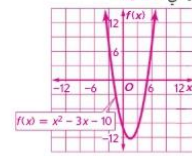
كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب

للمفاهيم.

أمثلة إضافية

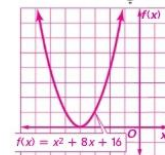
1 حل $x^2 - 3x - 10 = 0$ بالتمثيل

البياني.



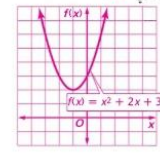
2 حل $x^2 + 8x = -16$ بالتمثيل

البياني.



3 حل $x^2 + 2x + 3 = 0$ بالتمثيل

البياني.

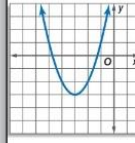


بناءً افترض الطلاب أن رأس القطع المكافئ دائماً ما تكون ذات إحداثيات بأعداد صحيحة.

أشّر إلى أن القيمة y لرأس الرسم البياني في المثال 3 أكبر من 3 وأقل من 4 إلى حد ما.

2 تقدير الحلول لقد كانت الجذور التي توصلنا إليها إلى الآن أعداداً صحيحة، ولكن جذور المعادلات التربيعية لا تكون في العادة أعداداً صحيحة، وفي هذه الحالات، استخدم التقدير لتقريب جذور المعادلة.

مثال 4 تقريب الجذور بواسطة جدول



حلّ $x^2 + 6x + 6 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذور صحيحة، فقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

مثلّ الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 6x + 6$ بيانياً.

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x تقع بين -5 و -4 وبين -2 و -1. أعدّ جدولاً باستخدام زياده مقدارها 0.1 لقيم x الواقعة بين -5 و -4 وبين -2 و -1.

ابحث عن تغير في إشارات قيم الدالة. وقيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

x	-4.9	-4.8	-4.7	-4.6	-4.5	-4.4	-4.3	-4.2	-4.1
y	0.61	0.24	-0.11	-0.44	-0.75	-1.04	-1.31	-1.56	-1.79

x	-1.9	-1.8	-1.7	-1.6	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1
y	-1.79	-1.56	-1.31	-1.04	-0.75	-0.44	-0.11	0.24	0.61

في كل جدول، قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة هي 0.11. ولذلك فالجذران هما -4.7 و -1.3 على وجه التقريب.

تمرين موجّه

4. حلّ $2x^2 + 6x - 3 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذور صحيحة، فقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. **0.4، -3.4**

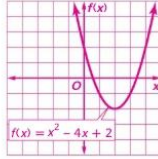
نصيحة دراسية
مواضع الأصفار بما أن الدوال التربيعية محتملة، فليجرب أن يكون هناك صفر بين قيمتي اللتان تحلان فيما بينهما. y المتطابقتان المتساويتان لهما إشارتان معاكستان.

2 تقدير الحلول

يوضح المثال 4 كيفية استخدام الرسم البياني و جدول من القيم لتقدير جذور معادلة تربيعية عندما يتعذر إيجاد الجذور التامة. **يوضح المثال 5** كيفية تقدير حل لمعادلة من واقع الحياة تتضمن معادلات تربيعية.

أمثلة إضافية

4. حلّ $x^2 - 4x + 2 = 0$ بالتمثيل البياني. إذا لم يمكنك إيجاد الجذور المكونة فعلياً، فقدر الجذور لأقرب عشرة. **0.6، 3.4**



بني كنسولا نموذج صاروخ ليشروع عليها المعادلات $h = -16t^2 + 250t$ نماذج رحلة الصاروخ شنت من مستوى الأرض بسرعة 250 ft/min حيث H هو ارتفاع الصاروخ في قدم بعد T دقائق. كم مكث صاروخ كنسولا في الهواء تقريباً؟ **15.6 دقائق**

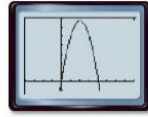
التدريس بالتكنولوجيا

مشغل وسائط محمول قم بتحميل صور الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية إلى صفحة الويب الخاصة بصفك حتى يتمكن الطلاب من تنزيلها إلى مشغلات الوسائط المحمولة لديهم. اطلب من الطلاب إيجاد أصفار الدالة في كل رسم بياني.

تدريس التمارين الرياضية

الدقة يحسب الطلاب المتفوقون في الرياضيات بدقة وبطريقة فعالة. ناقش مع الطلاب لماذا قد لا يعطي الرسم البياني إجابة دقيقة.

مثال 5 من الحياة اليومية: تقريب الجذور بواسطة آلة حاسبة



$[-4, 7]$ set: 1 by $[-10, 70]$ set: 10

كرة القدم يرسل حارس مرمى الكرة بسرعة متجهة نحو الأعلى مقدارها 19.8 متراً في الثانية. وتلتقي قدمه بالكرة على ارتفاع 30.5 سنتيمتراً فوق سطح الأرض. تمثل الدالة التربيعية $f(x) = -16x^2 + 65x + 1$ بالارتفاع h بالمتار بعد t ثانية. كم تبقى الكرة في الهواء تقريباً؟

عليك إيجاد جذور المعادلة $-16t^2 + 65t + 1 = 0$ استعمال حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة المرتبطة بيانياً $f(x) = -16x^2 + 65x + 1$.

تقع نقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x عند القيمة 4 تقريباً. ولذلك تبقى الكرة في الهواء مدة 4 ثوانٍ تقريباً.

تمرين موجّه

5. إذا ركل الحارس الكرة بسرعة متجهة إلى الأعلى مقدارها 16.7 متراً في الثانية ولاملت قدمه الكرة على ارتفاع 60.96 سنتيمتراً فوق سطح الأرض، فكم تبقى الكرة في الهواء؟ **3.5 ثوانٍ**



الربط بالحياة اليومية
بدأت لعبة كرة القدم عام 1863 في بريطانيا بعد تأسيس جمعية لها وهي تشارس في جميع قارات العالم.
المصدر: Sports Know How

التركيز على المحتوى الرياضي

عدم وجود جذور حقيقية يساعد إنشاء جدول من القيم قبل رسم دالة بيانية في توضيح ما إذا كانت الدالة لا تتضمن تقاطعات المحور الأفقي x . إذا كانت جميع قيم y موجبة، فقم بالإنقاص أولاً ثم الزيادة وإذا كانت جميعها سالبة، فقم بالزيادة أولاً ثم الإنقاص. الرسم البياني للدالة لا يمر عبر المحور x ولا توجد جذور حقيقية. في الجبر 2، سيتعلم الطلاب أنه عند عدم وجود حلول حقيقية للمعادلات التربيعية فإنه يجب تمديد نظام الأعداد لإيجاد الحل وبطريقة مشابهة فإنه يتم تمديد الأعداد الحقيقية إلى أعداد سالبة للسماح إلى $x + 1 = 0$ أن يكون لها حل.

جذر مزدوج عند وجود عاملين متناظرين لثلاثي الحدود في معادلة تربيعية فإنه يوجد جذر واحد فقط يسمى الجذر المزدوج. إذا كانت أي من قيمة y الأكبر أو الأقل في المدى هي 0 فإن الرأس تقع على المحور x والحل يكون جذراً مزدوجاً.

3 التمرين

التكوين التكويني

استخدم التباين 9-1 للتحقق من الفهم.

استخدم الرسم البياني الموجود أسفل هذه الصفحة لتخصيص الواجبات المنزلية للطلاب.

متطلبات التمرين

ورقة الرسم البياني للتمرين 8-1، 27-10 و 38، و 51-56 و 72-67 سوف يحتاج الطلاب إلى ورقة رسم بياني.

تدريس الرياضيات تمارين

إعداد التمارين الطلاب المتفوقون في الرياضيات لديهم القدرة على تحديد الكميات المهمة. في التمرين 36، أشر إلى أنه خلال الدوال التي تمثل نموذجًا للغذاء فإن معامل المصطلح x^2 يكون دائمًا -16 عند قياس السرعة بالقدم في الثانية.

تمثيلات متعددة

في التمرين 38، يستخدم الطلاب الرسالبياني والتحليل لمخارطة الدوال التريبية ذات الصلة. إجابات إضافية

إجابات إضافية

41. أحمد، الإجابة النموذجية: أصغار الدالة التربيعية هي التقاطعات المحور الأفقي x من الرسم البياني. بما أن الرسم البياني لا يتقاطع مع المحور x فلا توجد تقاطعات x ولا توجد أصغار حقيقية.

42. الإجابة النموذجية: ضرب كرة التنس في الهواء: المعادلة هي $h = -16t^2 + 25t + 2$. وبالتالي فإن الكرة تبقى في الهواء حوالي 1.6 ثانية.

43. بالنسبة إلى (1, 3) في بعض الأحيان، تكون قيمة y أكبر من 2 ولكن بالنسبة إلى (1, -1)، تكون أقل من 2.

44. 1.5 و -1.5: الإجابة النموذجية: قم بإعداد جدول من القيم لـ x من -2.0 إلى 2.0. استخدام الزيادات من 0.1.

45. أولاً، ارسم الدالة ذات الصلة بيانيًا. ثم حدد بين أي العددين الصحيحين يعبر الرسم البياني المحور x . قم بإنشاء جدول بمر بخانة العشرات، من القيم الواقعة بين الأعداد الصحيحة. حدد الموضع الذي تتغير خلاله علامات قيم الدالة. القيمة x التي تكون خلالها قيمة الدالة أقرب إلى الصفر هي أفضل تقريب لجذر المعادلة.

التحقق من فهمك

الأمتة 3-1

حل كل معادلة بالتمثيل البياني.

- 1-64 انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات البيانية.
- $x^2 + 3x - 10 = 0$ 2, -5
 - $2x^2 - 8x = 0$ 0, 4
 - $x^2 + 4x = -4$ -2
 - $x^2 + 12 = -8x$ -6, -2

الأمتة 4

حل كل معادلة بالتمثيل البياني. فإذا كان لا يمكن إيجاد جذور صحيحة، فتقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

- 5-68 انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات البيانية.
- لا يوجد حلول $x^2 = -9$
 - 6, -2, 0.2
 - 5, -5
 - 6.6, 1.4

الأمتة 5

9. معرض العلوم بني زايد صاروخًا تجريبيًا. ويمكن تمثيل طيران الصاروخ بالمعادلة الموضحة، حيث h ارتفاع الصاروخ بالمتر بعد t ثانية. فكم مكث الصاروخ في الهواء تقريبًا؟



التمرين وحل المسائل

الأمتة 3-1

حل كل معادلة بالتمثيل البياني.

10-21 انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات البيانية.

- $x^2 + 7x + 14 = 0$
- $x^2 + 2x - 24 = 0$ 4, -6
- $x^2 - 5x + 12 = 0$
- $x^2 + 14x = -49$ -7
- $x^2 - 10x = -16$ 2, 8
- $-2x^2 - 8x + 13 = 0$
- $2x^2 = -24x - 72$ -6
- $-3x^2 + 2x = 15$
- $x^2 = -2x + 80$ 8, -10

الأمتة 4

حل كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يمكن إيجاد جذور صحيحة، فتقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

- 22-27 انظر ملحق إجابات الوحدة 1 للاطلاع على التمثيلات البيانية.
- $x^2 + 2x - 9 = 0$
 - $x^2 - 4x = 20$ 6.9, -2.9
 - $x^2 + 3x = 18$ 3, -6
 - $2x^2 - 9x = -8$ 1.2, 3.3
 - $3x^2 = -2x + 7$ -1.9, 1.2
 - $5x = 25 - x^2$ 3.1, -8.1

الأمتة 5

28. الكرة اللينة تمثل بالمعادلة $h = -16t^2 + 47t + 3$ ارتفاع كرة لينة h بالأمتار، وذلك بعد أن ضربتها أماني بيد t ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء؟ 3 ثوان

29. ألعاب الملاهي تنطلق الإقنونية بالراكبين إلى الأعلى بسمار مستقيم ثم ينبط بهم بسمار مستقيم. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 122t + 4$ ارتفاع الراكبين h بالأمتار من موقع انطلاقهم بعد t ثانية. فكم سيخفي وقت حتى يعود الراكب إلى الأرض؟ 7.6 ثوان تقريبًا

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد مرات تقاطع التمثيل البياني لكل دالة مع المحور الأفقي x . وحدد كل صفر.

- $y = x^2 - 8x + 16$ 1; 4
- $y = x^2 + 4x + 4$ -2
- $y = x^2 + 2x - 24$ 2; -6, 4
- $y = x^2 + 12x + 32$ 2; -4, -8

34. نظرية الأعداد استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعتهما 9 وحاصل ضربهما 20. 4, 5

35. نظرية الأعداد استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعتهما 1 وحاصل ضربهما 12. -3, 4

36. التمثيل يمكن تمثيل ارتفاع كرة الجولف في الهواء بالمعادلة $h = -16t^2 + 76t$. حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t ثانية.

- كم مكثت الكرة في الهواء؟ 4.5 ثوان
- ما أقصى ارتفاع للكرة؟ 81 m تقريبًا
- متى ستصل الكرة لأقصى ارتفاع؟ بعد 2.2 ثانية تقريبًا

20 | الدرس 1-2 | حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

الواجب المنزلي المتفاني خيارات

المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين
أساسي	10-28, 41-43, 46-72	11-27, 47-50
رئيسي	11-33, 34-43, 46-72	10-28, 47-50
متقدم	29-70	

20 | الدرس 1-2 | حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

تدريس التمارين الرياضية

التعقيب يمكن للطلاب المتفوقون

في الرياضيات قراءة براهين الآخرين وتحديد مدى منطقيتها. في التمرين 41، اطلب من الطلاب تذكر أن حلول أو جذور معادلة يمكن تحديدها من خلال التفاعلات المحور الأفقي x أو أصفار الدالة ذات الصلة

37. التمرين شارك عائشة في منافسة التزلج الهوائي الحر. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 30t + 10$ ارتفاع عائشة h بالأمتار بعد مضي t ثانية من مغادرة المنحدر.

a. كم مكثت عائشة في الهواء؟ 2.2 ثانية تقريباً
b. متى ستصل عائشة ارتفاع 15 متراً؟
c. للحصول على نقاط إضافية في الرياضة، على المتسابق أن يصل ارتفاع 20 متراً، فهل ستحصل عائشة على نقاط إضافية؟ نعم: فالارتفاع الأقصى لعائشة هو 24 متراً تقريباً.

38. التمثيلات المتعددة ستكتشف في هذه المسألة كيفية التفسير الإضافي للعلاقة بين الدوال التربيعية والتمثيلات البيانية.

a. بيانياً مكل بيانياً $y = x^2$.

b. تحليلياً اكتب اسم الرأس ونقطتين أخريين على التمثيل البياني. $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$

c. بيانياً مكل $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 + 4$ و $y = x^2 + 6$ على المستوى الإحداثي نفسه كما في التمثيل البياني السابق.

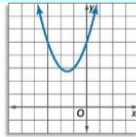
d. تحليلياً اكتب إحداثيات الرأس ونقطتين من كل من هذه التمثيلات البيانية التي لها الإحداثيات الأفقية x $2 + 2$ ، $(0, 2)$ ، $(1, 3)$ ، $(-1, 3)$ $38d$.

e. تحليلياً ما النتيجة التي يمكنك استخلاصها من هذا؟ $2 + 4$ ، $(0, 4)$ ، $(1, 5)$ ، $(-1, 5)$ $2 + 6$ ، $(0, 6)$ ، $(1, 7)$ ، $(-1, 7)$

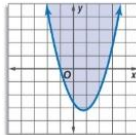
حاسبة التمثيل البياني حل كل معادلة بالتمثيل البياني.

39. $x^2 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ $4, 1, -2$
38e. الإجابة النموذجية: يمكن الحصول على التمثيلتين البيانيتين لـ $y = x^2 + 4$ و $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 + 6$ بتحويل التمثيل البياني لـ $y = x^2$ إلى أعلى مسافة وحدتين و 4 وحدات و 6 وحدات على التوالي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



41. النقد يوجد إسماعيل وأسامة عدد الأصفار الحقيقية للدالة المماثلة بيانياً على اليسار. ويقول إسماعيل إن الدالة ليست لها أصفار بسبب عدم وجود نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x . ويقول أسامة إن للدالة صفراً حقيقياً واحداً لأن للتمثيل البياني نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y . فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تفكيرك. انظر الهامش.



42. مسألة غير محددة الإجابة صف حالة من الحياة اليومية ينتقل فيها جسم مذبذب في الهواء. واكتب معادلة تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة إلى الزمن. وحد البدة التي ينتقل خلالها الجسم في الهواء. انظر الهامش.

43. الاستنتاج التمثيل البياني الموضح يفسر مثنائية تربيعية. حلل التمثيل البياني وحدد ما إذا كانت قيمة y الخاصة بحل المثنائية أكبر أحياناً، أو دائماً، أو ليست أكبر مطلقاً من 2. اشرح. انظر الهامش.

44. تحدّ اكتب معادلة تربيعية لها الجذور الموصوفة.

a. جذر مضاعف وحيد. الإجابة النموذجية: $x^2 + 8x + 16 = 0$

b. جذر نسبي واحد (غير صحيح) وجذر صحيح واحد.

c. جذران صحيحان مبرزان بشكلان نظيرين جعبيين.

45. تحدّ أوجد جذر $x^2 = 2.25$ دون استخدام آلة حاسبة. وأشرح إستراتيجيتك. انظر الهامش.

46. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تقريب كسور معادلة تربيعية عندما لا تكون الجذور أعداداً صحيحة. انظر الهامش.



مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات التربيعية

1-2

1 التركيز

الهدف استخدام الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من المتباينات التربيعية.

المواد لكل طالب

- آلة حاسبة بيانية

نصيحة للتدريس

ذكر الطلاب بأن x^2 المربعات الرئيسية تمثل الكمية ولكن لا تدخل x^2 في معادلة. لإدخال $5x^2$ اضغط 5 x^2 .

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسم الطلاب إلى مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة. مع مزج القدرات. اطلب من المجموعات إتمام الأنشطة والتمارين 1.

أسأل:

- أين الحلول الموجودة للمتباينات؟ جميع أزواج الأوامر في المنطقة المظلمة من الرسم البياني. بما في ذلك الرسم البياني للدالة ذات الصلة نفسها

- كم عدد الحلول الموجودة لكل متباينة؟ عدد لا نهائي

- هل أي من الحلول الموجودة للرسم البياني الأول هي نفسها بالنسبة للرسم البياني الثاني؟ نعم، الحلول التي تقع في الرسم البياني للدالة ذاتها

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين 2 و3.

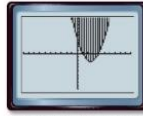
تذكر أن التمثيل البياني لمتباينة خطية يتألف من الحد ومن نصف المستوى المظلل. وتقع مجموعة حلول المتباينة في المنطقة المظلمة من التمثيل البياني. ويشبه التمثيل البياني للمتباينات التربيعية التمثيل البياني للمتباينات الخطية.

النشاط 1 ظلل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثل $x^2 - 5x + 4 \geq y$ بيانياً في نافذة العرض القياسية.

أولاً، امسح جميع الدوال من قائمة $Y =$.

لتمثيل $x^2 - 5x + 4 \geq y$ بيانياً، أدخل المعادلة في الشاشة $Y =$. ثم استخدم السهم الأسفل لاختيار $=$. واضغط على ENTER إلى حين اختيار التظليل فوق الشريط.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة: $x^2 = 5$ x $- 4$ ZOOM 6

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها y أكبر أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ فوق الخط أو عليه وهي عبارة عن حلول.

وستستخدم إجراء مشابه للتمثيل البياني لمتباينات تقع المنطقة المظلمة بالنسبة لها خارج القطع المكافئ.

النشاط 2 ظلل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثل $x^2 - 5x - 4 \leq y$ بيانياً في نافذة العرض القياسية.

امسح التمثيل البياني المعروض أولاً.

خطوات العملية على الحاسبة: $Y =$ CLEAR

ثم أعد كتابة $x^2 - 5x - 4 \leq y$ في صورة $y \leq x^2 - 5x + 4$. ومثلها بيانياً.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة: $x^2 = 5$ x $- 4$ GRAPH

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها y أصغر أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ تحت الخط أو عليه وهي عبارة عن حلول.

تمارين

- قارن وقابل التمثيلين البيانيين الموضحين أعلاه.
- مثل $5x^2 \geq 2x + 6$ بيانياً في نافذة العرض القياسية. واذكر أسماء ثلاثة حلول للمتباينة. $(0, -6)$, $(1, 1)$, $(2, 18)$
- مثل $-x^2 - 6x \leq y$ بيانياً في نافذة العرض القياسية. واذكر أسماء ثلاثة حلول للمتباينة. $(0, -3)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمرين 3 لتقييم مدى فهم الطلاب لكيفية استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينة.

من التطبيق إلى النظرية

اطلب من الطلاب فحص الرسم البياني الذي رسموه للمتباينة في النشاط 1. ثم اطلب منهم توضيح كيف أن الحل المحدد لهذه المتباينة هو ذاته، أو مختلف عن الحل المحدد لـ $y > x^2 - 5x + 4$. الحل المحدد لـ $y > x^2 - 5x + 4$ لا يحتوي على القيم الموجودة في الرسم البياني للدالة ذاتها. بينما الحل المحدد لـ $y \geq x^2 - 5x + 4$ يحتوي على هذه القيم.

حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

لماذا؟

الحالي

السابق

- في المسابقات، يقذف المتزلجون أنفسهم من نصف أنبوب إلى الهواء لتنفيذ الجتل. يمكن استخدام المعادلة $h = -16t^2 + 20t + 12$ لنشيل ارتفاعهم بالأمتار بعد t من التواني.
- إيجاد مدى طول المتزلج في الهواء إذا كان على ارتفاع 25 متراً من نصف الأنبوب. يمكنك إيجاد حل $-16t^2 + 20t + 12 = 25$ باستخدام طريقة تسنّى إكمال المربع.

- 1 إكمال المربع لكتابة ثلاثيات حدود مربع كامل.
- 2 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع.

- لقد حللت معادلات تربيعية باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

1 التركيز

تخطيط رأسي

قبل الدرس 2-3 حل المعادلة التربيعية عن طريق استخدام خاصية الجذر التربيعي.

الدرس 2-3 أكمل المربع لكتابة ثلاثيات الحدود التربيعية الكاملة.

الدرس 2-3 حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام

المفردات الجديدة
إكمال المربع
completing the square

مهارات في الرياضيات
استخدام صاغ الرياضيات.

1 إكمال المربع لقد حللت سابقاً المعادلات باستخدام الجذر التربيعي لكل طرف. لم تصلح هذه الطريقة إلا لأن التعبير الموجود على الطرف الأيسر كان مربعاً كاملاً. في ثلاثيات حدود المربع الكامل التي يكون فيها المعامل الرئيسي 1، توجد علاقة بين **معامل الحد x** و**الحد الثابت**.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)(x) + 5^2$$

$$= x^2 + 10x + 25$$

لاحظ أن $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$ للحصول على الحد الثالث. أقسم معامل الحد x على 2 ورتب الناتج. يمكن تحويل أي تعبير تربيعي في الصيغة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل باستخدام طريقة تسنّى **إكمال المربع**.

المفهوم الأساسي إكمال المربع

الشرح لإكمال المربع لأي تعبير تربيعي للصيغة $x^2 + bx$. اتبع الخطوات التالية.

- الخطوة 1** أوجد نصف b . المعامل x .
- الخطوة 2** رتّب ناتج الخطوة 1.
- الخطوة 3** أجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

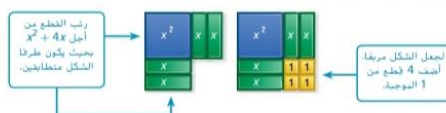
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

الرموز

مثال 1 إكمال المربع

أوجد قيمة c التي تجعل $x^2 + 4x + c$ ثلاثي حدود مربع كامل.

الطريقة 1 استخدام النقط الجبرية.



2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** في الدرس.

اسأل:

- انظر إلى المعادلة. هل 25 تربيعي مربع كامل؟ **نعم**
- هل $-16t^2 + 20t + 12$ مربع كامل؟ **لا**
- هل يمكنك حل المعادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف من أطراف المعادلة؟ **لا**

التدريس بالتكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية في أثناء تعليم طلابك إكمال المربع. احفظ كل مثال على أنه صفحة ملاحظات. ثم أرسل ملاحظاتك إلى الطلاب.

نصيحة دراسية
الخوارزميات الخوارزمية
عبارة عن سلسلة من
الخطوات لتنفيذ إجراء أو حل
مسألة.

الطريقة 2 استخدام خوارزمية إكمال المربع.

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

وبالتالي، $c = 4$. لاحظ أن $(x + 2)^2$

1. أوجد قيمة c التي تجعل $x^2 - 8x + c$ ثلاثي حدود مربع كامل. 16

تمرين موجّه

2. حلّ المعادلات بإكمال المربع. يمكنك إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية. أولاً، يجب عليك جعل الحدين x^2 و bx بعطف واحد.

مثال 2 حلّ معادلة بإكمال المربع

حلّ المعادلة: $x^2 - 6x + 12 = 19$ بإكمال المربع.

$$x^2 - 6x + 12 = 19$$

$$x^2 - 6x = 7$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = \pm 4$$

$$x = 3 \pm 4$$

$$x = 3 + 4 \text{ or } x = 3 - 4$$

$$= 7 \quad = -1$$

المعادلة الأصلية

أطرح 12 من كل طرف،

نظرًا لأن $\left(\frac{-b}{2}\right)^2 = 9$ ، فأضف 9 لكل طرف،

حلل إلى العوامل $x^2 - 6x + 9$

أحسب الجذر التربيعي لكل طرف،

أضف 3 إلى كل طرف،

افصل الحلول،

الحلّان هما 7 و -1.

تمرين موجّه

2. حلّ $x^2 - 12x + 3 = 8$ بإكمال المربع. حوالي 12.4، -0.4

لحل معادلة تربيعية لا يكون المعامل الرئيسي فيها 1، قسّم كل حد على المعامل. وبعد ذلك افصل الحدين x^2 و x وأكمل المربع.

مثال 3 معادلة مع $a \neq 1$

حلّ المعادلة: $-2x^2 + 8x - 18 = 0$ بإكمال المربع.

$$-2x^2 + 8x - 18 = 0$$

$$\frac{-2x^2 + 8x - 18}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$x^2 - 4x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x = -9$$

$$x^2 - 4x + 4 = -9 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -5$$

المعادلة الأصلية

اقسم كل طرف على -2.

يشط.

أطرح 9 من كل طرف،

نظرًا لأن $\left(\frac{-b}{2}\right)^2 = 4$ ، فأضف 4 إلى كل طرف،

حلل إلى العوامل $x^2 - 4x + 4$

لا توجد أعداد حقيقية لها مربع سالب، إذن، هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تمرين موجّه

3. حلّ المعادلة: $3x^2 - 9x - 3 = 21$ بإكمال المربع. حوالي 4.7، -1.7

انتبه!
المعامل الرئيسي
المعامل الرئيسي يجب أن
يكون 1 قبل أن تكمل المربع.

1 إكمال المربع

المثال 1 بين طريقة جعل أي ذات حدين لها الشكل $x^2 + bx$ مربعًا كاملاً عن طريق إكمال المربع.

التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1. ابحث عن القيمة c التي تجعل $x^2 - 12x + c$ ثلاثي حدود تربيعي كامل. 36

2 الحل بإكمال المربع

مثال 2 بين كيفية حل المعادلة

التربيعية عن طريق إكمال المربع. المثال 3 بين طريقة حل معادلة تربيعية فيها a لا تساوي 1. مثال 4 بين كيفية استخدام إكمال المربع لحل مسائل من عالم الواقع.

نصائح للمعلمين الجدد

الاستدلال ينبغي للطلاب دائمًا التحقق من نتائجهم عن طريق الرسوم البيانية للدالة ذات الصلة أو عن طريق استبدال الحلول في المعادلة الأصلية. على سبيل المثال، أخبر الطلاب أنه في المثال 2، تم استبدال 7 و -1 في $x^2 - 6x + 12$ يجب أن ينتج 19.

أمثلة إضافية

2. حلّ $x^2 + 6x + 5 = 12$ عن طريق إكمال المربع. 1، -7

3. حلّ $-2x^2 + 36x - 10 = 24$ عن طريق إكمال المربع. 1، 19

التحصان الرياضي يشتري طلاب السنة الأخيرة في مدرسة ثانوية قيصاً رياً لثلاثتها من أجل ألعاب كرة القدم. يمكن تمثيل تكلفة الحصان بالمعادلة $C = 0.1x^2 + 2.4x + 25$ ، حيث C هو المبلغ الذي يكلفه شراء عدد x من فكم عدد الحصان التي بإمكانهم شراؤها مقابل 430 AED؟

$$\frac{0.1x^2 + 2.4x + 25}{0.1} = \frac{430}{0.1}$$

استخدم حاسبة لتقريب كل قيمة X .

بما أنه لا يمكنك شراء عدد سالب من القمصان الرياضية، فإن الحل السالب غير منطقي. يمكن لطالب السنة الأخيرة تحمل شراء 52 قميصاً رياضياً.

تھریون موچہ

تفتح منافسة أقدم المدارس
للتأهية العامة بين مدرسة
ويلزلي الثانوية ومدرسة
سرفنغات نيدهام الثانوية في
سانتاشوستس. وقد وقعت أول
مباراة كرة قدم بينهما في عام
1882 في نيدهام.

4 التجديف افترض أن معدل التدفق 80 قدم لعرض النهر

المعروف في المعادلة $0.8x - 0.01x^2 = 0$ ، حيث إن x المعدل بالميل لكل ساعة و x هو المسافة من الشاطئ بالقدم. لا يريد جلال التجديف بقابضه ضد التيار وهذا أسرع من 5 ميل في الساعة. على أي مسافة من ضفة النهر ينبغي له التجديف ليتجنب مواجهة تيار 5 أميال لكل ساعة؟ ما يصل إلى 7 ft من الضفة الأخرى

ملاحظة: حلول المعادلة عبارة عن 7 أقدام تقريباً و 7 قدمًا تقريباً. بما أن عرض النهر 80 قدمًا، إذن $7 = 80 - 73$. كلا التطبيقين ضمن 7 أقدام لضفة أو للأخرى.

المفاهيم الخاطئة أخبر الطلاب بعدم إهمال الحلول السالبة لمسائل العالم الواقعي. وذكرهم أنه ينبغي لهم مراجعة المسألة أولاً لمعرفة إذا كان الحل يناسب الموقف.

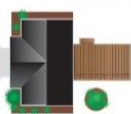
استخدم التبارين 1-9 للتحقق من الفهم.
استخدم الرسم البياني الموجود في أسفل
الصفحة التالية لتخصيص مهام طلابك.

التمثيل يمكن للطلاب المتفوقين في الرياضيات تحليل العلاقات من الناحية الرياضية. في التمرين 9، اقترح على الطلاب أن يرسموا رسمًا بيانيًا لتمثيل الموقف.

مثال 1 أوجد قيمة C التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعاً كاملاً.

4. 此

9. تمثيل النماذج بيني طارئة شرفة خشبية خلف منزل عائلته. ولديه ما يكفي من الخشب لتصبح مساحة الشرفة 144 متراً مربعاً. ويجب أن يكون طول الشرفة أكبر من عرضها بـ 10 أمتار. فما الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الشرفة؟ 8 أمتار في 18 متراً



م

المتعلمون الحركيون قد يستفيد بعض الطلاب من استخدام الجبر لإكمال المربع عند حل المعادلات التربيعية مثل الموجودة في المثالين 2 و 3. اطلب من الطلاب استخدام مصفوفة معادلات. ذكر الطلاب بإضافة أو إزالة العدد ذاته إلى أو من كل طرف من طرفي المعادلة.

انتبه!

تجنب الوقوع في الأخطاء بالنسبة للتمارين 19-30، ذكر الطلاب بأن الكمية التي يضيفونها إلى طرف واحد من المعادلة لإكمال المربع ينبغي أيضًا إضافتها للطرف الآخر من المعادلة.

الصيغة بالنسبة للتمارين 32 و 36، سيحتاج الطلاب إلى معرفة صيغة مساحة المثلث، $A = \frac{1}{2}bh$.

التركيز على المحتوى الرياضي

الحلول غير النسبية إكمال المربع لحل معادلة تربيعية لا يعني أن الحلول ستكون صحيحة، إذا كانت المعادلة لديها بالفعل مصطلح ثابت غير صفري، فمن المرجح أنه بعد إكمال المربع، لن يكون الثابت مرفقًا مألوفًا، وستكون الحلول غير نسبية.

تدريس التمارين الرياضية

الدقة يحرص الطلاب المتفوقون في الرياضيات على الدقة، في التمرين 35، أخبر الطلاب أن يتأكدوا من أن إجاباتهم تناسب معايير المسألة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعًا كاملاً.

10. $x^2 + 26x + c$ 169
11. $x^2 - 24x + c$ 144
12. $x^2 - 19x + c$ $\frac{361}{4}$
13. $x^2 + 17x + c$ $\frac{289}{4}$
14. $x^2 + 5x + c$ $\frac{25}{4}$
15. $x^2 - 13x + c$ $\frac{169}{4}$
16. $x^2 - 22x + c$ 121
17. $x^2 - 15x + c$ $\frac{225}{4}$
18. $x^2 + 24x + c$ 144

المثالان 2-3 حل كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

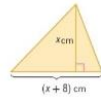
19. $x^2 + 6x - 16 = 0$ -8, 2
20. $x^2 - 2x - 14 = 0$ -2.9, 4.9
21. $x^2 - 8x - 1 = 8$ -1, 9
22. $x^2 + 3x + 21 = 22$ -3.3, 0.3
23. $x^2 - 11x + 3 = 5$ -0.2, 11.2
24. $5x^2 - 10x = 23$ -1.4, 3.4
25. $2x^2 - 2x + 7 = 5$ \emptyset
26. $3x^2 + 12x + 81 = 15$ \emptyset
27. $4x^2 + 6x = 12$ -2.6, 1.1
28. $4x^2 + 5 = 10x$ 0.7, 1.8
29. $-2x^2 + 10x = -14$ -1.1, 6.1
30. $-3x^2 - 12 = 14x$ -3.5, -1.1

مثال 4

31. **المعرفة المالية** يمكن تمثيل السعر P بالدولار الإماراتي لسهم معين عن طريق المعادلة التربيعية $P = 3.5t - 0.05t^2$ ، حيث t تمثل عدد الأيام بعد شراء السهم. إذن، متى تكون قيمة السهم 60 AED؟

في اليوم الثلاثين والأربعين بعد الشراء
الهندسة أوجد قيمة x لكل شكل. وقرب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

32. $A = 45 \text{ cm}^2$ 6.3



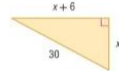
33. $A = 110 \text{ m}^2$ 5.3



34. **نظرية الأعداد** ناتج ضرب عددين صحيحين زوجيين متتاليين هو 224. أوجد الأعداد الصحيحة. 14 و 16؛ -14 و -16

35. **الدقة** ناتج ضرب عددين صحيحين فرديين متتاليين هو 483. أوجد الأعداد الصحيحة. -21 و -23

36. **الهندسة** أوجد مساحة المثلث أدناه. 216 m^2



8 حل كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

37. $0.2x^2 - 0.2x - 0.4 = 0$ -1, 2
38. $0.5x^2 = 2x - 0.3$ 0.2, 3.8
39. $2x^2 - \frac{11}{5}x = -\frac{3}{10}$ 0.2, 0.9
40. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{6}$ -0.5, 2.5
41. $\frac{1}{4}x^2 + 2x = \frac{3}{8}$ -8.2, 0.2
42. $\frac{2}{5}x^2 + 2x = \frac{1}{5}$ -5.1, 0.1

خيارات الواجب المنزلي المتغير

المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين	
أساسي	10-36, 49-75	11-35, 53-56 أعداد فردية.	10-36, 49-52, 57-75 أعداد زوجية.
رئيسي	11-43, 44-47, 49-75 أعداد فردية.	10-36, 53-56	37-47, 49-52, 57-75
متقدم	37-75		

تمثيلات متعددة

في التمرين 47، يستخدم الطلاب معلومات منظمة في جدول، ومعادلات جبرية، وتحليل لربط قيمة المميز في المعادلة التربيعية مع عدد الجذور الحقيقية للمعادلة.

43c

الإجابة النموذجية: نعم، التسارع يسبب الجاذبية أكبر بكثير على الأرض من المريخ، لذا ينبغي أن يكون الوقت المستغرق للوصول إلى الأرض أقل بكثير.

47c

إذا كانت $b^2 - 4ac$ سالبة، فليس للمعادلة حلول حقيقية. إذا كانت $b^2 - 4ac$ تساوي صفر، فللمعادلة حل واحد، إذا كانت $b^2 - 4ac$ موجبة، فللمعادلة حلان.

علم الفلك يُعطي ارتفاع جسم ما عدد t من الثواني بعد سقوطه بالعلاقة $h_0 + \frac{1}{2}gt^2$. حيث h_0 هو الارتفاع الابتدائي و g هو التسارع بسبب الجاذبية، يكون التسارع بسبب الجاذبية قرب سطح المريخ 3.73 m/s^2 . بينما يكون على الأرض 9.8 m/s^2 . افترض أن جسمًا يسقط من ارتفاع ابتدائي يبلغ 120 مترًا فوق سطح كل كوكب.

- على سطح أي كوكب سيسهل الجسم أولاً؟ **الأرض**
- كم البدة التي سيستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض على كل كوكب؟ قرب كل إجابة لأقرب جزء من عشرة. **الأرض: 4.9 ثانية، المريخ: 8.0 ثوان**
- هل تبدو الأزمنة التي يستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض منطقية؟ اشرح استنتاجك.

الرسم قبل أن تبدأ شيئا، برسم صورة، تده فاشتها على إطار خشبي. يبلغ طول الإطار 60 سنتيمترا وعرضه 4 سنتيمترات، ولديها ما يكفي من الفناش لتغطية 480 سنتيمترا مربعا. ونقرر شيئا زيادة أبعاد الإطار. فإذا كانت الزيادة في الطول 10 أضعاف الزيادة في العرض، فما هي الأبعاد التي يكون عليها الإطار؟ 6 سنتيمترات في 80 سنتيمترا.

عدد الجذور	$b^2 - 4ac$	كثي حدود
1	0	$x^2 - 8x + 16$
2	97	$2x^2 - 11x + 3$
0	-72	$3x^2 + 6x + 9$
0	-24	$x^2 - 2x + 7$
1	0	$x^2 + 10x + 25$
لا يوجد حل	لا يوجد حل	$x^2 + 3x + 12$

لأن $b^2 - 4ac$ سالبة، ليس للمعادلة حلول حقيقية لأن حساب الجذر التربيعي لعدد سالب لا ينتج عدداً حقيقياً.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. المتباينة بتعريف $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$. اشتق المعادلة لجذور التماثل بإكمال المربع وإعادة كتابة المعادلة بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$. **48-52. انظر الهامش.**

49. الاستنتاج حدد عدد الحلول الموجودة في $C = bx + x^2$ إذا كان $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < C$. اشرح.

50. أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟ حدد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$$n^2 - n + \frac{1}{4} \quad n^2 + n + \frac{1}{4} \quad n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \quad n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}$$

51. مسألة غير محددة بإجابة اكتب معادلة تربيعية يكون الحل الوحيد لها 4.

52. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين الاستراتيجيات التالية لحل $x^2 - 5x - 7 = 0$: إكمال المربع والتبديل البعدي والتحليل إلى العوامل.

4 التقويم

تسمية الرياضيات أسأل الطلاب ما الإجراءات الرياضية التي يستخدمونها لحل المعادلة التربيعية عن طريق إكمال المربع.

إجابات إضافية

$$48. y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

هذه المعادلة الأخيرة لها شكل $y = a(x - h)^2 + k$ حيث تكون $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ و $h = -\frac{b}{2a}$ ولذلك، فإن محور التناظر هو $x = -\frac{b}{2a}$.

49. لا، الإجابة النموذجية: إذا أضفت $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ لكل طرف من أطراف المعادلة وكل طرف من أطراف المتباينة، تحصل على $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ و $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ بما أن الطرف

الأيسر للمعادلة الأخيرة يمثل مربعا كاملاً، إذن فهو لا يساوي عدداً سالباً $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. وبالتالي، لا توجد حلول حقيقية.

50. $n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}$ ؛ هذا هو ثلاثي الحدود الذي ليس مربعا كاملاً.

51. الإجابة النموذجية: $x^2 - 8x + 16 = 0$

52. الإجابة النموذجية: نظراً لأن المعامل الأساسي هو 1، فإن إكمال المربع أسهل. قد تُرسم الدالة بيانياً ذات الصلة مع آلة حاسبة بيانية واستخدام خيار التتبع، رغم ذلك، هذا أمر جيد فقط للتقدير. التحليل إلى عوامل غير ممكن.

تدريب على الاختبار الميماري

53. يبلغ طول المستطيل 3 أضعاف عرضه، وتبلغ مساحة المستطيل 75 سنتيمتراً مربعا. أوجد طول المستطيل بالسنتيمترات. **B**

A 25 B 15 C 10 D 5

54. الاحتمال في أحد النهجيات، يسحب العائزون في إحدى الألعاب قطعة نقود كجائزة، وتوجد قطعة نقود واحدة لكل جائزة، وتتضمن الجوائز 9 تذاكر أفلام، و 8 ألعاب محشوة، و 5 قبعات، و 10 حبال قفز، و 4 فلاذات لامعة، فما احتمال أن يكون أول شخص يسحب قطعة نقدية بتذكرة أفلام؟ **J**

F $\frac{1}{36}$ G $\frac{1}{9}$ H $\frac{9}{61}$ J $\frac{1}{4}$

56. يعمل عبد الكريم بتوصيل البيتزا لدى مطعم بيتزا كيتج. ويتقاضى 6 AED في الساعة بالإضافة إلى 2.50 AED لكل بيتزا يوصلها. وكسب عبد الكريم 280 AED الأسبوع الماضي، فإذا عمل ما مجموعه 30 ساعة، فكم عدد قطع البيتزا التي قام بتوصيلها؟ **C**

A 250 قطعة بيتزا
B 184 قطعة بيتزا
C 40 قطعة بيتزا
D 34 قطعة بيتزا

مراجعة شاملة

صف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبط بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. 57-62. انظر ملحق إجابات الوحدة 1. (الدرس 1-3)

57. $g(x) = -12 + x^2$

58. $h(x) = (x + 2)^2$

59. $g(x) = 2x^2 + 5$

60. $h(x) = \frac{2}{3}(x - 6)^2$

61. $g(x) = 6 + \frac{4}{3}x^2$

62. $h(x) = -1 - \frac{3}{2}x^2$

63. ألعاب الملاهي تطل لعبة شعبية في مدينة الملاهي الركاب إلى قمة برج تبلغ 250 متراً ثم تنزلهم، ومعالجة ارتفاع الركاب هي $h = -16t^2 + 250$ ، حيث h هو الارتفاع t هو الزمن بالتواني، وتوقف اللعبة نزول الركاب على ارتفاع 40 متراً من الأرض. أكتب معادلة تمثل نزول الركاب، كم الوقت المستغرق للهبوط من 25 متراً إلى 40 متراً؟ (الدرس 2-1)

40 = $-16t^2 + 250$ ؛ حوالي 3.6 ثوانٍ

صف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبط بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 3-1)

64. $g(x) = x^2 - 8$

65. $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

66. $h(x) = -x^2 + 5$

67. $g(x) = (x + 10)^2$

68. $g(x) = -2x^2$

69. $h(x) = -x^2 - \frac{4}{3}$

مُزاج ليلسار 10 لمسافة

انظر الهامش.

منعكس على المحور x ،
مُزاج لأسفل مسافة $\frac{4}{3}$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة $\sqrt{b^2 - 4ac}$ لكل مجموعة من القيم. وقرب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

70. $a = 2, b = -5, c = 2 \pm 3$

71. $a = 1, b = 12, c = 11 \pm 10$

72. $a = -9, b = 10, c = -1 \pm 8$

73. $a = 1, b = 7, c = -3 \pm 7.8$

74. $a = 2, b = -4, c = -6 \pm 8$

75. $a = 3, b = 1, c = 3$ ليس عدداً حقيقياً

التدريس المتمايز

الملحق اطلب من الطلاب حل $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{2} = 0$ عن طريق إكمال المربع. اسألهم كيف أن هذه الاستراتيجية تعانر بين التحليل إلى عوامل و الرسوم البيانية. 3، يمكن حل المعادلة بسهولة أكثر عن طريق التحليل إلى عوامل. قد لا ينتج عن الرسم البياني إجابة دقيقة.



مختبر الجبر أوجد القيمة العظمى أو الصغرى

1-3

في الدرس 1-3، تعرفنا على صيغة رأس المعادلة لدالة تربيعية. وسوف نتعلم كيفية كتابة المعادلات بصيغة الرأس واستخدامها لتحديد السمات الرئيسية للتشيلات البيانية للدوال التربيعية.

1 التركيز

الهدف

- أكمل المربع في التعبير التربيعي لإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة ذات الصلة.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الصف إلى مجموعات تحتوي كل منها على طالبين. العمل من خلال النشاط 1 كفصل. ثم اطلب من الطلاب العمل مع شركائهم لإكمال النشاطين 2 و 3.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين 1-8 و 11.

النشاط 1 إيجاد الحد الأدنى

اكتب $y = x^2 + 4x - 10$ بصيغة الرأس. حدّد محور التناثر والقيم القصوى والأصغار. ثمّ مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 10 \\ y + 10 &= x^2 + 4x \\ y + 10 + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\ y + 14 &= (x + 2)^2 \\ y &= (x + 2)^2 - 14 \end{aligned}$$

الدالة الأصلية
أضف 10 إلى كل طرف.
نظرًا لأن $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ أضف 4 إلى كل طرف.
حلل إلى العوامل $x^2 + 4x + 4$
اطرح 14 من كل طرف لكتابة بصيغة الرأس

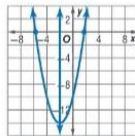
الخطوة 2 حدّد محور التناثر والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. يقع الرأس عند (h, k) أو $(-2, -14)$. ونظرًا لأنه لا توجد إشارة سالبة قبل الحد x^2 ، فإن القطع المكافئ يفتح لأعلى ويبلغ الحد الأدنى عند $(-2, -14)$. معادلة محور التناثر هي $x = -2$.

الخطوة 3 أوجد حل x لإيجاد الأصغار.

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ (x + 2)^2 - 14 &= 0 \\ (x + 2)^2 &= 14 \\ x + 2 &= \pm\sqrt{14} \\ x &\approx -5.74 \text{ or } 1.74 \end{aligned}$$

القيم الصغرى هي -5.74 و 1.74 تقريبًا.

الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتشيل الدالة بيانيًا.



قد يكون هناك معامل سلمي قبل الحد التربيعي. عندما يكون الأمر هكذا، فإن القطع المكافئ سوف يفتح لأسفل ويبلغ الحد الأقصى.

النشاط 2 إيجاد الحد الأقصى

اكتب $y = -x^2 + 6x - 5$ بصيغة الرأس. حدّد محور التناثر والقيم القصوى والأصغار. ثمّ مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 5 \\ y + 5 &= -x^2 + 6x \\ y + 5 &= -(x^2 - 6x) \\ y + 5 - 9 &= -(x^2 - 6x + 9) \\ y - 4 &= -(x - 3)^2 \\ y &= -(x - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

الدالة الأصلية
أضف 5 لكل طرف.
حلل إلى العوامل -1.
أضف 9 - إلى كل طرف، $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ نظرًا لأن
حلل إلى العوامل $x^2 - 6x + 9$
أضف 4 إلى كل طرف لكتابة بصيغة الرأس

3 التقييم

التقييم التكويني

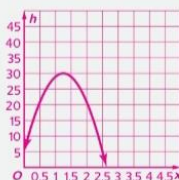
استخدم التمرين 9 و 10 لتقويم معرفة كل طالب فيما يتعلق بنموذج قمة الرأس والعثور على الأصفار. وخط التناظر والقيم القصوى.

من التطبيق إلى النظرية

اطلب من الطلاب تلخيص طريقة كتابة معادلة في نموذج قمة الرأس والعثور على الأصفار. وخط التناظر والقيم القصوى.

إجابات إضافية

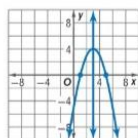
- الإجابة النموذجية: في نموذج قمة الرأس، يظهر x فقط مرة واحدة. يجب استخدام إكمال المربع لإنشاء ثلاثي حدود تربيعي كامل. بحيث يمكن ضربها وتقليل حدودها x إلى واحد.



30 ft; $t \approx 1.25$; 2.62 seconds

الخطوة 2 حدد محور التناظر والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. تقع الرأس عند (h, k) أو $(3, 4)$ وحيث إنه لا يوجد إشارة سالبة قبل الحد x^2 فإن القطع المكافئ مفتوح لأسفل ويبلغ الحد الأقصى عند $(3, 4)$ ومعادلة محور التناظر هي $x = 3$.

الخطوة 3 أوجد حل x لإيجاد الأصفار.



$$0 = -(x-3)^2 + 4 \quad y = 0$$

$$(x-3)^2 = 4$$

$$x-3 = \pm 2$$

$$x = 5 \text{ or } 1$$

أضف $(x-3)^2$ إلى كل طرف.
أحسب الجذر التربيعي لكل طرف.
أضف 3 لكل طرف.

الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتمثيل الدالة بيانياً.

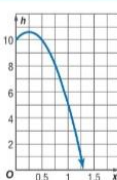
تحليل النتائج

1. لماذا نحتاج إلى إكمال المربع لكتابة معادلة دالة تربيعية بصيغة الرأس؟ **انظر الهامش.**

اكتب كل معادلة بصيغة الرأس. حدد محور التناظر والقيم القصوى والأصفار. ثم مثل الدالة بيانياً.

- $y = x^2 + 6x$
- $y = x^2 - 8x + 6$
- $y = x^2 + 2x - 12$
- $y = x^2 + 6x + 8$
- $y = x^2 - 4x + 3$
- $y = x^2 - 2.4x - 2.2$
- $y = -4x^2 + 16x - 11$
- $y = 3x^2 - 12x + 5$
- $y = -x^2 + 6x - 5$

النشاط 3 استخدام القيم القصوى في الحياة اليومية



الفوض تقفز ليلي من منصة الفوض إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل الفوض في حوض السباحة. الدالة $h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$ حيث h هو ارتفاع الفوض بالأمتار فوق حوض السباحة بعد عدد t من الثواني تقريباً لفوض ليلي. مثل الدالة بيانياً، ثم أوجد الحد الأقصى للارتفاع الذي تصل إليه ومعادلة محور التناظر.

الخطوة 1 مثل الدالة بيانياً.

الخطوة 2 أكمل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$$h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$$

$$h = -9.8(t - 0.25)^2 + 10.6125$$

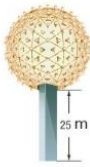
الخطوة 3 تقع الرأس عند $(0.25, 10.6125)$. لذا فإن أقصى ارتفاع هو 10.6125 متر. معادلة محور التناظر هي $x = 0.25$.

تمرين

- لعبة الكرة اللينة** تلقي مها كرة في الهواء. وفقاً للدالة $h = -16t^2 + 40t + 5$ حيث h هو الارتفاع بالأمتار و t يمثل الزمن بالثواني تقريباً لرمية مها. مثل الدالة بيانياً، ثم أوجد أقصى ارتفاع للكرة ومعادلة محور التناظر. متى تصطدم الكرة بالأرض؟ **انظر الهامش.**

اختبار الوحدة الأول

الدروس من 1-1 إلى 1-3



15. **الحفلات** يفيم والدًا عيبر حفلة تخرج من أجلها. في الساعة 10:00، سوف تترك كرة أسفل العمود بارتفاع 25 مترًا وستضيء، والدالة التي تمثل السقوط هي $h = -t^2 + 5t + 25$ حيث h هو ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t من الثواني فكم عدد الثواني التي تستغرقها الكرة للوصول إلى فاع العمود؟ (الدروس 1-2) **8.1 ثواني**

صف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبط بالتمثيل البياني لـ $x^2 = f(x)$. (الدروس 1-2)

16. $g(x) = x^2 + 3$ **مُزاج لأعلى 3 وحدات**

17. $h(x) = 2x^2$ **ممتد رأسيًا**

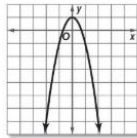
18. $g(x) = x^2 - 6$ **مُزاج لأسفل 6 وحدات**

19. $h(x) = \frac{1}{5}x^2$ **مضغوط رأسيًا**

20. $g(x) = -x^2 + 1$ **متعكس على المحور x ومزاج لأعلى وحدة واحدة**

21. $h(x) = -\frac{5}{8}x^2$ **متعكس على المحور x ومضغوط رأسيًا**

22. الاختيار من متعدد أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟ (الدروس 1-2) **D**



- A $y = -2x^2$
B $y = 2x^2 + 1$
C $y = x^2 - 1$
D $y = -2x^2 + 1$

حل كل معادلة مما يلي بإكمال المربع، وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدروس 1-3)

23. $x^2 + 4x + 2 = 0$ **-3.4, -0.6**

24. $x^2 - 2x - 10 = 0$ **-2.3, 4.3**

25. $2x^2 + 4x - 5 = 7$ **-3.6, 1.6**

استخدم جدول قيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال والهدى. (الدروس 1-4) **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

1. $y = x^2 + 3x + 1$

2. $y = 2x^2 - 4x + 3$

3. $y = -x^2 - 3x - 3$

4. $y = -3x^2 - x + 1$

درس الدالة $4 - 5x + x^2$. $x = 2.5$ $y = -4$. (الدروس 1-4)

5. اكتب معادلة محور التماثل.

6. أوجد إحداثيات الرأس. هل تمثل نقطة عكس أم صفري؟ (2.5، -2.25) **الحل الأيسر**

7. مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

8. **كرة القدم** تتركل كرة من مستوى سطح الأرض بسرعة ابتدائية نحو الأعلى بارتفاع 90 مترًا في الثانية. وتغطي المعادلة $h = -16t^2 + 90t$ ارتفاع الكرة h بعد عدد t من الثواني. (الدروس 1-1)

a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟ **74 مترًا**

b. كم عدد الثواني التي تستغرقها الكرة للوصول إلى أقصى ارتفاع لها؟ **2.8125 ثانية**

c. متى يكون ارتفاع الكرة صفرًا؟ وماذا تمثل هذه النقاط في هذه الحالة؟

حل كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يمكن إيجاد جذور صحيحة، فقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. (الدروس 1-2)

9. $x^2 + 5x + 6 = 0$ **-3, -2** $t = 0, t = 5.625$ **8c.**

10. $x^2 + 8 = -6x$ **-4, -2** **قبل أن تتركل الكرة.**

11. $-x^2 + 3x - 1 = 0$ **0.4, 2.6** **بالأرض بعد الركل.**

12. $x^2 = 12$ **-3.5, 3.5**

13. **كرة القاعدة** يضرب جبال كرة القاعدة. وتُشكل المعادلة $h = -16t^2 + 120t$ ارتفاع الكرة h بالأمتار بعد t من الثواني. فكم تبقى الكرة في الهواء؟ (الدروس 1-2) **7.5 ثانية**

14. **البناء** يصلح كريم السفن من سفينة. ورجاء أسقط صندوق السامبر من ارتفاع 14 مترًا. يمكن تمثيل هذا بالمعادلة $h = -16t^2 + 14$ حيث h هو الارتفاع بالأمتار و t هو الزمن بالثواني. صف كيفية ارتباط التمثيل البياني بـ $t^2 = h$.

(الدروس 1-2) **مضغوط رأسيًا ومزاج لأعلى 14 وحدة**

32 | الوحدة 1 | اختبار الوحدة الأول

الوحدة 1 اختبار الوحدة الأول

التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقويم التقدم المحرز من قبل الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

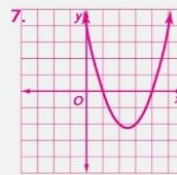
بالنسبة للمسائل المجاب عليها بشكل غير صحيح، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس الموضحة بين قوسين.

مطويات منظم الدراسة

مطويات ديناميكية

شجّع الطلاب على مراجعة المعلومات المتعلقة بالدروس من 2-1 حتى 2-4 الموجودة في مطوياتهم قبل إكمال اختبار منتصف الوحدة.

إجابة إضافية





1-4 مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل بيانات من الحياة اليومية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لتمثيل نقاط البيانات التي يمثل معها المنحنى الأفضل ملائمة دالة تربيعية.

الماء: هناك زجاجة مملوءة بالماء، يسمح للبياء بالتسرب من خلال ثقب صنع بالغرب من قاع الزجاجة. ويوضح الجدول مستوى المياه Y مخبأ بالستينترات من قاع الزجاجة بعد X ثوانٍ.

الزمن (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
مستوى المياه (cm)	42.6	40.7	38.9	37.2	35.8	34.3	33.3	32.3	31.5	30.8	30.4	30.1

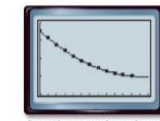
أوجد ومثل بيانياً معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية. حدد أي المعادلتين أفضل ملائمة للبيانات.

النشاط

الخطوة 1: أوجد ومثل بيانياً معادلة انحدار خطية.

- أدخل الأرقام في $L1$ ومستويات المياه في $L2$. ثم أوجد معادلة انحدار خطية.
- خطوات العملية على الحاسبة: ارجع إلى الدرس I-5.
- استخدم STAT PLOT من أجل التمثيل البياني لمخطط انتشار. انسخ المعادلة إلى القائمة $Y=$ ومثلها بيانياً.

خطوات العملية على الحاسبة: مراجعة المخططات الإحصائية والتمثيل البياني لمعادلة انحدار في الدرس I-5.



لاحظ أن التمثيل البياني لمعادلة الانحدار الخطي يظهر مائلاً ينطفيئ بيانات فقط. ومع ذلك، يتناسب التمثيل البياني لمعادلة الانحدار التربيعي مع البيانات بشكل جيد جداً.

التمايز

1-3. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

راجع الجدول.

- أوجد ومثل بيانياً معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية للبيانات. حدد أي المعادلتين أفضل ملائمة للبيانات.
- قارن ارتفاع قدم اللاعب بعد ثانية و 15 ثانية. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من معقولية تقديراتك.
- قارن وبين الفرق بين التقديرات التي حصلت عليها في التمرين 2.
- كيف يمكن لاختيار معادلة انحدار لا تتناسب مع البيانات بشكل جيد أن يؤثر على التنبؤات المقدمة باستخدام المعادلة؟ **يمكن أن يعطي تنبؤات مضللة.**

33

1 التركيز

الهدف: استخدام حاسبة التمثيلات البيانية لنمذجة نقاط البيانات التي تصنع منحنى الدالة التربيعية كأشبه منحنى.

المواد اللازمة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيلات البيانية

نصيحة تدريسية

في الخطوة 2، قيمة المعامل a تظهر كـ $-2.1035215E-4$. وضح أن هذه هي الطريقة التي تعرض بها الآلة الحاسبة لترميز علمي $-2.1035215 \times 10^{-4}$.

عندما يستخدم الطلاب الإجراء في الخطوة 2 لنسخ معادلة الانحدار من الخطوة 1 إلى القائمة $Y=$. فإن المعاملات ستكون بها أرقام أكثر من المعاملات المعروضة على الشاشة الرئيسية. المعاملات على الشاشة الرئيسية هي أعداد مقربة لتلك الموجودة في القائمة $Y=$.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسم الطلاب في مجموعات من اثنين أو ثلاثة بقدرات متنوعة. اطلب من المجموعات العمل على النشاط

- تأكد من أن الطلاب اخلوا القوائم $L1$ و $L2$ قبل ادخال البيانات الجديدة. أيضاً اجعلهم يدخلون قياسات **الناقذة** الظاهرة.

- في الخطوة 1، وضح أنه يمكن استخدام نفس المفاتيح الظاهرة في الخطوة 2، باستبدال 4 لأول 5، لتحديد LinReg.

- في حالة ظهور رسالة خطأ في الخطوة 2، على الطلاب مسح قمتافلا $Y=$ قبل إعادة خطوة 2.

تدريب: اطلب من الطلاب تقويم إكمال تمارين 1-4.

3 تقويم

تقويم مستمر

استخدم التمرين 4 لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون أن معادلة الانحدار التي لا تتناسب البيانات جيداً هي نموذج ضعيف للبيانات المعطاة وأنه من المرجح أن تكون توقع ضعيف.

الانتقال من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب أن يفسروا كيف أن مخطط التشتت مفيد لاكتساب معرفة عن الروابط الممكنة بين متغيرين. إذا أظهر مخطط التشتت أن البيانات في خط مستقيم، فقد تكون المعادلة الخطية نموذجاً جيداً. ينبغي استكشاف نموذج غير خطي.

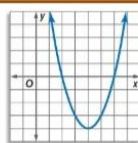
حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

1-4

السابق

الحالي

لماذا؟



التمثيل البياني
لـ $x^2 - 8x + 12 = 0$
تقاطعات المحاور x .

الصفة **المحللة إلى العوامل** من المعادلة التربيعية هي $p(x - q) = 0$ ، وفي المعادلة، نمثل p و q بتقاطعات مع المحور x على التمثيل البياني للمعادلة.

تقاطعات المحور x للتمثيل البياني الموجود على

اليمين هي 2 و 6. وفي هذا الدرس، سوف نتعلم

كيفية تحويل معادلة تربيعية في الصيغة المحللة

إلى العوامل إلى الصيغة القياسية والعكس.

الصفة القياسية: $0 = x^2 - 8x + 12$

الصفة المحللة إلى العوامل: $0 = (x - 6)(x - 2)$

العوامل

أوجدت العوامل
المشتركة الكبرى
لمجموعات الأعداد.

كتابة معادلات تربيعية
بالصيغة القياسية لها.

حل المعادلات
التربيعية باستخدام
التحليل إلى العوامل.

1 التركيز

التخطيط الرئيسي

قبل الدرس 3-1 أوجد التحليل إلى العوامل المشترك الأكبر لمجموعة من الأرقام.

الدرس 3-1 اكتب المعادلات التربيعية في شكل تقاطع. حل المعادلات التربيعية بواسطة التحليل إلى العوامل.

بعد الدرس 3-1 حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.

المفردات الجديدة

صيغة محللة إلى العوامل
factored form
طريقة فويل
FOIL method

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تدرجية
وكتابة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

هل قرأ الطلاب قسم **لماذا؟** في الدرس

أسأل:

■ هل $x^2 - 8x + 12$ لديها قيمة

مغلقة أم قيمة صغيرة؟ **أصفر**

■ حل $x^2 - 8x + 12 = 0$ بالرسم

البياني. **2, 6**

■ قارن الحلول بـ

$x^2 - 8x + 12 = 0$ و

$0 = (x - 6)(x - 2)$. **الحلول هي**

نفسها لأن المعادلات متكافئة.

الصفة القياسية يمكنك استخدام طريقة فويل لكتابة المعادلة التربيعية المكتوبة بالصيغة المحللة إلى العوامل بالصيغة القياسية. تستخدم **طريقة فويل** خاصية التوزيع لضرب ذوات الحدين.

المفهوم الأساسي طريقة فويل لضرب ذوات الحدين

الشرح لضرب اثنين من ذواتي حدين. أوجد مجموع فواتج ضرب "الحدود الأولى"، و "الحدود الطرفية"، و "الحدود الوسطى"، و "الحدود الأخيرة".

أمثلة

مثال 1: $(x - 6)(x - 2)$

$= (x)(x) + (x)(-2) + (-6)(x) + (-6)(-2)$

$= x^2 - 2x - 6x + 12$ or $x^2 - 8x + 12$

مثال 2: تحويل الجمل إلى معادلات.

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $\frac{1}{3}$ و 6 كجذرين لها.

$(x - p)(x - q) = 0$. اكتب النمط.

$(x - \frac{1}{3})(x - 6) = 0$. عوض بـ $\frac{1}{3}$ و 6.

$(x + \frac{1}{3})(x - 6) = 0$. بسط.

$x^2 - \frac{17}{3}x - 2 = 0$. اضرب.

$3x^2 - 17x - 6 = 0$. اضرب كل طرف في 3 بحيث تكون b و c أعدادًا صحيحة.

تمرين موجّه

$4x^2 + 17x - 15 = 0$

1. اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $\frac{3}{4}$ و -5 كجذرين لها.

2 حل المعادلات باستخدام التحليل إلى العوامل

حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل هو تطبيق على خاصية ناتج الضرب الصفري.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصفري

الشرح بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b ، إذا كان $ab = 0$ فإن إما $a = 0$ أو $b = 0$ أو كل من a و b يساوي 0.

مثال إذا كان $0 = (x + 3)(x - 5)$ ، فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$.

مثال 2 تحليل العامل المشترك الأكبر

حل المعادلة $16x^2 + 8x = 0$.

المعادلة الأصلية.
أخرج العامل المشترك الأكبر.
 $8x(2x + 1) = 0$
خاصية التوزيع
 $8x = 0$ أو $2x + 1 = 0$
خاصية ناتج الضرب الصفري
حل كلتا المعادلتين.
 $x = 0$ $2x = -1$
 $x = -\frac{1}{2}$

تبرين موجه حل كل معادلة.

2A. $20x^2 + 15x = 0$ 0, $-\frac{3}{4}$ 2B. $4y^2 + 16y = 0$ 0, -4 2C. $6a^5 + 18a^4 = 0$ 0, -3

مراجعة المفردات

المربع الكامل هو عدد يكون جذره التربيعي موجبا وعددا صحيحا

نصيحة دراسية

الجذور التربيعية بالنظر. لاحظ أن الجذرين التربيعيين للعدد 64 هما 8 و -8 أيضا. في المعادلة $x^2 = 4$ سيكون الحل 2 و -2.

مركز التعلم والتأهيل © جميع الحقوق محفوظة لمركز التعلم والتأهيل

1 النموذج المحلل

المثال 1 بين كيفية كتابة معادلة تربيعية لزوج معطى من الجذور.

التقييم المستر

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب معادلة تربيعية في صورة قياسية إذا كان $\frac{1}{2}$ و -5 هما جذراها. صوِّج الإجابة:
 $2x^2 + 9x - 5 = 0$

2 حل المعادلات بواسطة العوملة

المثال 2 و 3 بينان كيفية حل المعادلات التربيعية بواسطة العوملة والفحص.

المثال 4 بين كيفية حل المعادلات التربيعية باستخدام نبط.

المثال 5 بين كيفية حل مسألة في العالم الحقيقي باستخدام العوملة لحل معادلة تربيعية.

امثلة إضافية

2 حل كل معادلة.

a. $9y^2 + 3y = 0$
 $-\frac{1}{3}, 0$

b. $5a^2 - 20a = 0$ 0, 4

3 حل كل معادلة.

a. $x^2 - 6x + 9 = 0$ 3

b. $y^2 = 36$ -6, 6

مثال 3 المربعات الكاملة وفروق المربعات

حل كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 16x + 64 = 0$
 $x^2 = (x)^2$; $64 = (8)^2$ الجدان الأول والآخر مربعان كاملا.
 $16x = 2(x)(8)$ الحد الأوسط يساوي $2ab$.
 $x^2 + 16x + 64 = 0$ معادلة ثلاثية حدود مربع كامل.
المعادلة الأصلية
 $(x + 8)^2 = 0$ حلل إلى العوامل باستخدام النبط.
 $x + 8 = 0$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
 $x = -8$ الحل.

b. $x^2 = 64$
 $x^2 = 64$ المعادلة الأصلية
 $x^2 - 64 = 0$ اطرح 64 من كل طرف.
 $x^2 - (8)^2 = 0$ اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
 $(x + 8)(x - 8) = 0$ حلل فرق المربعات إلى العوامل.
 $x + 8 = 0$ أو $x - 8 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري
 $x = -8$ $x = 8$ الحل.

تبرين موجه

3A. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $\frac{2}{3}$ 3B. $81x^2 - 9x = 0$ 0, $\frac{1}{9}$ 3C. $6a^2 - 3a = 0$ 0, $\frac{1}{2}$

35

التدريس المهتم

إذا كان الطلاب يعتقدون الخطوات في المثال 1 تقدم المعادلة الوحيدة الممكنة للجذور البعاطة،

تزويد كل طالب بورقة الرسم البياني. اطلب من الطلاب أن تبدأ عن طريق رسم تنسيق الشبكة مع نقطتين على المحور x المرسومة مثل جذور معادلة تربيعية. اطلب من الطلاب رسم عدة فتلوع مكافئة والتي قد تمثل الرسوم البيانية للمعادلات المختلفة بوجود هاتين النقطتين كحلول لها. نشير إلى أن ذلك يثبت أن الخطوات الظاهرة في المثال 1 تفسر فقط واحدة من المعادلات المحتملة بوجود جذور معينة.

يتم استخدام نمط خاص عند تحليل ثلاثية الحدود التي بصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل. أولاً، أضرب قيمتي b و c . ثم أوجد قيمتي m و p بحيث يساوي ناتج ضربهما ac ويساوي مجموعهما b . انظر في $-30 = 6(-5) = -30$ في $6x^2 + 13x - 5$.

عوامل العدد	المجموع	عوامل العدد	المجموع
-30	30	-30	30
1, -30	-29	1, -30	-29
2, -15	-13	2, -15	-13
3, -10	-7	3, -10	-7
5, -6	-1	5, -6	-1

يمكن الآن كتابة الحد الأوسط $13x$ بالصيغة $-2x + 15x$.

يمكن الآن تحليل كثيرة الحدود هذه إلى العوامل من خلال التجميع.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13x - 5 &= 6x^2 + mx + px - 5 \\ &= 6x^2 - 2x + 15x - 5 \\ &= (6x^2 - 2x) + (15x - 5) \\ &= 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) \\ &= (2x + 5)(3x - 1) \end{aligned}$$

اكتب النمط.
 $m = -2$ و $p = 15$
تجميع الحدود.
إخراج العامل المشترك الأكبر
خاصية التوزيع

مثال 4 تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل

حل كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 9x + 20 = 0$
 $a = 20$ $b = 9$, $c = 20$

عوامل العدد	المجموع	عوامل العدد	المجموع
20	20	20	20
1, 20	21	1, 20	21
2, 10	12	2, 10	12
4, 5	9	4, 5	9

$$\begin{aligned} x^2 + 9x + 20 &= 0 \\ x^2 + mx + px + 20 &= 0 \\ x^2 + 4x + 5x + 20 &= 0 \\ (x^2 + 4x) + (5x + 20) &= 0 \\ x(x + 4) + 5(x + 4) &= 0 \\ (x + 5)(x + 4) &= 0 \\ x + 5 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 4 = 0 \\ x = -5 \quad \quad \quad x = -4 \end{aligned}$$

التعبير الأصلي
اكتب النمط.
 $m = 4$ و $p = 5$
تجميع الحدود بالعوامل المشتركة.
إخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع.
خاصية التوزيع
خاصية ناتج الضرب الصفري
حل كل معادلة.

b. $6y^2 - 23y + 20 = 0$
 $a = 20$ $b = -23$, $c = 20$
 $m = -8$, $p = -15$
 $6y^2 - 23y + 20 = 0$
 $6y^2 + my + py + 20 = 0$
 $6y^2 - 8y - 15y + 20 = 0$
 $(6y^2 - 8y) + (-15y + 20) = 0$
 $2y(3y - 4) - 5(3y - 4) = 0$
 $(2y - 5)(3y - 4) = 0$
 $2y - 5 = 0 \quad \text{أو} \quad 3y - 4 = 0$
 $2y = 5 \quad \quad \quad 3y = 4$
 $y = \frac{5}{2} \quad \quad \quad y = \frac{4}{3}$

المعادلة الأصلية
اكتب النمط.
 $m = -8$ و $p = -15$
تجميع الحدود بالعوامل المشتركة.
إخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع.
خاصية التوزيع
خاصية ناتج الضرب الصفري
حل كلتا المعادلتين.

نصيحة دراسية
البنية إذا كانت قيمتي m و p موجودتين. فعددتهن يمكن تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل دائماً.

نصيحة دراسية
ثلاثيات الحدود لا يتم إذا لم تعدل قيم m و p عند التجميع.

مثال إضافي

4 حل كل معادلة.

a. $x^2 - 2x - 15 = 0$
 $-3, 5$
b. $5x^2 + 34x + 24 = 0$
 $-\frac{4}{5}, -6$

تدريس المهارات الرياضية

البنية ينظر الطلاب المحترفين رياضياً عن كسب لتمييز نمط أو بنية. تشجيع الطلاب للبحث عن أنماط في العوامل ومجموعها، وخاصة عندما تكون العوامل لها إشارات معاكسة.

ركّز على المحتوى الرياضي

حل التربيعيات بواسطة العوملة يمكن حل المعادلات التربيعية باستخدام طرق مختلفة عديدة. العوملة يمكن أن تكون طريقة سريعة. بمجرد أن يتم تحليل المعادلة متعددة الحدود، قد تُستخدم خاصية حاصل الضرب التي تساوي صفر لإيجاد جذور المعادلة. إذا كانت المعادلة كثيرة الحدود من الصعب تحليلها أو غير قابلة للتحليل، يجب استخدام أساليب أخرى.

مثال إضافي

5 هندسة معبارة مدخل مبنى المكتبة عبارة عن قوس على شكل قطع مكافئ. قبة رأسه تمثل ارتفاع القوس. ارتفاع القوس المحطى كما يلي $h = 9 - X^2$ ، حيث X هي المسافة الأفقية من وسط القوس. كلا X و h يقاسان بالتقدم، مدى اتساع نطاق القوس على مستوى سطح الأرض؟ **6 قدم**

أفقيته!

معايير عامة خاطئة في المثال 5، بعض الطلاب قد يقترحوا حل المعادلة من خلال قسمة الطرفين على t ، تشير إلى أن هذا لا يمكن أن يتم لأن قيمة t يمكن أن تكون صفر والقسمة على صفر غير معرفة.

تمرين موجّه

4A. $x^2 - 11x + 30 = 0$ **5, 6** 4B. $x^2 - 4x - 21 = 0$ **-3, 7**
4C. $15x^2 - 8x + 1 = 0$ **$\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$** 4D. $-12x^2 + 8x + 15 = 0$ **$-\frac{5}{6}, \frac{3}{2}$**

مثال من الحياة اليومية 5 حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

ألعاب القوى يمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالتقدم باستخدام المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = K$ ، حيث t عن الزمن بالتواني بعد رمي الرمح. كم يظل الرمح محللاً في الهواء؟ لتحديد البدة التي يستغرقها الرمح وهو في الهواء، نحتاج إلى معرفة متى يساوي الارتفاع 0. يمكننا إجراء ذلك عن طريق حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$.

المعادلة الأصلية
 $-16t^2 + 79t + 5 = 0$
 $m = 80; p = -1$
 $-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$
 $(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$
 $16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$
 $(16t + 1)(-t + 5) = 0$
 $16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$
 $16t = -1$ $-t = -5$
 $t = -\frac{1}{16}$ $t = 5$
الحل.

تحقق لدينا حلال.

- الحل الأول سالب، وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالباً، فيمكن استبعاد هذا الحل.
- الحل الثاني 5 ثواني يبدو معقولاً للزمن الذي يستغرقه الرمح في الهواء.
- يمكن التأكد من الإجابة عن طريق التعويض في المعادلة الأصلية.

$-16t^2 + 79t + 5 = 0$
 $-16(5)^2 + 79(5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$
 $-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$
 $0 = 0$ ✓

ظل الرمح في الهواء لمدة 5 ثوان.

تمرين موجّه

5. التقفز بالحبال سجل جمال لشقيقه الغفز بالحبل من ارتفاع 300 متر، في الوقت الذي رفع الحبل شقيقه مرة أخرى لأعلى. كان على ارتفاع 44 متراً فوق سطح الأرض. إذا بدأ جمال التسجيل بمجرد سقوط شقيقه، كم من الوقت انقضى عندما ارتد الحبل مرة أخرى؟ استخدم المعادلة $KD = -16t^2 + c$ ، حيث c هي الارتفاع بالمتراً. **4 ثواني**



الرابط بالحياة اليومية

كسرت الكوبية أولمبيكس مينديز الرقم القياسي العالمي المسجل لرمي الرمح في عام 2002 بمسافة بلغت 71.52 متراً.
المصدر: صحيفة New York Times

التحقق من فهمك

- مثال 1 اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.
1. $-8, 5$ $x^2 + 3x - 40 = 0$ 2. $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ $8x^2 - 14x + 3 = 0$ 3. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ $6x^2 - 11x - 10 = 0$
- الأمتعة 2-4 حل كل كثيرة حدود إلى العوامل.
5. $(6x - 1)(3x + 4)$ 6. $(x - 7)(x + 3)$ 7. $(2x - 5)(x + 6)$ 8. $(x - 8)(x - 4)$
9. $16x^2 - 16x + 3$ 10. $x^2 - 12x + 32$ 11. $2x^2 - 24x = -72$ 12. $2x^2 - 2x - 2 = 0$
- مثال 5 حل كل من المعادلات التالية.
13. $x^2 - 36 = 0$ 14. $12x^2 - 18x = 0$ 15. $x^2 - 9x = 0$ 16. $2x^2 - 3x - 28 = 0$



16. الاستنتاج المنطقي: ثريد جورية مضاعفة مساحة حديقتها عن طريق زيادة الطول والعرض بنصف المتر. كم ستكون أبعاد حديقتها حينئذ؟ 9 م في 12 م

التمرين وحل المسائل

- مثال 1 اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.
17. 7 $x^2 - 14x + 49 = 0$ 18. $-3, \frac{1}{2}$ $2x^2 + 9x - 5 = 0$ 19. $\frac{1}{5}, \frac{6}{5}$ $5x^2 - 31x + 6 = 0$
- الأمتعة 2-4 حل كل كثيرة حدود إلى العوامل.
20. $40a^2 - 32a$ 21. $51c^3 - 34c$ 22. $32xy + 40bx - 12ay - 15ab$ 23. $3x^2 - 12$ 24. $15y^2 - 240$ 25. $48cg + 36cf - 4dg - 3df$ 26. $x^2 + 13x + 40$ 27. $x^2 - 9x - 22$ 28. $3x^2 + 12x - 36$ 29. $15x^2 + 7x - 2$ 30. $4x^2 + 29x + 30$ 31. $18x^2 + 15x - 12$ 32. $8y^2 - 4xz - 12z^2$ 33. $9y^2 - 25$ 34. $18x^2y^2 - 24xy^2 + 36y^2$ 35. $15x^2 - 84x - 36 = 0$ 36. $12x^2 + 13x - 14 = 0$ 37. $12x^2 - 108x = 0$ 38. $x^2 + 4x - 45 = 0$ 39. $x^2 - 5x - 24 = 0$ 40. $x^2 = 121$ 41. $x^2 + 13 = 17$ 42. $-3x^2 - 10x + 8 = 0$ 43. $-8x^2 + 46x - 30 = 0$ 44. الهندسة: يزيد طول وتر مثلث قائم الزاوية بمقدار 1 سنتيمتر عن طول أحد الأضلاع ويزيد 4 سنتيمترات عن ثلاثة أضلاع طول الضلع الآخر. أوجد أبعاد المثلث. 45. نظرية الأعداد: أوجد عددين صحيحين زوجيين متتاليين ناتج ضربهما 624. 24 أو 26 أو 24 و -26
- الهندسة: أوجد قيمة x وأبعاد كل مستطيل.
46. $A = 96m^2$ $(x-2)m$ $(x+2)m$ $x = 10$ في m 8 في m 12
47. $A = 432cm^2$ $(x-2)m$ $(x+4)m$ $x = 20$ في cm 24 في cm 18
48. $A = 448m^2$ $(x+2)m$ $(3x-4)m$ $x = 12$ في m 14 في m 32

38 | الدرس 1-4 | حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

خيارات الواجب المنزلي المتقدم

المرحلة	الواجب	ليومين
أساسي 3-م	17-48, 79, 82-103	91-103, 82-85, 79, 18-48 زوجي, 17-47 فردي, 87-90
أصلي 4-م	45-65, 44, 17-43 فردي, 71-79, 66-70, 82-103 فردي	49-79, 91-103
متطور 5-م	49-97	

أشرح باستخدام التكنولوجيا

كاميرا الوثائق اختر عدد من الطلاب للمشاركة بعملهم مع زملائهم بالصف وشرح إجاباتهم. اطلب من الطلاب مراجعة عملهم عن طريق التعويض بحلولهم في المعادلة الأصلية.

3 التمرين

التقويم المستمر

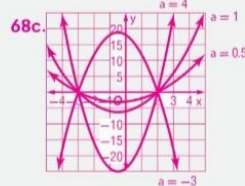
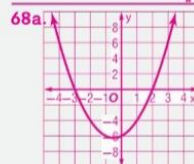
استخدم التمارين 1-16 للتأكد من الفهم.

استخدم الرسم البياني في أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات لطلابك.

تدريس الممارسات الرياضية

الفهم يبدأ الطلاب المحترفون رياضياً بشرح معنى المشكلة لأنفسهم ويبحثون عن نقاط الدخول لحليها. يقومون بتحليل المعطيات والقيود، والعلاقات، والأهداف. يتحققون من إجاباتهم للمسائل باستخدام أسلوب مختلف، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا منطقي؟".

إجابات إضافية



تمثيلات متعددة

في التدريب 68، يستخدم الطلاب الجبر والرسم البياني في مستوى إحداثي لربط عوامل المعادلة التربيعية بحلولها.

حل كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

$$49. 12x^2 - 4x = 5 \quad -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$$

$$50. 5x^2 = 15x \quad 0, 3$$

$$51. 16x^2 + 36 = -48x \quad -\frac{3}{2}$$

$$52. 75x^2 - 60x = -12 \quad \frac{2}{5}$$

$$53. 4x^2 - 144 = 0 \quad 6, -6$$

$$54. -7x + 6 = 20x^2 \quad \frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$$

55. السينما تخطط إحدى الشركات لبناء مجمع سينمائي ضخم. أخبر المحلل البياني مديرها بأن دالة الربح لدار السينما الخاصة بهم كانت $P(x) = -x^2 + 48x - 512$ حيث إن x هي عدد شاشات العرض، و $P(x)$ هي الربح المكتسب بآلاف الدراهم. حدد مدى إنتاج شاشات العرض الذي يضمن أن الشركة لن تخسر المال. من 16 إلى 32.

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.

$$56. -\frac{4}{7}, \frac{3}{8}$$

$$56x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$57. 3, 4, 0.6$$

$$25x^2 - 100x + 51 = 0$$

$$58. \frac{2}{11}, \frac{5}{9} \quad 99x^2 - 73x + 10 = 0$$

حل كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

$$59. 10x^2 + 25x = 15 \quad -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

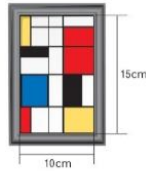
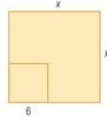
$$60. 27x^2 + 5 = 48x \quad \frac{5}{3}, \frac{1}{9}$$

$$61. x^2 + 0.25x = 1.25 \quad 1, -\frac{5}{4}$$

$$62. 48x^2 - 15 = -22x \quad \frac{3}{8}, -\frac{5}{6}$$

$$63. 3x^2 + 2x = 3.75 \quad -\frac{3}{2}, \frac{5}{6}$$

$$64. -32x^2 + 56x = 12 \quad \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$$



65. التصميم تم قطع مربع من الشكل الموجود على اليمين. اكتب تعبيراً عن مساحة الشكل المتبقي. ثم حلل التعبير إلى العوامل.

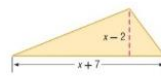
$$x^2 - 6x^2; (x + 6)(x - 6)$$

66. الهاتيرة بعد تحليل السوق، قامت إحدى الشركات التي تباع المواقع الإلكترونية بتحديد ربحية منتجاتها من خلال تشكيلها بالمعادلة $2035 - 368x - 16x^2 = P(x)$. حيث إن x هي سعر كل موقع إلكتروني و $P(x)$ هي ربح الشركة. حدد مدى سعر المواقع الإلكترونية الذي معه تكون الشركة رابحة. **AED 9.25 إلى AED 13.75**

67. اللوحات تريد أسماء إضافة إطار إلى لوحاتها. بحيث يكون موزعاً بالتساوي. ويكون له نفس مساحة اللوحة نفسها. ما هي أبعاد اللوحة مع إدراج الحد؟ **cm 20 في cm 15**

68. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تدرس $a(x - p)(x - q) = 0$.

- بيانيًا التمثيل البياني للمعادلة ذات الصلة مع $a = 1$.
- تحليلًا ما هي حلول المعادلة؟ 2 و -3 .
- بيانيًا التمثيل البياني للدوال ذات الصلة مع $a = 4$.
- لفظيًا ما أوجه التشابه والاختلاف بين التمثيلات البيانية؟
- لفظيًا ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها حول العلاقة بين الصيغة المحللة إلى العوامل للمعادلة التربيعية وحلولها؟



69. الهندسة تبلغ مساحة المثلث 26 سنتيمترًا مربعًا. أوجد طول القاعدة. **سم 13**

d68. الإجابة
النموذجية: لها جميعاً نفس الجذرين p و q . وبالتالي، لها جميعاً نفس الحلول. وتكون أشكال التمثيلات البيانية مختلفة نظراً لقيمة a . ويكون التمثيل البياني مع $a = -3$ معكوساً بسبب القيمة السالبة. **e68.** عندما يكون للمعادلات نفس التجميعية نفس العوامل، فسوف يكون لها نفس الحلول، بغض النظر عن قيمة a التي تؤثر فقط على أشكال التمثيلات البيانية.

تدريس التمارين الرياضية

مناقشات الطلاب الماهرون رياضياً
يفهمون ويستخدمون الافتراضات المذكورة والمتعارفة، والنتائج المحددة سابقاً في بناء الحجج. يخمّنون ويبنون تطور مخططي للبيانات لاستكشاف حقيقة تخمينهم. وأنهم قادرون على تحليل المواقف عن طريق تنسيقها إلى حالات، كما يمكنهم إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها.

انتبه!

تحليل الأخطاء بالنسبة للتدريس
79 ذكر الطلاب أنه عندما يتم طرح كثيرة الحدود، يتم تحقق كل حد في كثيرة الحدود. تحقق دائماً من الإجابات بالتعويض في المعادلة الأصلية.

إجابات إضافية

83. الإجابة النموذجية:
 $(x-p)(x-q) = 0$
(المعادلة الأصلية)
 $x^2 - px - qx + pq = 0$
(اضرب)
 $x^2 - (p+q)x + pq = 0$
(حوّل لأبسط صورة)
 $x = \frac{p}{2a}$
(صيغة محور التناظر)
 $x = -\frac{-(p+q)}{2(1)}$
 $a = 1$ و $b = -(p+q)$
 $x = \frac{p+q}{2}$
(تنسّط)

x يقع وسط p و q .
(تعريف نقطة المنتصف)

86. الإجابة النموذجية: في النموذج القياسي، لدينا $ax^2 + bx + c$. اضرب a و c . وبعد ذلك أوجد عددين صحيحين، h و g ، ثم اضرب لتساوي ac جميع لتساوي b . ثم اكتب التريمية، لتحوّل الحد الأوسط، bx ، إلى $gx + hx$. الآن لدينا $ax^2 + gx + hx + c$. الآن حل العامل المشترك الأكبر من أول حدين ثم حل العامل المشترك الأكبر من ثاني حدين. الآن لدينا $GCF(x-q) + GCF_2(x-q)$. من خلال التبسيط، نجد

70. كرة القدم عندما تُركل كرة قدم في الهواء، يمكن تمثيل الارتفاع بالأمتار فوق سطح الأرض من خلال المعادلة $14.7t^2 + 4.9t^2 - 4.9t^2 = -4.9t^2$ والمسافة التي تقطعها من خلال المعادلة $d = 16t$ حيث t هي الزمن بالثواني.

- a. كم استغرقت الكرة في الهواء؟ **3 ثوانٍ**
b. ما المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟ (يرشاد: تجاهل مقاومة الهواء). **m 48**
c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟ **m 11.025**

حلّ كل كثيرة حدود إلى العوامل.

71. $18a - 24ay + 48b - 64by$ $\frac{2(3-4y)}{(3a+8b)}$
72. $3x^2 + 2xy + 10y + 15x$ $(3x+2y)(x+5)$
73. $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$
74. $12a^2 - 18ab + 30ab^2$ $6a(2a-3b+5b^2)$
75. $32ax + 12bx - 48ay - 18by$ $10(a+2b)(3c+4d)$
76. $30ac + 80bd + 40ad + 60bc$ $10(a+2b)(3c+4d)$
77. $5ax^2 - 2by^2 - 5ay^2 + 2bx^2$ $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$
78. $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$ $(2c+d)(2c-d)(3x-4y)$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. تحليل الخطأ: حل كل من حورية وخديجة المعادلة $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.
خديجة: $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$
 $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$
 $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$
حورية: $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$
 $0 = 5x + 12x^2 - 12x^2$
حورية وخديجة حدود مائلة في الأقواس في المعادلة في السطر الثالث.
85. الإجابة النموذجية: دائماً من أجل التحليل إلى العوامل باستخدام ثلاثيات حدود مربع كامل يجب أن يكون معامل الحد الخطي، bx ، أحد مضاعفات العدد 2، أو عددًا زوجيًا.

80. تحذّر: حل المعادلة $0 = 39x^4 + 108x^2 - 3x^4$ عن طريق التحليل إلى العوامل. 0 أو 3 أو -3 أو 2 أو -2
81. تحذّر: فيما يلي أدناه توضح لقاعدة التحليل إلى العوامل فرق الكميات. استخدم هذه القاعدة للتحليل إلى العوامل $135x^2y^3 - 40x^2y^3$.
 $5x^2(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
82. مسألة غير محددة الإجابة: اختر عددين صحيحين ثم اكتب معادلة بالصيغة القياسية باستخدام الجذور. كيف ستغير المعادلة إذا تم تغيير إشارة الجذور؟
83. تحذّر: في معادلة تربيعية لها الصيغة $0 = p(x-q)$ ، أثبت أن محور تماثل الدالة التربيعية ذات الصلة يقع في المنتصف بين نقطتي التقاطع مع المحور x و p و q . **انظر الهامش.**
84. اكتب سؤالاً يستخدم أحد الرموز إستراتيجية حين ونحقق لتحليل عوامل ثلاثيات الحدود $bx^2 + c$ و $ax^2 + bx + c$. اكتب سؤالاً لمساعدته على التفكير في طريقة لاستخدام هذه الإستراتيجية مع $bx^2 + c$.
85. الفرضيات: حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.
في معادلة تربيعية بالصيغة القياسية، يكون كل من a و b و c أعداداً صحيحة. إذا كانت b عدداً فردياً، فلا يمكن أن تكون المعادلة التربيعية ثلاثية حدود مربع كامل.
86. الكتابة في الرياضيات: اشرح كيف تحلّ عوامل ثلاثية حدود بالصيغة القياسية مع $a > 1$. **انظر الهامش.**

40 | الدرس 1-4 | حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

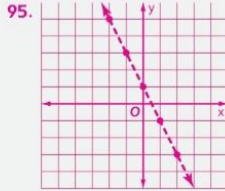
$$(GCF + GCF_2)(x-q) \text{ أو } (x-p)(x-q)$$

40 | الدرس 1-4 | حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

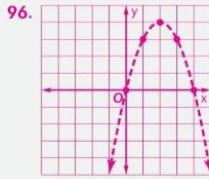
4 التقويم

تسمية الرياضيات على الطلاب شرح
خاصية حاصل الضرب في صفر. اطلب
منهم مناقشة لماذا هذا صحيح وكيفيه
يتم استخدامه في إيجاد جذور معادلة
تربيعية.

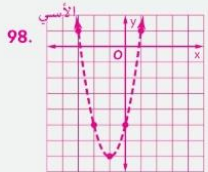
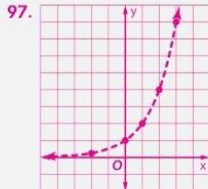
اجابات اضافية



خطي



تربيعي



تربيعي

تدريب على الاختبار المعياري

89. الاحتمال يمكن أن تحتوي كلمة مرور مكونة من 5 أحرف على أعداد من 0 إلى 9 و 26 حرفاً من الحروف الأبجدية. ولا يمكن تكرار أي من الأحرف. ما احتمال أن تبدأ كلمة المرور بحرف ساكن؟ **H**

F $\frac{21}{26}$

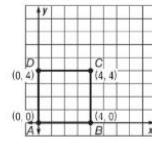
H $\frac{21}{36}$

G $\frac{21}{35}$

J $\frac{5}{36}$

90. SAT/ACT إذا كان $c = \frac{8a^3}{b}$ ، ماذا يحدث لقيمة c عندما يتم مضاعفة كل من a و b ؟ **D**

- A. لا تتغير.
B. يتم تضاعفها.
C. يتم مضاعفها.
D. يتم ضرب c في 4.
E. يتم ضرب c في 8.



87. إجابة قصيرة إذا تم تحويل $ABCD$ عن طريق $(x, y) \rightarrow (3x, 4y)$ فحدد مساحة $A'B'C'D'$. **192 وحدة مربعة**

88. في $4 + 2|6 - 3x| + y$ ، أي مجموعة نصف x عندما تكون $y < 6$ ؟ **A**

- A $\left\{x \mid \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}$ C $\left\{x \mid x < \frac{5}{3}\right\}$
B $\left\{x \mid x < \frac{5}{3} \text{ or } x > \frac{7}{3}\right\}$ D $\left\{x \mid x > \frac{7}{3}\right\}$

مراجعة شاملة

مثل كل دالة بيانياً. (الدروس 1-7) 19-49. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

91. $f(x) = |3x + 2|$

92. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{if } x > -1 \\ x + 3 & \text{if } x \leq -1 \end{cases}$

93. $f(x) = [x + 1]$

94. $f(x) = \left|\frac{1}{4}x - 1\right|$

مثل بيانياً كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسية. (الدروس 1-6) 95-98. انظر الهامش.

95. $\{(-2, 5), (-1, 3), (0, 1), (1, -1), (2, -3)\}$

96. $\{(0, 0), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 0)\}$

97. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\right\}$

98. $\{(-3, 1), (-2, -5), (-1, -7), (0, -5), (1, 1)\}$

99. المعرفة المالية حدد مبلغ الاستثمار إذا تم استثمار 250 درهماً بنسبة مريحة قدرها 7.3% تُركب بعدد ربع سنوي لمدة 40 سنة. (الدروس 1-3) **حوالي AED 4514.89**



100. القوس لتجنب الاصطدام بأي صخور. تقفز غواصة بالقرب من منحدرات صخرية لأعلى وللخارج. وتوضح المعادلة $h = -16t^2 + 4t + 26$ ارتفاعها h بالتر بعد t ثوانٍ من القفز. أوجد الزمن التي تعود فيه إلى ارتفاع 26 متراً. **0.25 ثانية** (1-2)

مراجعة المهارات

بنقط.

101. $\sqrt{5} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{3}$

102. $\sqrt{8} \times \sqrt{32} = 16$

103. $2\sqrt{3} \times \sqrt{27} = 18$

التدريس الهتاي

تمديد اطرح السؤال التالي على الطلاب:

إذا كانت جذور المعادلة التربيعية 6 و -3، ما هي معادلة محور التماس؟
 $x = \frac{3}{2}$

الأعداد المركبة

1-5

لماذا؟

الحالي

السابق



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1



انظر إلى الرسم البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ الموجود على اليمين. لاحظ كيف أن هذا الرسم البياني لا توجد به تقاطعات على المحور x وبالتالي ليس به أي جذور. هل يعني هذا أنه ليس هناك حلول للمعادلة $0 = x^2 + 2x + 4$ ؟

استخدم ميزة Solver (أزاد الحل) الموجودة في شاشة MATH (الرياضيات) بحاسبة التثليل البياني. أدخل المعادلة وحدد $x = 2$ باعتبارها تخمينك للحل.

اضغط على ALPHA ENTER وسوف نحاول الآلة الحاسبة حل المعادلة. ونشير الحاسبة من خلال رسالة الخطأ إلى عدم وجود حل. لذلك لا توجد حلول حقيقية. ومع ذلك، توجد حلول تخيلية.

1 إجراء العمليات باستخدام أعداد تخيلية.

2 إجراء العمليات باستخدام أعداد مركبة.

• قمت بتبسيط الجذور التربيعية.

1 التركيز

عمودي انحياز

قبل الدرس 1-5 تحويل الجذور التربيعية لأبسط صورة.

الدرس 1-5 تنفيذ عمليات على الأعداد التخيلية البحتة. تنفيذ عمليات على الأعداد المركبة.

بعد الدرس 1-5 حل المعادلات التربيعية باستخدام الثانون العام.

المفردات الجديدة

الوحدة التخيلية
imaginary unit
عدد تخيلي بحت
pure imaginary number
عدد مركب
complex number
متراقات مركبة
complex conjugates

ممارسات في الرياضيات
مراجعة الدقة

2 التدريس

أسئلة تدريجية

اطلب من الطلاب قراءة قسم من الدرس لماذا؟

أسأل:

■ على سطح الرسم البياني أين يوجد $y = 0$ ؟ على محور x

■ كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بـ $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟
الحل: $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟
المعادلة هي قيمة x التي تجعل الدالة تساوي صفر.

■ لماذا نغني رسالة "عدم تغير إشارة" أنه لا يوجد حلول للمعادلة؟ نموذج الإجابة، إذا مرت الدالة عبر محور x على الرسم البياني، تتغير قيمة الدالة من موجب إلى سالب، أو العكس

الأعداد التخيلية البحتة لقد عيلت في دراستك للرياضيات حتى الآن بأعداد حقيقية. وقد قادت المعادلات مثل المعادلة الواردة أعلاه علماء الرياضيات إلى تحديد أعداد تخيلية. ويتم تعريف الوحدة التخيلية بالعلاقة $i^2 = -1$ ويسمى العدد i الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 أي أن $i = \sqrt{-1}$.

نسمى الأعداد التي بالصيغة ai و $-2i$ و $i\sqrt{3}$ أعداداً تخيلية البحتة. والأعداد التخيلية البحتة هي جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. لأي عدد حقيقي موجب b ، و $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسط.

a. $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b. $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{6} \\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{-18}$

1B. $\sqrt{-125}$

خاصية التبديل وخاصية التجميع للضرب صحيحتان مع الأعداد التخيلية البحتة. موضح أدناه القوى الأسية البسيطة الأولى لـ i أدناه.

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^4)^2 = 1$

1 أعداد تخيلية بحتة

المثال 1 يبين كيفية تبسيط العبارات التي تحتوي على الجذور التربيعية للأعداد السالبة. **المثال 2** يبين كيفية الوصول إلى النتيجة من أرقام تخيلية نقية. **المثال 3** يوضح كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بحلول تخيلية بحتة.

تقويم مستمر

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد ادراك الطلاب للمفاهيم

أمثلة إضافية

1. $\sqrt{-28} \cdot 2i\sqrt{7}$
 2. $\sqrt{-32} \cdot 4i\sqrt{2}$
 3. $-3i \cdot 2i \cdot 6$
 4. $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-2} \cdot -2\sqrt{6}$
 5. $5y^2 + 20 = 0$. $y = \pm 2i$

انتبه!

منع الأخطاء احرص على أن يفهم الطلاب أنه عندما يأخذ كل منهم الجذر التربيعي لكل من طرفي من المعادلة، يجب استخدام الرمز \pm أمام إشارة الجذر

مثال 2 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

بسط.

a. $-5i \cdot 3i = -15i^2$
 $= -15(-1)$
 $= 15$
 بضرب.
 $i^2 = -1$
 بضرب.
 $i = \sqrt{-1}$
 بضرب.
 $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$
 $= i^2\sqrt{90}$
 $= -1 \cdot \sqrt{9 \cdot 10}$
 $= -3\sqrt{10}$
 بضرب.
 بضرب.

تمرين موجه

2A. $3i \cdot 4i$ 2B. $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ 2C. i^{31}

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستخدام **خاصية الجذر التربيعي** ومثل الفرق بين المربعات. يمكن تحليل مجموع مربعين إلى العوامل في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 3 المعادلة باستخدام الحلول التخيلية البحتة

$x^2 + 64 = 0$

الطريقة 1 خاصية الجذر التربيعي
 $x^2 + 64 = 0$
 $x^2 = -64$
 $x = \pm\sqrt{-64}$
 $x = \pm 8i$
الطريقة 2 التحليل إلى العوامل
 $x^2 + 64 = 0$
 $x^2 + 8^2 = 0$
 $x^2 - (-8^2) = 0$
 $(x + 8i)(x - 8i) = 0$
 $(x + 8i) = 0$ or $(x - 8i) = 0$
 $x = -8i$ $x = 8i$

تمرين موجه

حل كل من المعادلات التالية.

3A. $4x^2 + 100 = 0$ 3B. $x^2 + 4 = 0$

العمليات باستخدام الأعداد المركبة انظر إلى $2 + 3i$ حيث إن 2 هو عدد حقيقي و $3i$ عدد تخيلي بحت، فالحدود ليست متشابهة ولا يمكن جمعها. ويعرف هذا النوع من التعابير باسم **العدد المركب**

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$ حيث a و b عددين حقيقيين وتكون i وحدة تخيلية. وتسمى a الجزء الحقيقي، وتسمى b الجزء التخيلي.

أمثلة $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$



مقدمة من الحياة اليومية

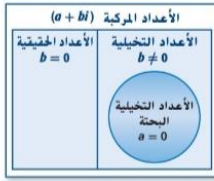
المهندس الكهربائي
 يصمم المهندسون الكهربائيون المعدات الكهربائية مثل مشغلات الموسيقى الرقمية والحركات الكهربائية وأنظمة الإضاءة والرادار والملاحة ويطورون هذه المعدات ويختبرونها ويشرفون على صنعها. ويلزم الحصول على درجة البكالوريوس في الهندسة لجميع الوظائف الهندسية للخريجين الجدد تقريباً.

مصدر: دليل وظيفتي © مجموعة أبحاث مكارم

التدريس المتمايز

إذا كان الطلاب بحاجة إلى المساعدة لتذكر الخصائص الرياضية لـ i ،

يجب على الطلاب كتابة قصائد عن عدد تخيلي وقيم تكرار جذره، كما يمكن التلاعب بكميات القيمة الحقيقية والتخيلية. يجب أن يكون مضمون القصائد مفيد لتذكر خصائص الرياضيات i .



يظهر مخطط فن مجموعة الأعداد المركبة.

- إذا كان $b = 0$ فإن العدد المركب عدداً حقيقياً.
- إذا كان $b \neq 0$ فإن العدد المركب تخيلياً.
- إذا كان $a = 0$ فإن العدد المركب عدداً تخيلياً بحتاً.

يتساوى عدداً مركبان فقط إذا تساوت الأجزاء الحقيقية لهما وتساوت الأجزاء التخيلية لهما أي أن $b = d$ و $a = c$ إذا كان $a + bi = c + di$

مثال 4 معادلة الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x و y التي تجعل $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

اجعل الأجزاء الحقيقية مساوية لبعضها البعض والأجزاء التخيلية مساوية لبعضها البعض.

$3x - 5 = 7$	أجزاء حقيقية	$y - 3 = 6$	أجزاء حقيقية
$3x = 12$	أضف 5 إلى كل طرف.	$y = 9$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 3.		

تمرين موجّه 4. $x = -1, y = -9$

4. أوجد قيمتي x و y التي تجعل $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

تكون خواص التبديل والتجميع والتوزيع للضرب والجمع صحيحة مع الأعداد المركبة. فبعد جمع أو طرح أعداد مركبة، أجمع بين الحدود المتماثلة. أي أجمع بين الأجزاء الحقيقية، وأجمع بين الأجزاء التخيلية.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

بسط.

a. $(5 - 7i) + (2 + 4i)$	خاصية التبديل وخاصية التجميع
$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$	بسط.
$= 7 - 3i$	
b. $(4 - 8i) - (3 - 6i)$	خاصية التبديل وخاصية التجميع
$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$	بسط.
$= 1 - 2i$	

تمرين موجّه

5A. $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ 5B. $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

نستخدم الأعداد المركبة مع الكهرباء، وفي هذه المسائل، نمثل i عادةً وحدة تخيلية. في الدائرة ذات التيار المتردد، يمكن تمثيل الجهد والتيار ومقاومة أو ممانعة التيار بأعداد مركبة. ولضماغة هذه الأعداد، استخدم طريقة فويل.

2 العمليات على الأعداد المركبة

مثال 4 يوضح كيفية مساواة الأعداد المركبة. مثال 5 يوضح كيفية جمع وطرح الأعداد المركبة. مثال 6-7 يبين كيفية ضرب وقسمة الأعداد المركبة.

امثلة إضافية

4. أوجد قيمة x و y التي تكون المعادلة $2x + yi = -14 - 3i$ حقيقي.

$x = -7, y = -3$

5. بسط

a. $(3 + 5i) + (2 - 4i) = 5 + i$

b. $(4 - 6i) - (3 - 7i) = 1 + i$

انتبه!

منع الأخطاء أكد على أن عددين مركبين يكونا متساويين فقط في حالة تساوى أجزائهم الحقيقية و التخيلية.

نصيحة دراسية

قراءة في الرياضيات يستخدم المهندسون الكهربائيون i كوحدة تخيلية لجذب التيار مع i الخاصة بالتيار.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السيورة البيضاء التفاعلية على ضرب عددين مركبين اضرب مثلاً على السيورة تستخدم فيه اللون الأحمر للإشارة للجزء التخيلي والأزرق للجزء الحقيقي من كل عدد مركب. في كل عملية حسابية، استخدم اللون الأحمر والأزرق للإشارة إلى الأجزاء التخيلية والحقيقية من الأعداد المركبة.

أمثلة إضافية

6 ترتبط الكهرباء في دائرة التيار المتردد، ونيار الكهرباء والمقاومة بالمعادلة $E = I \times Z$. أوجد الجهد الكهربائي في دائرة نيار شدته $1 + 4j$ أوم. $27 + 6j$ ohms . $3 - 6j$

7 يبسط

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{5i}{3-2i} \cdot \frac{10}{13} + \frac{15}{13i} \\ \text{b. } & \frac{5+i}{2i} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{2i} \end{aligned}$$

ركز على المحتوى الرياضي

الأعداد المركبة العدد المركب هو أي عدد يمكن أن يكتب في شكل $a + bi$ حيث يكون a و b أعداد حقيقية وأ وحدة تخيلية. i ، إذا كان $b = 0$ ، فالعدد المركب هو العدد الحقيقي إذا كان $b \neq 0$ ، فالعدد المركب هو التخيلي. إذا كانت $a = 0$ ، يصبح العدد المركب عد تخيلي. بحث تعد كل من الأعداد التخيلية البحتة والحقيقية مجموعات جزئية لمجموعة الأعداد المركبة لذا، كل عدد حقيقي مركب، وكل عدد تخيلي بحت هو عدد مركب.

مثال من الحياة اليومية 6 ضرب الأعداد المركبة

الكهرباء في دائرة التيار المتردد، يكون الجهد V ، والتيار C ، والمقاومة I مرتبطين بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $2 + 4j$ أمبير والمقاومة $9 - 3j$ أوم.

$$\begin{aligned} V &= C \cdot I \\ &= (2 + 4j) \cdot (9 - 3j) \\ &= 2(9) + 2(-3j) + 4j(9) + 4j(-3j) \\ &= 18 - 6j + 36j - 12j^2 \\ &= 18 + 30j - 12(-1) \\ &= 30 + 30j \end{aligned}$$

صيغة الكهرباء

$$I = 9 - 3j \text{ و } C = 2 + 4j$$

طريقة قوئل

اضرب.

$$j^2 = -1$$

اجمع.

يكون الجهد $30 + 30j$ فولت.

تمرين هويته 6، -2، -16 فولت

6. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $2 - 4j$ أمبير والمقاومة $3 - 2j$ أوم.

يطلق على عددين مركبين في الصيغة $a + bi$ و $a - bi$ اسم **عددين مركبان مترافقان**. واثنا ما يكون ناتج ضرب المترافقات المركبة عدداً حقيقياً، ويستخدم استخدام هذه الحقيقة لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

بسط.

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{2i}{3+6i} \\ & \frac{2i}{3+6i} = \frac{2i}{3+6i} \cdot \frac{3-6i}{3-6i} \\ & = \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2} \\ & = \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)} \\ & = \frac{6i + 12}{45} \\ & = \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i \end{aligned}$$

$3 + 6i$ و $6i - 3$ مترافقان مركبان.

اضرب.

$$j^2 = -1$$

بسط.

الصيغة $a + bi$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{4+i}{5i} \\ & \frac{4+i}{5i} = \frac{4+i}{5i} \cdot \frac{i}{i} \\ & = \frac{4i + i^2}{5i^2} \\ & = \frac{4i - 1}{-5} \\ & = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

اضرب في $\frac{i}{i}$

اضرب.

$$j^2 = -1$$

الصيغة $a + bi$

تمرين هويته

$$\begin{aligned} \text{7A. } & \frac{-2i}{3+5i} \\ \text{7B. } & \frac{2+i}{1-i} \end{aligned}$$



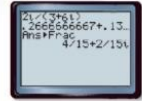
الربط بالحياة اليومية

يعتبر فرع مصابيح الأضواء المنزلية، مثلاً على دائرة التوالي، ويؤثر عدد المصابيح في الدائرة على قوة التيار مما يؤثر بالتالي على سطوع المصابيح.

المصدر: بحث Popular Science

نصيحة دراسية

التكنولوجيا يمكن إجراء العمليات على الأعداد المركبة باستخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus استخدم الدالة $2nd$ لإدخال التعبير ثم اضغط على **ENTER** **MATH** لمرجع الإجابة **ENTER**



مصدر: © 2013 Texas Instruments Incorporated. جميع الحقوق محفوظة.

3 التمرين

تقويم مستمر

استخدام تمارين 17-1 للتأكد من الفهم.

استخدام الرسم البياني في أسفل هذه الصفحة لتخصيص فروض للطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

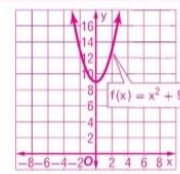
البنية يجب أن ينظر الطلاب الباهرون رياضيا عن كتب للتمييز بين النمط و البنية.

تمثيلات متعددة

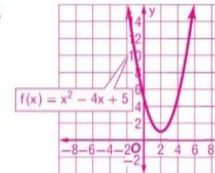
في التمرين 65، يستخدم الطلاب التمثيلات البيانية لتحليل المعادلات التربيعية التي لها جذور مركبة.

إجابات إضافية

65b.



65d.



65e. الإجابة النموذجية قد تشمل المعادلة التربيعية على حلول مركبة عند عدم تقاطعات على المحور الرأسي X بالرسم البياني المتعلق بالدالة

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 بخط.

1. $\sqrt{-81}$
3. $(4i)(-3i)$
5. i^{40}

2. $\sqrt{-32}$
4. $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$
6. i^{63}

مثال 3 حل كل من المعادلات التالية.

7. $4x^2 + 32 = 0$

8. $x^2 + 1 = 0$

مثال 4 أوجد قيمتي a و b التي تجعل كل معادلة صحيحة.

9. $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10. $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

الأمثلة 5 و 7 بخط.

11. $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12. $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13. $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14. $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15. $\frac{3-i}{4+2i}$

16. $\frac{2+i}{5+6i}$

مثال 6 17. الكهرباء يبلغ التيار في جزء من دائرة متوالية 5- أمبير. ويبلغ التيار في جزء آخر من الدائرة 7 أمبير. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي التيار في الدائرة. 6i + 12 أمبير

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 البنية بخط.

18. $\sqrt{-121}$

19. $\sqrt{-169}$

20. $\sqrt{-100}$

21. $\sqrt{-81}$

22. $(-3i)(-7i)(2i)$

23. $4i(-6i)^2$

24. i^{11}

25. i^{25}

26. $(10 - 7i) + (6 + 9i)$

27. $(-3 + i) + (-4 - i)$

28. $(12 + 5i) - (9 - 2i)$

29. $(11 - 8i) - (2 - 8i)$

30. $(1 + 2i)(1 - 2i)$

31. $(3 + 5i)(5 - 3i)$

32. $(4 - i)(6 - 6i)$

33. $\frac{2i}{1+i}$

34. $\frac{5}{2+4i}$

35. $\frac{5+i}{3i}$

مثال 3 حل كل من المعادلات التالية.

36. $4x^2 + 4 = 0$

37. $3x^2 + 48 = 0$

38. $2x^2 + 50 = 0$

39. $2x^2 + 10 = 0$

40. $6x^2 + 108 = 0$

41. $8x^2 + 128 = 0$

مثال 4 أوجد قيم x و y التي تجعل كل معادلة صحيحة.

42. $9 + 12i = 3x + 4yi$

43. $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

44. $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

45. $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

46. $a + 3b + (3a - b)i = b + bi$

47. $(2a - 4b)i + a + 5b = 15 + 58i$

46 | الدرس 1-5 | الأعداد المركبة

خيارات الواجب المنزلي المتهائز

المستوى	فروض	خيار ليومين
أساسي	18-60, 66, 68-91	19-59 فردي. 71-74
الأصل	61-91 فردي. 19-59	18-60, 71-74
متقدم	61-83	

46 | درس 1-5 | الأعداد المركبة

تعليم الممارسات الرياضية
تقد الطلاب الماهرون رياضيا قادرون
على مقارنة فعالية اثنين من الحجج
المعقولة و تمييز المنطق الصحيح من
المنطق الزائف، وإذا كان هناك عيب في
حجة—اشرحه

- الأمتة 5 و 7 بخط.
48. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$ 49. $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$ 50. i^{41}
51. $(4 - 6i) + (4 + 6i)$ 52. $(8 - 5i) - (7 + i)$ 53. $(-6 - i)(3 - 3i)$
54. $\frac{(5 + i)^2}{3 - i}$ 55. $\frac{6 - i}{2 - 3i}$ 56. $(-4 + 6i)(2 - i)(3 + 7i)$
57. $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$ 58. $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$ 59. $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

60. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في جزء من دائرة متوالية $8i + 7$ أوم، وتبلغ المقاومة في جزء آخر من الدائرة $4i - 13$ أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

61. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

62. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

63. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

64. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

65. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

66. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

67. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

68. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

69. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

70. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

71. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

72. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

73. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

74. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

75. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

76. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

77. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

78. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

79. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

80. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

81. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

82. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

83. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

84. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

85. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

86. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

87. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

88. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

89. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

90. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

91. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

92. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

93. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

94. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

95. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

96. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

97. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

98. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

99. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

100. **الكهرباء** استخدم الصيغة $V = C \cdot I$. $V = 3 + 6i$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - 2i$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27i$ فولت

4 التقويم

التحقق من فهم الطلاب يجب على الطلاب كتابة عددين مركبين حاصلتيهم 10 على قطع صغيرة من الورق وتسليمها لك عند خروجهم من الوحدة الدراسي. نموذج الإجابة، $1 + 3i$ و $1 - 3i$

إجابات إضافية

71b. $\angle AED \cong \angle CEB$ (زوايا رأسية)
 $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ (طولهما) x
 $\angle ADE \cong \angle CBE$ (معطى)
 تطابق كل الزوايا المتتالية والضلع المحصور بينها أدى ذلك إلى تطابق المثلثات وفقاً لخاصية ASA
 71c. $\overline{EC} \cong \overline{EA}$ في CPCTC (تطابق الأجزاء المتطابقة من المثلثات المتطابقة) إذن $EA = 7$, $EC = 7$.
 78. إجابة نموذجية حوالي 6.1 ثانية. هذه الإجابة تبدو معقولة للمعادلة أجابتي الحل الأول. 0.01 ثانية. وهو الوقت اللازم للكرة لترتفع من 1.4 m إلى 1.7 m. والوقت اللازم لها لتعود مرة أخرى إلى 1.7 m هو 6.1 ثانية

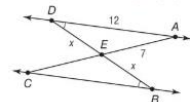
تدريب على الاختبار المعياري

73. SAT/ACT يتقاضى أحد المتاجر 49 AED للبطلون. يزيد هذا السعر بنسبة 40% عن البائع الذي يتكلمه المتجر لشراء البطلون. بعد التخفيضات، يسمح لأي موظف بشراء أي بطلونات متبقية بخصم 30% من تكلفة المتجر. كم ستبلغ تكلفة شراء البطلونات على الموظف بعد التخفيضات؟

- F AED 10.50 J AED 24.50
 G AED 12.50 K AED 35.00
 H AED 13.72

74. ما قيمتي x و y عندما يكون $(-1 - 3i) = (x + yi) + (5 + 4i)$ ؟
 A $x = 6, y = 7$
 B $x = 4, y = i$
 C $x = 6, y = i$
 D $x = 4, y = 7$

71. إجابة موسعة: انظر الشكل للإجابة على ما يلي: b, c . انظر الهامش.



- أ. حدد مثلثين متطابقين من خلال ذكر الرؤوس بالترتيب الصحيح.
 ب. اشرح سبب تطابق المثلثين.
 ج. ما طول \overline{EC} ؟ اشرح إجابتك.
 $b = (3 + 6)^2 \cdot 72$
 A $2 \times 3 + 2 \times 6$ C $3^2 + 6^2$
 B 9^2 D $3^2 \times 6^2$

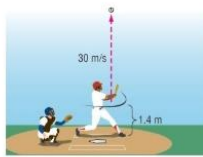
مراجعة شاملة

75. $2x^2 + 7x = 15$

76. $4x^2 - 12 = 22x$

77. $6x^2 = 5x + 4$

خُن كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 1-2)



78. البسبول: ضرب لاعب ببسبول الكرة لأعلى بسرعة ابتدائية بلغت 30 متراً في الثانية، وعلى ارتفاع 1.4 متر فوق سطح الأرض. يمثل ارتفاع الكرة بالسر والزمن t بالثواني بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.4$. ما مقدار الوقت لدى اللاعب الساتس للوصول أسفل الكرة إذا التقطها على ارتفاع 1.7 متر فوق سطح الأرض؟ هل تبدو إجابتك منطقية؟ اشرح. (الدرس 1-2) انظر الهامش.

79. الكهرباء: تساوي المقاومة في أحد أجزاء دائرة موصولة على التوالي $3 + 4i$ من وحدة الأوم، وتساوي المقاومة في جزء آخر من الدائرة $2 - 6i$ من وحدة الأوم. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة. (الدرس 1-3) $5 - 2i$ أوم

بسط. (الدرس 1-3)

80. $(8 + 5i)^2 = 39 + 80i$

81. $4(3 - i) + 6(2 - 5i) = 24 - 34i$

82. $\frac{5 - 2i}{6 + 9i} = \frac{4}{39} - \frac{19}{39}i$

83. $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, 20x^2 - 31x + 12 = 0$

84. $-\frac{2}{5}, 6, 5x^2 - 28x - 12 = 0$

85. $-\frac{1}{4}, -\frac{6}{7}, 28x^2 + 31x + 6 = 0$

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا.

86. $x^2 + 16x + 64$ نعم

87. $x^2 - 12x + 36$ نعم

88. $x^2 + 8x - 16$ لا

89. $x^2 - 14x - 49$ لا

90. $x^2 + x + 0.25$ نعم

91. $x^2 + 5x + 6.25$ نعم

48 | الدرس 1-5 | الأعداد المركبة

التدريس المتمايز

التوسع: أخبر الطلاب أنك تفكر في عددين مركبين حاصلتيهم $3 + i$ و $5 + 7i$. اطلب منهم إيجاد محصلة العددين $8 + 19i$

48 | درس 1-5 | الأعداد المركبة

مختبر الجبر المستوى المركب

النوع 1-5

1 التركيز

الهدف تمثيل الأعداد المركبة بيانياً في مستوى مركب وتحديد القيم المطلقة للأعداد المركبة.

نصيحة التدريس

يجب أن يكون الطلاب على علم بقانون المسافة قبل البدء في هذا المختبر.

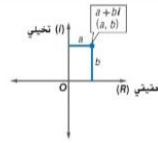
2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. ثم اطلب من كل ثنائي العمل على حل الأمثلة.

أسأل:

- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي كعدد مركب؟ اشرح. نعم، نموذج للإجابة: يمكن كتابة أي عدد حقيقي كالتالي $a + 0i$.
- ما هي الصلة بين القيمة المطلقة للعدد المركب والقيمة المطلقة للعدد الحقيقي؟ نموذج للإجابة: يمثل كل من القيمة المطلقة للعدد المركب والقيمة المطلقة للعدد الحقيقي مسافة الأعداد من الصفر.



يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ بيانياً في **المستوى المركب** من خلال شثله باستخدام النقطة (a, b) . وبصورة مشابهة للمستوى الإحداثي، يتكوّن المستوى المركب من محورين اثنين: شثّل المركبة الحقيقية على **المحور الحقيقي** وهو الأفقي وشثّل المركبة التخيلية على **المحور التخيلي** وهو الرأسي. ويمكن الإشارة إلى المستوى المركب أيضاً باسم **بمستوى أرجاند (ar GON)**.

مثال 1 التمثيل البياني في المستوى المركب

مثّل بيانياً $z = 3 + 4i$ في المستوى المركب.

الخطوة 1 مثّل z بالنقطة (a, b) .

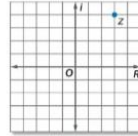
المركبة الحقيقية a لـ z هي العدد 3.

المركبة التخيلية bi لـ z هي $4i$.

يمكن تمثيل z بالنقطة (a, b) أو $(3, 4)$.

الخطوة 2 مثّل بيانياً z في المستوى المركب.

أشّس المستوى المركب وعيّن النقطة $(3, 4)$.



تذكّر أنه في الأعداد الحقيقية، شثّل القيمة المطلقة مسافة العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبصورة مشابهة، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي مسافته عن نقطة الأصل في المستوى المركب. وعند شثّل $a + bi$ بيانياً في المستوى المركب، فإن القيمة المطلقة لـ $a + bi$ هي المسافة من (a, b) إلى نقطة الأصل. ويمكن إيجادها من خلال قانون المسافة.

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة للعدد المركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



مختبر الجبر المستوى المركب

تمرين: على الطلاب إكمال التمارين 1-9.

3 التقويم

التقويم المستمر

استخدم التمارين 4-6 لتقويم قدرة الطلاب على إيجاد القيمة المطلقة لعدد مركب.

من المادي إلى المعنوي: أسأل:

- ما هي القيمة المطلقة للتالي $z = a + bi$ عندما تكون $b = 0$ ؟
أشرح. $|a|$ ، نموذج للإجابة: عندما تكون $b = 0$ ، فإن القيمة المطلقة لـ z تكون $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2}$ or $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^2}$.
يمكن كتابتها كالتالي $|a|$.
- هل يمكن للنقطة (x, y) في مستوى مركب؟ الإحداثي أن تمثل بياناً في المستوى مستوي مركب؟ أشرح. لا، نموذج للإجابة: النقطة (x, y) لها مكونات وهي x و y . النقط التي يمكن مستوى مركب المستوى العقدي لها مكونات حقيقية و تخيلية.

مثال 2 القيمة المطلقة لعدد مركب

أوجد القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$.

الخطوة 1

حدد قيمتي a و b .
الركبة الحقيقية a لـ z هي -5 ، والركبة التخيلية b لـ z هي $12i$.
ومكداً $a = -5$ و $b = 12$.

الخطوة 2

أوجد القيمة المطلقة لـ z .

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169} \text{ or } 13$$

القيمة المطلقة لعدد مركب

$$b = 12 \text{ و } a = -5$$

بسط.

القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$ هي 13.

يمكن جمع الأعداد المركبة وطرحها بياناً.

مثال 3 التبسيط بالتمثيل البياني

بسط $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1

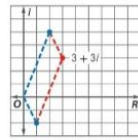
اكتب $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالصورة $(2i) + (2 + 5i - 1)$.

الخطوة 2

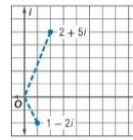
مثل $1 - 2i$ و $2 + 5i$ بياناً على المستوى المركب نفسه. صل كل نقطة بنقطة الأصل باستخدام قطعة مستقيمة متقطعة.

الخطوة 3

أكمل متوازي الأضلاع الذي يضم القطعتين المستقيمتين بمثابة اثنين من أضلاع. من نقطة يلتقي فيها الضلعان الإضافيان. حل $3 + 3i$ هو $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$.



الخطوة 3



الخطوة 2

التمارين

مثل كل عدد في المستوى المركب. 1-3. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

1. $z = 3 + i$

2. $z = -4 - 2i$

3. $z = 2 - 2i$

أوجد القيمة المطلقة لكل عدد مركب.

4. $z = -4 - 3i$

5. $z = 7 - 2i$

6. $z = -6 - i$

بسط بالتمثيل البياني. 7-9. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

7. $(6 + 5i) + (-2 - 3i)$

8. $(8 - 2i) - (4 + 7i)$

9. $(5 + 6i) + (-4 + 3i)$



مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات التربيعية

1-5B

يتمكّن استخدام الحاسبة البيانية المزودة بتقنية CAS لحل المعادلات التربيعية.

1 التركيز

الهدف استخدم آلة حاسبة تحتوي نظام حاسوب جبري لحل المعادلات التربيعية.

المواد اللازمة لكل مجموعة
حاسبة التمثيلات البيانية بتقنية CAS

نصيحة التدريس

حاسبة التمثيلات البيانية تفتح علي نفس الشاشة التي تم غلقها عليها. على الطلاب الضغط علي زر الصفحة الرئيسية للبدء في المختبر.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية
اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من فترتين أو ثلاث أفراد، وبقدرات متنوعة وذلك لإكمال النشاط و التمارين 1-3.

■ **X** المشار إليها في **المفاتيح** خطوات تشير إلى زر **X**. تأكد أن الطلاب لم يخطئوا الزر بإشارة الضرب والتي لا حاجة إليها في هذه الامثلة.

■ يتم عرض الحلول في شكل دقيق. للتحويل إلى الشكل العشري، تحت **قائمة**، اختر **عدد**، ثم اختر **تحويل** إلى شكل عشري

تدريب على الطلاب إكمال التمارين 4-9.

3 التقويم

تقويم مستمر

قم باستخدام التمرين 1 لتقويم إذا كان الطلاب باستطاعتهم استخدام إختيارات القائمة ثم حل المعادلة التربيعية.

من العملي إلى النظري

حاسبة التمثيلات البيانية ذات تقنية ال CAS يمكن أن تستخدم لحل التمارين 7-9 دون كتابة المعادلة أولاً بالشكل القياسي $(0 = ax^2 + bx + c)$.

توسيع المفهوم

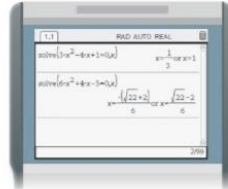
أسأل:

- هل إشارات الأعداد في معادلة تربيعية في النموذج القياسي تقدم أي أدلة حول ما إذا كانت حلولها مركبة؟ إجابة نموذجية إذا كان معامل x^2 و الحد الثابت لهما نفس الإشارة، فقد تكون الحلول مركبة.

النشاط إيجاد الجذور

حل كل من المعادلات التالية.

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$



الخطوة 1 أضف صفحة Calculator (حاسبة) جديدة.

الخطوة 2 اختر الأداة Solve (الحل) من القائمة Algebra.

الخطوة 3 اكتب $3x^2 - 4x + 1 = 0$ متبوعة بفاصلة X. ثم اضغط Enter (إدخال).
الحلّان هما $x = 1$ أو $x = \frac{1}{3}$.

b. $6x^2 + 4x - 3 = 0$

الخطوة 1 اختر أداة Solve (الحل) من القائمة Algebra (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $6x^2 + 4x - 3 = 0$ متبوعة بفاصلة X. ثم أدخل.
الحلّان هما $x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$.

c. $x^2 - 6x + 10 = 0$.

الخطوة 1 اختر أداة Solve (الحل) من القائمة Algebra (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $x^2 - 6x + 10 = 0$ متبوعة بفاصلة X. ثم اضغط enter (إدخال).
ترجع الآلة الحاسبة القيمة false (خطأ)، ويعني ذلك أنه لا توجد حلول حقيقية.

الخطوة 3 في القائمة، اختر Algebra (الجبر)، ثم Complex (مركب).
ثم Solve (الحل)، أعد إدخال المعادلة.
الحلّان هما $x = 3 \pm i$.

تدريب

حل كل من المعادلات التالية.

1. $x^2 - 2x - 24 = 0$

2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$

3. $0 = -3x^2 - 6x + 9$

4. $x^2 - 2x + 5 = 0$

5. $0 = 4x^2 - 8$

6. $0 = 2x^2 - 4x + 1$

7. $x^2 + 3x + 8 = 5$

8. $25 + 4x^2 = -20x$

9. $x^2 - x = -6$

اختبار الوحدة الثاني

الدروس من 1-4 إلى 1-5

التقييم المستمر

استخدم اختبار الوحدة الثاني لتقييم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

فيما يتعلق بالوسائل الخاطئة، على الطلاب مراجعة الدروس المحددة بين الأقواس.

التقييم الإلكتروني: عدّل اختبار الوحدة الثاني بما يتسق مع قدرات الطلاب وأعدّ نسخاً متعددة والحق معها معانيخ الإجابة.

محتويات تخطيط الدراسة

مطويات دينا زايفك®

قبل إكمال الطلاب لاختبار الوحدة الثاني، حثهم على الرجوع لمراجعة المعلومات الواردة في درس 2-1 للمطويات 2-2.

إجابة إضافية

- $x^2 - 9x + 14 = 0$
- $x^2 - 3x = 0$
- $x^2 - 3x - 40 = 0$
- $x^2 + 15x + 56 = 0$
- $x^2 + 9x + 18 = 0$
- $x^2 + x - 12 = 0$
- $2x^2 - 3x + 1 = 0$
- 24, 26
- الطول = 9 ft. العرض = 7 ft

a. اكتب معادلة تربيعية تمثل مساحة هذه المنطقة.

$$x^2 + 8x + 15 = 35$$

b. أوجد بعدي المنطقة التي صنعها جلال. 7 m في 5 m

16. **المثلثات** أوجد أبعاد مثلث إذا علمت أن قياس قاعدته يساوي $\frac{2}{3}$ من قياس ارتفاعه وتساوي مساحته 12 سنتيمترا مربعا. (الدرس 1-4)

$$\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = 12$$

17. **الغناء** بركب علي بلاطة إسبانية في فناء الخلفي. وكان بني أن يكون للبلاطة الأصلية البعدان 8 أمتار في 6 أمتار. ولكنه ارتأى أن يجعل البلاطة أكبر بإضافة X قدماً إلى كل ضلع. تساوي مساحة البلاطة الجديدة 120 متراً مربعا. (الدرس 1-4)



a. اكتب معادلة تربيعية تمثل مساحة البلاطة الجديدة.

$$x^2 + 14x + 48 = 120$$

b. أوجد أبعاد البلاطة. 12 متراً في 10 أمتار

بسط. (الدرس 1-5) $19. 11 + 9f$

$$18. \sqrt{-81}$$

$$20. (15 - 3i) - (4 - 12i)$$

$$22. (5 - 3i)(5 + 3i)$$

$$19. \sqrt{-25x^4y^5}$$

$$21. i^{37}$$

$$23. \frac{3-i}{2+5i}$$

24. تساوي المقامات في أحد أجزاء دارة موصول على التوالي $3 + 4i$ من وحدة الأوم وتساوي المقامات في جزء آخر من الدارة $6 - 7i$ من وحدة الأوم. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكلية في الدارة. (الدرس 1-5) $9 - 3i$ أوم

بسط. (الدرس 1-5)

$$25. (3 - 4i) - (9 - 5i) - 6 + i$$

$$26. \frac{4i}{4-i} - \frac{4}{12} + \frac{16}{17}$$

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 1-4)

$$1. 7, 2$$

$$2. 0, 3$$

$$3. -5, 8$$

$$4. -7, -8$$

$$5. -6, -3$$

$$6. 3, -4$$

$$7. 1, \frac{1}{2}$$

8. **نظرية الأعداد** أوجد عددين صحيحين موجبين متتاليين ناتج ضربهما 624. (الدرس 1-4)

9. **الهندسة** يزيد طول مستطيل ببعدار مترين عن عرضه. أوجد أبعاد المستطيل إذا علمت أن مساحته تساوي 63 متراً مربعا. (الدرس 1-4)

حلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 1-3)

$$10. x^2 - x - 12 = 0$$

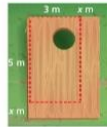
$$11. 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$12. x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$13. 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

14. اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية لها الجذران -6 و $\frac{1}{4}$. (الدرس 1-4)

15. **الألعاب** أنشأ عبيد منصة لعبة رمي أكياس الفاصوليا. وكان بعدا النتشة الأصلية في البخططات 3 أمتار في 5 أمتار. ولكنه جعل منشته أكبر بإضافة X متر إلى كل ضلع. مساحة النتشة الجديدة تساوي 35 متراً مربعا. (الدرس 1-4)



1 التركيز

تقويم أساسي

قبل البدء في درس 1-6 حلّ المعادلات عن طريق إكمال المربع.

درس 1-6 حلّ المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام. استخدم المميز لتحديد عدد ونوع الجذور في المعادلة التربيعية.

بعد الانتهاء من درس 1-6 حلّ المتباينات التربيعية باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية.

2 التدريس

الأسئلة المتدرجة

على الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الخاص بالدرس.

أسأل:

عند ارتفاع قيمة t في هذه المعادلة، ماذا يحدث لقيمة h ؟ ترفع القيمة ثم تنخفض.

ما هو شكل التمثيل البياني لهذه المعادلة؟ قطع مكافئ.

في أي اتجاه يفتح القطع المكافئ؟ نحو الأسفل.

القانون العام والمميز

1-6

لماذا؟

الحالي

السابق



1 حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.

2 استخدام المميز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها.

مسايرة منحنيي القطعين فعالية يتي فيها المشترك منحنيًا ويطلق بقطعة على هدف.

يمكن شغل مسار القطعة بالمعادلة التربيعية $-4.9t^2 + 117t + 42$ وفيها h ارتفاع القطعة و t عدد الثواني.

لكن تنبأ متى ستضرب القطعة الهدف، يمكنك حل المعادلة $-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$ كان.

ستعذر حل هذه المعادلة باستخدام التحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني أو إكمال المربع.

القانون العام لقد أوجدت حلول بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني وبالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي. وهناك أيضًا صيغة يمكن استخدامها في حل أي معادلة تربيعية. ويمكن اشتقاق هذه الصيغة من خلال حل الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية.

المفردات الجديدة
القانون العام
Quadratic Formula
discriminant
المميز

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعمير عن ذلك.

الحالة العامة	الحالة الخاصة
$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
المعادلة التربيعية القياسية	المعادلة التربيعية القياسية
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
اقسم كل طرف على a .	اقسم كل طرف على 2 .
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
اطرح $\frac{b^2}{4a^2}$ من كل طرف.	اطرح $\frac{b^2}{4a^2}$ من كل طرف.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$\left(x + 2\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
حلل الطرف الأيسر إلى العوامل.	حلل الطرف الأيسر إلى العوامل.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$\left(x + 2\right)^2 = \frac{7}{2}$
بسط الطرف الأيمن.	بسط الطرف الأيمن.
$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + 2 = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
خاصية الجذر التربيعي	خاصية الجذر التربيعي
اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف.	اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف.
$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
بسط.	بسط.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$
تعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ على أنها القانون العام.	

المفهوم الأساسي القانون العام

الشرح
تُعطي حلول المعادلات التربيعية ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$.
من خلال القانون التالي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال

نصيحة دراسية

القانون العام رغم أن التحليل إلى العوامل قد يكون طريقة أسهل لحل بعض المعادلات، إلا أنه يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

1 القانون العام

مثال 1 يوضح كيفية حل

معادلة تربيعية باستخدام القانون العام.

مثال 2 يوضح كيفية حل معادلة تربيعية

عند تبسيط مجذور القانون العام إلى

صفر. مثال 3 يوضح كيفية التعبير عن

الجذور الصماء (غير النسبية) في معادلة

تربيعية باستخدام صيغة جذرية. مثال 4

يوضح كيفية حل

معادلة تربيعية لحلول مركبة

عند تبسيط المجذور في القانون العام

لقيمة سالبة.

تقويم مستمر

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال

لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد الحل $x^2 - 8x = 33$
باستخدام القانون العام.
{-3, 11}

التركيز على محتوى الرياضيات

القانون العام أي معادلة تربيعية مكتوبة

بهذه الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$

حيث $a \neq 0$. يمكن حلها

باستخدام القانون العام. عوض بـ a ,

b ، و c في القانون العام لإيجاد قيمة

(قيم) x . القانون العام هي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ حيث } a \neq 0$$

مثال 1 جذران نسيان

حل $x^2 - 10x = 11$ باستخدام القانون العام.

أولاً، اكتب المعادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ وحدد a و b و c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$1x^2 - 10x - 11 = 0$$

بعد ذلك عوض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$

عوض عن a بـ 1 وعن b بـ -10 وعن c بـ -11.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$$

اضرب.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$

بسط.

$$= \frac{10 \pm 12}{2}$$

$$\sqrt{144} = 12$$

$$x = \frac{10 + 12}{2} \text{ or } x = \frac{10 - 12}{2}$$

اكتب في صورة معادلتين.

$$= 11$$

$$= -1$$

الحل $x = 11$ و $x = -1$.

التحقق عوض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$x^2 - 10x = 11$$

$$x^2 - 10x = 11$$

$$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$$

$$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$$

$$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$$

$$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$$

$$11 = 11 \checkmark$$

$$11 = 11 \checkmark$$

تمرين موجّه

حل كل معادلة باستخدام القانون العام.

$$1A. x^2 + 6x = 16$$

$$1B. 2x^2 + 25x + 33 = 0$$

التعليم الهتايي

إذًا عوض الطلاب بالقيم في القانون العام بشكل خاطئ.

إذًا شجع الطلاب على كتابة قيمة كل من a , b , و c من خلال الشكل القياسي للمعادلة التربيعية قبل البدء في التعويض في الصيغة.



الربط بتاريخ الرياضيات
براهماغوبتا (598-668)
قدم عالم الرياضيات الهندي
براهماغوبتا الخليفة الخامسة
الأولى لحل المعادلة التربيعية
 $ax^2 + bx = c$ والتي نعرف
الآن بالقانون العام.

مثال 2 الجذر النسبي الوحيد

حلّ $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستخدام القانون العام.

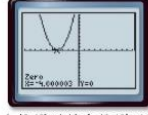
حدد a و b و c . ثم عوض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$= \frac{-8}{2} \text{ or } -4$$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

2A. $x^2 - 16x + 64 = 0$

القانون العام

عوض عن a بـ 1 عن b بـ 8 عن c بـ 16.

بسط.

$$\sqrt{0} = 0$$

الحل يساوي -4.

التحقّق يوضح التمثيل البياني للدالة ذات الصلة أنه لا يوجد حلّ عند $x = -4$.

تمرين هـ

حلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

2B. $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بالضبط من خلال كتابتها بالصيغة الجذرية.

مثال 3 الجذور غير النسبية

حلّ $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} \text{ أو } \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

3A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

القانون العام

عوض عن a بـ 2 وعن b بـ 6 وعن c بـ -7.

بسط.

$$\sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23} = 2\sqrt{23}$$

الحلّان التقريبيان هما -3.9 و 0.9.

التحقّق تحقق من هاتين النتيجتين باستخدام التمثيل البياني للدالة التربيعية ذات الصلة $y = 2x^2 + 6x - 7$. باستخدام الدالة الصغرى ZERO في حاسبة التمثيل البياني، يكون صفراً الدالة ذات الصلة هما -3.9 و 0.9.

تمرين هـ

حلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

3B. $x^2 - 8x + 9 = 0$

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة: قد يخلّق بعض الطلاب أن المعادلات بالأمتة 1 و 2 يمكن حلها عن طريق التحليل. قبل البدء في مثال 3، أكد على الطلاب أنه لا يمكن حل الكثير من المعادلات التربيعية باستخدام التحليل بسهولة. اذكر أن المعادلة التربيعية الموضحة في مثال 3 هي مثال لذلك. وأكد أن القانون العام تقدم طريقة لإيجاد الجذور لأي معادلة تربيعية.

أمثلة إضافية

2 أوجد الحل $x^2 - 34x + 289 = 0$ باستخدام القانون العام.

3 أوجد الحل $x^2 - 6x + 2 = 0$ باستخدام القانون العام.

$\{3 \pm \sqrt{7}\}$ ، أو تقريباً 0.4 و 5.6

عند استخدام القانون العام، إذا كانت قيمة الجذور سالبة، فسيكون الحل مركباً. ونبدو الحلول المركبة دائماً في صورة أزواج مترافقة.

نصيحة دراسية
نكتب حلولك بالصيغة $a + bi$ والتي تسمى أحياناً الصيغة القياسية للعدد المركب.

مثال إضافي

4. أوجد الحل $x^2 + 13 = 6x$ باستخدام القانون العام.
 $\{3 \pm 2i\}$

انتبه!

تجنب الأخطاء: ذكر الطلاب أن الأزواج المترافقة هي العددان المركبان للصيغة $a + bi$ و $a - bi$.

2 الجذور والمميز

مثال 5 يوضح كيفية إيجاد قيمة a لمعادلة تربيعية واستخدامه لوصف عدد الجذور في المعادلة ونوعها.

التركيز على المحتوى الرياضي

الجذور يمكن استخدام قيمة المميز لتحديد عدد ونوع الجذور في المعادلة التربيعية. تأمل معادلة تربيعية لها معاملات نسبية، إن كان المميز مربعاً كاملاً غير صفري، يوجد جذرين نسبيين. إن كان يساوي صفراً، يوجد جذر نسبي واحد. إن كان موجباً ولكنه ليس مربعاً كاملاً، يوجد جذرين غير نسبيين. إن كان عدداً سالباً يوجد جذرين مركبين.

مثال 4 الجذور المركبة

حل $x^2 - 6x = -10$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$= 3 \pm i$$

القانون العام

عوض عن a بـ 1 وعن b بـ -6 وعن c بـ 10.

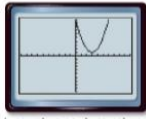
بسط.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} \text{ or } 2i$$

بسط.

الحلّان هما العددان المركبان $3 + i$ و $3 - i$.

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة المرشطة أن الحلين مركبان. ولكنه لا يساعدك في إيجادهما. وللتحقق من الحلين المركبين، عوض بهما في المعادلة الأصلية.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

$$x^2 - 6x = -10$$

$$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$$

$$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$$

$$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$$-9 - 1 = -10 \quad \checkmark$$

$$i^2 = -1$$

القانون العام

$$x = 3 + i$$

مرجع المجموع: خاصية التوزيع

بسط.

$$i^2 = -1$$

المعادلة الأصلية

$$x = 3 - i$$

مرجع المجموع: خاصية التوزيع

بسط.

$$i^2 = -1$$

تمرين موجّه

حلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

4A. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

4B. $x^2 - 4x = -13$

2 الجذور والمميز انشبه في الأمثلة السابقة إلى العلاقات القائمة بين قيمة التعبير الواقع تحت الجذر وبين جذور المعادلة التربيعية. ويطبق على التعبير $b^2 - 4ac$ اسم **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يمكن استخدام المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها. وليكن الجدول في الصفحة التالية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن استخدام المميز أيضاً للتحقق من عدد الحلول ونوعها بعد حلّ المعادلة. عندما تكون قيمة المميز في القانون العام صفراً، فيكون للمعادلة التربيعية بالضبط جذرٌ نسبيٌ وحيد.

مراجعة المفردات
المميز هو القيمة الواقعة تحت رمز الجذر

مثال إضافي

- 5 أوجد قيمة المميز لكل معادلة تربيعية، ثم صف عدد جذور المعادلة ونوعها.
- a. $x^2 + 3x + 5 = 0$
-11; جذران مركبان
- b. $x^2 - 11x + 10 = 0$
81; جذران حقيقيين

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام تجاوب الطلاب: اعط الطلاب معادلة تربيعية، واطلب منهم أن يستخدموا المميز لتحديد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة. اطلب منهم الإجابة في حالة A لجذرين مركبين، B لجذر واحد حقيقي، و C لجذرين حقيقيين.

المفهوم الأساسي المميز

تأمل الدالة $0 = ax^2 + bx + c$ ، حيث a و b و c أعداد نسبية و $a \neq 0$.

قيمة المميز	نوع الجذور وعددها	مثال عن تمثيل بياني لدالة مرتبطة
$b^2 - 4ac > 0$: $b^2 - 4ac$ مربع كامل.	جذران حقيقيان نسبيا	
$b^2 - 4ac > 0$: $b^2 - 4ac$ ليس مربعا كامداً.	جذران حقيقيان غير نسبيا	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي نسبي واحد مكرر	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

نصيحة دراسية
الجذور تذكر أن حلول أي معادلة تسمى بالجذور أو الأضراس. وهي القيم التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور الأفقي x.

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكل معادلة تربيعية، ثم صف عدد الجذور ونوعها.

- a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$
 $a = 7, b = -11, c = 5$
 $b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$
 $= 121 - 140$
 $= -19$
المميز سالب، هناك جذران مركبان.
- b. $x^2 + 22x + 121 = 0$
 $a = 1, b = 22, c = 121$
 $b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$
 $= 484 - 484$
 $= 0$
المميز يساوي الصفر، إذا هناك جذر نسبي واحد مكرر.

تمرين موجه

- 5A. $-5x^2 + 8x - 1 = 0$
- 5B. $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

57

التعليم المتمايز

التوسع: اكتب $x^3 - 8 = 0$ على السبورة. وضح أن هذه المعادلة معادلة تكعيبية. على الطلاب استخدام ما تعلموه من هذا الدرس لحل هذه المعادلة لـ X.

وضح أن المعادلة التربيعية (الدرجة الثانية) لها حلان على الأكثر، بينما المعادلة التكعيبية (الدرجة الثالثة) لها 3 حلول على الأكثر.

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ or } (x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x = 2 \text{ or } x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$x = -1 \pm i\sqrt{3}$$

يوجد حلين $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$.

التبرين وحل المسائل

الأمثلة 1-4

حل كل معادلة باستخدام القانون العام.

$$14. x^2 + 45x = -200$$

$$15. 4x^2 - 6 = -12x$$

$$16. 3x^2 - 4x - 8 = -6$$

$$17. 4x^2 - 9 = -7x - 4$$

$$18. 5x^2 - 9 = 11x$$

$$19. 12x^2 + 9x - 2 = -17$$

20. **القطس** يقفز المتنافسون في مسابقة للقطس من منصة ارتفاعها 10 أمتار إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل أن يغطسوا في بركة السباحة أسفلهم. ويمكن تقدير ارتفاع القاطس h بالأمتار فوق السطح بعد t ثانية وفقاً للمعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

- حدّد الجال والبدى اللذين يها تكون هذه الدالة منطوقة.
- متى يصطدم القاطس بالماء؟

مثال 5

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميز.

b. صف عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام. 21-32. انظر الهامش.

$$21. 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$22. 4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$23. 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$24. 6x^2 - x - 5 = 0$$

$$25. 3x^2 - 3x + 8 = 0$$

$$26. 2x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$27. -5x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$28. x^2 - 6x = -9$$

$$29. -3x^2 - 7x + 2 = 6$$

$$30. -8x^2 + 5 = -4x$$

$$31. x^2 + 2x - 4 = -9$$

$$32. -6x^2 + 5 = -4x + 8$$



33. **ألعاب الفيديو** عندما كان طارق في المنزل، أحضر له صديقه خالد شريطاً للعبة الإلكترونية. وقف طارق عند نافذة غرفة النوم ووقف خالد تحت النافذة مباشرة. فإذا رمى خالد شريط اللعبة إلى طارق بسرعة ابتدائية تساوي 35 متراً في الثانية، تغطي معادلة ارتفاع الشريط h بالقدم بعد t ثانية بالصيغة $h = -16t^2 + 35t + 5$.

a. إذا كان ارتفاع النافذة 25 متراً فوق الأرض، فهل ستكون لدى طارق 0 أو 1 أو 2 من فرص التقاط شريط اللعبة؟

b. إذا لم يتمكن طارق من التقاط شريط اللعبة، فمتى سيصلدهم بالأرض؟

37a. 160

37b. 2

37c. $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$

38a. -3.48

38b. تخيلي

38c. $\frac{-1.3 \pm i\sqrt{0.87}}{0.8}$

34. **الاستنتاج المنطقي** يستم مهيدسون مدّتون مطلقاً من طريق سيخفص دون مستوى سطح البحر. ويمكن تمثيل منحني الطريق بالمعادلة $y = 0.00005x^2 - 0.06x$.

حيث x المسافة الأفقية بالأمتار بين النقطتين اللتين يكون عندهما الطريق عند مستوى سطح البحر و y تمثل الارتفاع. يريد المهيدسون وضع لافتات للتوقف في المواقع التي يتساوى فيها ارتفاع الطريق مع مستوى سطح البحر. فما المسافة الأفقية التي سيضعونها عندما لافتات التوقف؟ 0 متراً و 1200 قدم

35a. 64

35b. 2

35c. 0, $-\frac{8}{5}$

36a. 36

36b. 2

36c. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميز.

b. صف عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

$$35. 5x^2 + 8x = 0$$

$$36. 8x^2 = -2x + 1$$

$$37. 4x - 3 = -12x^2$$

$$38. 0.8x^2 + 2.6x = -3.2$$

$$39. 0.6x^2 + 1.4x = 4.8$$

$$40. -4x^2 + 12 = -6x - 8$$

59

خيارات الفروض المنزلية المتهايزة

المستوى	الفروض	خيار اليومين
أساسي 3م	14-32, 43, 45, 46, 48-60	14-32 زوجي, 43, 45, 46, 53-60, 48, 46
جوهري 4م	35-39, 34, 46, 45, 41-43, 48-60	14-32, 49-52
متقدم 4م	33-60	

تدريس الممارسات الرياضية

الفهم المنطقي يبدأ الطلاب المتبرين بالرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن المداخل الممكنة التي تؤدي لحلها. يقومون بتحليل المعطيات، والعوائق والعلاقات والأهداف. كما يتأكدون من إجاباتهم للمسائل باستخدام طريقة مختلفة للحل. وداشاً ما يسألون أنفسهم "هل هذه النتيجة منطقية؟"

إجابات إضافية

21a. 33

21b. 2 غير نسبية

$$21c. \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

22a. 4

22b. 2 نسبية

$$22c. \frac{1}{2}, 1$$

23a. 49

23b. 2 نسبية

$$23c. \frac{1}{6}, -1$$

24a. 121

24b. 2 نسبية

$$24c. 1, \frac{5}{6}$$

25a. -87

25b. 2 مركب

$$25c. \frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6}$$

26a. -40

26b. 2 مركب

$$26c. \frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$$

27a. 36

27b. 2 نسبية

$$27c. 1, -\frac{1}{5}$$

28a. 0

28b. 1 نسبية

28c. 3

29a. 1

29b. 2 نسبية

$$29c. -1, -\frac{4}{3}$$

30a. 176

30b. 2 غير نسبية

$$30c. \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4}$$

4 التقويم

أخبار الأمس أسأل الطلاب أن يكتبوا كيف ساعدتهم درس سابق عن تبسيط تعابير الجذرية في فهم درس اليوم.

51. إجابة قصيرة في الشكل أدناه، P هي مركز الدائرة التي نصف قطرها 15 سنتيمترا، فما مساحة المثلث $\triangle APB$ ؟ 112.5 cm^2



52. 75% من 88 تساوي 60% من أي عدد؟
A 100 B 101 C 108 D 110

تدريب على الاختبار المعياري

49. جذدت شركة أن ربحها الشهري P يستنتج من العلاقة $P = -8x^2 + 165x - 100$ ، وفيها x سعر بيع كل وحدة من وحدات المنتج. فأي مما يلي هو التقدير الأفضل للسعر الأقصى للوحدة والذي يمكن أن يبيع به الشركة دون أن تخسر المال؟ B

A AED 10 B AED 20 C AED 30 D AED 40
50. SAT/ACT ما مجموعة الأعداد من بين ما يلي والتي يكون فيها الوسط أكبر من الوسيط؟

F {4, 5, 6, 7, 8} J {3, 5, 6, 7, 8}
G {4, 6, 6, 6, 8} K {2, 6, 6, 6, 6}
H {4, 5, 6, 7, 9}

مراجعة شاملة

بنظ. (الدرس 1-5)

53. i^{26}

54. $\sqrt{-16}$

55. $4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25}$

56. السلامة على الطرق السريعة يستطيع المهندسون استخدام الصيغة $d = 0.05v^2 + 1.1v$ لتقدير مسافة التوقف الصغرى d بالأتار لسيارة تسير بسرعة v كيلومترًا في الساعة. فإذا كان بإمكان سيارة التوقف بعد 20 مترًا، فما أعلى سرعة قد تكون تسير عندها عندما ضغط السائق على المكابح أول مرة؟ (الدرس 1-6) **تقريبًا 11.8 kmph**

57. الجسور تقارب الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية شكل قطع مكافئ. ويمكن شئيل القطع المكافئ بالدالة التربيعية

$0.00012x^2 + 6 = 0$ حيث x يمثل المسافة من محور التماثل وشئل y ارتفاع الكابلات. المعادلة التربيعية المرتبطة

هي $0.00012x^2 + 6 = 0$ (الدرس 1-6)

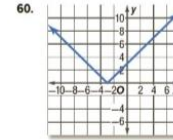
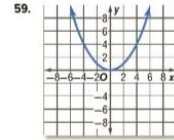
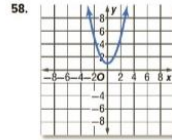
أحسب قيمة المميز. **-0.00288**

b. بم بخيرك المميز عن الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية؟

الإجابة النموذجية: يعني ذلك أن الكابلات لا تكبس أرضية الجسر، وذلك لأن التمثيل البياني لا يقطع المحور الأفقي x ولأن الجذور تخيلية.

مراجعة المهارات

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني. 58. $y = x^2 + 1$ 59. $y = 0.25x^2$



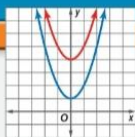
المتابعة

بعدما استكشف الطلاب طرق حل المعادلات التربيعية.

أسأل:

- كيف تحدد الطريقة التي تستخدمها لحل معادلة تربيعية؟ نموذج للإجابة: إن كانت المعادلة تحتوي على حدود جبرية معروفة أنها سهلة التحليل، يمكن حلها باستخدام التحليل إلى العوامل. إن كانت المعادلة تحتوي على حدود جبرية أكثر تعقيدًا يمكن حلها باستخدام القانون العام، أو إكمال المربع، أو التمثيل البياني. كما يمكن أن تستخدم طريقة معينة للحل، وطريقة ثانية للتأكد من إجابتك.

تحويلات الدوال التربيعية



لماذا؟

الحاصل

المصاحف

التشكيل البياني الموضح على الصورة اليسرى لهذا الشكل والشكل نفسه، ولكن لاحظ أن رأس القطع المكافئ الأحمر أعلى على المحور الرأسي y من رأس القطع المكافئ الأزرق. إزاحة القطع المكافئ إلى الأعلى والأسفل مثال عن عملية تحويل.

- 1 تطبيق الإزاحات على الدوال التربيعية.
- 2 تطبيق تغيير الأبعاد على الدوال التربيعية.
- 3 كتابة دالة تربيعية بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.
- 4 تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية ذات الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.

- مثلت دوالاً تربيعية بيانياً باستخدام الرأس ومحور التماثل.

1 التركيز

محاضرة رأسية

قبل الدرس 1-7 تحويل التمثيلات البيانية للدالات.

الدرس 1-7 اكتب الدالة التربيعية في صيغة $y = a(x - h)^2 + k$ حول التمثيلات البيانية للدالات التربيعية في الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.

بعد الدرس 1-7 حل المتباينات التربيعية باستخدام التمثيلات البيانية و الطرق الجبرية.

المفردات الجديدة

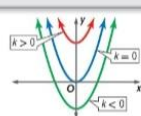
التحويل transformation
الإزاحة translation
تغيير الأبعاد/التمدد dilation
الانعكاس reflection
صيغة الرأس vertex form

ممارسات في الرياضيات
قوم بطيعة المسائل والمتابعة في حلها.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

الإزاحات: نعتبر الإزاحة مواقع الأشكال. فإحد أنواع التحويل. ويدعى الإزاحة بحرك الشكل إلى الأعلى أو الأسفل أو اليسار أو اليمين. عند إضافة ثابت k أو طرحه من دالة أصلية، يكون التمثيل البياني للدالة الناتجة $k \pm f(x)$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية مزاحاً إلى الأعلى أو الأسفل.

الدالة الأصلية في مجموعة الدوال التربيعية هي $f(x) = x^2$ ولجميع الدال التربيعية الأخرى تمثيلات بيانية هي تحويلات للتمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$.

المفهوم الأساسي للإزاحة الرأسية



التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + k$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ مزاحاً رأسياً.

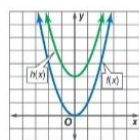
إذا كان $k > 0$ فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2 + k$ يزاح إلى الأعلى.

إذا كان $k < 0$ فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2 + k$ يزاح إلى الأسفل.

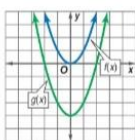
مثال 1 وصف الإزاحة وتمثيلها بيانياً

صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $f(x) = x^2 + 3$
 $k = 3$ و $3 > 0$
 $f(x) = x^2$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأعلى لمسافة 3 وحدات.



b. $g(x) = x^2 - 4$
 $k = -4$ و $-4 < 0$
 $g(x) = x^2$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأسفل لمسافة 4 وحدات.



تمرين موجه

إزاحة إلى الأعلى لمسافة 5

1A. $f(x) = x^2 - 7$ 1B. $g(x) = 5 + x^2$ 1C. $h(x) = -5 + x^2$ 1D. $f(x) = x^2 + 1$
إزاحة إلى الأعلى لمسافة 1 إزاحة إلى الأسفل لمسافة 5 إزاحة إلى الأسفل لمسافة 7

2 التدريس

أسئلة تدريجية

على الطلاب قراءة لماذا؟ هذا الجزء من الدرس.

أسأل:

- للدالة $y = x^2$ ما قيمة x التي تجعل y تساوي 0؟ $x = 0$
- ما قيمة x التي تجعل y تساوي 0 إذا كانت الدالة $y = (x - 2)^2$ ؟ $x = 2$
- قارن التمثيل البياني $y = x^2$ مع $y = (x - 2)^2$ ما هو الفرق الذي يفعله طرح 2 داخل الأقواس؟ التمثيل البياني $y = x^2$ يتحرك وحدتين إلى اليمين.

1 اكتب المعادلات التربيعية في صيغة هندسية

مثال 1 يوضح كيفية كتابة المعادلات التربيعية في صيغة هندسية. **مثال 2** يوضح كيف أن معامل الصيغة التربيعية للدالة يغير عرض التمثيل البياني في شكل الإختبار متعدد الخيارات.

تقويم مستمر

استخدم التمارين الموجية بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

- 1 اكتب كل معادلة في صيغة هندسية.
- $y = x^2 - 2x + 4$
 $y = (x - 1)^2 + 3$
 - $y = -3x^2 - 18x + 10$
 $y = -3(x + 3)^2 + 37$

انتبه!

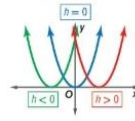
تجنب الأخطاء مع زيادة |a|
• يضيق التمثيل البياني. لأن المضاعف الأكبر للقيمة $(x - h)^2$ سيجعل قيم y المقابلة أكبر. القيم الأكبر لـ y ستجعل الرسم البياني أكثر انحداراً (وبالتالي أضيق).

التدريس بالتقنية

السبورة البيضاء التفاعلية اعرض الجدول التنظيمي على السبورة. ارمس تمثيلاً بيانياً لدالة تربيعية، اعطي الطلاب معادلة التمثيل البياني ووضو للطلاب كيفية كتابة معادلة التمثيل البياني في صيغة هندسية. اسحب التمثيل البياني لتحريك الرأس إلى مناطق أخرى في الجدول و على الطلاب أن يحددوا المعادلات للرسم البيانية الجديدة اشرح إلى أي مدى تكون الدالات متشابهة أو مختلفة.

يمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي أفقياً بطرح حد واحد لـ h من x .

المفهوم الأساسي: الإزاحة الأفقية



التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x - h)^2$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ مزاخاً بالاتجاه الأفقي. إذا كان $h > 0$ ، التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يُزاح لمسافة h وحدة **يميناً**. إذا كان $h < 0$ ، التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يُزاح لمسافة $|h|$ وحدة **يساراً**.

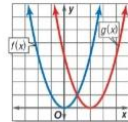
مثال 2: الإزاحة الأفقية

صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $g(x) = (x - 2)^2$

$k = 0, h = 2, 2 > 0$

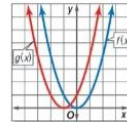
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى اليمين لمسافة وحدتين.



b. $g(x) = (x + 1)^2$

$k = 0, h = -1, -1 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى اليسار لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

مزاخاً إلى اليسار لمسافة 2 $g(x) = (x + 2)^2$ 3 مزاخاً إلى اليسار لمسافة 2A. $g(x) = (x - 3)^2$

ويمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي بالاتجاهين الأفقي والعمودي.

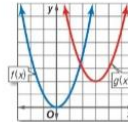
مثال 3: الإزاحة الأفقية والعمودية

صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $g(x) = (x - 3)^2 + 2$

$k = 2, h = 3, 3 > 0$

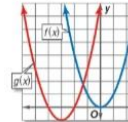
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى اليمين لمسافة 3 وحدات وإلى الأعلى لمسافة وحدتين.



b. $g(x) = (x + 3)^2 - 1$

$k = -1, h = -3, -3 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى اليسار لمسافة 3 وحدات وإلى الأسفل لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

3A. $g(x) = (x + 2)^2 + 3$

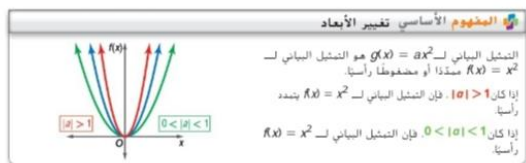
3B. $g(x) = (x - 4)^2 - 4$

63

التركيز على المحتوى الرياضي

الدالة التربيعية في صيغة هندسية القيم a, h, k في الشكل الهندسي للدالة التربيعية $y = a(x - h)^2 + k$ تؤثر على التمثيل البياني للقطع المكافئ. قيمة الرأس هي في (h, k) . قيمة a تحدد الاتجاه الذي يفتح القطع المكافئ و عرض القطع المكافئ. قيمة h تحدد الاتجاه الذي يترجم القطع المكافئ أفقياً. قيمة k تحدد الاتجاه الذي يترجم القطع المكافئ عمودياً. يجب أولاً إعادة كتابة الدالة في شكل هندسي قبل a, h و k يمكن تحديدها وتحليلها.

2 تغيير الأبعاد والإزاحة شدة نوع آخر من التحويلات. ويدعى تغيير الأبعاد **وتغيير الأبعاد** يجعل $f(x) = x^2$ ثابت a ، فإن التمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) = ax^2$ إما أن يتدد أو ينضبط رأسياً.

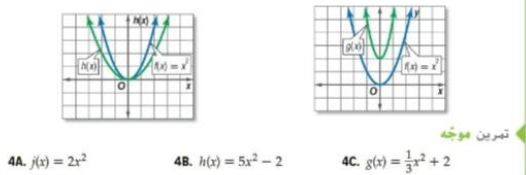


مثال 2: وصف تغيير الأبعاد وتمثيلها بيانياً

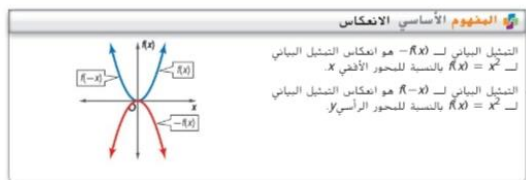
صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $h(x) = \frac{1}{2}x^2$
 $a = \frac{1}{2} < 1$ ، $0 < \frac{1}{2} < 1$
 هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ المضغوط رأسياً.

b. $g(x) = 3x^2 + 2$
 $a = 3 > 1$ ، $k = 2 > 0$
 هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ الممتد رأسياً والمزاح إلى الأعلى لمسافة وحدتين.



يطلب **الانعكاس** الشكل بالنسبة إلى مستقيم.



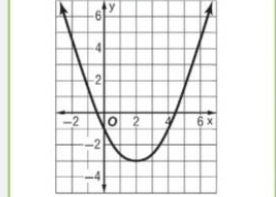
نصيحة دراسية: الانعكاس يؤدي انعكاس الدالة $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الرأسي إلى إعطاء الدالة $f(-x) = x^2$ ، وذلك لأن $(-x)^2 = x^2$.

التعليم المهتمين

المعلمين بأنفسهم على الطلاب أن يراقبوا أو يبحثوا عن الأحداث الطبيعية التي يمكن أن تصاغ في القطع المكافئ: على الطلاب تقديم تقريراً بملاحظاتهم و نتائجهم للصف. إذا كان الطلاب قادرين على تحديد الدالة التربيعية التي تصيغ الحدث، يجب أن يقدموا الدالة ويشرحوا كيف أن خصائص المعادلة يمكن استخدامها في تحليل التمثيل البياني لها.

مثال إضافي

2 تدريب الاختبار الموحد
 ما هي معادلة الدالة الموضحة في الرسم البياني؟ **B**



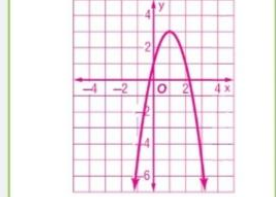
- a. $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$
 B. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$
 c. $y = -2(x-2)^2 + 3$
 d. $y = 2(x-2)^2 - 3$

2 تحويل التمثيلات البيانية التربيعية

مثال 3 يوضح كيفية أن التمثيل البياني للمعادلة بعد إعادة كتابتها في صيغة هندسية.

مثال إضافي

3 التمثيل البياني
 $y = -2x^2 + 4x + 1$



3 تدريب

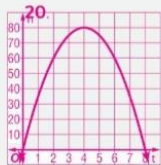
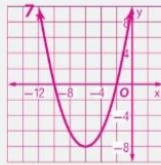
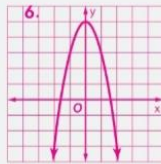
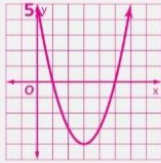
تقويم مستمر

استخدم التمارين 1-7 لفحص الفهم.
استخدم الجدول في أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

دراسة التدريبات الرياضية

النمذجة يمكن للطلاب المتفهمين للرياضيات تطبيق الرياضيات التي يعرفونها لحل المشكلات الموجودة في الحياة اليومية. تحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص النتائج و تفسير نتائجها الرياضية في سياق الوضع.

إجابات إضافية



مثال 5 وصف التحولات وتمثيلها بيانيًا

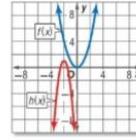
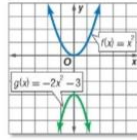
صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $g(x) = -2x^2 - 3$

$a = -2$ و $-2 < 0$ ، إذاً هناك انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والتمثيل البياني مقلوب رأسياً.
 $k = -3$ و $-3 < 0$ ، إذاً هناك إزاحة إلى الأسفل لمسافة 3 وحدات.

b. $h(x) = -4(x+2)^2 + 1$

$a = -4$ و $-4 < 0$ ، إذاً هناك انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والتمثيل البياني مقلوب رأسياً.
 $h = -2$ و $-2 < 0$ ، إذاً هناك إزاحة لمسافة وحدتين إلى اليسار.
 $k = 1$ و $1 > 0$ ، إذاً هناك إزاحة إلى الأعلى لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

5A. $h(x) = 2(-x)^2 - 9$

5B. $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$

5C. $j(x) = -2(x-1)^2 - 2$

يمكنك استخدام ما تعرفه عن خواص التمثيلات البيانية للمعادلات التربيعية لمطابقة المعادلات مع التمثيلات البيانية.

مثال 6 على الاختيار المتعدد: تحديد معادلة تمثيل بياني

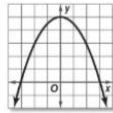
أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟

A $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$

C $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

B $y = -2x^2 - 5$

D $y = 2x^2 + 5$



قراءة فقرة الاختبار

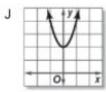
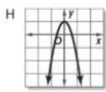
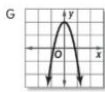
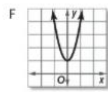
لديك تمثيل بياني، عليك إيجاد معادلته.

حل فقرة الاختبار

التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل، ولذلك فقد عكس التمثيل البياني لـ $y = x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x . ويتعين أن يكون معامل القوة الأعلى سالباً، ولذلك علينا حذف الخيارين D و A. القطع المكافئ مزاوح إلى الأعلى لمسافة 5 وحدات، ولذلك فإن $k = 5$. انظر إلى المعادلات. في الخيارين C و D فقط يكون $k = 5$ الإجابة هي C.

تمرين موجّه

6 أي مما يلي هو التمثيل البياني لـ $H: y = -3x^2 + 1$ ؟



65

خيارات الواجب المنزلي المميزة

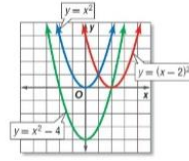
مستوى	التكليف	خيار اليوميين	
أساسي	8-34, 48, 51-67	53-56, 9-33 فردي	57-67, 51, 48, 52, 57-67 زوجي
جوهري	34, 9-33 فردي, 51-67, 48, 47, 35-45 فردي	8-34, 53-56	35-48, 51, 52, 57-67
متقدم	35-67		

دراسة التدريبات الرياضية

البراهين الطلاب الماهرون رياضياً يفهمون ويستخدمون الافتراضات المذكورة و التعريفات و النتائج المُعَدَّة مسبقاً في وضع البراهين. حيث يقومون بوضع التخمينات و بناء تطور منطقي للبيانات لشرح حقيقة التخمينات الخاصة بهم. و أنهم قادرون على تحليل المواقف عن طريق تحويلهم لحالات. ويمكن التعرف على واستخدام التقيد بالأدلة.

نذكر أن مجموعة التثيلات البيانية هي جملة من التثيلات البيانية التي تعرض خاصية واحدة أو عدة خواص متشابهة، والتثيل البياني الأصلي هو التثيل البياني الأبسط في العلاقة. أيًا كانت عائلة الدوال التربيعية. فإن $y = x^2$ هو التثيل البياني الأصلي.

يمكن رسم التثيلات البيانية الأخرى لمجموعة الدوال التربيعية، مثل $y = (x - 2)^2$ و $y = x^2 - 4$ من خلال تحويل التثيل البياني لـ $y = x^2$.



3 كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

تكتب كل دالة أعلاه بصيغة الرأس. حيث $y = a(x - h)^2 + k$ رأس القطع المكافئ و h و k هما إحداثيات رأس القطع المكافئ و $x = h$ محور التماثل و a تحدد شكل القطع المكافئ واتجاه انفتاحه.

حين تكون الدالة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$ فيمكنك إكمال المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس. فإذا لم يكن معامل الحرة التربيعي يساوي 1. إذا فعلت تحليل عامل الحدين التربيعي والخطي قبل إكمال المربع. وبعد إكمال المربع وكتابة الدالة بصيغة الرأس، فإن قيمة k تشير إلى قيمة صغرى إذا كان $a < 0$ أو تشير إلى قيمة عظمى إذا كان $a > 0$.

مثال 7 اكتب الدوال بصيغة الرأس

اكتب كل دالة بصيغة الرأس.

- a. $y = x^2 + 6x - 5$
 $y = x^2 + 6x - 5$ الدالة الأصلية
 $y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$ أكمل المربع.
 $y = (x + 3)^2 - 14$ بسط.
- b. $y = -2x^2 + 8x - 3$
 $y = -2x^2 + 8x - 3$ الدالة الأصلية
 $y = -2(x^2 - 4x) - 3$ جع $8x$ و $2x^2$ وحلّل إلى العوامل.
 $y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$ ثم انقسم على 2.
 $y = -2(x - 2)^2 + 5$ أكمل المربع.
 $y = -2(x - 2)^2 + 5$ بسط.

تمرين موجه

- 1A. $y = x^2 + 4x + 6$ $y = (x + 2)^2 + 2$ 1B. $y = 2x^2 - 12x + 17$ $y = 2(x - 3)^2 - 1$

4 التقويم

الكرة الكريستال أسأل الطلاب أن يكتبوا كيف سيساعدكم درس اليوم على تحليل الدالات التربيعية و تمثيلها بيانياً في درس الغد في تمثيل وحل المتباينات التربيعية بيانياً.

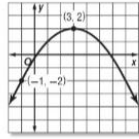
إجابات إضافية

64a. $h(d) = -2d^2 + 4d + 6$; التمثيل البياني مفتوح للأسفل و هو أضيق من التمثيل البياني الأساسي والرأس عند $(1, 8)$.

64b. $h(d) = -2(d-12.5)^2 + 125$; يُحرك التمثيل البياني أعلى 4.5 ft وإلى اليمين 3 in .

بمعرفة الرأس ونقطة إضافية على التمثيل البياني للقطع المكافئ، يمكنك كتابة معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس.

مثال 8 على الاختبار البعدي كتابة معادلة إذا كان التمثيل البياني معلوماً



ما معادلة الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟

- A $y = -4(x-3)^2 + 2$
B $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$
C $y = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 2$
D $y = 4(x+3)^2 - 2$

قراءة فترة الاختبار

لديك تمثيل بياني لقطع مكافئ غن رأسه ونقطة في تمثيله البياني. عليك إيجاد معادلة له.

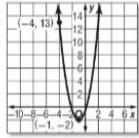
حل فترة الاختبار

يقع رأس القطع المكافئ عند النقطة $(3, 2)$. إذا $h = 3$ و $k = 2$ ، وبما أن $(-1, -2)$ نقطة على التمثيل البياني، فلنفترض أن $x = -1$ و $y = -2$. عوض بهاتين القيمتين في صيغة الرأس للمعادلة وحل لإيجاد a .

$$\begin{aligned} y &= a(x-h)^2 + k && \text{صيغة الرأس} \\ -2 &= a(-1-3)^2 + 2 && \text{عوض بالعدد } -2 \text{ عن } y \text{ وبالعدد } 3 \text{ عن } h \text{ وبالعدد } 2 \text{ عن } k. \\ -2 &= a(16) + 2 && \text{بسط.} \\ -4 &= 16a && \text{اطرح 2 من كل طرف.} \\ -\frac{1}{4} &= a && \text{اقسم كل طرف على 16.} \end{aligned}$$

معادلة المقاطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$ الإجابة هي B.

تمرين موجّه



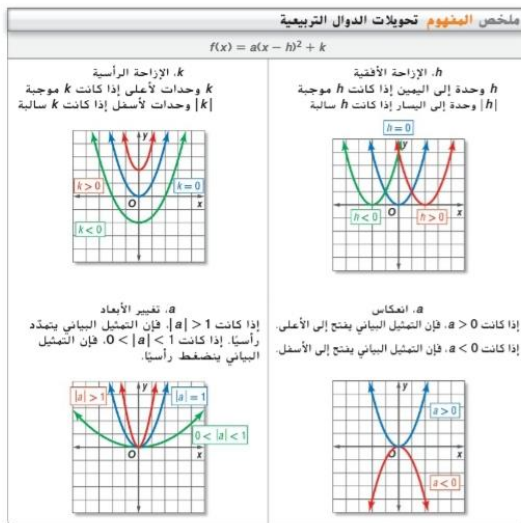
2. أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟
F $y = \frac{9}{25}(x-1)^2 + 2$
G $y = \frac{3}{5}(x+1)^2 - 2$
H $y = \frac{5}{3}(x+1)^2 - 2$
J $y = \frac{25}{9}(x-1)^2 + 2$

4 تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية

لقد تعلمت سابقاً كيف تؤثر التحويلات المختلفة على التمثيلات البيانية للدوال الرئيسية. ولتخص ما يلي هذه التحويلات للدوال التربيعية.

تعليمات مختلفة

استكمال في هذا الدرس من الدالات التربيعية فقط معادلات القطوع المكافئة التي تفتح لأعلى أو لأسفل يمكن تحليلها و تمثيلها بيانياً. أسأل الطلاب أن يشرحوا سبب عدم وجود القطوع المكافئة المفتوحة لليمين أو لليساار في هذا الدرس. كمثال، يمكنك رسم تمثيل بياني للقطع المكافئ على السبورة مع قمة الرأس عند $(-2, 0)$ ، و محور التناظر من حول $y = 0$ ، وحول $(2, 0)$. إجابة نموذجية: هذا الدرس عن الدالات التربيعية. القطوع المكافئة التي تفتح لليمين أو لليساار لا تمثل الدالات لأن عنصرين من المدى مغتربين مع عنصر واحد من المجال، ماعداً في الرأس.



نصيحة دراسية
القيمة المطلقة
 $0 < |a| < 1$ يعني أن a
عدد نسبي بين 0 و 1 مثل $\frac{3}{4}$
أو عدد نسبي بين -1 و 0 مثل -0.3.

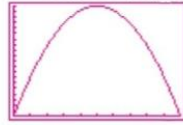
مثال إضافي

7 المدفع أثناء احتفالات الرابع من يوليو، أطلقت المدافع النيران. يمكن تشكيل رحلة قذيفة المدفع بواسطة

$$d(t) = -4(x - 5)^2 + 100$$

حيث تمثل t الزمن المستغرق بالثواني وتمثل $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأمتار.

a. ارسم الدالة بيانيًا.



(0, 10] scl: 1 by (0, 100] scl: 10

b. كيف يرتبط الرسم البياني لـ $d(t)$ بالرسم البياني لـ $f(x) = x^2$ ؟ **تم عكس الرسم**

البياني على المحور الأفقي x . وضغطه رأسيًا. وإزاحته رأسيًا 100 وحدة إلى الأعلى. وأفقيًا 5 وحدات إلى اليمين.

مثال 9 تمثيل المعادلات بصيغة الرأس

مثّل بيانيًا $y = 4x^2 - 16x - 40$

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بصيغة الرأس.

المعادلة الأصلية

$$y = 4x^2 - 16x - 40$$

خاصية التوزيع

$$y = 4(x^2 - 4x) - 40$$

أكمل المربع.

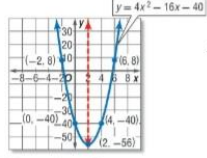
$$y = 4(x - 4 + 4) - 40 - 4(4)$$

بسط.

$$y = 4(x - 2)^2 - 56$$

الخطوة 2 يقع الرأس عند $(2, -56)$. محور التناظر هو $x = 2$. ونظرًا لأن $a = 4$ فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الخطوة 3 عتّن نقاطًا إضافية لمساعدتك في إتمام التمثيل البياني.



تمرين موجّه

3A. $y = (x - 3)^2 - 2$

3B. $y = 0.25(x + 1)^2$

3A, 3B انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

نصائح للمعلمين الجدد

عرض القطع المكافئ غالبًا ما يخطئ الطلاب بشأن القيمة الأكبر لـ $|a|$ لتشمل قطع مكافئ بعرض أوسع. اقترح على الطلاب التفكير في قيمة a في $y = ax^2 + k$ بالطريقة نفسها التي يفكرون بها في قيمة المنحدر m في $y = mx + b$. تعني القيمة الأكبر لـ m خطًا شديد الانحدار. تعني القيم الأكبر لـ $|a|$ أن جوانب القطع المكافئ شديدة الانحدار.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-7 للتحقق من الفهم.

استخدم الرسم البياني الموجود أسفل هذه الصفحة لتخصيص الواجبات المنزلية لطلابك.

تنبيه حول التمارين

ورق الرسم البياني بالنسبة للتمرين 24. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

تدريس التمارين الرياضية

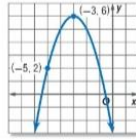
الانتظام يُمكن للطلاب المتقنين في الرياضيات البحث عن الطرق العامة والمختصرة في التمارين 25-28. وضح للطلاب أن الاختلافات الموجودة في الدوال هي معاملات الحدود x^2 .

إجابات إضافية

1. تمت الإزاحة 11 وحدة إلى الأسفل.
2. تمت الإزاحة وحدات 2 إلى اليمين، والضغط رأسياً.
3. تم العكس عبر المحور الأفقي x .
4. تمت الإزاحة 8 وحدات إلى الأعلى.
5. تمت الإزاحة 6 وحدة إلى الأعلى.
6. تم العكس عبر المحور الأفقي x .
7. تمت الإزاحة 2 وحدات إلى الأسفل.
8. تم تحويل 10 وحدة إلى الأسفل.
9. تم العكس عبر المحور الأفقي x .
10. تمت الإزاحة 3 وحدات إلى اليمين، و 8 وحدات إلى الأعلى والتدوير رأسياً.
11. تم الضغط رأسياً، تمت الإزاحة 6 وحدات إلى الأعلى.
12. تم العكس عبر المحور الأفقي x ، وتم التدوير رأسياً، و تمت الإزاحة 5 وحدات إلى الأسفل.
13. تم التدوير رأسياً، تم تحويل 3 وحدات إلى الأعلى.
14. تم الضغط رأسياً، و تمت الإزاحة 1.1 وحدة إلى الأسفل.
15. تمت الإزاحة وحدة واحدة إلى اليسار، و 2.6 وحدات إلى الأعلى وتم التدوير رأسياً.
16. تم الضغط رأسياً، والإزاحة $\frac{5}{6}$ وحدات إلى الأعلى.
17. تم التدوير رأسياً، تمت الإزاحة 6.5 وحدات إلى الأسفل.

التحقق من فهمك

- 7 مثال اكتب كل دالة بصيغة الرأس.
1. $y = x^2 + 6x + 2$ 2. $y = -2(x-2)^2 + 3$ 3. $y = 4x^2 + 24x + 24$
- 8 مثال الاختيار من متعدد ما الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟
4. $y = 4(x+3)^2 - 12$
- A $y = -(x+3)^2 + 6$
B $y = -(x-3)^2 - 6$
C $y = -2(x+3)^2 + 6$
D $y = -2(x-3)^2 - 6$
- 9 مثال متى كل دالة بيانية. 5-7. انظر الهامش.
5. $y = (x-3)^2 - 4$ 6. $y = -2x^2 + 5$ 7. $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 8$
8. $y = (x + \frac{9}{2})^2 - \frac{49}{4}$ 9. $y = (x-3)^2 - 6$ 10. $y = -2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{25}{8}$ 11. $y = (x+1)^2 + 6$



التمرين وحل المسائل

- 7 مثال اكتب كل دالة بصيغة الرأس.
8. $y = x^2 + 9x + 8$ 9. $y = x^2 - 6x + 3$ 10. $y = -2x^2 + 5x$
11. $y = x^2 + 2x + 7$ 12. $y = -3x^2 + 12x - 10$ 13. $y = x^2 + 8x + 16$ $y = (x+4)^2$
14. $y = 2x^2 - 4x - 3$ 15. $y = 3x^2 + 10x$ 16. $y = x^2 - 4x + 9$ $y = (x-2)^2 + 5$
17. $y = -4x^2 - 24x - 15$ 18. $y = x^2 - 12x + 36$ 19. $y = -x^2 - 4x - 1$
20. $y = -4(x+3)^2 + 21$ 21. $y = (x-6)^2$ $y = -(x+2)^2 + 3$
- الدالة $h = -4.9(t-4)^2 + 80$ تمثل الدالة بيانية. انظر الهامش.
22. $y = (x-5)^2 + 3$ 23. $y = 9x^2 - 8$ 24. $y = -2(x-5)^2$
25. $y = \frac{1}{10}(x+6)^2 + 6$ 26. $y = -3(x-5)^2 - 2$ 27. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
28. $y = 2x^2 + 10$ 29. $y = -(x+3)^2$ 30. $y = \frac{1}{6}(x-3)^2 - 10$
31. $y = (x-9)^2 - 7$ 32. $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$ 33. $y = -4(x-10)^2 - 10$
34. تمثيل النماذج شركة تصنع ألواح شراعية لركوب الأمواج تستخدم عملية مؤتمنة لصناعة الصواري الخاصة بالألواح. والدالة $f(x) = \frac{1}{2500}x^2 + \frac{3}{5}x$ مبرمجة في الحاسب لصنع هذا النوع من الصواري.
- a. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.
- b. اكتب الدالة التربيعية بصيغة الرأس. ثم مثل الدالة بيانية.
- c. صف كيف يمكن للمصنع تعديل الدالة لصنع صواري ينحني أكثر أو أقل. يمكنهم تعديل معامل x^2 .

الواجب المنزلي المتغير خيارات

المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين
أساسي	8-23, 36, 38-60	أعداد فردية، 9-23، 38-40، 45-60
رئيسي	30, 34, 35, 37-60	أعداد زوجية، 24-37، 41-44، 46-60
متقدم	25-57	

4 التقويم

نشر الفائدة اكتب خمس دوال تربيعية مختلفة للشكل $f(x) = ax^2 + k$ أعط كل طالب واحدة. اطلب من الطلاب إبلاغك بطريقة ارتباط الرسم البياني لكل دالة بالرسم البياني لـ $y = x^2$ حينما يكونون يخرجون من الباب.

إجابات إضافية

36a. أحياناً لا يحدث ذلك إلا إذا كان $k = 0$ فقط. وفيها يتعلق بأي قيمة أخرى. سيتم إزاحة الرسم البياني إلى الأعلى أو إلى الأسفل.
36b. دالتا، لا تؤثر الانعكاسات على العرض. يمكن توسيع كل من الرسمين البيانيين عن طريق عامل a .
36c. مخططاً، إذا كان الرسم البياني المزود بقمة رأس عند $(0, -3)$ يفتح إلى أعلى. فسوف يحتوي على قيمة صفري أقل. وإذا كان يفتح إلى الأسفل، فسبحته على قيمة عظمى. يحتوي الرسم البياني الأول على قيمة صفري.

38. الإجابة النموذجية: ليست جميع الانعكاسات على المحور الرأسي ينتج الرسم البياني نفسه. إذا كانت قمة الرأس للرسم البياني الرئيسي ليست موجودة على المحور الرأسي y ، فلن يحتوي الرسم البياني على المحور الرأسي y لأن كل من محور التناظر الخاص به وانعكاسه عبر المحور الرأسي y سيكونان قطعاً مكافئاً مختلفاً.

40. الإجابة النموذجية: بالنسبة لـ $y = ax^2$ ، يتم تمديد الرسم البياني الرئيسي رأسياً إذا كان $a > 1$ أو يتم ضغطه رأسياً إذا كان $0 < a < 1$. سيتم ضرب قيم y الواردة في الجدول كافة في عامل a . بالنسبة لـ $y = x^2 + k$ ، سيتم إزاحة الرسم البياني الرئيسي إلى الأعلى إذا كان k موجباً. كما يتم تحريكه إلى الأسفل إذا كان k سالباً. ستحتوي قيم y -الواردة في الجدول كافة على ثابت k المضاف إليها أو المطروح منها. بالنسبة لـ $y = ax^2 + k$ ، سيتم إما تمديد الرسم البياني رأسياً أو ضغطه رأسياً حسب قيمة a ثم سيتم إزاحتها إلى الأعلى أو إلى الأسفل حسب قيمة k . سيتم ضرب قيم y الواردة في الجدول في عامل a وثابت k المضاف إليها.

تدريب على الاختبار المعياري

53. تحتاج شجيرات مزهرة إلى مزيج من 70% تربة و 30% فيرميكوليت. فكم العدد التقريبي للدلاء الفيرميكليت التي ينبغي إضافتها إلى 20 دلوًا من التربة؟
A 6.0 C 14.0
B 8.0 D 24.0
54. SAT/ACT مجموع العددين الصحيحين x و y يساوي القيمة 495. ورقم الآحاد للعدد x هو 0. فإذا قسمنا x على 10، فإن النتيجة تساوي y . فما قيمة x ؟
F 40 J 250
G 45 K 450
H 245
55. ما مجموعة حلول المتباينة $|4x - 1| < 9$ ؟
A $\{x | x < -2\}$
B $\{x | x < 2.5\}$
C $\{x | x > -2\}$
D $\{x | -2 < x < 2.5\}$
56. **إجابة قصيرة** افترض أن لديك متجرًا تشتري فيه دراجة متاعج الربط بـ 30 AED وتبيع كل مفتاح معادل 3.50 AED. فما النسبة المئوية للسعر المضاف إلى متاعج الربط؟ **40%**

مراجعة شاملة

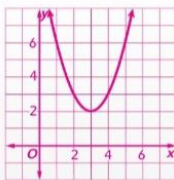
- حل كل معادلة باستخدام طريقة حل من اختيارك. أوجد الحلول الدقيقة (الدرس 1-4)
57. $4x^2 + 15x = 21$ $\frac{-15 \pm \sqrt{561}}{8}$ 58. $-3x^2 + 19 = 5x$ $\frac{-5 \pm \sqrt{253}}{6}$ 59. $6x - 5x^2 + 9 = 3$ $\frac{3 \pm \sqrt{39}}{5}$
- بسط. (الدرس 1-3)
60. $(3 + 4i)(5 - 2i)$ $14i + 23$ 61. $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ 7 62. $\frac{1+i}{1-i} i$ 63. $\frac{4-3i}{1+2i} - \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$
64. **نوافير المياه** يمكن تشييد ارتفاع تيار ماء متدفق من نافورة باستخدام دالة تربيعية. افترض أن الماء المتدفق من فوهة النافورة يبلغ ارتفاعاً أقصاه 8 أمتار ويبعد مسافة متر واحد من فوهة النافورة. (الدرس 1-5) **a, b انظر الهامش.**
- a.** إذا كان الماء بهيكل على بعد 3 أمتار من فوهة النافورة، أوجد دالة تربيعية تملك ارتفاع الماء $h(d)$ عند أي مسافة d متر من فوهة النافورة. ثم قارن التشييد البياني للدالة مع الدالة الأصلية.
- b.** افترض أن أحد العاملين يرفع ضغط الماء بحيث يبلغ تيار الماء ارتفاعاً أقصى مقداره 12.5 متراً على مسافة 15 سنتيمتراً من فوهة النافورة. وفي هذه الحالة بهيكل الماء على بعد 3.75 أمتار من فوهة النافورة. اكتب دالة تربيعية جديدة لـ $h(d)$. وكيف تؤثر التغيرات في k و i على شكل التشييد البياني؟

مراجعة المهارات

- حدد ما إذا كانت القيمة المعطاة تحقق المتباينة.
65. $3x^2 - 5 > 6$; $x = 2$ نعم 66. $-2x^2 + x - 1 < 4$; $x = -2$ نعم 67. $4x^2 + x - 3 \leq 36$; $x = 3$ نعم

71

التدريس المتمايز



الملاحظ لقد احتوت جميع الدوال التي تم رسمها بيانياً وتحليلها في هذا الدرس على قيمة الرأس الموجودة على المحور الرأسي y . اطلب من الطلاب رسم $y = (x - 3)^2 + 2$ بيانياً، ثم توضيح طريقة ارتباط الرسم البياني بالرسم البياني لـ $y = x^2$. إنه قطع متكافئ تم تحريكه 3 وحدات إلى اليمين ووحدة 2 إلى الأعلى.



مختبر الجبر الدوال التربيعية ومعدل التغير

1-7

لقد تعلمت أن للدالة الخطية معدل تغير ثابت. وفي هذا المختبر، ستستكشف معدل تغير الدوال التربيعية.

توسع 1-7

1 التركيز

الهدف دراسة معدل التغير في الدوال التربيعية من خلال دراسة الفروق الأولى والثانية.

نصيحة في التدريس

يجب أن يحتوي جدول كل طالب على عمود لكل قيمة عددية لـ x من 0 حتى 16.

2 التدريس

العمل في فرق متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في ثنائيات بقدرات مختلفة. ثم اطلب من الثنائيات إكمال النشاط.

اسأل

- لماذا لا يوجد فرق أول مكتوب في العمود المسمى $x=0$ ؟
يتطلب إيجاد فرق قيمتين لـ y .
- ما الشيء المهم الذي تُشير إليه $x=8$ ؟ $(8, 0)$ هو قيمة القطع المكافئ.

تمرين: على الطلاب إكمال التمارين 1-4

3 التقييم

تقويم مستمر

استخدم التمرين 1 لتقويم ما إذا كان الطلاب يقومون بتقويم كل من الدالة ومعدل التغير بشكل صحيح عندما يكون x سلبياً.

من العملي إلى النظري

يتطلب التمرين 4 مراقبة الطلاب لنبط معين ثم تعميمه كلما زاد ترتيب الفروق.

التمارين

لكل دالة من الدوال التالية، أنشئ جدول قيم بقيم x المعطاة. ومثل كل دالة بياناً، ثم حدّد فروق المرتبة الأولى والمرتبة الثانية. 1-3. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

1. $y = -x^2 + 2x - 1$ عند $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

2. $y = 0.5x^2 + 2x - 2$ عند $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

3. $y = -3x^2 - 18x - 26$ عند $x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$

4. **التحسين** أمد النشاط مع دالة تكعيبية. في أي فرق ترتيب ستوقع تنوع أن تساوي $g(x) = x^4$ ثابتاً عند x^n ؟ $fh(x) = x^n$ **المرتبة الرابعة؛ المرتبة n**

1 التركيز

موازنة عمودية

قبل درس 1-8 حل المتباينات الخطية.

الدرس 1-8 مثل بيانياً المتباينات التربيعية في متغيرين، حل المتباينات التربيعية في متغير واحد.

بعد الدرس 1-8 حدد الحلول لمتباينات الجذر التربيعي باستخدام التمثيل البياني.

2 التدريس

استئلة تدريجية

هل قرأ الطلاب هذا لماذا؟ الجزء من الدرس.

أسأل:

- ما هو المقلاع و كيف يتم استخدامه؟ أسأل الطالب الذي يعرف المقلاع أن يشرح.
- كيف يمكن نمذجة هذا الموقف للأسفل؟ أرسم تمثيل بياني للمعادلة التربيعية المعطاة.
- ما في أي اتجاه يكون القطع المكافئ الخاص بالمعادلة التربيعية المعطاة مفتوحاً؟ كيف عرفت؟ للأسفل؛ قيمة a هي عدد سالب.

1-8 المتباينات التربيعية

لماذا؟

الحالي

السابق

- 1 لقد قمت بحل المتباينات الخطية.
 - 2 التمثيل البياني للمتباينات التربيعية بمتغيرين اثنين.
- يمكن تمثيل بالون ماء أطلق من مضاع باستخدام عدة معادلات ومتباينات تربيعية مختلفة.
- يفرض أنه يمكن التعبير عن ارتفاع بالون الماء $h(t)$ بالمتر فوق سطح الأرض بعد مرور t ثانية من إطلاقه بالمعادلة التربيعية $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$.
- يمكنك حل المتباينة التربيعية لتحديد المسافة التي سيرتفع إليها البالون فوق سطح الأرض.

1 التمثيل البياني للمتباينات التربيعية

يمكنك تمثيل المتباينات التربيعية بمتغيرين بيانياً مستخدماً الأسلوب نفسه المتبع في التمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيرين.

الخطوة 1 مثل الدالة المرتبطة بيانياً.

الخطوة 2 اختر نقطة لا تقع على القطع المكافئ:

الخطوة 3 ظلل وفقاً لما سبق.

هل ينبغي أن يكون القطع المكافئ متصلاً أم متقطعاً؟

$y_1 \geq a(x_1)^2 + b(x_1) + c$

هل (x_1, y_1) حل؟

هل (x_1, y_1) ليس حل؟

مثال 1 تمثيل المتباينة التربيعية بيانياً

مثل بيانياً $y > x^2 + 2x + 1$

الخطوة 1 مثل الدالة المرتبطة بيانياً.

$y = x^2 + 2x + 1$

ينبغي أن يكون القطع المكافئ متقطعاً.

الخطوة 2 اختر نقطة لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ:

$y > x^2 + 2x + 1$

$-1 > 0^2 + 2(0) + 1$

$-1 > 1$

إذًا، $(0, -1)$ ليست حلاً للمتباينة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي لا تحتوي على نقطة $(0, -1)$.

تمرين موجّه

مثل كل متباينة بيانياً. 1A. انظر الهامش.

1B. $y < -2x^2 + 3x + 5$

1A. $y \leq x^2 + 2x + 4$

المفردات الجديدة

المتباينة التربيعية

quadratic inequality

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة

في حلها.

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية
جبرياً
تكون مجموعة حل المتباينة
التربيعية جميعاً من أعداد
حقيقية عندما تحقق نقاط
الاختبار الثلاث المتباينة. وتكون
المجموعة خالية عندما لا تحقق
أي من نقاط الاختبار المتباينة.

مثال 5 حل المتباينة التربيعية جبرياً

حل المتباينة $x^2 - 3x \leq 18$.

الخطوة 1 أوجد حل المعادلة التربيعية المتصلة $x^2 - 3x = 18$.

$$x^2 - 3x = 18$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

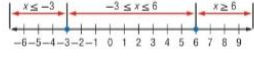
$$(x - 3)(x + 6) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{أو} \quad x - 6 = 0$$

$$x = -3 \quad \quad \quad x = 6$$

أوجد حل كل معادلة.

الخطوة 2 ارسم النقطتين -3 و 6 على خط الأعداد. استخدم هاتين النقطتين. فهذه القيم هي حلول المتباينة الأصلية. ولاحظ أن خط الأعداد ينقسم إلى ثلاثة أجزاء.



الخطوة 3 اختبر قيمة كل فترة لترى هل تحقق المتباينة الأصلية أم لا.

$x \leq -3$	$-3 \leq x < 6$	$x \geq 6$
اختبار $x = -5$	اختبار $x = 0$	اختبار $x = 8$
$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$
$(-5)^2 - 3(-5) \leq 18$	$(0)^2 - 3(0) \leq 18$	$(8)^2 - 3(8) \leq 18$
$40 \leq 18$	$0 \leq 18$	$40 \leq 18$
		مجموعة الحل هي $(x -3 \leq x \leq 6)$ أو $[-3, 6]$.



تمرين موجّه

حل كل متباينة جبرياً.

5A. $x^2 + 5x < -6$ ($x | -3 < x < -2$) 5B. $x^2 + 11x + 30 \geq 0$ ($x \geq -5$ أو $x \leq -6$)

التحقق من فهمك

- مثال 1** مثل كل متباينة بيانياً. 1-3. انظر الهامش.
1. $y \leq x^2 - 8x + 2$ 2. $y > x^2 + 6x - 2$ 3. $y \geq -x^2 + 4x + 1$
- المثالان 2-3** الاستنتاج المنطقي حل كل متباينة تربيعية مستعينا بالتمثيل البياني.
4. $0 < x^2 - 5x + 4$ ($x | x < 1$ أو $x > 4$) 5. $x^2 + 8x + 15 < 0$ ($x | -5 < x < -3$)
6. $-2x^2 - 2x + 12 \geq 0$ ($x | -3 \leq x \leq 2$) 7. $0 \geq 2x^2 - 4x + 1$ ($x | 0.29 \leq x \leq 1.71$)
- مثال 4** كرة القدم ركل لاعب الوسط الكرة نحو المرمى أثناء المباراة. يمكن تسجيل ارتفاع الكرة بالنتر فوق سطح الأرض $h(t)$ عند الزمن t بالمعادلة $h(t) = -0.1t^2 + 2.4t - 8$. إذا كان ارتفاع المرمى 2 أمتار. فما الوقت الذي ستتمكن الكرة عنده من دخول المرمى؟ ($t | 0 < t < 2.8$)
- مثال 5** حل كل متباينة جبرياً.
9. $x^2 + 6x - 16 < 0$ ($x | -8 < x < 2$) 10. $x^2 - 14x > -49$ ($x | x < 7$ أو $x > 7$)
11. $x^2 + 12x \geq 28$ ($x | 3.17 \leq x \leq 8.83$) 12. $x^2 - 4x \leq 21$ ($x | -3 \leq x \leq 7$)

76 | الدرس 1-8 | المتباينات التربيعية

التعليم المتمايز

واجه الطلاب مشكلة تكوين روابط بين التمثيل البياني للمتباينة التربيعية و المتباينة نفسها. على الطلاب أن يفكروا في كيفية أن التمثيل البياني للمتباينة التربيعية يساعدهم على فهم معنى المتباينة. اطلب منهم إستكشاف إذا كانت المتباينة التربيعية نفسها أو التمثيل البياني للمتباينة أكثر وضوحاً بالنسبة لهم. اطلب منهم تفسير اختياراتهم.

تدريس التدريبات الرياضية

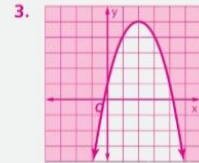
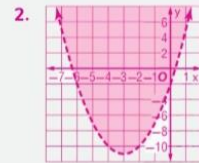
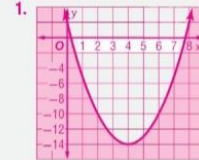
الفهم المنطقي يبدأ الطلاب الماهرين رياضياً بشرح معنى المشكلة لأنفسهم و البحث عن نقاط الوصول لحليها. ثم يقومون بتحليل معطيات ، و الشبود و العلاقات والأهداف. ويتحققون من إجاباتهم للمسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار ، " هل هذا معقول؟"

3 التمرين

التقويم الشكلي

استخدم التمارين 1-12 للتأكد من الفهم استخدم الجدول في أسفل الصفحة التالية لتخصيص مهام طلابك.

إجابات إضافية



76 | الدرس 1-8 | المتباينات التربيعية

التدريب وحل المسائل

مثال 1

مثل كل متباينة بيانياً. 13-18. انظر الهامش.

13. $y \geq x^2 + 5x + 6$ 14. $x^2 - 2x - 8 < y$ 15. $y \leq -x^2 - 7x + 8$

16. $-x^2 + 12x - 36 > y$ 17. $y > 2x^2 - 2x - 3$ 18. $y \geq -4x^2 + 12x - 7$

19. $x^2 - 9x + 9 < 0$ 20. $x^2 - 2x - 24 \leq 0$ 21. $x^2 + 8x + 16 \geq 0$

22. $x^2 + 6x + 3 > 0$ 23. $0 > -x^2 + 7x + 12$ 24. $-x^2 + 2x - 15 < 0$

25. $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$ 26. $-3x^2 - 3x + 9 > 0$ 27. $0 > -2x^2 + 4x + 4$

28. $3x^2 + 12x + 36 \leq 0$ 29. $0 \leq -4x^2 + 8x + 5$ 30. $-2x^2 + 3x + 3 \leq 0$

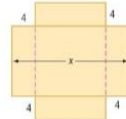
31. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ 32. $x^2 + 7x \geq -10$ 33. $2 > x^2 - x$

34. $-3 \leq -x^2 - 4x$ 35. $-x^2 + 2x \leq -10$ 36. $-6 > x^2 + 4x$

37. $2x^2 + 4 \geq 9$ 38. $3x^2 + x \geq -3$ 39. $-4x^2 + 2x < 3$

40. $-11 \geq -2x^2 - 5x$ 41. $-12 < -5x^2 - 10x$ 42. $-3x^2 - 10x > -1$

31. تصميمات معمارية يأخذ مدخل غرفة مفوس شكل قطع مكافئ يمكن تشكيله بالمعادلة $f(x) = -x^2 + 6x + 1$. ما المساحة من جانبي القوس التي يكون الارتفاع عندها 7 أمتار على الأقل؟ 1.26 متر إلى 4.73 أمتار تقريباً



32. التصنيع يصنع الصندوق بفص مربعات مساحتها 4 سنتيمترات من كل جانب من قطعة مربعة من الورق المقوى. ثم تطوى الجوانب. إذا كانت $V(x) = 4x^2 - 64x + 256$ تمثل حجم الصندوق، فما أبعاد قطعة الورق المقوى الأصلية إذا كان حجم الصندوق لا يتجاوز 750 سنتيمترًا مكعبًا؟ أكبر من 8 سنتيمترات، ولكن ليس أكبر من 21.69 سنتيمترًا.

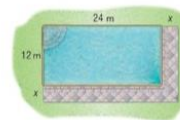
حل كل معادلة جبرياً. 33-44. راجع ملحق إجابات الوحدة 1.

33. $x^2 - 9x < -20$ 34. $x^2 + 7x \geq -10$ 35. $2 > x^2 - x$

36. $-3 \leq -x^2 - 4x$ 37. $-x^2 + 2x \leq -10$ 38. $-6 > x^2 + 4x$

39. $2x^2 + 4 \geq 9$ 40. $3x^2 + x \geq -3$ 41. $-4x^2 + 2x < 3$

42. $-11 \geq -2x^2 - 5x$ 43. $-12 < -5x^2 - 10x$ 44. $-3x^2 - 10x > -1$



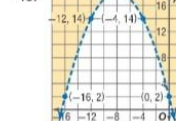
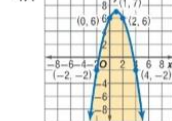
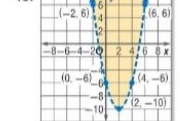
45. الشايرة تريد عائلة أن تضع زخارف بطول جانبي حمام السباحة لديها. وسيكون عرض الزخارف واحدًا على الجانبين. ولن تتجاوز المساحة الإجمالية لحمام السباحة والزخارف 750 مترًا مربعًا.

a. مثل المتباينة التربيعية بيانياً. b. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

b. حدد قياسات العرض المحتملة للزخارف.

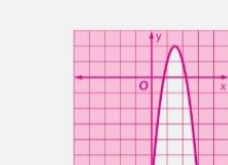
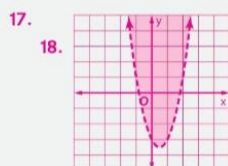
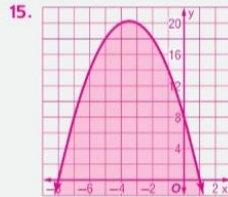
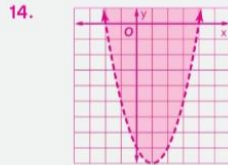
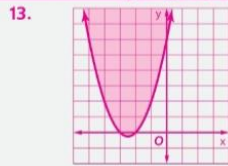
ليس أكبر من 10.04 m

اكتب متباينة تربيعية لكل تقثيل بياني.



46. $y > x^2$
47. $-4x - 6$
48. $y \leq -x^2$
49. $+2x + 6$
50. $y > 48$
51. $-0.25x^2 - 4x + 2$

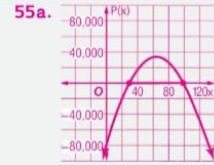
إجابات إضافية



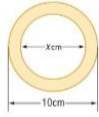
خيارات الواجب المنزلي المميزة

مستوى	الفرض	خيار اليوميين
الأساسي	13-44, 57-60, 62-83	63-66, 13-43, 67-83, 62, 14-44, 57-60
الأساس	57-60, 56, 13-55, 62-83	13-44, 63-66, 45-60, 62, 67-83
المتقدم	45-76	

إجابة إضافية

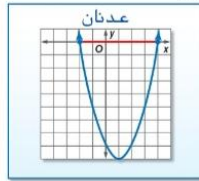
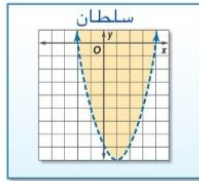


- حل كل متباينة تربيعية مستخدماً التمثيل البياني أو جدولاً أو جبرياً.
49. $-2x^2 + 12x < -15$ 50. $5x^2 + x + 3 \geq 0$ 51. $11 \leq 4x^2 + 7x$ 49. $x < -1.06$ 50. $x > 7.06$
52. $x^2 - 4x \leq -7$ 53. $-3x^2 + 10x < 5$ 54. $-1 \geq -x^2 - 5x$ 50. جميع الأعداد الحقيقية
55. الأعمال تستخدم إحدى شركات تصنيع الإلكترونيات الدالة $P(x) = x(-27.5x + 3520) + 20,000$ في عمل نموذج لأرباحها الشهرية عند بيع x ألف مشغل صوتي رقمي.
- a. مثل بيانياً المتباينة التربيعية لأرباح شهرية فيمتها AED 100,000 على الأقل. انظر الهامش.
- b. كم جهاز مشغل صوتي رقمي يجب أن تباع الشركة المنتجة لتحقيق أرباح فيمتها AED 100,000 على الأقل شهرياً؟ من 30,000 إلى 98,000 جهاز مشغل صوتي رقمي
- c. على فرض أن الشركة المنتجة لديها مصاريف شهرية إضافية فيمتها AED 25000. فشر كيف يؤثر ذلك على التمثيل البياني لدالة الأرباح. ثم حدد كم جهاز مشغل صوتي رقمي ينبغي أن تباعه الشركة المنتجة لتحقيق أرباح فيمتها AED 100,000 على الأقل. 56b. 1.28 cm إلى 1.59 cm
56. المرافق يقوم أحد المتاولين بتركيب أنابيب الصرف ليرفأ السيارات الخاص بأحد مراكز التسوق. وينبغي أن يكون القطر الخارجي للأنبوب 10 سنتيمترات. ويجب أن تكون مساحة المقطع العرضي 35 سنتيمتراً مربعاً على الأقل ولا تزيد عن 42 سنتيمتراً مربعاً.
- a. مثل المتباينات التربيعية بيانياً. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.
- b. ما سبب أنبوب الصرف التي يمكن أن يستخدمها المتاول؟
- 55c. التمثيل البياني مزاج لأسفل بمقدار 25,000 وحدة. يجب أن تباع الشركة المنتجة ما بين 47,000 إلى 81,000 مشغل صوتي رقمي.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. مسألة غير محددة الإجابة اكتب متباينة تربيعية لكل حالة.
- a. مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية. الإجابة النموذجية: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$
- b. مجموعة الحل هي المجموعة الخالية. الإجابة النموذجية: $x^2 - 4x + 6 < 0$
58. فقد استخدم سلطان وعدنان تيشلاً بيانياً لحل المتباينة التربيعية $x^2 - 2x - 8 > 0$. أيهما على صواب؟ اشرح.
58. كلاهما مخطئ؛ فقام سلطان بتمثيل المتباينة بيانياً مستخدماً متغيرين. وقام عدنان بتمثيل فترة خاطئة.
- 59-62. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.



59. الاستنتاج هل حدود مجموعة حل $x^2 + 4x - 12 \leq 0$ ضعف قيمة حدود $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$ ؟ فشر.
60. الاستنتاج حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. أم دائماً. أم غير صحيحة على الإطلاق. برز استنتاجك.
- تقاطع $y \geq ax^2 - c$ و $y \leq -ax^2 + c$ هي المجموعة الخالية.
61. تحقّق مثل بيانياً تقاطع التمثيلين البيانيين $y \leq -x^2 + 4$ و $y \geq x^2 - 4$.
62. الكتابة في الرياضيات ما أوجه تشابه الأساليب المستخدمة في حل المتباينات التربيعية والمعادلات التربيعية؟ وما أوجه اختلافها؟

انتبه!

تحليل الخطأ إذا كانت

المتباينة تحتوي على x كمبتغير واحد، يتعين على الحل أن يشير فقط إلى قيم x . وضح أن التدريب 58 قام عبر التمثيل البياني للمتباينة في متغيرين.

4 التقويم

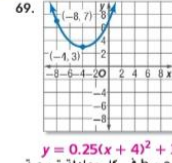
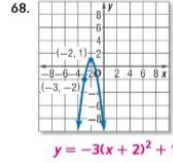
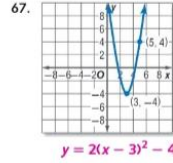
تذكرة خارج الباب اكتب متباينة تربيعية بمتغير واحد على السبورة. في بطاقة الفهرس، على الطلاب حل المتباينة بيانياً و جبرياً.

تدريب على الاختبار المعياري

63. إجابة شكيبة ينبغي أن تزرع أرض مساحتها 24.34 متراً في 12.12 متراً. يمكن أن يغطي كل حقيبة بذور 20.9 متراً مربعا من الأرض. كم حقيبة بذور ستحتاج؟ **15**
64. SAT/ACT ناتج ضرب عددين صحيحين ما بين 107 و 116. أي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد الأعداد الصحيحة؟ **D**
65. الاحتمال يجب ترتيب خمسة طلاب بجانب بعضهم البعض بحيث يكون الطالب الأطول في المنتصف والطالبان الأقصران على الطرفين. إذا لم يكن هناك طالبان متساويين في الطول، فكم ترتيباً مختلفاً يمكن ترتيبه؟ **G**
66. إجابة قصيرة بنسق $\frac{5+i}{6-3i}$ $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}i$
- F 2 H 5
G 4 J 6
- A 5 D 15
B 10 E 23
C 12

مراجعة شاملة

اكتب معادلة بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 8-1)



- أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية. أوجد قيمة المميز. صف عدد الجذور ونوعها. (الدرس 7-1)
70. $4x^2 + 7x - 3 = 0$ 71. $-3x^2 + 2x - 4 = 9$ 72. $6x^2 + x - 4 = 12$
- 97: جذور غير نسبية 152: 2 جذور مركبة 385: 2 جذور غير نسبية
73. عدد كيلومترات استهلاك الوقود يمكننا إيجاد عدد كيلومترات استهلاك الوقود y بالكيلومتر لكل لتر في سيارة ما باستخدام المعادلة $0.01x^2 - 0.9x + 10 = y$. حيث x هي سرعة السيارة بين 10 كيلومترات و 75 كيلومتراً في الساعة. أوجد مدى السرعات التي تغطي عدد كيلومترات استهلاك الوقود لـ 25 كيلومتراً في اللتر على الأقل. (الدرس 6-1) $22.087 \leq x \leq 67.91$ كيلومتر في الساعة

- اكتب كل معادلة في صيغة الرأس. إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة، حدد الرأس. ومحو التمثيل واتجاه الفتح. ثم مثل الدالة بيانياً (الدرس 8-1)
74. $y = -6(x + 2)^2 + 3$ 75. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 8x$ 76. $y = (x - 2)^2 - 2$ 77. $y = 2x^2 + 8x + 10$

مراجعة البهارات

- استخدم خاصية التوزيع لإيجاد كل ناتج ضرب.
78. $-6(x - 4) - 6x + 24$ 79. $8(w + 3x) 8w + 24x$ 80. $-4(-2y + 3z) 8y - 12z$
81. $-1(c - d) d - c$ 82. $0.5(5x + 6y) 2.5x + 3y$ 83. $-3(-6y - 4z) 18y + 12z$

79

التعليم المتمايز

تكلمة اكتب $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$ على السبورة. اسأل الطلاب أن يجدوا قيم x التي يكون فيها هذا التعبير عدداً حقيقياً. اشرح أن الحل هو كل قيم x بحيث أن الرمز تحت الجذر أكبر من أو مساو للصفر. $\{x \mid x \leq -1 \text{ or } x \geq 3\}$

المفاهيم الأساسية

المعلومات **منظم الدراسة**

- تأمل المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$, حيث $a \neq 0$ إذا كان $0 < a$ فإن التمثيل البياني يفتح لأعلى، وإذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني

82 | الوحدة 1 | دليل الدراسة والمراجعة

تقويم مستر

زر المفردات تُشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى موضع ذكر هذا المصطلح أول مرة. إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في الإجابة على الأسئلة 1-4، ذكرهم بإمكانية استخدام مرجع الصفحة لتنشيط ذاكرتهم عن المفردات.

مكافئ: صحيحة

7. التمثيل البياني لدالة تربيعية عبارة عن قطع مكافئ.
8. يكون للتمثيل البياني للدالة التربيعية قمتها العظمى إذا كان معامل الحد x^2 موجبا.
9. المعادلة التربيعية التي لها تمثيل بياني به نقطتان تقاطع مع المحور x يكون لها جذرين حقيقيين واحد.
10. التعبير $4ac - b^2$ يسمى المميز.
11. الدالة التي تعزف تعريفات مختلفة بالنسبة للأجزاء المختلفة لجانها تسمى دالة متعددة التعريف.
12. معنى دالة العدد الصحيح الأكبر هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.
13. حلول المعادلة التربيعية تسمى جذورا.
14. التمثيل البياني للدالة الأصلية يُعبر عن الأسفل لشكل التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2 + 5$.

خاطئة: الجواب

خاطئة: يُزاج 5 وحدات للأعلى

المفردات الأساسية

عدد تخيلي بحت	دالة القيمة المطلقة
pure imaginary number	absolute value function
المعادلة التربيعية	محور التماثل
quadratic inequality	axis of symmetry
خاصية الجذر التربيعي	إكمال المربع
Square Root Property	completing the square
صيغة الرأس	تغيير الأبعاد/التهدد
vertex form	dilation
دالة متعددة التعريف	المميز
piecewise-defined function	discriminant
دالة خطية متقطعة	جذر مضاعف
piecewise-linear function	double root
صيغة تربيعية	دالة العدد الصحيح الأكبر
Quadratic Formula	greatest integer function
دالة تربيعية	القيمة العظمى
quadratic function	maximum
الانعكاس	القيمة الصغرى
reflection	minimum
صيغة قياسية	قطع مكافئ
standard form	parabola
دالة درجة	مرافقات مركبة
step function	complex conjugates
التحويل	عدد مركب
translation	complex number
رأس	المميز
vertex	discriminant
	صيغة محللة إلى العوامل
	factored form
	طريقة فويل
	FOIL method
	الوحدة التخيلية
	imaginary unit

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي **صوابا** أم **خطأ**، وإذا كانت **خطأ**، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. يتقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ في نقطة واحدة تسمى الرأس. **صحيح**
2. تُستخدم طريقة تسمى طريقة فويل في جعل التعبير التربيعي تربيعا كاملا حتى يتم حل المعادلة المرتبطة. **خطأ، في إكمال المربع**
3. العدد $6i$ يسمى جذورا تخيليا. **صحيح**
4. العددين $2 + 3i$ و $2 - 3i$ تسميان مركبتين مترافقتين. **صحيح**
5. يمكن إيجاد محور التماثل للدالة التربيعية باستخدام المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$. **صحيحة**
6. الرأس هو النقطة العظمى أو الصغرى في قطع

جميع الحقوق محفوظة © محفوظة لجميع الحقوق محفوظة © محفوظة لجميع الحقوق محفوظة

مطويات

مطويات ديننا زيك

على الطلاب أن ينظروا خلال الوحدة للتأكد من شمول أمثلة في مطوياتهم. أقتراح أن الطلاب أن يبقوا مطوياتهم في متناول يديهم عند الانتهاء من صفحات دليل الدراسة والمراجعة. تشير إلى أن المطويات يمكن أن تكون بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة لاختبار الوحدة.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

1-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال 1

تأمل كل معادلة.

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

11. $y = x^2 - 4x + 4$ 11-14. **انظر الهامش.**

12. $y = -x^2 + 3x$

13. $y = x^2 - 2x - 3$

14. $y = -x^2 + 2$

15. الصاروخ تم إطلاق صاروخ لعبة بسرعة متجهة لأعلى معدلها 32 متراً في الثانية، وتغطي المعادلة ارتفاع الكرة بعد t ثوانٍ من إطلاقه.

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى. **عظمى**

b. حدد القيمة العظمى أو الصغرى. 16

c. حدد مجالاً ومدى معقولين لهذا الوقت.

$R = \{h \mid 0 \leq h \leq 16\}$; $D = \{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$

تأمل $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. حدد مجال الدالة ومداها.

إذا كان $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، فإن $a = -1$ و $b = 6$ و $c = 5$.

لأن a موجب، فإن التمثيل البياني يفتح للأعلى. وإذا يكون للدالة قيمة صغرى.

b. حدد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة الصغرى هي الإحداثي الرأس y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $-\frac{b}{2a}$ أو $-\frac{6}{2(1)} = -3$.

الدالة الأصلية $f(x) = x^2 + 6x + 5$

$x = -3$

$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = -4$

يُسطر.

القيمة الصغرى هي -4.

c. حدد مجال الدالة ومداها.

الحال هو جميع الأعداد الحقيقية. واليدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها. (أو $\{y \mid y \geq -4\}$)

1-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

مثال 2

حلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. وإذا كان لا يُمكن إيجاد جذور صحيحة، فتقدّر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

16. $x^2 - 3x - 4 = 0$ -1, 4

17. $-x^2 + 6x - 9 = 0$ 3

18. $x^2 - x - 12 = 0$ -3, 4

19. $x^2 + 4x - 3 = 0$ -4.6, 0.6

20. $x^2 - 10x = -21$ 3, 7

21. $6x^2 - 13x = 15$ -0.8, 3

22. نظرية الأعداد أوجد عددين مجموعتهما 2 وناتج ضربهما -3 و -15

حلّ $x^2 - x - 6 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثل بيانياً الدالة ذات الصلة $f(x) = x^2 - x - 6$

يبدو أن نقاط التقاطع مع المحور x في التمثيل البياني تقع عند -2 و 3. إذا فالحلان هما -2 و 3.

المراجعة درس بدرس

التدخل إذا لم تكن الأمثلة المقدمة كافية لمراجعة الموضوعات التي تتضمنها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس تبلغهم بمكان مراجعة هذا الموضوع في كتبهم الدراسية.

إجابات إضافية

- 11a. القيمة الصغرى
- 11b. 0
- 11c. $D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$
- 12a. القيمة العظمى
- 12b. 2.25
- 12c. $D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y \leq 2.25\}$
- 13a. القيمة الصغرى
- 13b. -4
- 13c. $D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y \geq -4\}$
- 14a. القيمة الصغرى
- 14b. 2
- 14c. $D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y \leq 2\}$

مراجعة درس يدرس

تدخل إذا كانت الأمثلة ليست كافية لمراجعة الموضوعات التي تغطيها الأسئلة. ذكر الطلاب أن مراجع الدرس تخبرهم أين يمكن مراجعة هذا الموضوع في الكتب المدرسية الخاصة بهم.

إجابات إضافية

5. $x^2 - 11x + 30 = 0$
6. $x^2 + 10x + 21 = 0$
7. $x^2 + 2x - 8 = 0$
8. $3x^2 - x - 2 = 0$
9. $6x^2 - 31x + 5 = 0$
10. $4x^2 + 5x + 1 = 0$

1-3 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حل كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

23. $x^2 + 6x + 9 = 16$ 1, -7
24. $-a^2 - 10a + 25 = 25$ 0, -10
25. $y^2 - 8y + 16 = 36$ 10, -2
26. $y^2 - 6y + 2 = 0$ 5.6, 0.4
27. $m^2 - 7m = 5$ -0.7, 7.7
28. $-3x^2 + 4 = 0$ -1.2, 1.2

37. نظرية **8-6** أوجد عددين مجموعهما -2. وناتج ضربهما -48.

مثال 3

حلّ $x^2 - 16x + 32 = 0$ بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.
اعزل الحدين x^2 و x . ثم أكمل المربع وأوجد الحل.
المعادلة الأصلية:
اعزل الحدين x^2 و x .
أكمل المربع.
حلّ إلى العوامل.
احسب الجذر التربيعي.
اجمع إلى كل طرف.
بسط.
الحلان هما 2.3 و 13.7 تقريبًا.

1-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

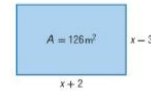
اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية مستخدمًا الجذور المعطاة 10-5. **انظر الهامش.**

29. 5, 6 32. -3, -7
30. -4, 2 33. $\frac{2}{3}, 1$
31. $\frac{1}{5}, 5$ 34. $-\frac{1}{4}, -1$

حلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

35. $2x^2 - 2x - 24 = 0$ $\{-3, 4\}$ $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$
36. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $\left\{\frac{1}{3}, 5\right\}$
37. $3x^2 - 16x + 5 = 0$ $\left\{\frac{1}{3}, 5\right\}$

14. أوجد قيمة x وأبعاد المستطيل أدناه.



$x = 12$; 9 أمتار في 14 مترًا

مثال 4

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية مستخدمًا 4 و $-\frac{1}{2}$ كجذري المعادلة.

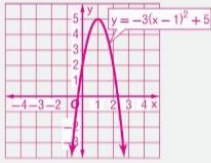
اكتب النمط: $(x-p)(x-q) = 0$
عوض عن p بـ $-\frac{1}{2}$ وعن q بـ 4 .
 $\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x-4) = 0$
بسط.
 $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4) = 0$
اضرب.
 $x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$
اضرب كل طرف في 2 بحيث يكون C و D عددين صحيحين.
 $2x^2 - 7x - 4 = 0$

مثال 5

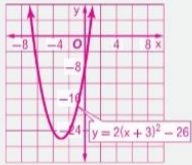
حلّ $2x^2 - 3x - 5 = 0$ بالتحليل إلى العوامل.
معادلة أصلية:
حلّ ثلاثي الحدود إلى العوامل:
 $(2x-5)(x+1) = 0$
خاصية ناتج الضرب الصفري:
 $2x-5 = 0$ أو $x+1 = 0$
 $x = \frac{5}{2}$ أو $x = -1$
مجموعة الحل هي $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$ أو $\left\{-1, 2.5\right\}$.

اجابات اضافية

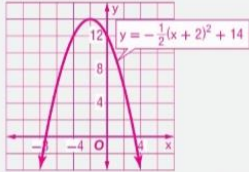
33. $y = -3(x-1)^2 + 5$; (1, 5); $x = 1$;
مفتوح لأسفل



34. $y = 2(x+3)^2 - 26$; (-3, -26);
 $x = -3$; مفتوح لأعلى



35. $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 14$; (-2, 14);
 $x = -2$; مفتوح لأسفل



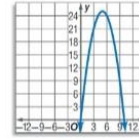
36. $y = 3(x+6)^2 - 83$; (-6, -83);
 $x = -6$; مفتوح لأعلى



1-7 تحويلات الدوال التربيعية

اكتب كل معادلة تربيعية بصيغة الرأس. إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة، ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه المنحنى. ثم مثل الدالة بيانياً.

- 33-36. انظر الهامش.
55. $y = -3(x-1)^2 + 5$ 57. $y = 2x^2 + 12x - 8$
56. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$ 58. $y = 3x^2 + 36x + 25$



5 و 5 $f(x) = -x^2 + 10x$

59. بين التمثيل البياني الموجود يساراً ناتج ضرب عددين مجموعهما 10. أوجد دالة تمثل ناتج الضرب هذا واستخدمها في تحديد العددين اللذين يشجان أكبر ناتج ضرب.

1-8 المتباينات التربيعية

مثل كل متباينة تربيعية بيانياً.

60. $y \geq x^2 + 5x + 4$ 62. $y < -x^2 + 5x - 6$
61. $y > x^2 - 6x + 8$ 63. $y \leq x^2 + 10x - 4$

64. يريد عمر أن يضع رصيفاً خشبياً بطول الحديقة. وسيكون عرض الرصيف الخشبي واحداً على الجانبين. ولا يمكن أن يزيد إجمالي مساحة الحديقة والرصيف الخشبي عن 500 متر مربع. ما عرض الرصيف الخشبي؟

بين 0 و 5 م

- حل كل متباينة جبرياً أو مستعيناً بالتمثيل البياني.
65. $x^2 + 8x + 12 > 0$ $\{x | x < -6 \text{ أو } x > -2\}$
66. $6x + x^2 \geq -9$ $\{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
67. $2x^2 + 3x - 20 > 0$ $\{x | x < -4 \text{ أو } x > \frac{5}{2}\}$
68. $4x^2 - 3 < -5x$ $\{x | -1.69 < x < 0.44\}$
69. $3x^2 + 4 > 8x$ $\{x | x < \frac{2}{3} \text{ أو } x > 2\}$

38-41. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

مثال 9

اكتب الدالة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرأس. ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه المنحنى.

- $y = 3x^2 + 24x + 15$ المعادلة الأصلية
 $y = 3(x^2 + 8x) + 15$ قسم إلى مجموعات وحل إلى العوامل.

$y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$ أكمل التريبع.
 $y = 3(x+4)^2 - 33$ أعد كتابة $x^2 + 8x + 16$ كـ $(x+4)^2$ في صيغة تريبع كامل.

إذاً، $a = 3$ ، $h = -4$ ، و $k = -33$. يوجد الرأس عند $(-4, -33)$. ومحور التماثل هو $x = -4$. حيث a موجبة والتمثيل البياني مفتوح لأعلى.

مثال 10

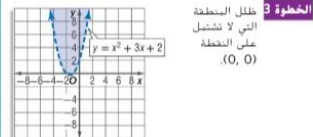
مثل بيانياً $y > x^2 + 3x + 2$

مثل الدالة المرتبطة بيانياً: $y > x^2 + 3x + 2$. ونظراً لأن رمز المتباينة $>$ مستخدم، فسيكون القطع المكافئ مرسوماً بخطوط متقطعة.

اختر نقطة لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ، مثل $(0, 0)$.

$y > x^2 + 3x + 2$
 $(0) > (0)^2 + 3(0) + 2$
 $0 > 2$

إذاً، $(0, 0)$ ليست حلاً للمتباينة.



الخطوة 3

ظل المنطقة التي لا تشمل على النقطة $(0, 0)$.

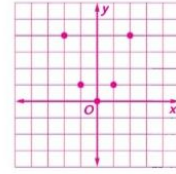
اجابات اضافية (ممارسة للاختبار)

2. إذا مثلت الدالة بيانياً فستكون الرأس على بُعد 202 وحدة فوق المحور الأفقي. لذلك، فإن الارتفاع لن يكون أبداً 250.

1

تدريب على الاختبار

إجابة إضافية



تربيعية

19.

استخدم جدول قيم لتمثيل الدوال التالية بيانياً، وحدد المجال وال المدى.

1. $y = x^2 + 2x + 5$
2. $y = 2x^2 - 3x + 1$

تأمل $y = x^2 - 7x + 6$

3. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى. **صغرى**

4. حدد القيمة العظمى أو الصغرى. **-6.25**

5. ما المجال وال المدى؟

$D = \{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \}$; $R = \{ y | y \geq -6.25 \}$
حل كل معادلة بالتمثيل البياني. وإن كان من غير الممكن إيجاد جذور صحيحة، فقدر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

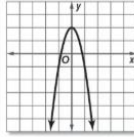
6. $x^2 + 7x + 10 = 0$ **-5, -2**
7. $x^2 - 5 = -3x$ **4.2, 1.2**

مضغوط رأسياً ومزاح 4 وحدات لأعلى

صف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

8. $g(x) = x^2 - 5$ **مزاح 5 وحدات لأسفل.**
9. $g(x) = -3x^2$ **منعكس غير المحور x، متمدّد رأسياً**
10. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$

11. الاختيار من متعدد أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟ **D**



- $y = -3x^2$
- $y = 3x^2 + 1$
- $y = x^2 + 2$
- $y = -3x^2 + 2$

حل كل معادلة بإكمال المربع.

12. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **لا يوجد حل حقيقي**
13. $x^2 - x - 6 = 0$ **-2, 3**
14. $2x^2 - 36 = -6x$ **-6, 3**

حل كل معادلة مما يلي باستخدام القانون العام، وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

15. $x^2 - x - 30 = 0$ **-5, 6**
16. $x^2 - 10x = -15$ **1.8, 8.2**
17. $2x^2 + x - 15 = 0$ **2.5, -3**

18. البيسبول يضرب إسماعيل كرة البيسبول في الهواء، وشكل المعادلة $h = -16t^2 + 60t + 3$ ارتفاع h الكرة بالأمتار بعد t من الثواني. فبما مدة بقاء الكرة في الهواء؟

3.8 ثوان تقريباً

19. مثل بيانياً $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$. وشكل ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية، أم دالة تربيعية، أم دالة أسية. **انظر الهامش.**

20. ابحث عن نمط في الجدول لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

21. نادي السيارات يوضح الجدول عدد أعضاء نادي السيارات على مدار أربعة أعوام متتالية بعد افتتاحه.

الوقت (الأعوام)	0	1	2	3	4
الأعضاء	10	20	40	80	160

- حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات **الأسّي**
- اكتب دالة تمثل البيانات **$y = (10)2^x$**
- توقع عدد أعضاء نادي السيارات بعد 6 أعوام.

640

2 التدريس

مثال اضافي

التدريب على الاختبار المعياري
تلقى فاطمة كرة التنس الى الاعلى بسرعة 65 قدم في الثانية الواحدة، وتنتقل الكرة من يدها عندما كانت يدها على ارتفاع يساوي 4 اقدام فوق سطح الأرض. ارتفاع الكرة بعد ثواني t من إلانها يتضح في المعادلة التالية
$$h(t) = -16t^2 + 65t + 4$$

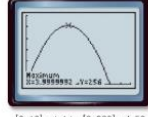
احسب الوقت، بالتقريب إلى أقرب ثانية، الذي تصل فيه كرة التنس الي أقصى ارتفاع لها. **A**

- A** ٢٠ ثانية
B 4 ثواني
C 70 ثانية
D 140 ثانية

3 التقييم

استخدم التمارين 6-1 لتقويم فهم الطلاب

يسمح لك تخطيط الدالة التربيعية بيانياً بتحديد قمة ارتفاع الصاروخ ووقت حدوثها، ويمكن أن تساعدك حاسبة التمثيل البياني على تخطيط الدالة بيانياً وتحليلها سريعاً.



[0, 10] scl: 1 by [0, 50] scl: 50

خطوات العملية على الحاسبة: $Y=$ $(-)$ 16 $X,T,0,n$ x^2 $+$ 128 $X,T,0,n$ **GRAPH**

بعد تخطيط المعادلة بيانياً، استخدم **maximum** (الحد الأقصى) في قائمة **CALC**.

اضغط على **4** **2nd** **[CALC]**. ثم استخدم \blacktriangleright في وضع المؤشر يسار

أقصى نقطة واضغط على **ENTER** واستخدم \blacktriangleright في وضع المؤشر

بين أقصى نقطة واضغط على **ENTER** **ENTER**

بين التمثيل البياني أن الصاروخ يستغرق 4 ثواني ليصل إلى أقصى ارتفاع له وهو 256 متراً. الإجابة الصحيحة هي **A**.

تبايرين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. ما جذرا المعادلة $2x^2 + 10x - 48 = 0$ ؟ **C**

- A** -5, 4
B -6, 1
C -8, 3
D 2, 3

2. كم مرة يقطع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ مع المحور x ؟ **F**

- F** 0
G 1
H 2
J 3

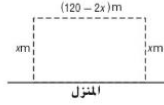
3. أي عبارة تقدم أفضل وصف للتمثيلين البيانيين للمعادلتين؟ **C**

$$16x - 2y = 24$$

$$12x = 3y - 36$$

- A** المستقيمان متوازيان.
B المستقيمان متماثلان.
C يتقاطع المستقيمان عند نقطة واحدة فقط.
D يتقاطع المستقيمان عند أكثر من نقطة، ولكنهما ليسا متماثلين.

4. نستخدم فويزة 120 متراً من السياج لبناء بيت مستطيل. وسيكون بيتها أحد أضلاع المستطيل.



تتمثل الدالة $f(x) = x(120 - 2x)$ بمساحة البيت، ما أكبر مساحة يمكن لفويزة أن تُحدها بالسياج؟ **G**

- F** 1650 m^2
G 1800 m^2
H 1980 m^2
J 2140 m^2

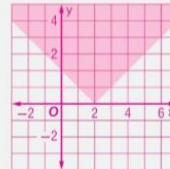
5. في أي معادلة يوجد إحداثي x للرأس على 4؟ **A**

- A** $f(x) = x^2 - 8x + 15$
B $f(x) = -x^2 - 4x + 12$
C $f(x) = x^2 + 6x + 8$
D $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

6. ما قيمة x التي تصل عندها $f(x) = x^2 + 5x + 6$ إلى أقصى قيمة لها؟ **H**

- F** -5
G -3
H $-\frac{5}{2}$
J -2

جميع الحقوق محفوظة © 2013
McGraw-Hill Education



12. يعمل والد خليفة على تصنيع صندوق أدوات على شكل منشور مستطيل. ويريد أن يجعل سطح مساحته 62 متراً مربعاً. وسيكون ارتفاع الصندوق أقصر من عرضه بمتر واحد، وسيكون الطول أطول من الارتفاع بثلاثة أمتار.
- a. ارسم نموذجاً لتثيل المسألة. **انظر الهامش.**
- b. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل مساحة سطح صندوق الأدوات. $6w^2 + 4w - 4$
- c. ما أبعاد صندوق الأدوات؟
- 2 متر ارتفاع في 3 أمتار عرض في 5 أمتار طول**

إجابة مختصرة/إجابة شبيهة

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. إجابة شبيهة بنشط $2f + 5f$. 10.

10. صف إزاحة التمثيل البياني لـ $y = (x + 5)^2 - 1$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$.

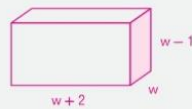
الإجابة النموذجية: إزاحة بمقدار 6 وحدات يميناً و 4 وحدات لأعلى.

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

11. بالنسبة للمعادلة التربيعية المتخطاة $ax^2 + bx + c = 0$ ، صف ما يخبرك به المميز $b^2 - 4ac$ عن جذور المعادلة. انظر الهامش.

15a. نموذج للإجابة

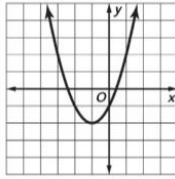


إجابات إضافية

14. عينة إجابة إن كان سلبياً، فهناك جذرين مركبين؛ إن كان صفر فهناك جذر واحد حقيقي نسبي؛ إن كان موجب ومربع كامل، فهناك جذرين حقيقيين نسبين؛ إن كان إيجابياً ولكنه ليس مربع كامل، فهناك جذرين حقيقيين غير نسبين.

2.

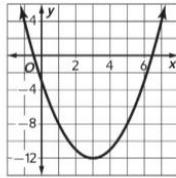
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	2	7



$D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
 $R = \{y \mid y \geq -2\}$

3.

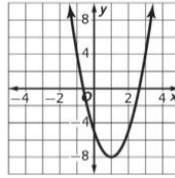
x	y
-1	4
0	-3
1	-8
2	-11
3	-12
4	-11
5	-8
6	-3
7	4



$D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
 $R = \{y \mid y \geq -12\}$

4.

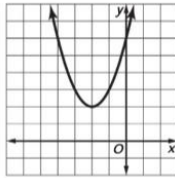
x	-2	-1	0	1	2	3
y	19	4	-5	-8	-5	4



$D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
 $R = \{y \mid y \geq -8\}$

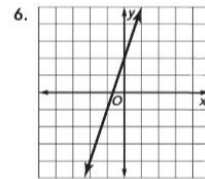
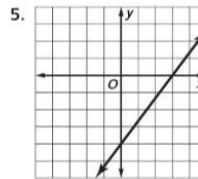
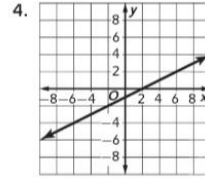
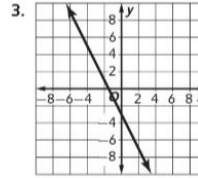
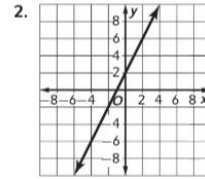
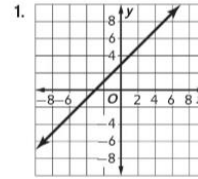
22.

x	-4	-3	-2	-1	0
y	6	3	2	3	6

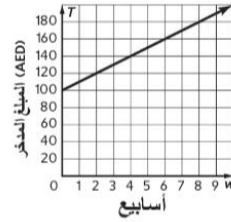


$D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
 $R = \{y \mid y \geq 2\}$

الاستعداد للوحدة 1



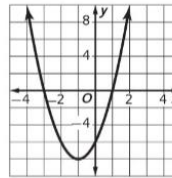
مدخلات



الدرس 1-1

1.

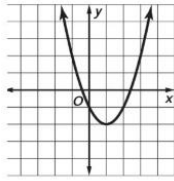
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-6	-8	-6	0	10



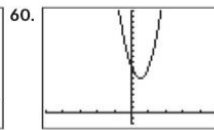
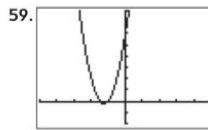
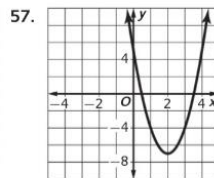
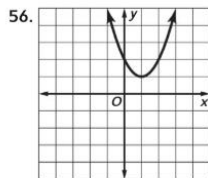
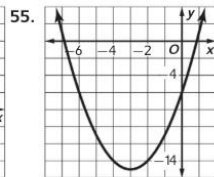
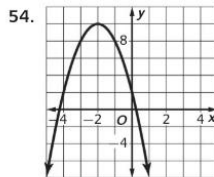
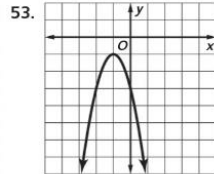
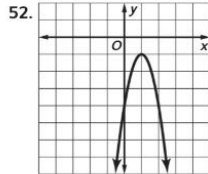
$D = \{\text{جميع الأعداد الحقيقية}\}$
 $R = \{y \mid y \geq -8\}$

27.

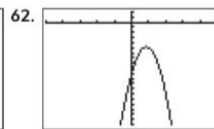
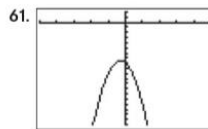
x	3	2	1	0	-1
y	2	-1	-2	-1	2



$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq -2 \}$



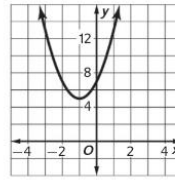
$[-5, 5]$ scl: 1 في $[-5, 5]$ scl: 1 في $[-2, 18]$ scl: 2



$[-5, 5]$ scl: 1 2, -201 scl: 2 في $[-5, 5]$ scl: 1 في $[-5, 5]$ scl: 2 2, -201 scl: 2

23.

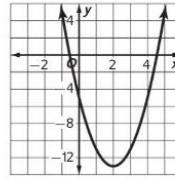
x	-3	-2	-1	0	1
y	13	7	5	7	13



$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq 5 \}$

24.

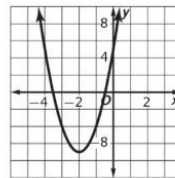
x	4	3	2	1	0
y	-5	-11	-13	-11	-5



$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq -13 \}$

25.

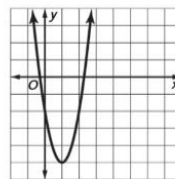
x	0	-1	-2	-3	-4
y	5	-4	-7	-4	5



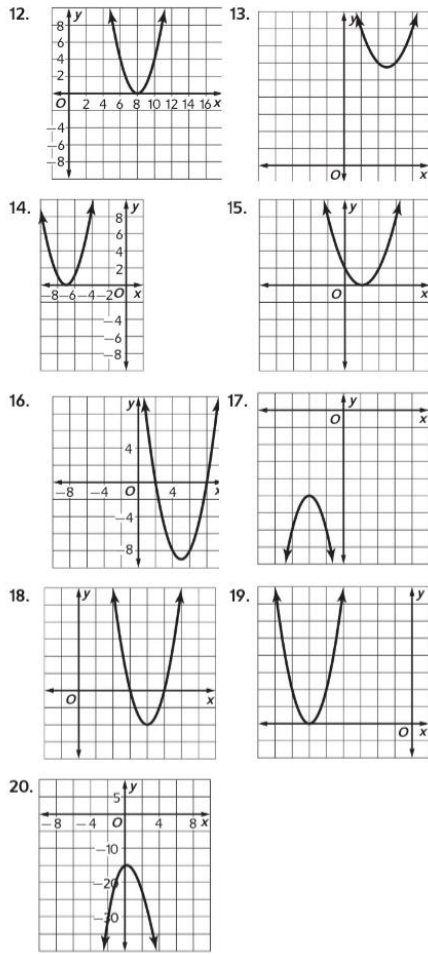
$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq -7 \}$

26.

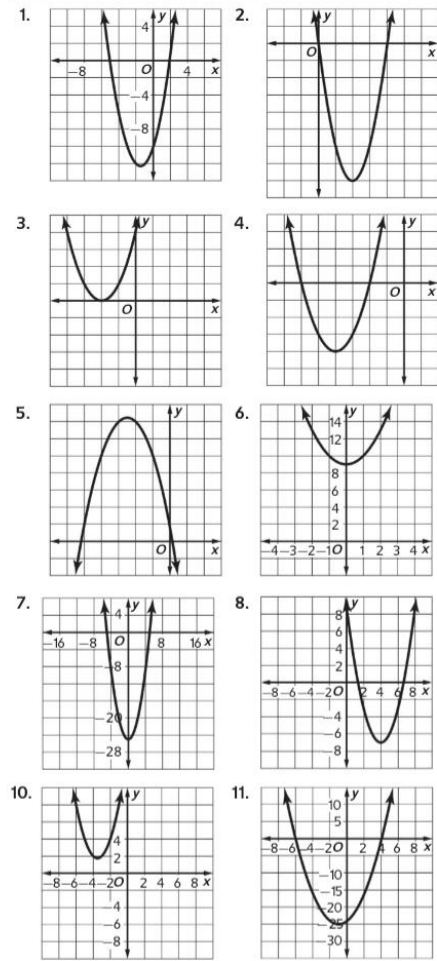
x	3	2	1	0	-1
y	7	-2	-5	-2	7

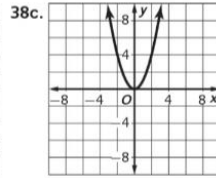
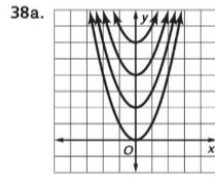


$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq -5 \}$

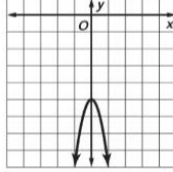
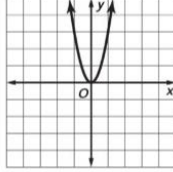


الدرس 1-2

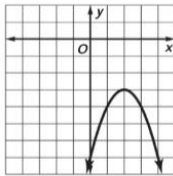




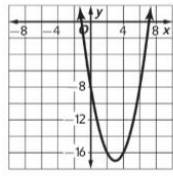
51. $x = 0$; (0, 0) قيمة صغرى 52. $x = 0$; (0, -5) قيمة عظمى:



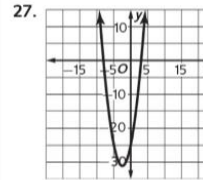
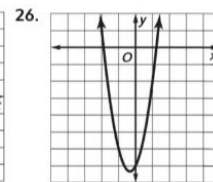
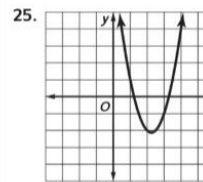
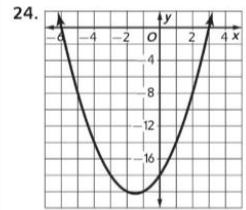
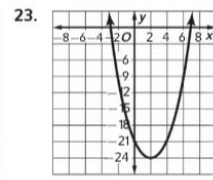
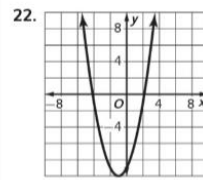
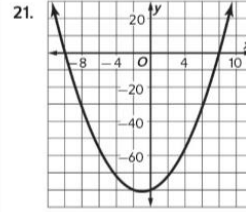
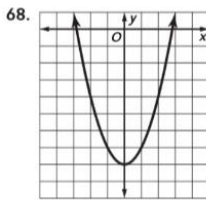
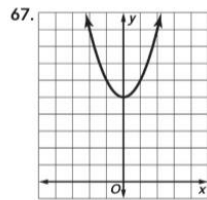
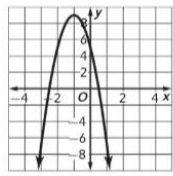
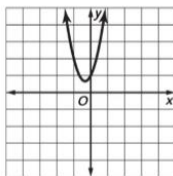
53. $x = 2$; (2, -3) قيمة عظمى:

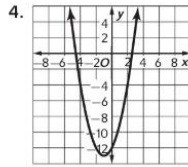


54. $x = 3$; (3, -17) قيمة صغرى:

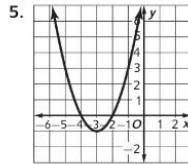


55. $x = -\frac{1}{3}$; $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ قيمة صغرى 56. $x = -1$; (-1, 9) قيمة عظمى:

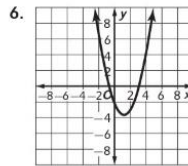




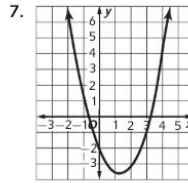
; $y = (x + 1)^2 - 13$; $x = -1$ قيمة صغرى عند $(-13, -1)$
2.61, -4.61



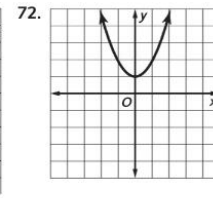
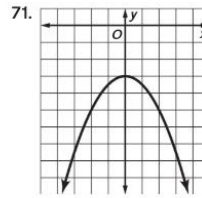
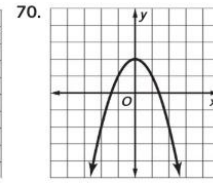
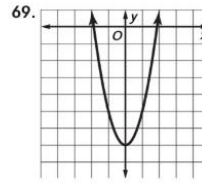
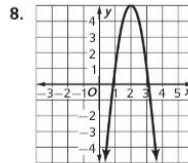
; $y = (x + 3)^2 - 1$; $x = -3$ قيمة صغرى عند $(-1, -3)$
-4, -2



; $y = (x - 2)^2 - 1$; $x = 2$ قيمة صغرى عند $(-1, 2)$
3, 1



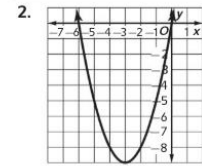
; $y = (x - 1.2)^2 - 3.64$; $x = 1.2$ القيمة الصغرى عند (1.2, -3.64)
-0.71, 3.11



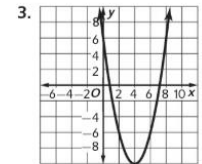
الدرس 1-3

57. ثبت الإزاحة 12 وحدة إلى الأسفل
58. ثبت الإزاحة وحدتين إلى اليسار
59. تم التمديد رأسياً. ثبت الإزاحة 5 وحدات إلى الأعلى
60. تم الضغط رأسياً. ثبت الإزاحة 6 وحدات إلى اليمين
61. تم التمديد رأسياً. ثبت الإزاحة 6 وحدات إلى الأعلى
62. تم العكس عبر المحور الأفقي x . وتم التمديد رأسياً. وثبت الإزاحة وحدة واحدة إلى الأسفل

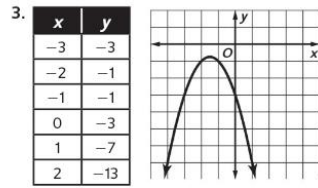
توسع 1-3



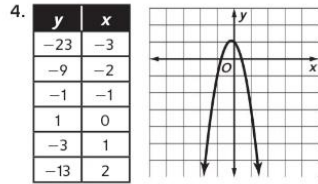
; $y = (x + 3)^2 - 9$; $x = -3$ قيمة صغرى عند $(-9, -3)$
0, -6



; $y = (x - 4)^2 - 10$; $x = 4$ قيمة صغرى عند $(-10, 4)$
7, 1

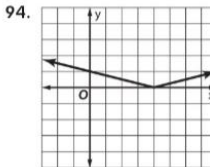
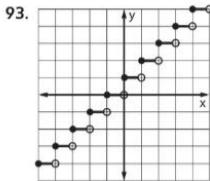
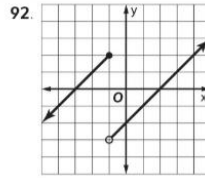
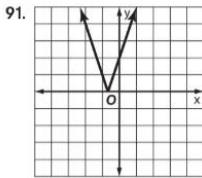


$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \leq -0.75 \}$

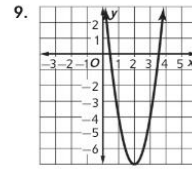


$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \leq 1\frac{1}{12} \}$

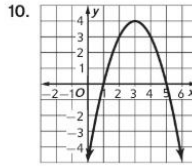
الدرس 1-4



$y = -4(x - 2)^2 + 5$; $x = 2$
 $5, 2$
 $3.11, 0.88$

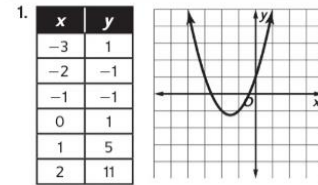


$y = 3(x - 2)^2 - 7$; $x = 2$
 $-7, 2$
 $3.5, 0.5$

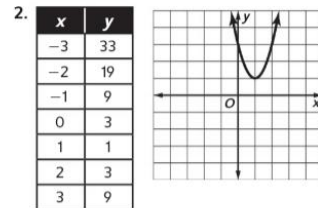


$y = -(x - 3)^2 + 4$; $x = 3$
 $4, 3$
 $5, 1$

اختبار الوحدة الأول

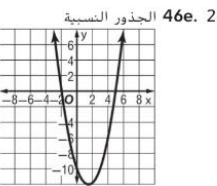
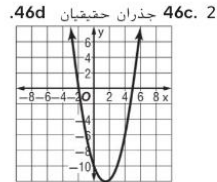
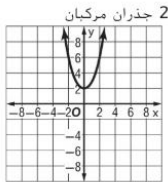
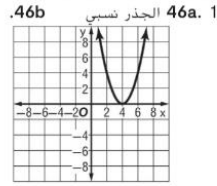
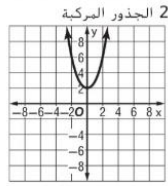


$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq -1.25 \}$



$\{ \text{جميع الأعداد الحقيقية} \} = D$
 $R = \{ y \mid y \geq 1 \}$

الدرس 1-6



48. اجابة نموذجية: (1) حلل المعادلة $(x + 3)$ إلى العاملين $x^2 - 2x - 15$ $(x - 5)$ بالتالي بحسب خاصية حاصل ضرب الصفر ، اما $x + 3 = 0$ او $x - 5 = 0$ حل هذه المعادلات، $x = -3$ او $x = 5$. اعد كتابة المعادلات ك $x^2 - 2x = 15$. وبهذا اضف 1 لكل طرف من المعادلة لتكمل التربيع في الطرف الايسر. وبما أن $(x - 1)^2 = 16$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف $x - 1 = \pm 4$. لذا، $x = 1 \pm 4$ و $x = 5$ او $x = -3$ استخدم القانون العام وهكذا، $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$ او $x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$. وببسيط التعبير $x = 5$ او $x = -3$.
انظر لتفضيلات الطلاب.

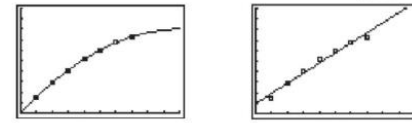
الاستكشاف 1-7

4. كلا التمثيلين البيانيين لهما نفس الشكل، لكن التمثيل البياني $y = x^2 + 3.5$ موجود ببعدار 3.5 وحدة فوق التمثيل البياني $y = x^2$.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

استكمال 1-4

1. رسم بياني للإندجار الخطي: رسم بياني للتربيعي:

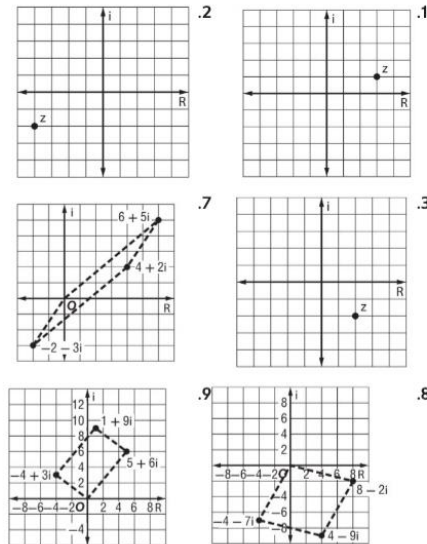


[0, 1] scl: 0.1 by [0, 20] scl: 2

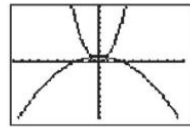
معادلة تربيعية: $h(t) = -16t^2 + 32t$
معادلة خطية: $h(t) = 19.2t + 1.92$
المعادلة الخطية تناسب البيانات اكثر.

2. توقعات المعادلة الخطية: عند الثانية 1، ارتفاع اللاعب سيكون 21.12 قدم؛ وعند الثانية 1.5، ارتفاع اللاعب سيكون 30.72 قدم. توقعات المعادلة التربيعية: عند الثانية 1، ارتفاع اللاعب سيكون 16 قدم وعند الثانية 1.5، سيكون ارتفاع اللاعب 12 قدم.
3. تتوقع المعادلة الخطية أن لاعب كرة السلة سيستمر بالارتفاع لأجل غير مسمى، و تظهر توقعات المعادلة التربيعية ان اللاعب سيصل الى اعلى نقطة في قفزه ويعدها يعود الى الأرض.

تكملة 1-5

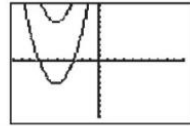


التمثيل البياني $y = -\frac{1}{8}x^2$ + 1 مفتوح للأسفل، وأوسع من التمثيل البياني $y = x^2$ وحدة أعلى من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



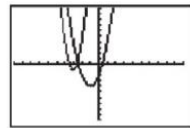
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها نفس الشكل ولكن التمثيل البياني $y = (x + 5)^2 + 7$ هو 11 وحدة أعلى التمثيل البياني $y = (x + 5)^2 - 4$



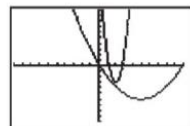
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيل البياني لـ $y = 5(x + 3)^2 - 1$ أضيق من التمثيل البياني $y = 2(x + 1)^2 - 4$ لـ



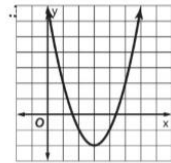
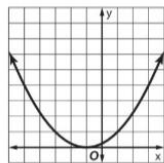
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 6$ أوسع من التمثيل البياني $y = 5(x - 2)^2 - 3$ وقمته 3 وحدات أسفل و 3 لليمين من قمة $y = 5(x - 2)^2 - 3$



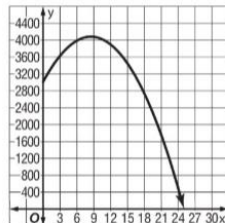
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

الدرس 1-7 (تدريبات موجهة)



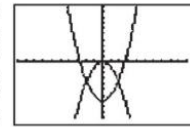
3A.

الدرس 1-7



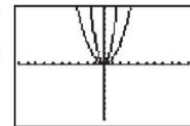
21.

كلا التمثيلين البيانيين لهما نفس الشكل، لكن التمثيل البياني $y = -x^2$ مفتوح للأسفل ولكن التمثيل البياني $y = x^2 - 7$ مفتوح للأعلى وهو 7 وحدات أقل من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



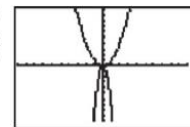
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيل البياني $y = 4x^2$ هو أضيق من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



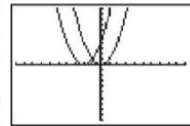
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيل البياني $y = -8x^2$ مفتوح للأسفل و أضيق من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



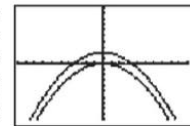
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

كلا التمثيلين البيانيين لهما نفس الشكل ومفتوحين للأعلى، ولكن التمثيل البياني $y = (x + 2)^2$ هو وحدتان لليسار من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



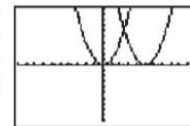
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

كلا التمثيلين البيانيين لهما نفس الشكل ومفتوحين للأسفل، ولكن التمثيل البياني $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2$ وحدتان أعلى التمثيل البياني $y = -\frac{1}{6}x^2$ لـ



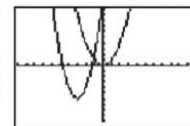
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها نفس الشكل ولكن التمثيل البياني $y = (x - 5)^2$ هي 5 وحدات لليمين بالنسبة إلى التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



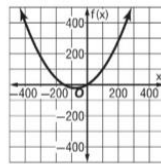
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

التمثيل البياني لـ $y = 2(x + 3)^2 - 6$ هو 3 وحدات لليسار، و 6 وحدات أسفل، و أضيق من التمثيل البياني $y = x^2$ لـ



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

34a. $f(x) = \frac{1}{250}(x + 75)^2 - \frac{45}{2}$



41. $y = 3(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{10}{3}$; $(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$, $x = \frac{2}{3}$, للأعلى

42. $y = -2(x - \frac{7}{4})^2 + \frac{145}{8}$; $(\frac{7}{4}, \frac{145}{8})$, $x = \frac{7}{4}$, للأسفل

43. $y = -(x + 2.35)^2 + 8.3225$; $(-2.35, 8.3225)$, $x = -2.35$, للأسفل

44. $y = (x + 0.7)^2 - 1.69$; $(-0.7, -1.69)$, $x = -0.7$, للأعلى

45. $y = (x - \frac{1}{3})^2 - 3$; $(\frac{1}{3}, -3)$, $x = \frac{1}{3}$, للأعلى

46. $y = (x + 3.5)^2$; $(-3.5, 0)$, $x = -3.5$, للأعلى

49. معادلة القطع المكافئ يمكن كتابتها بصيغة $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$. لكل ثلاث نقاط، عوض بقيمة x الإحداثي عن x في المعادلة و عوض بقيمة y الإحداثي عن y في المعادلة. هذا سوف ينشئ ثلاث معادلات بثلاث متغيرات a , b , و c . حل نظام المعادلة لتجد قيم a , b , و c . هذه القيم تحدد المعادلة التربيعية.

50. $a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}) = y$; $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$; $x = -\frac{b}{2a}$

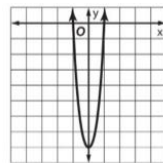
51. اجابة نموذجية: المتغير a يمثل قيم مختلفة لهذه الدالة لذا فافتراض $a = 0$ سيكون له تأثير مختلف على كل دالة. لـ $f(x)$ عندما $a = 0$, التمثيل البياني سيكون خط افقي، $g(x) = k$. لـ $g(x)$ عندما $a = 0$, التمثيل البياني يكون خطي ولكن ليس من الضروري افقي، $g(x) = bx + c$.

52. كل الدالات التربيعية هي تحويلات من التمثيل البياني الأصلي $y = x^2$. بتعريف هذه التحويلات عندما تكون الدالة التربيعية مكونة بصيغة الرأس يمكنك إعادة رسم التمثيل البياني $y = x^2$ مع إزاحة رأسه الى (h, k) , أوسع أو أضيق كيفما حددت من a , مفتوح للأسفل إذا a سالب.

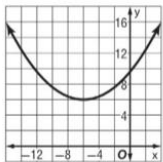
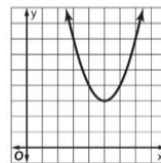
التوسع 1-7

نشاط الخطوة 1 و 2

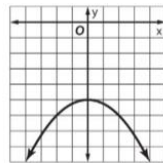
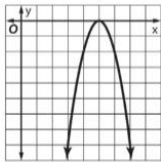
x	0	1	2	3	4	5
y	12	9.1875	6.75	4.6875	3	1.6875
فروق الرتبة الأولى						
فروق الرتبة الثانية						



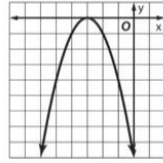
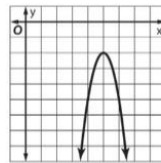
22. 23.



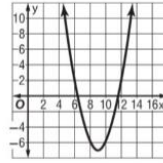
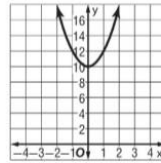
24. 25.



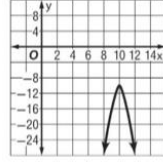
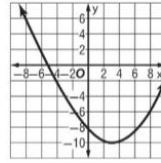
26. 27.



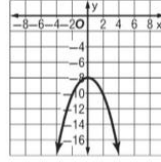
28. 29.



30. 31.



32. 33.



الدوال والمعادلات الأسية



Copyright © 2010 McGraw-Hill Education. All rights reserved. This material is intended for personal use only. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from McGraw-Hill Education.

العلوم الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواء أ كنت تدرس الكيمياء أو علم الحياة أو علم المتحجرات أو علم الحيوان أو علم الإنسان، فإنك ستحتاج إلى مهارات رياضية قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالفيروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونسبة الجرائم والانضمام الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.

لماذا؟

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- تمثيل الدوال الأسية بيانياً.
- حلّ المعادلات والمتباينات الأسية.
- حل المسائل التي تتضمن نموًا وتضاعلاً أسياً.

السابق

تمت تمثيل الدوال وتحولات الدوال بيانياً.

مشروع الوحدة

لغز السكان

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن التوزيع الأسية لإكمال مشروع.

يتناول مشروع الوحدة هذا موضوع محو الأمية البيئية وكذلك العديد من المهارات الخاصة المحددة باعتبارها أساسية لنجاح الطالب في إطار تعليم القرن 21.

مفردات أساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام النموذج المذكور أدناه.

عرف: في الدالة $y = b^x$ ، y يُطلق عليها قاعدة اللوغاريتم b ، x ل b . عادة ما نكتب كالتالي $y = \log_b x$ ونقرأ « y تساوي لوغاريتم x للأساس b ».

مثال: $3 = \log_2 8$

أسأل: كيف يمكنك كتابة الصيغة اللوغاريتمية التالية؟

$$3^5 = 243 \quad \log_3 243 = 5$$

إجابة إضافية (استعد للوحدة 3)

$$14. \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 6, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 6$$

عدد الطبقات العليا التي يمكن لشخص ما الحصول عليها إذا أنفق x دولار.

الدوال والمعادلات الأسية مخطط الوحدة 2

التقويم التشخيصي تدريب سريع		الدروس 2-1		الدروس 2-2		الدروس 2-2	
الدروس 2-1	التوسع	الدروس 2-1	التوسع	الدروس 2-2	التوسع	الدروس 2-2	التوسع
45 دقيقة، 1 يوم	90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم	90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 1 يوم	90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم	90 دقيقة، 0.5 يوم
العنوان	الدوال الأسية	مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمشتقات الأسية	تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية	مختبر تقنية التمثيل البياني: ملاءمة المنحنيات			
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> تمثيل الدوال الأسية بيانياً. تحديد البيانات التي تعرض سلوكاً أسياً. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام آلة حاسبة بيانية لإيجاد معادلة انحدار مناسبة لمجموعة البيانات. 	<ul style="list-style-type: none"> تعريف الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المقدمة. اكتب المعادلات التي تمثل البيانات. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام آلة حاسبة بيانية لإيجاد معادلة انحدار مناسبة لمجموعة البيانات. 			
المفردات الأساسية	الدالة الأسية exponential function دالة النمو الأسّي exponential growth function دالة الاضمحلال الأسّي exponential decay function	معامل التحديد		معامل التحديد			

Chapter sourced from Integrated Math I Chapter 7 © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة لجميع الحقوق © 2012



الدرج 2-3	التوسيع 2-3	الدرج 2-4	التوسيع 2-4
45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم
النمو والاضمحلال (التضاؤل)	مختبر الجبر: تحويل التعابير الأسية	المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية	مختبر الجبر: متوسط معدل التغير في الدوال الأسية
<ul style="list-style-type: none"> حل المسائل التي تتضمن نموًا أسياً. حل المسائل التي تتضمن اضمحلالاً أسياً. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام خواص الأسس المنطقية لتحويل التعابير من أجل الدوال الأسية إلى أشكال لحل المسائل. 	<ul style="list-style-type: none"> تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية. 	<ul style="list-style-type: none"> حساب وتفسير متوسط معدل التغير للدالة الأسية.
المرابحة المركبة compound interest		متتالية هندسية geometric sequence نسبة مشتركة common ratio	

الدوال والمعادلات الأسية مخطط الوحدة 2

العنوان	الدرس 2-5 45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	الإستكشاف 2-6 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	الدرس 2-6 45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	التوسع 2-6 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم
الهدف	<ul style="list-style-type: none"> استخدام صيغة تكرارية لإدراج الحدود في متتالية. كتابة صيغ تكرارية للمتتاليات الحسابية والهندسية. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام حاسبة بيانية لحل المعادلات الأسية عن طريق التمثيل البياني أو عن طريق استخدام خاصية الجدول. 	<ul style="list-style-type: none"> حل المعادلات الأسية. حل المتباينات الأسية. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام خصائص الأسس المنطقية لتحويل التعبيرات من أنواع أسية إلى صيغ مناسبة لحل المشكلات.
المفردات الأساسية	صيغة تكرارية recursive formula		معادلة أسية نسبة المراجعة المركبة متباينة أسية	
التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تمرين على الاختبار				

مهارة الدراسة

خريطة مقارنة يمكنها مساعدة الطلاب في فهم الفروق في مفهومين متشابهين أو أكثر. اعرض هذه العينة من الخريطة على الطلاب والتي تقارن بين النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي في الدرس 1-4. أثناء دراسة الوحدة 2، اطلب من الطلاب العمل في مجموعات تعاونية صغيرة لتصميم خرائط مقارنة توضح الدوال الأسية واللوغاريتمية والاساس e للدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية.

دوال أسية	
<p>نمو أسّي $A(t) = A(1 + r)^t$</p> <ul style="list-style-type: none"> متصلة، واحدة لواحدة ومتزايدة $D = \text{كافة الأعداد الحقيقية}$ $R = \text{أعداد حقيقية موجبة}$ خط تقارب أفقي 	<p>اضمحلال أسّي $A(t) = A(1 - r)^t$</p> <ul style="list-style-type: none"> متصلة، واحدة لواحدة ومتناقصة $D = \text{كافة الأعداد الحقيقية}$ $R = \text{أعداد حقيقية موجبة}$ خط تقارب أفقي

إنشاء استقلال من خلال استراتيجيات يمتلكها الطلاب

ملاحظات



تشخيص		تشخيص تقديم
توصيف		
بداية الوحدة 2		
الاستعداد للوحدة 3 نسخة الطالب	الاستجابة للدعم نسخة المعلم	تشخيص تقديم
بداية كل درس		
السابق ، الحالي ، لماذا؟ نسخة الطالب	الوحدة 0 نسخة الطالب	تشخيص تقديم
أثناء/بعد كل درس		
تمرين موجه نسخة الطالب، كل مثال تأكد من فهمك نسخة الطالب مسائل مهارات التفكير العليا نسخة الطالب مراجعة حلزونية نسخة الطالب أمثلة إضافية نسخة المعلم انتبه! نسخة المعلم الخطوة 4، تقويم نسخة المعلم	تدريس متباير نسخة المعلم	تشخيص تقديم
منتصف الوحدة		
اختبار منتصف الوحدة نسخة الطالب		تشخيص تقديم
قبل اختبار الوحدة		
دليل الدراسة والمراجعة بالوحدة نسخة الطالب اختبار تدريب نسخة الطالب تدريب على الاختبار المعياري نسخة الطالب		تشخيص تقديم



الخيار 3 أعلى من المستوى

اطلب من الطلاب أن يقوموا ببحث عن جداول اللوغاريتمات الشائعة أعداد إما في الملحقات أو نصوص الجبر الأقدم أو عبر الإنترنت. اجعل الصف بأكمله قراءة الجداول واستخدامها. ثم اطلب من الطلاب أن يستخدموا هذه الجداول لتقييم عدة لوغاريتمات شائعة، مثل $\log_{10} 125$. ثم اجعل الطلاب يقارنون نتائجهم مع ما وصلوا إليه عندما قَيّموا اللوغاريتمات ذاتها باستخدام آلاتهم الحاسبة

الخيار 1 الوصول لكل المتعلمين

منطقتي اجعل أزواج من الطلاب يبدأون بـ 10 دولارات، اختر معدل فائدة سيتم تركيبه بشكل مستمر واحسب كم سيحصلون بعد مرور 5 و 10 و 15 و 20 عامًا. بعد كل حساب، اطلب من الطلاب تدوين مبلغ المال الذي حصلوا عليه على رسم بياني بالأعمدة.

الخيار 2 الوصول إلى المستوى

اجعل الصف يقوم بعمل مخطط فين لمجموعة من الأعداد الحقيقية. بمجرد الانتهاء من التمثيل البياني. استعرض مع الطلاب ما يعنيه لعدد ليكون عدد نسبي، صحيح، عدد كلي، عدد طبيعي أو عدد غير نسبي اكتب مثالاً على كل نوع من الأعداد الحقيقية على الرسم البياني. ثم ناقش e باعتبارها عدد غير نسبي

الأعداد الحقيقية



الدوال والمعادلات الأسية

التركيز على المحتوى الرياضي

مراجعة درس بدرس

تخطيط رأسي

قبل الوحدة 2

موضوعات ذات صلة بالرياضيات المتكاملة 1

- استخدم الأدوات بما في ذلك خصائص الأسات لتبسيط التعبيرات.

الوحدة 2

- قم بتحليل موقف على غرار دالة أسية وقم بصياغة معادلة أو متباينة وحل المشكلة.
- قم بتطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف ووصف العلاقات بين التوابع الأسية وعكسها.
- بسط التعبيرات الجذرية.

بعد الوحدة 2

إعدادات للرياضيات المتكاملة 3

- أوصف التوابع الأساسية بشكل رمزي وبياني. بما في ذلك $f(x) = \ln x$ و $f(x) = \log_a x$
- تحقق من مبادئ الاستمرارية وسلوك النهاية والخط المتقارب واربط هذه الخواص بالتوابع الممثلة بالتمثيل البياني أو العددي.
- تحقق من الخواص اللوغاريتمية والأسية

2-1 الدوال الأسية

تكون الدوال الأسية غير خطية وغير تربيعية. ويكون للدالة الأسية متغير في صورة أس. ويمكن وصفه من خلال معادلة بالشكل التالي $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$.

- عندما تكون $0 < a < b$ و 1 . فإن قيم y تتغير إلى حد ما بالنسبة إلى القيم الصغيرة لـ x . لكنها سرعان ما تزيد عندما تصبح قيم x أكبر. ويرتفع التمثيل البياني من يساره إلى يمينه.
- عندما تكون $0 < b < a$ و $a > 0$. فإن قيم y تتناقص عندما تكون قيم x في تزايد. ويرتفع التمثيل البياني عندما تكون قيم x في تزايد.

2-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

يمكن استخدام الدوال الخطية والتربيعية والأسية لتمثيل البيانات. لتحديد أي من أنواع الدوال الثلاثة هذه (إن وجد) يمثل مجموعة البيانات.

- لاحظ نمط في الرسم البياني لمجموعة البيانات.
- لاحظ أحد هذه الأنماط في البيانات: الدالة الخطية، الفروق الأولى للقيم y جميعها متساوية؛ والدالة التربيعية، الفروق الأولى ليست جميعها متساوية؛ ولكن الفروق الثانية متساوية؛ والدالة الأسية، نسب قيم y المتتالية جميعها متساوية.

2-3 النمو والاضمحلال (التساؤل)

- يمكن التعبير عن النمو الأسّي عن طريق استخدام المعادلة العامة $y = a(1 + r)^t$ حيث y تمثل الكمية النهائية، وتمثل a الكمية المبدئية، وتمثل r معدل التغيير معبراً عنه في صيغة عدد عشري ($r > 0$) وتمثل t الزمن. وتعد المراجعة المركبة من الأمثلة الدالة على النمو الأسّي.
- يمكن التعبير عن الاضمحلال الأسّي عن طريق استخدام المعادلة العامة $y = a(1 - r)^t$ و y وبعد الإهلاك أو الاستهلاك من أمثلة الاضمحلال الأسّي.

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية

- في المتتالية الهندسية، كل حد يأتي بعد الحد الأول يتم حسابه من خلال ضرب المكون السابق في الثابت نفسه الذي يكون عدداً غير الصفر r وهو الذي يطلق عليه اسم النسبة المشتركة. ومن خلال الحدود المتعاقبة المتعددة للمتتالية الهندسية.
- يمكن حساب قيمتها عن طريق قسمة أي حد على الحد السابق له
 - يمكن إيجاد قيمة الحدود المتتالية من خلال ضرب الحد السابق في r
 - الحد النوني: a_n . لمتتالية يكون الحد الأول بها هو a_1 ($a_1 \neq 0$) يمكن حسابه عن طريق استخدام الصيغة $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ حيث تكون n عبارة عن أي عدد صحيح موجب.

2-5 الصيغ التكرارية

استخدم الطلاب الصيغ الصريحة من أجل حدود المتتاليات. وتحدد تلك الصيغ كل حد في صورة دالة n . في الصيغة التكرارية، كل حد يتم تعريفه فيما يتعلق بواحد أو أكثر من الحدود السابقة. لكثافة الصيغة التكرارية، ضع الحد الأول والصيغة من أجل الحدود المتتالية. على سبيل المثال. الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية ... 2, 5, 8, 11 تكون $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 3$ والصيغة التكرارية من أجل المتتالية الهندسية ... 3, 6, 12, 24 تكون $a_1 = 3$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$.

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسية

في معادلة أسية، توجد المتغيرات باعتبارها أسس. يمكن استخدام خاصية التيساوي للتوابع الأسية لحل المعادلات الأسية. عندما تكون القواعد هي نفسها، كما هو الحال في $3^x = 3^7$ ، يجب أن تكون الأسس متساوية أيضاً لكي تكون المعادلة صحيحة. بالتالي، في حال $3^x = 3^7$ ، إذا $x = 7$ ، عندما تكون الأساسات غير متساوية، كما هو الحال في $3^x = 9^4$ ، يجب كتابة التعبيرات بحيث تكون القواعد متساوية. في هذه الحالة، يمكن إعادة كتابة 9 باعتبارها 3^2 ، وبالتالي $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ ، وبالتالي $3^x = 3^8$ ، إذا $x = 8$.

في متباينة أسية، توجد المتغيرات باعتبارها أسس. يمكن استخدام خاصية التباين للدوال الأسية لحل المتباينات الأسية. نقول هذه الخاصية أن $b^x > b^y$ في حال وفقط في حال $x > y$ ، و $b^x < b^y$ في حال وفقط في حال $x < y$ ، لقيم b الأكبر من 1. هذه الخاصية صحيحة أيضاً بالنسبة لـ $b \leq 0$ و $b \geq 0$.

أسئلة أساسية

- كيف يمكنك اتخاذ قرارات جيدة؟ الإجابة النموذجية: حدد الخيارات المتاحة وفارن المميزات والعيوب لكل خيار وحلل العواقب واختير أفضل خيار.
- ما العوامل التي يمكن أن تؤثر على اتخاذ قرار جيد؟ إجابات نموذجية: كمية الوقت المتاح والعلبة المستخدمة والبيئة والأشخاص المتضمنين والخيارات المتاحة.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد حل اختبار التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة	تمرين سريع
<p>مثال 1</p> <p>بسط $\frac{(a^2bc)^2}{a^4b^2c^2}$ وافترض أنه لا يوجد متغير يساوي صفراً.</p> <p>بسط البسط باستخدام القوى الأسية لقاعدة القوة وبسط المقام باستخدام قاعدة ناتج ضرب القوى.</p> <p>بسط باستخدام قاعدة ناتج قسمة القوى الأسية.</p> $\frac{(a^2bc)^2}{a^4b^2c^2} = \frac{a^4b^2c^2}{a^4b^2c^2} = 1$	<p>بسط. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي صفراً.</p> <p>(مستخدم في الدروس من 2-1 إلى 2-3)</p> <ol style="list-style-type: none"> $a^4a^3a^5 a^{12}$ $(2x^3z^2)^3 8x^3y^6z^6$ $\frac{-24x^4y^2z}{16x^2y^2z^2} - \frac{3x^4}{2y^2z^2}$ $\frac{(-8r^2)^2}{36r^2} \frac{4r^4}{81n^4r^2}$ <p>5. الكثافة كثافة جسم ما تساوي الكتلة مقسومة على الحجم. لدينا جسم كتلته 7.5×10^3 غراماً وحجمه 1.5×10^3 سنتيمتراً مكعباً. ما هي كثافة الجسم؟ 5 g/cm^3</p>
<p>مثال 2</p> <p>(مستخدم في الدرسين 2-1 و 2-3)</p> <p>أوجد معكوس $f(x) = 3x - 1$. 11-6 انظر ملحق إجابات الوحدة 2.</p> <p>الخطوة 1 عوّض عن $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية، $f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$</p> <p>الخطوة 2 بدل بين x و y، $x = 3y - 1$</p> <p>الخطوة 3 حل لإيجاد قيمة y.</p> <p>بالعكس $x = 3y - 1$</p> <p>أضف 1 إلى كل طرف. $x + 1 = 3y$</p> <p>اقسم كل طرف على 3. $\frac{x+1}{3} = y$</p> <p>بسط. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$</p> <p>الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$</p>	<p>أوجد معكوس كل من الدوال التالية. ثم مثل الدالة ومعهك بياناً.</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = 2x + 5$ $f(x) = x - 3$ $f(x) = -4x$ $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ $f(x) = \frac{x-1}{2}$ $y = \frac{1}{3}x + 4$ <p>حدد ما إذا كان كل زوج من الدوال التالية عبارة عن دالتين عكسيتين.</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = x - 6$ $g(x) = x + 6$ نعم $f(x) = 2x + 5$ $g(x) = 2x - 5$ لا <p>14. الطعام يبلغ سعر قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجنين في مطعم بيتزا 12 AED إضافة إلى 2 AED لكل قطعة إضافية. إذا كانت $f(x) = 2x + 12$ تمثل تكلفة البيتزا المتوسطة التي تضم عدد x من الطبقات، فأوجد $f^{-1}(x)$ وشرح معناها. انظر الهامش.</p>

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك®

التركيز أثناء عمل الطلاب في دروس هذا الوحدة، سيكتبن ملاحظات عن الدوال والمعادلات الأسية.

التدريس اطلب من الطلاب عمل ووضع علامات على حافظاتهم على النحو الموضح. اطلب من الطلاب وضع علامة على صفحة واحدة من حافظاتهم لكل درسين في الوحدة واستخدم الصفحات المناسبة وقت تخطيطهم للباقة. اطلب من الطلاب عمل قائمة بالمبادئ الأساسية ومصطلحات المفردات وتعريفاتهم في حافظاتهم. أشر إلى أنه يمكن أيضا استخدام الحافظات لتسجيل التجارب الإيجابية والسلبية خلال التعلم.

متي تستخدمه شجع الطلاب على الإضافة لحافظاتهم أثناء عملهم في الوحدة واستخدامها للمراجعة في اختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمة ونظّم مواردك.

المفردات الجديدة

exponential function	الدالة الأسية
exponential growth	النمو الأسي
asymptote	خط تقارب
growth factor	عامل النمو
exponential decay	التضاؤل الأسي
decay factor	عامل التضاؤل
exponential equation	المعادلة الأسية
compound interest	المزاجعة المركبة
exponential inequality	المشابهة الأسية
conjugate	مرافق
radical equations	معادلات جذرية

مراجعة المفردات

الجال مجموعة جميع إحداثيات x الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

$((-3,1), (0,2), (2,4))$

الجال	المدى
-3	1
0	2
2	4

الدالة علاقة يقرن فيها كل عنصر من عناصر المجال مع عنصر واحد فقط من عناصر المدى

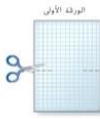
المدى مجموعة جميع إحداثيات y الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

الخطوات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات الأسية والجذرية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالدوال الأسية وأبدأ بورقتي شيل بياني.



1 اطم الورقتين إلى نصفين بالعرض.



2 على الورقة الأولى، قص لسانة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.



3 على الورقة الثانية، قص منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قص.



4 أدخل الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاذ بين الطيتين. ثم سم الصفحات بأرقام الدروس.

الدوال الأسية

2-1

لماذا؟

الحالي

السابق



أوجدت قيمة التعابير العددية التي تتضمن أسًا. 1
تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. 2
تحديد البيانات التي تعرض سلوكًا أسّيًا.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-1 إيجاد قيمة التعابير العددية التي تتضمن أسًا.

الدرس 2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. تحديد البيانات التي تعرض سلوكًا أسّيًا.

بعد الدرس 2-1 حل المسائل التي تحتوي على نمو وضمحل أسّي.

المفردات الجديدة

الدالة الأسية exponential function
دالة النمو الأسّي exponential growth function
دالة الضمحل الأسّي exponential decay function

ممارسات في الرياضيات فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ كيف تختلف هذه المعادلة عن المعادلة الخطية؟ المتغير المستقل x عبارة عن أس.

■ ما قيمة y عندما تكون $x = 0$ ؟
 $y = 3$

■ هل يمكن أن تكون قيمة y 0 أبدًا؟ لا

تمثيل الدوال الأسية بيانيًا نعتبر الدالة الأسية دالة مكتوبة على الصيغة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس ثابت والأس متغير. الدوال الأسية غير خطية.

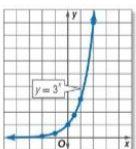
المفهوم الأساسي الدالة الأسية

الشرح الدالة الأسية دالة يمكن كتابتها بالصيغة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

أمثلة $y = 2(3)^x$ $y = 4^x$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

مثال 1 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0, b > 1$

مثل بيانيًا $y = 3^x$. أوجد طول المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	≈ 1.73
1	3^1	3
2	3^2	9

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسي y عند 1. إذا المقطع من المحور الرأسي y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية وال المدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المحور الأفقي x ولا توجد تقاطع مع المحور الأفقي x . التمثيل البياني متزايد على المجال كله.

تبرين موجّه

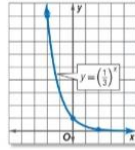
1. مثل بيانيًا $y = 7^x$. أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.

الدوال بالصيغة $y = ab^x$ حيث $a > 0, b > 1$ تسمى دوال النمو الأسّي. وكلها لها نفس شكل التمثيل البياني كما في المثال 1. الدوال بالصيغة $y = ab^x$ حيث $0 < b < 1$ و $a > 0$ تسمى دوال الاضمحلال الأسّي. ولها أيضًا الشكل العام نفسه.

نصيحة دراسية
 إذا كانت قيمة $a < 0$ من 0 ، فسيعكس التمثيل البياني بالمحور الأفقي x .

مثال 2 التمثيل بيانياً باستخدام $a > 0$ و $1 < b < 0$

مثلاً بيانياً $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال والبدى.



x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$

المقطع من المحور الرأسي y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والبدى هو جميع الأعداد الموجبة. لاحظ أنه مع زيادة x ، تتناقص قيم y بسرعة أقل.

تبرير موجّه

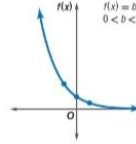
2. مثلاً بيانياً $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال والبدى.

يمكن تلخيص الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسية كالآتي:

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال الأسية

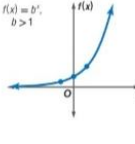
دوال النمو الأسّي

المعادلة: $f(x) = ab^x$, $a > 0$, $0 < b < 1$
 المجال: x ، جميع الأعداد الحقيقية، جميع الأعداد الحقيقية الموجبة
 نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y . لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x
 السلوك الطرفي: مع زيادة x ، تقترب $f(x)$ من 0، مع تناقص x ، تزيد $f(x)$



دوال النمو الأسّي

المعادلة: $f(x) = ab^x$, $a > 0$, $b > 1$
 المجال: x ، جميع الأعداد الحقيقية، جميع الأعداد الحقيقية الموجبة
 نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y . لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x
 السلوك الطرفي: مع زيادة x ، تزيد $f(x)$ ، مع انخفاض x ، تقترب $f(x)$ من 0



تحدث الدوال الأسية في الكثير من مواقف الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال الأسية في حل المسائل



[-50, 50] scl: 10 by [0, 350] scl: 25

الصودا تمثل الدالة $C = 179(1.029)^t$ مقدار الصودا المستهلك في العالم، حيث C هي المقدار المستهلك بالهليار لتر t هي عدد السنوات منذ عام 2000.

أ. مثلاً الدالة بيانياً. ما قيم C ذات المعنى في سياق المسألة؟

بما أن t تمثل الزمن، $t > 0$. عندما تكون $t = 0$ ، يبلغ الاستهلاك 179 مليار لتر. ولهذا، ففي سياق هذه المسألة، $C > 179$ ذات معنى.



الربط بالحياة اليومية
 الولايات المتحدة هي أكبر مستهلك للصودا في العالم. في أحد الأعوام مؤخرًا، كان استهلاك الولايات المتحدة يمثل ثلث إجمالي استهلاك العالم من الصودا.
 المصدر: معهد برونز ورايد ووتش

1 تمثيل الدوال الأسية بيانياً

المثال 1 يوضح كيفية تمثيل الدالة الأسية بيانياً عندما تكون $a > 0$ و $b > 1$.
 المثال 2 يوضح كيفية تمثيل دالة أسية بيانياً عندما تكون $a > 0$ و $0 < b < 1$.
 المثال 3 يوضح كيفية استخدام دالة أسية في حل مسألة من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

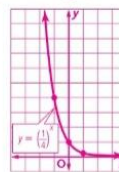
1. مثلاً بيانياً $y = 4^x$. احسب قيمة

نقطة التقاطع y وحدد المجال والبدى. نقطة التقاطع y .
 $D = \{ \text{كل الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ \text{كل الأعداد الموجبة} \}$



2. مثلاً بيانياً $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. احسب قيمة

نقطة التقاطع y وحدد المجال والبدى. نقطة التقاطع y .
 $D = \{ \text{كل الأعداد الحقيقية} \}$
 $R = \{ \text{كل الأعداد الموجبة} \}$



أفتم!

مفاهيم خاطئة لدى الطلاب تأكد من فهم الطلاب لأن التمثيلات البيانية للدوال الأسية لا تلمس المحور الأفقي x قط. وأنه من المفضل بالنسبة للتمثيلات البيانية المرسومة باليد أن تعرض التمثيل البياني أعلى وبالتوازي تقريباً مع المحور الأفقي x طالما أن الطلاب يعرفون جيداً أن التمثيل البياني يقترب بشكل لا نهائي من المحور دون أن يلمسه.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية أنشئ قالباً من أجل جدول القيم، وأسحب شبكة الإحداثيات على اللوحة.
 اكتب دالة واجعل الطلاب يكملوا جدول القيم. ثم اجعلهم يرسموا التمثيل البياني للدالة.

b. كم كان مقدار استهلاك الصودا في عام 2005?
 $C = 179(1.029)^t$
 $= 179(1.029)^5$
 ≈ 206.5
 استخدم حاسبة.
 كان استهلاك العالم من الصودا في عام 2005 يبلغ 206.5 مليار لتر تقريبا.

تبرين هوجه

3. علم الأحياء يتضاعف عدد نوع معين من البكتيريا كل 20 دقيقة. بدءا بـ 10 خلايا في مزرعة، يمكن تمثيل العدد بالدالة $B = 10(2)^{\frac{t}{20}}$ حيث B هي عدد خلايا البكتيريا t هي الزمن بزيادات مقداراها 20 دقيقة. كم سيبلغ العدد بعد ساعتين؟

2 تحديد السلوك الأسّي تذكر من الدرس 2-3 أن الدوال الخطية لها معدل تغير ثابت. ليس للدوال الأسية معدلات تغير ثابتة، لكن لها نسب ثابتة.

مثال 4 تحديد السلوك الأسّي

حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسّيًا. اكتب نعم أو لا. ولماذا؟

x	0	5	10	15	20	25
y	64	32	16	8	4	2

الطريقة 1 البحث عن نمط.

تقع قيم المجال على مسافات منتظمة تبلغ 5. ابحث عن عامل مشترك بين قيم البدئ.

$$64 \quad 32 \quad 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2$$

$$\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

تختلف قيم البدئ حسب العامل المشترك $\frac{1}{2}$.

بما أن قيم المجال تقع على مسافات منتظمة وتختلف قيم البدئ حسب عامل مشترك موجب، فربما تكون البيانات أسية. قد تتضمن معادلتها $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$.

الطريقة 2 مثل البيانات بيانيا.

ارسم النقاط وصلها بواسطة منحنى منتظم.

يوضح التمثيل البياني قيمة سرعة التناقص y مع زيادة x .

هذه صفة في السلوك الأسّي يتراوح فيها الأساس بين 0 و 1.

تبرين هوجه

4. حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسّيًا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.

x	0	3	6	9	12	15
y	12	16	20	24	28	32

McGraw-Hill Education © حقوق النشر محفوظة لجميع الحقوق محفوظة

نصيحة في حل المسائل

وضع قائمة مرتبة
 بعد وضع قائمة مرتبة لقيم x وقيم y المقابلة لها في تمثيل الدالة بيانياً. يمكن أن يساعدك هذا أيضاً في تحديد الأساط في البيانات.

مثال إضافي

3 انخفاض القيمة يرى بعض الناس

أن قيمة السيارة الجديدة تتناقص حالما تقودها لمسافات طويلة.

تمثل الدالة $V = 25,000x^{0.82}$

جديدة كانت تكلفتها الأصلية

هي 25,000 AED. بينا تمثل

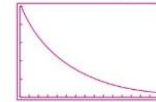
V قيمة السيارة وتمثل t الزمن

بالأعوام من وقت شرائها.

a. مثل الدالة بيانياً. ما قيم

V و t ذات المعنى في

سياق المسألة؟



$[0, 15]$ scl: 1 by $[0, 25,000]$

scl: 500. القيم $V \leq 25,000$

و $t \geq 0$ هي التي تكون ذات

معنى.

b. ماذا ستكون قيمة السيارة

بعد مرور خمسة أعوام؟ نحو

AED 9270

2 تحديد السلوك الأسّي

المثال 4 يوضح كيفية تحديد ما إذا كانت

مجموعة بيانات تعرض سلوكًا أسّيًا.

مثال إضافي

4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات

الموضحة أدناه تعرض سلوكًا أسّيًا.

اكتب نعم أو لا. وضح السبب وراء

نعم أو لا.

x	0	10	20	30
y	10	25	62.5	156.25

تقع قيم المجال على مسافات

منتظمة، كما أن لقيم البدئ عامل

مشترك هو 2.5. ومن ثم، من

المحتمل أن تكون المجموعة أسية.

كذلك، يوضح التمثيل البياني القيم

المتزايدة بسرعة لقيمة y في حالة

تزايد قيمة x .

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 9-11 للتحقق من استيعاب الطلاب.
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

تمثيل مسائل الرياضيات الطلاب الماهرين في الرياضيات يستطيعون استخدام دالة لوصف مدى اعتماد نسبة من المراجعة على الأخرى. في التمرين 20، سل الطلاب عن مدى تأثير الوقت على السكان.

إجابات إضافية

8. لا، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، لكن قيم المدى لها فرق مشترك يبلغ 2.
9. نعم، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، ولقيم المدى عامل مشترك هو 4.
21. لا، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، لكن قيم المدى ليس لها عامل مشترك موجب.
22. لا، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، لكن قيم المدى لها فرق مشترك يبلغ 5.
23. نعم، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، ولقيم المدى عامل مشترك هو 2.
24. نعم، تقع قيم المجال على مسافات منتظمة، ولقيم المدى عامل مشترك هو 0.4.

يمثل التمثيل البياني لـ $f(x) = b^x$ تشيلاً بيانياً أصلياً للدوال الأسية. ويمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال الأسية.

المفهوم الأساسي: تحويلات الدوال الأسية	
$f(x) = ab^{kx-h} + k$	
الإزاحة الرأسية: k	الإزاحة الأفقية: h
تكون وحدات k أعلى إذا كانت k موجبة تكون وحدات $ k $ أسفل إذا كانت k سالبة	تكون وحدات h جهة اليمين إذا كانت h موجبة تكون وحدات $ h $ جهة اليسار إذا كانت h سالبة
الانجاء والشكل: a	
إذا كان $0 < a$ ، فسينعكس التمثيل البياني على المحور الأفقي x . إذا كان $0 > a$ ، فسيتم التمثيل البياني رأسياً. إذا كان $0 < a < 1$ ، فسيكون التمثيل البياني مضغوطاً رأسياً.	

مثال 5 التمثيل البياني للتحويلات

مثل كل دالة بيانياً. اذكر المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

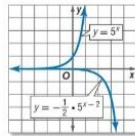
x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$

تمثل المعادلة إزاحة التمثيل البياني لـ $y = 2^x$ وحدة أعلى.



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}، المدى = $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـ $y = 5^x$ مثل $y = 5^x$ بيانياً وحول التمثيل البياني.

• $a = -\frac{1}{2}$: يعكس التمثيل البياني في المحور الأفقي x وينضغط رأسياً.

• $h = 2$: تم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.

• $k = 0$: لا تتم إزاحة التمثيل البياني رأسياً.

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}، المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه 5A، 5B. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

5A. $y = 2^{x+3} - 5$

5B. $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الدقة: تذكر أن السلوك الطرقي هو سلوك التمثيل البياني حيث تقرب x من اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة. في المثال 5A، عندما تقرب x من اللانهاية، تقرب y من اللانهاية. وفي المثال 5B، عندما تقرب x من اللانهاية، تقرب y من اللانهاية السالبة.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	10-24, 42-68	10-24 زوجي, 42-45, 50-68
OL أساسي	11-39, 26, 40, 42-68	10-24, 46-49
BL متقدم	25-62, (اختياري: 63-68)	25-40, 42-45, 50-68

المتابعة

استكشف الطلاب وضع النماذج باستخدام الدوال الأسية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يمكن لنماذج الرياضيات أن تساعد في اتخاذ قرارات سليمة؟
- الإجابة النموذجية: يمكن استخدام نماذج الرياضيات للمقارنة بين الخيارات المختلفة المتاحة. علاوة على تأثير أي خيار منها إذا ما تم اختياره.

نصيحة دراسية

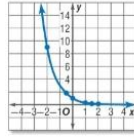
التضاليل الأسية تأخذ من عدم الخلط بين تعبير الأعداد التمدد الذي تكون فيه $101 < 1$ والتضاليل الأسية والذي تكون فيه $0 < b < 1$.

مثال 6: تمثيل دوال التضاليل الأسية بيانياً

مثل كل دالة بيانياً. اذكر المجال والبدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$



المجال هو جميع الأعداد الحقيقية. والبدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

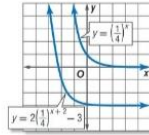
تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل نقطة.

- $a = 2$ ، التمثيل البياني ممتد رأسياً.

- $-2 = h$ ، تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار.

- $-3 = k$ ، تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.



المجال هو كل الأعداد الحقيقية. والبدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجّه 6A، 6B. انظر الهامش.

6A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

6B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

كما هو الحال بالنسبة للنمو الأسى، يمكنك أيضاً تمثيل التضاليل الأسى بتناقض ثابت للنسبة المتوالية على مدار فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$A(t) = a(1 - r)^t$

يطلق على أساس التعبير الأسى. f ، $1 - r$ اسم **عامل التضاليل**.

تدريس الممارسات في الرياضيات

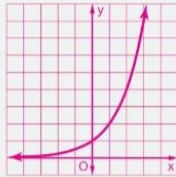
المثيرة الطلاب الماهرون في الرياضيات يحلون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف الخاصة بالسئلة. في التمرين 41، قد يواجه الطلاب صعوبة حيث يكون لديهم نقطتان فحسب. اقترح عليهم أن يبدؤوا بالصيغة العامة للمعادلة الأسية التالية $y = ab^x$.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يدونوا رأيهم في ارتباط الدوال الأسية بالدرس التالي، وهو الذي يتطرق لمناقشة مسائل من الحياة اليومية تتعلق بالنمو والاضمحلال.

إجابات إضافية

43. الإجابة النموذجية: يمكن التعبير عن عدد الفرق التي تتنافس في دوري كرة السلة بالمعادلة $y = 2^x$ حيث يمثل عدد الفرق المتنافسة في y ويمثل عدد الجولات في x . نقطة تقاطع y في تقاطع التمثيل البياني هي 1. ويزداد التمثيل البياني بسرعة عند $x > 0$. في النموذج الأساسي، كل فريق يشارك في الدوري سيلعب جميع الفرق الأخرى. إذا ما تم عمل نموذج للسياريو باستخدام دالة خطية، فإن كل فريق يشارك سيلعب عددًا ثابتًا من الفرق.



45. الإجابة النموذجية: أولاً، ابحث عن نمط من خلال التأكد من أن قيم المجال تقع على مسافات منتظمة وأن قيم المدى تختلف بعامل مشترك.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 مثل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.

- $y = 2^x$
- $y = -5^x$
- $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$
- $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$
- $f(x) = 6^x + 3$
- $f(x) = 2 - 2^x$

7. علم الأحياء تمثل الدالة $f(t) = 100(1.05)^t$ نمو أعداد ذبابة الماكهة، حيث $f(t)$ هي الذباب t هي الزمن بالأيام. **مثال 3** ما قيم المجال وال المدى المقولة في سياق هذا الموقف؟ اشرح.

b. بعد أسبوعين، كم يبلغ تقريبًا عدد الذباب في هذا التجمع؟

مثال 4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسّيًا. اكتب نعم أو لا. اشرح لم أو لا.

8.

x	1	2	3	4	5	6
y	-4	-2	0	2	4	6

9.

x	2	4	6	8	10	12
y	1	4	16	64	256	1024

مثال 5 مثل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال وال المدى. **8-11 انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

- $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
- $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
- $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
- $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 مثل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.

- $y = 2x \cdot 8^x$
- $y = 2x \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$
- $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$
- $y = -3x \cdot 9^x$
- $y = -4x \cdot 10^x$
- $y = 3x \cdot 11^x$
- $y = 4^x + 3$
- $y = \frac{1}{2}(2^x - 8)$
- $y = 5(3^x) + 1$
- $y = -2(3^x) + 5$

24. استخدام النماذج يزيد عدد البكتيريا في مزرعة وفقًا للنموذج $p = 300(2.7)^{0.02t}$ حيث t هي عدد الساعات $t = 0$ تعادل الساعة 9:00 صباحًا.

a. استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا الساعة 11 صباحًا.
b. مثل الدالة بيانيًا واذكر اسم نقطة التقاطع p . صف ما تثلله نقطة التقاطع p وصف مجال ومدى منطقتين لهذا الموقف.

مثال 4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسّيًا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.

25.

x	-4	0	4	8	12
y	2	-4	8	-16	32

26.

x	-6	-3	0	3
y	5	10	15	20

27.

x	-8	-6	-4	-2
y	0.25	0.5	1	2

28.

x	20	30	40	50	60
y	1	0.4	0.16	0.064	0.0256

103

التدريس المتمايز

التوسع قدّم للطلاب هذا السيناريو: رجل حكيم طلب من حاكمه أن يوفر الأرز لشعبه. طلب الرجل الحكيم من الحاكم أن يعطيه حبتين من الأرز في المربع الأول من لوحة الشطرنج، و 4 حبات في المربع الثاني، وهكذا مضاعفًا كمية الأرز في كل مربع من مربعات لوحة الشطرنج.

اطرح السؤال التالي:

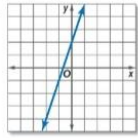
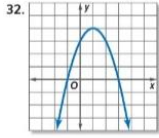
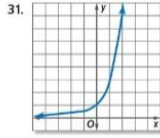
- كم عدد حبات الأرز التي سيحصل عليها الرجل الحكيم في المربع الرابع والستين على لوحة الشطرنج؟ 2^{64} أو نحو 1.84×10^{19} حبات
- إذا كان رطل الأرز يحتوي على 24,000 حبة، فكم عدد أطنان الأرز التي سيحصل عليها الرجل الحكيم في اليوم الأخير؟ (تلميح: الطن الواحد = 1,000 كيلوجرام) نحو 3.84×10^{11} طنًا

29. التصوير الفوتوغرافي تعمل مثال على تكبير صورة لعمل ملصق للمدرسة. ستقوم بتكبير الصورة بنسبة 150% بشكل متكرر. تمثل الدالة $P = 1.5^x$ الحجم الجديد للصورة التي يجري تكبيرها. حيث x هي عدد التكبيرات. كم ضعفاً يبلغ حجم الصورة بعد 4 تكبيرات؟

30. المعرفة المالية أودع محمد 500 AED في حساب ادخار وبعد 8 سنوات، وصلت قيمة استثماره إلى 807.07 AED. تمثل المعادلة $A = d(1.005)^{12t}$ قيمة استثمار محمد A بعد t سنوات بإيداع مبدئي يبلغ d .

- a. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع 1000 AED؟
b. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع 250 AED؟
c. أوجد تفسير $d(1.005)^{12t}$ لشرح كيفية تأثير مبلغ الإيداع الأصلي على قيمة استثمار محمد.

حدد كل دالة باعتبارها خطية، أو أسية، أو ليست أيًا منهما.



34. $y = 4^x$

35. $y = 2x(x - 1)$

36. $5x + y = 8$

37. التخرج ارتفع عدد الخريجين في مدرسة عليا بعامل 1.055 كل عام منذ عام 2001 في عام 2001. تخرج 110 طلاب. تمثل الدالة $N = 110(1.055)^t$ عدد الطلاب N المتوقع أن يتخرجوا بعد t أعوام من 2001. كم عدد الطلاب الذين سيتخرجون في عام 2012؟

صف التمثيل البياني لكل معادلة كتحويل للتمثيل البياني $y = 2^x$.

38. $y = 2^x + 6$

39. $y = 3(2)^x$

40. $y = -\frac{1}{4}(2)^x$

41. $y = -3 + 2^x$

42. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

43. $y = -5(2)^x$

44. الغزلان يتضاعف عدد الغزلان في حديقة عامة كل عام. في عام 2000، كان هناك 25 غزالاً في الحديقة. تمثل الدالة $N = 25(2)^t$ عدد الغزلان N في الحديقة بعد t سنوات من عام 2000. ماذا سيكون عدد الغزلان في عام 2015؟

مسابقات مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. **المثابرة** اكتب دالة أسية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 3)$ و $(1, 6)$.
46. **التبوير** حدد ما إذا كان الرسم البياني $y = ab^x$ حيث $b > 0$, $a \neq 0$, و $b \neq 1$. يتقاطع أحياناً، أو دائماً، أو لا يتقاطع أبداً مع نقطة التقاطع الأفقية x . اشرح استنتاجك.
47. **مسألة غير محدودة** الإجابة أوجد دالة أسية تمثل موقفاً من الحياة اليومية وتمثل الدالة بيانياً. حلل التمثيل البياني و اشرح سبب تمثيل الموقف بدالة أسية وليس دالة خطية.
48. **التبوير** استخدم الجداول والتمثيلات البيانية للمقارنة والمقابلة بين الدالة الأسية $f(x) = ab^x + c$ حيث $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ والدالة الخطية $g(x) = ax + c$. اذكر نقاط التقاطع، والفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة أو موجبة أو سالبة، والقيم العظمى والصغرى النسبية، والتناظر، والسلوك الطرفي.
49. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تعرض سلوكاً أسياً.

تدريب على الاختبار المعياري

52. الهندسة وضعت ثورا قطعة ورق دائرية على صورة مربعة كما يظهر بالأعلى. إذا تددت الصورة 4 سنتيمترات خارج الدائرة من كل جانب، فما محيط الصورة المربعة؟



F 64 cm
G 80 cm

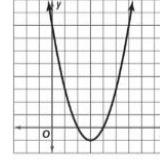
H 94 cm
J 112 cm

53. تقع النقطتان اللتان إحداثياتهما $(0, -3)$ و $(2, 7)$ على المستقيم l . يحتوي المستقيم p على $(-1, 3)$ وهو متعامد على المستقيم l . ما الإحداثي الأفقي x للنقطة التي يتقاطع عندها l مع p ؟

A $\frac{1}{2}$
C $-\frac{1}{2}$

B $-\frac{2}{5}$
D -3

50. إجابة قصيرة ما تقاطع مع المحور الأفقي x في الدالة المثلثة بيانيا أدناه؟



51. استثمر مازن AED 300 في حساب ادخار. تمثل المعادلة $A = 300(1.005)^{12t}$ المبلغ في حساب مازن A بعد t سنوات. ما المبلغ الذي سيكون في حساب مازن بعد 7 أعوام؟

A AED 25,326
B AED 456.11

C AED 385.01
D AED 301.52

مراجعة شاملة

أوجد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي بالصيغة القياسية.

54. $(1.9 \times 10^2)(4.7 \times 10^6)$

55. $(4.5 \times 10^{-3})(5.6 \times 10^4)$

56. $(3.8 \times 10^{-4})(6.4 \times 10^{-8})$

بسط.

57. $\sqrt[3]{343}$

58. $\sqrt[4]{729}$

59. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

60. $729^{\frac{5}{6}}$

61. $216^{\frac{5}{3}}$

62. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$

63. سباق الهمد عندما تصطدم سيارة بجسم. يُقاس التلف بأثر الاصطدام. بالنسبة لسيارة معينة، يتحدد أثر الاصطدام I بواسطة $I = 2v^2$ ، حيث v تمثل السرعة بالكيلومتر في الدقيقة. ما أثر الاصطدام إذا كانت سرعة السيارة تبلغ 4 كيلومترات في الدقيقة؟

استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام ثوابت.

64. $x + y = -3$
 $x - y = 1$

65. $3a + b = 5$
 $2a + b = 10$

66. $3x - 5y = 16$
 $-3x + 2y = -10$

مراجعة المهارات

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية حسابية.

67. 1, 3, 5, 7, ...

68. -6, -4, -2, 0, ...

69. 6.5, 9, 11.5, 14, ...

70. 10, 3, -4, -11, ...

71. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \dots$

72. $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$



مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-1

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللتأكد من ذلك، سوف نكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسية.

المواد

- حاسبة تمثيل بياني

نصائح للتدريس

- في النشاط 1، ذكر الطلاب بأنه من أجل أن يدخلوا $3^x + 4$ ، فيسكنون حاجة إلى استخدام مفتاح \wedge من أجل التعبير عن الأس واستخدام السهم المتجه لأسفل قبل إدخال $+ 4$.
- عند تغيير إعدادات النوافذ، استخدم المفتاح tab للانتقال من حقل إلى آخر.
- في النشاط 2، سيجتاز الطلاب إلى استخدام المفتاح tab من أجل نقل المؤشر إلى سطر الإدخال للكتابة $f(2(x))$.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الصف إلى مجموعات ثنائية. واعمل مع الصف على إتمام النشاط 1 والنشاط 2. ثم اطلب منهم التعاون مع زملائهم لإكمال التمارين من 1 إلى 9 والنشاطين 2 و 3.

تهين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 10 إلى 12.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الأدوات الطلاب الباهرون في علم الرياضيات على دراية كافية بالأدوات المناسبة لاتخاذ قرارات حكيمة وسليمة عن الوقت المناسب لاستخدام كل أداة. وهم يدركون كذلك الفكرة التي يكتسبونها والحدود الموضوعية لهم. وضح أن الأنشطة 2 و 3 و 4 تقدم طرقاً متعددة لحل المعادلات والمتباينات. ناقش معهم الوقت المناسب لاستخدام الطرق وأدوات التكنولوجيا المتاحة.

النشاط 1

حل $3^x - 4 = \frac{1}{9}$



[-10, 10] scl: 1 by [-1, 1] scl: 0.1

مثل كل طرف من المعادلة بيانياً في صورة دالة منفصلة. أدخل $3^x - 4$ باعتبارها Y_1 . تأكد من تضمين قوسين حول الأس. أدخل $\frac{1}{9}$ باعتبارها Y_2 . ثم مثل المعادلتين بيانياً.

الخطوة 2

استخدم خاصية **Intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **Intersect** (تقاطع) من شاشة **CALC** (حساب) لتقريب الزوج المرتب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية. حين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.

الخطوة 3

استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضاً استخدام خاصية **TABLE** (الجدول) لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها التمثيلان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتساوية لكل تمثيل بياني. اخص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$ تكون لكنتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\bar{3}$ أو $\frac{1}{3}$ وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$$3^x - 4 \neq \frac{1}{9}$$

المعادلة الأصلية

$$3^2 - 4 \neq \frac{1}{9}$$

عوض بالعدد 2 عن x .

$$3 - 2 \neq \frac{1}{9}$$

بسط.

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \checkmark$$

تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسية.

(تتبع في الصفحة التالية)

استخدم التمارين من 13 إلى 15 لتقويم معرفة الطلاب بحل المعادلات المتباينات الأسية.

اطلب من الطلاب تلخيص استخدام التكنولوجيا لإيجاد الحلول للدوال المتباينات الأسية.

$$2^{x-2} \geq 0,5^{x-3} \quad | \cdot 2^3$$

$$2^{x-2} \geq 0,5^{x-3} \quad | \cdot 2^3$$

أدخل المتباينات ذات الصلة.

أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y \geq 2x - 2$ و $y \leq 2x - 2$ ، وما أن هذه المتباينة تتضمن علامة أقل من أو يساوي، فيجب أن نطابق أسفل المحور.

ENTER

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفتاح

اختيار أيقونة "التطبيق أسفل".

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5 - x$ ، نطابق فوق المحور لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة أكبر من أو يساوي.

Y= $\leftarrow \leftarrow$ [ENTER] [ENTER] [ENTER] $\rightarrow \rightarrow$ 2 \wedge (
 X,T,0,n) = 2) [ENTER] $\leftarrow \leftarrow$ [ENTER] [ENTER] \rightarrow
 \rightarrow 5 \wedge ((X,T,0,n) = 3)

مثل النظام بيانًا.

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظلمة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect** (تقاطع)، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x | x \geq 2.5\}$.

استخدم خاصية TABLE

تحقق باستخدام خاصية TABLE (الجدول). وتم إعادة الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5. خطوات العملية على الحاسبة: [2nd] [TABLE] [2nd] [ENTER] .5 [ENTER] 0 [2nd] [TBLSET] [2nd] [ENTER]. لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$ ، فإن $y_1 > y_2$ وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x | x \geq 2.5\}$.

10. نظراً لأن النظام يتكون من التعابير الموجودة على كلا طرفي المعادلة الأصلية أو المتباينة، فإن أي قيم تكون حلولاً للنظام سوف تحقق المعادلة الأصلية أو المتباينة.

حُلَّ كل معادلة أو متباينة.

$$1. \quad 9^{x-1} = \frac{1}{81} \quad -1$$

2. $4^{x+3} = 2^{5x}$ **2**

3. $5^{x-1} = 2^x$ **1.76**

$$4. 3.5^{x+2} = 1.75^{x+3} - 1.2$$

5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3} - 2.6$

6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$ ($x \mid x > 1.8$)

7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$ ($x \mid x > 3$)

8. $3^x - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}} (x \mid x < 2)$

9. $5x + 3 \leq 2x + 4$ ($x \mid x \leq -2.2$)

10. **الكتابة في الرياضيات** وضح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانياً على حل المعادلات والمتباينات الأسية.

تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

2-2



- المسابق** ● مكنت الدوال الخطية والتربيعية والأسية بيانياً.
- الحالي** ● تحديد الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المعطاة.
- لماذا؟** ● بيع فريق الجولف في كل سنة الحلوى لجميع المال لجيديات الحيرية. ومن خلال معرفة نوع الدالة الذي يمثل مبيعات الحلوى، يمكنك تحديد أفضل سعر للحلوى.

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 تحديد الدوال يمكنك استخدام الدوال الخطية والدوال التربيعية والدوال الأسية لتمثيل البيانات. فيما يلي قائمة بالصيغ العامة للمعادلات وتشيل بياني لكل نوع من الدوال.

ملخص المفهوم الدوال الخطية وغير الخطية		
الدالة الأسية	الدالة التربيعية	الدالة الخطية
$y = ab^x$ حيث $b > 0$	$y = ax^2 + bx + c$	$y = mx + b$

McGraw-Hill Education © جميع الحقوق محفوظة

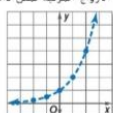
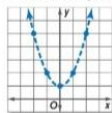
مثال 1 اختيار نموذجاً باستخدام تمثيل النماذج

مثل بيانياً كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسية.

- a. $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$ b. $\{(-2, \frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 2), (2, 4)\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالة تربيعية.

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالة أسية.



تمرين موجّه

- 1A. $(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)$

- 1B. $(-1, 0.25), (0, 1), (1, 4), (2, 16)$

أسية

1 التركيز

تخطيط رأسي

قبل الدرس 2-2 ارسم الدوال الخطية والتربيعية والأسية بيانياً.

الدرس 2-2 عرف الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المعطاة. اكتب المعادلات التي تشكل هذه البيانات.

بعد الدرس 2-2 ارسم معادلات التنوع المباشرة وحلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ في الدرس.

أسأل:

- إذا كانت بيانات تكلفة 1-4 أرطال من الحلوى التابعة تنتج عنها البيانات التالية، فهل هذه متتالية هندسية؟

لا

الأرطال	1	2	3	4
السعر (in AED)	4	8	12	16

- ما هو الفرق المشترك لهذه المتتالية؟ 4

- ما المعادلة التي تمثل هذه الدالة؟ $y = 4x$ حيث تكون $x =$ عدد الأرطال و $y =$ السعر

1 تعريف الدوال

مثال 1 بين طريقة استخدام الرسم البياني لمجموعة أزواج من الأوامر لتحديد ما إذا كانت البيانات تمثل دالة خطية أو تربيعية أو أسية. **مثال 2** بين كيفية البحث عن نمط في جدول القيم لتحديد ما إذا كانت البيانات تمثل دالة خطية أو تربيعية أو أسية.

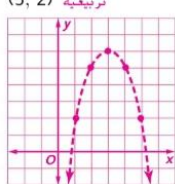
التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

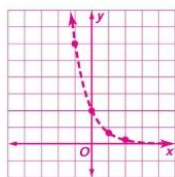
1 قم بعمل رسم بياني لكل مجموعة من أزواج الأوامر. حدد ما إذا كانت أزواج الأوامر تمثل دالة خطية أو تربيعية أو أسية.

a. (1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 5), (5, 2)



b. $(-1, 6), (0, 2), (1, \frac{2}{3})$

(2, $\frac{2}{9}$) أسية



طريقة أخرى لتحديد بصف أي نموذج يصف البيانات أفضل هو استخدام الأنماط. تُسمى فروق قيم y المتتالية الفروق الأولى. تُسمى فروق الفروق الأولى المتتالية الفروق الثانية. إذا كانت جميع فروق قيم y المتتالية متساوية، فإن الدالة تمثل دالة خطية. إذا كانت الفروق الثانية متساوية جيبًا، ولكن الفروق الأولى غير متساوية، فإن البيانات تمثل دالة تربيعية. إذا كانت نسبة قيم y المتتالية متساوية جيبًا، و $x \neq 1$ ، فإن البيانات تمثل دالة أسية.

مثال 2 اختيار نموذجًا باستخدام الفروق أو النسب

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

a.	x	-2	-1	0	1	2
	y	-8	-3	2	7	12

الفروق الأولى: $-8, -3, 2, 7, 12$
 $\begin{array}{cccccc} & -8 & -3 & 2 & 7 & 12 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$

بما أن الفوارق الأولى متساوية جميعها، فإن جدول القيم يمثل دالة خطية.

b.	x	-1	0	1	2	3
	y	8	4	2	1	0.5

الفروق الأولى: $8, 4, 2, 1, 0.5$
 $\begin{array}{cccccc} & 8 & 4 & 2 & 1 & 0.5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & -4 & -2 & -1 & -0.5 & \end{array}$

الفروق الأولى ليست جميعها متساوية، إذاً لا يمثل جدول القيم دالة خطية. أوجد الفروق الثانية وقارن.

الفروق الثانية: $-4, -2, -1, -0.5$
 $\begin{array}{cccccc} & -4 & -2 & -1 & -0.5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 1 & 0.5 & \end{array}$

الفروق الثانية ليست جميعها متساوية، إذاً لا يمثل جدول القيم دالة تربيعية. أوجد نسب قيم y ثم قارن.

النسب: $\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{0.5} = 2$
 $\begin{array}{cccccc} 8 & 4 & 2 & 1 & 0.5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2} & \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} & \end{array}$

نسب قيم y المتتالية متساوية، وبالتالي، يمكن تمثيل جدول القيم عن طريق دالة أسية.

تمرين موجّه

2A.	x	-3	-2	-1	0	1
	y	-3	-7	-9	-9	-7

تربيعية

2B.	x	-2	-1	0	1	2
	y	-18	-13	-8	-3	2

خطية

2 كتابة المعادلات عندما تجد النموذج الأفضل في وصف البيانات، فيمكن كتابة معادلة للدالة بالنسبة للدالة التربيعية في هذا الدرس. سيكون للمعادلة هذه الصيغة $y = ax^2$.

التدريس بالتكنولوجيا

تسجيل مقاطع الفيديو قم بإعداد مقدمة في مقطع فيديو صغير لعرضه في بداية الوحدة. ومن ثم التوضيح من خلال أمثلة إضافية مع الوحدة.

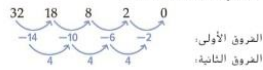
التركيز على المحتوى الرياضي

الأنماط في البيانات بالنسبة لجدول القيم كي يكون مفيداً في تحديد أي تمثيل يصف مجموعة البيانات على نحو أفضل، يجب أن تزيد القيم x أو تقل بمقدار ثابت. وإذا لم يكن الأمر كذلك، فلا يمكن استخدام الطرق الموضحة في هذه الصفحة بعد ذلك.

مثال 3 كتابة معادلة

حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

الخطوة 1 حدد أي نموذج يلائم البيانات.



بما أن الفروق الثانية متساوية، فإن الدالة الخطية تمثل البيانات.

الخطوة 2 اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

المعادلة لها الصيغة التالية $y = ax^2$. أوجد قيمة a عن طريق اختيار زوج واحد من الأزواج المرتبة. لنستخدم $(-1, 2)$.

$$y = ax^2 \quad \text{معادلة للدالة التربيعية}$$

$$2 = a(-1)^2 \quad x = -1 \text{ و } y = 2$$

$$2 = a$$

$$y = 2x^2 \quad \text{المعادلة التي تمثل البيانات هي}$$

تدربين موجه

3A.

x	-2	-1	0	1	2
y	11	7	3	-1	-5

3B.

x	-3	-2	-1	0	1
y	0.375	0.75	1.5	3	6

انتبه!

إيجاد a في المثال 3. y يمكن استخدام النقطة $(0, 0)$ لإيجاد قيمة a . سيضع عليك تقسيم كل طرف على 0. ما يعطيك قيمة غير محددة لـ a .

مثال إضافي

2 ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع تمثيل يصف البيانات على نحو أفضل.

a.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

خطية

b.

x	-2	-1	0	1	2
y	36	12	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$

أسية

2 اكتب المعادلات

مثال 3 بين طريقة كتابة معادلة لدالة مشكّلة عن طريق مجموعة بيانات.

مثال 4 بين طريقة كتابة دالة تشكّل بيانات من العالم الواقعي.

أمثلة إضافية

3 حدد أي نوع تمثيل يصف البيانات على نحو أفضل. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	-1	-8	-64	-512	-4096

$$y = -(8)^x \quad \text{أسية}$$

4 الكاراتيه يبين الجدول عدد الأطفال المسجلين في فئة الهيتدين لتعلم الكاراتيه لمدة أربع سنوات متتالية. حدد أي نوع تمثيل يمثل البيانات. ثم اكتب معادلة تمثل هذه البيانات.

الوقت (أعوام)	0	1	2	3	4
عدد الملتحقين	8	11	14	17	20

$$y = 3x + 8 \quad \text{خطية}$$

نصائح للمعلمين الجدد

التحقق من المعادلة شجّع الطلاب أن يتحققوا من أن الأزواج المرتبة تعي بالمعادلة المكتوبة.

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة معادلة لموقف من الحياة اليومية

نادي الكتاب يوضح الجدول عدد أعضاء نادي الكتاب لأربع سنوات متتالية. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات. ثم اكتب دالة تمثل البيانات.

الوقت (السنوات)	0	1	2	3	4
الأعضاء	5	10	20	40	80

الاستيعاب يجب علينا إيجاد نموذج للبيانات. وبعد ذلك نكتب دالة.

الخطوة إيجاد نموذج باستخدام الفروق المتتالية أو النسب. وبعد ذلك استخدام الصيغة العامة للمعادلة لكتابة دالة.

الحل النسبة الثابتة هي 2. هذه قيمة القاعدة. تمثل الدالة الأسية بالصيغة $y = ab^x$ البيانات.

$$y = ab^x \quad \text{معادلة للدالة الأسية}$$

$$5 = a(2)^0 \quad b = 2 \text{ و } b = 2$$

$$5 = a$$

$$y = 5 \cdot 2^x \quad \text{الدالة التي تمثل البيانات هي}$$

تحقق استخدمت $(0, 5)$ لكتابة الدالة. تحقق أن كل زوج مرتب آخر يحقق المعادلة.

تدربين موجه

عدد الخطوط	5	6	7	8
التكلفة الإجمالية (AED)	14.50	16.60	18.70	20.80

4. إعلانات يوضح الجدول تكلفة وضع إعلان في صحيفة. حدد النموذج الذي يصف البيانات بأفضل صورة واكتب دالة تمثل البيانات.

$$C = 2.1n + 4 \quad \text{خطية}$$



الربط بالحياة اليومية

أظهر استطلاع أجرته الجمعية الوطنية للتعليم أن 87% من جميع المراهقين المشاركين في الاستطلاع وجدوا أن القراءة باعثة على الاسترخاء. وراي 85% أن القراءة مفيدة. ووجد 79% أن القراءة ممتعة. المصدر: Society American Demographics

التدريس المتميز

الطلاب اللغويين/اللغويين اطلب من الطلاب كتابة قائمة نصائح لمساعدة أي شخص في تحديد التمثيل الذي يصف مجموعة البيانات وكتابة معادلة دالة على نحو أفضل.

3 التمارين

التقويم التكويني

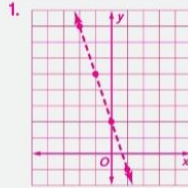
استخدم التمارين 1-13 للتحقق من الفهم.

استخدم الرسم البياني الموجود أسفل هذه الصفحة لتخصيص الواجبات المنزلية لطلابك.

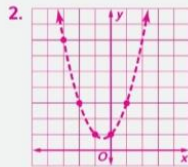
تنبيه حول التمارين

ورق الرسم البياني بالنسبة للتمارين 1-4 و 14-19 و 27. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

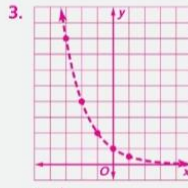
إجابات إضافية



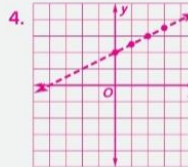
خطية



تربيعية



أسية



خطية

التحقق من فهمك

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسية. 1-4. انظر الهامش.

1. $(-2, 8), (-1, 5), (0, 2), (1, -1)$
2. $(-3, 7), (-2, 3), (-1, 1), (0, 1), (1, 3)$
3. $(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, 0.5)$
4. $(0, 2), (1, 2.5), (2, 3), (3, 3.5)$

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

5.

x	0	1	2	3	4
y	5	8	17	32	53

تربيعية

6.

x	-3	-2	-1	0
y	-6.75	-7.5	-8.25	-9

خطية

7.

x	-1	0	1	2	3
y	3	6	12	24	48

أسية

8.

x	3	4	5	6	7
y	-1.5	0	2.5	6	10.5

تربيعية

حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

9.

x	-1	0	1	2	3
y	1	3	9	27	81

أسية: $y = 3^x$

10.

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	125	80	45	20	5

تربيعية: $y = 5x^2$

11.

x	-3	-2	-1	0	1
y	1	1.5	2	2.5	3

خطية: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

12.

x	-1	0	1	2
y	-1.25	-1	-0.75	-0.5

خطية: $y = -\frac{1}{4}x - 1$

13.

الأسبوع	0	1	2	3	4
الطول (cm)	3	3.5	4	4.5	5

البيانات يوضح الجدول ارتفاع أحد النباتات الأربعة أسابيع متتالية. حدد أي نوع من الدوال يُمثل الارتفاع بأفضل صورة. ثم اكتب دالة تمثل البيانات.

خطية: $y = 0.5x + 3$

التبرين وحل المسائل

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسية.

14. $(-1, 1), (0, -2), (1, -3), (2, -2), (3, 1)$
15. $(1, 2.75), (2, 2.5), (3, 2.25), (4, 2)$
16. $(-3, 0.25), (-2, 0.5), (-1, 1), (0, 2)$
17. $(-3, -11), (-2, -5), (-1, -3), (0, -5)$
18. $(-2, 6), (-1, 1), (0, -4), (1, -9)$
19. $(-1, 8), (0, 2), (1, 0.5), (2, 0.125)$

ابحث عن النمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

20.

x	-3	-2	-1	0
y	-8.8	-8.6	-8.4	-8.2

خطية: $y = 0.2x - 8.2$

21.

x	-2	-1	0	1	2
y	10	2.5	0	2.5	10

تربيعية: $y = 2.5x^2$

22.

x	-1	0	1	2	3
y	0.75	3	12	48	192

أسية: $y = 4 \cdot 3^x$

23.

x	-2	-1	0	1	2
y	0.008	0.04	0.2	1	5

أسية: $y = 5 \cdot 0.2^x$

24.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.2	16.8	37.8	67.2

تربيعية: $y = 4.2x^2$

25.

x	-3	-2	-1	0	1
y	14.75	9.75	4.75	-0.25	-5.25

خطية: $y = -5x - 0.25$

خيارات الواجب المنزلي المتغير

المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين	
أساسي	14-26, 32-56	15-25, 36-39	14-26, 32-35, 40-56
رئيسي	15-25, 27-30, 32-56	14-26, 36-39	27-30, 32-35, 40-56
متقدم	27-56		

تدريس التمارين الرياضية

البراهين يبرهن الطلاب المتفوقون في الرياضيات على نحو استقرائي. في تمرين 32، اطلب من الطلاب البحث عن نمط.

مثال 4

26. المواقع الإلكترونية تتبع إحدى الشركات عدد زوار موقعها الإلكتروني على مدى 4 أيام. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل عدد زوار الموقع فيما يتعلق بالوقت. اكتب دالة تمثل البيانات.

اليوم	0	1	2	3	4
زوار (بآلاف)	0	0.9	3.6	8.1	14.4

27. المكالمة تعتمد تكلفة المكالمة الدولية على طول المكالمة. ووضح الجدول التكلفة حتى 6 دقائق.

طول المكالمة (بالدقيقة)	1	2	3	4	5	6
التكلفة (AED)	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60	0.72

- a. سأل البيانات بياناً وحدد أي نوع من الدوال يمثل البيانات بأفضل صورة.
b. اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات. $y = 0.12x$
c. استخدم معادلتك لتحديد تكلفة مكالمة تستغرق 10 دقائق. 1.20 AED

28. انخفاض القيمة تنخفض قيمة سيارة ما بمرور الوقت. ووضح الجدول قيمة السيارة خلال مدة من الزمن.

العام	0	1	2	3	4
القيمة (AED)	18,500	15,910	13,682.60	11,767.04	10,119.65

- a. حدد أي نوع من الدوال هو الأفضل في تمثيل البيانات. الأسية
b. اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات. $v = 18,500 \cdot (0.86)^t$
c. استخدم معادلتك لتحديد الثمن الذي تستحقه السيارة بعد 7 سنوات. 6436.66 AED

29. البكتيريا يقدر العلماء أن مزرعة بكتريا يبلغ تعدادها الأولي 12 سوف تتضاعف كل ساعة.

- a. أنشئ جدولاً يوضح تعداد البكتريا في الأربع ساعات الأولى.
b. أي نوع من النماذج يمثل البيانات بأفضل صورة؟ الأسية
c. اكتب دالة تمثل البيانات. $b = 12 \cdot 3^t$
d. كم سيصبح عدد البكتريا بعد 8 ساعات؟ 78,732

الطباعة السريعة
رسوم الإعداد 25 درهماً
المنشور الدعائي 15 فلساً

30. الطباعة تتقاضى شركة طباعة الرسوم الموضحة لطباعة المنشورات الدعائية. اكتب دالة تمثل إجمالي تكلفة المنشورات الدعائية. وحدد كم ستكون تكلفة منشوراً دعائياً.
 $C = 0.15t + 25$; AED 29.50

32. لدى الدوال الخطية فرق أول ثابت ولدى الدوال التربيعية فرق ثاني ثابت. لذا سيكون للمعادلات التكعيبية فرق ثالث ثابت.

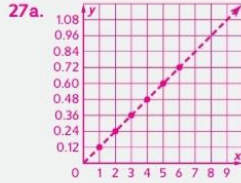
مسائل مهارات التفكير العليا: استخدام مهارات التفكير العليا

31. تجد اكتب دالة بها فرق ثالثة ثابتة، و فروق أولى غير ثابتة، وتقاطع مع المحور الرأسي $y = -5$. وحتوي على النقطه (2, 3). الإجابة النموذجية: $y = 2x^2 - 5$
32. الفرضيات ما نوع الدالة التي سيكون لها فروق ثالثة ثابتة ولكن ليس فروق ثانية ثابتة؟ اشرح.
33. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة خطية يكون لها فرق أول ثابت بمقدار 4. $y = 4x + 1$
34. البرهان اكتب فقرة برهان لتوضح أن الدوال الخطية تنمو بفروق متساوية خلال فترات متساوية، وأن الدوال الأسية تنمو بموامل متساوية خلال فترات متساوية. الإرشاد: افترض أن $y = ax^n$ تمثل دالة خطية وافترض أن $y = a^n$ تمثل دالة أسية. انظر الهامش.
35. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تحديد ما إذا كان يمكن تمثيل مجموعة من البيانات عن طريقة دالة خطية أو دالة تربيعية أو دالة أسية؟ انظر الهامش.

4 التقييم

أخبار الأمتس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدتهم درس الأمتس المتعلق بالمعادلات التربيعية في الدرس الجديد الذي يدرسه اليوم.

إجابة إضافية



34. إذا كان أحد الحدود الخطية هو ax ، فإن الحد التالي هو $a(x+1)$. والفرق بين الحدين هو $a(x+1) - ax = ax + a - ax = a$. إذا كان أحد الحدود الأسية هو ax ، فإن الحد التالي هو a^{x+1} ونسبة الحدود $\frac{a^{x+1}}{ax}$ أو a .

35. الإجابة النموذجية: يمكن رسم البيانات بيانياً لتحديد أي الدوال تمثل البيانات على نحو أفضل. كما يمكنك العثور على الفروق في نسب قيم المحور الرأسي y . إذا كانت الفروق الأولى ثابتة، يمكن تمثيل البيانات عن طريق دالة خطية. إذا كانت الفروق الثانية ثابتة والفروق الأولى ليست كذلك، يمكن تشكيل البيانات عن طريق دالة تربيعية. إذا كانت النسب ثابتة، يمكن بعد ذلك تشكيل البيانات عن طريق دالة أسية.

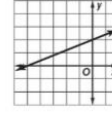
تدريب على الاختيار المعياري

36. الإجابة التصيرية اكتب معادلة تمثل البيانات في الجدول.

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48

37. ما معادلة المستقيم أدناه؟

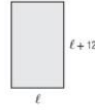
- A $y = \frac{2}{5}x + 2$
B $y = \frac{2}{5}x - 2$
C $y = \frac{5}{2}x + 2$
D $y = \frac{5}{2}x - 2$



38. تقع النقطه $(r, -4)$ على مستقيم بالمعادلة $2x + 3y = -8$. أوجد قيمة r .

- F -10
G 0
H 2
J 8
 $y = 3 \cdot 2^x$

39. الهندسة تبلغ مساحة المستطيل 220 متراً مربعاً. أوجد طول ℓ .



- A 8 أمتار
B 10 أمتار
C 22 متراً
D 34 متراً

مراجعة شاملة

حلّ كل معادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف، وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

40. $x^2 = 25$
0.5, -5

41. $x^2 + 6x + 9 = 16$
1, -7

42. $x^2 - 14x + 49 = 15$
10.9, 3.1

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج يصف البيانات بأفضل طريقة.

43. خطية

x	0	1	2	3	4
y	4	5	6	7	8

44. أسية

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

45. تربيعي

x	-3	-2	-1	0	1
y	14	9	6	5	6

46. خطية

x	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11

47. العلوم الفيزيائية تطلق قذيفة أعلى من مستوى الأرض. ونحصل على ارتفاعها h بالأمتار بعد t ثوانٍ عن طريق $h = 96t - 16t^2$. أوجد قيمة t عندما h تساوي 96 متراً.

أحوالي 1.3 ثانية و 4.7 ثانية

مراجعة البهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $y = -1$ و $x = -3$ و $z = 4$.

48. $4z - 4$
7

49. $|2y + 1|$
1

50. $|4 - z|$
0

51. $\frac{1}{2}x + 2$
 $\frac{1}{2}$

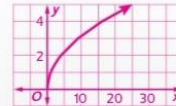
52. $|12 - 4z|$
4

53. $|2y - 3| - 6$
-1

التدريس المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب إعداد جدول قيم لـ $y = \sqrt{x}$ ثم ارسمها بيانياً. تأكد من عدم تضمين الطلاب أي قيم سالبة لـ x . لأن الجذر التربيعي للعدد السالب ليس عدداً حقيقياً.

x	0	1	4	9	16	25
y	0	1	2	3	4	5



1 التوكيز

الهدف استخدم آلة حاسبة بيانية للعثور على معادلة انحدار مناسبة لمجموعة البيانات.

■ آلة حاسبة بيانية

نصيحة للتدريس

ذَكَرَ الطلاب بأنهم قد درسوا خطوط الانحدار وخطوط توفيق الوسيط في الوحدة 4. قبل أن يبدأ الطلاب، تأكد من أنهم قاموا بتنشغيل وضع التشخيص. لفعل ذلك من الشاشة الرئيسية، اضغط على 2nd [CATALOG] وانتقل لأسفل وانقر فوق تشخيصي، ثم اضغط على

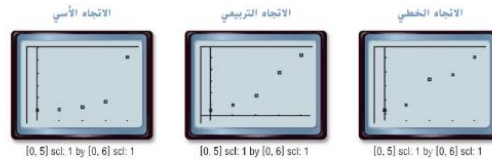
ENTER ENTER

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسم الطلاب إلى مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة، مع مزج القدرات، اطلب من المجموعات إتمام الأنشطة والتمارين 1-4.

- في الخطوة 1 من النشاط، تأكد من أن الطلاب مسحوا القوائم السابقة قبل إدخال البيانات، ينبغي للطلاب إدخال السنوات قبل 2000 في L1 وإدخال عدد الرحلات في L2.
 - في الخطوة 2 من النشاط، أشر إلى القيمة R^2 ، وأن 0.9998751467 هو معامل التحديد. ووجه عام، كلما كان هذا المعامل أقرب إلى 1، كلما كان التمثيل أفضل.
 - في الخطوة 3 من النشاط، أخبر الطلاب أن عليهم نسخ قيمة الانحدار التربيعي بالتحديد إلى $Y = \text{LIST}$ للحصول على الرسم البياني الصحيح.
- تمرين** اطلب من الطلاب إتمام التمرين 5.



باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد معادلة الانحدار المناسبة.

سلطان

مخطط الخطوط الجوية يوضح الجدول المتوسط الشهري لعدد رحلات الطيران في كل عام من خلال مخطط الخطوط الجوية الذي أنشئ في عام 2000.

2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001	2000	العام
50	44	38	33	28	24	20	17	رحلات الطيران

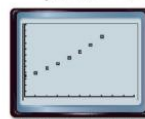
الخطوة 1 رسم مخطط انتشار.

- أدخل عدد السنوات منذ سنة 2000 في L1 وعدد رحلات الطيران في L2.

خطوات العملية على الحاسبة: مراجعة إدخال قائمة في
الصفحة 255

- استخدم STAT PLOT لتمثيل مخطط الانتشار بيانياً.
خطوات العملية على الحاسبة: مراجعة المخططات
الإحصائية في صفحة 256.

استخدم **ZOOM** 9 للتبثيل النهائي.



[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

من مخطط الانتشار يمكننا رؤية أن البيانات قد يكون لها إما اتجاه تربيعي أو اتجاه أسي.

الخطوة 2

الخطوة 2 أوجد معادلة الانحدار.

سوف نتحقق من كلا الاتجاهين من خلال فحص معادلتني
نحدا رهيا.

- اختر DiagnosticOn من زر CATALOG.
- حدد QuadReg في قائمة STAT.

STAT ► 5 ENTER ENTER خطوات العملية
على الحاسبة:

على الحاسبة:

المعادلة بالصيغة
 $y = ax^2 + bx + c$



لمعادلة نظريًا هي $y = 0.25x^2 + 3x + 17$

R^2 هو معامل التحديد. كلما كان R^2 أقرب إلى 1، كان التمثيل أفضل. من أجل التمثيل على المعادلة الأسية ختم **ExpReg** في قائمة **STAT** من أجل اختيار التمثيل التربيعي أو الأسّي. اجعل كلاً منهما ملائماً واستخدم التمثيل الذي يكون مع قيمة R^2 أقرب إلى 1.

3 التقييم

التقويم التكويني

في الخطوة الرابعة من النشاط، كان تقدير الانحدار التربيعي أنه في أثناء الشهر السابع سافر معظم الركاب، نحو 59 مليون راكب. اطلب من الطلاب شرح لماذا؟ في أن العدد التقديري للركاب الذين سافروا في الشهر السابع قد لا يكون دقيقًا تمامًا.

الإجابة النموذجية: معادلة الانحدار التربيعي هي الأنسب لنقاط البيانات التي لا تقع في الدالة الفعلية المرسومة بيانيًا. سيكون هناك أوجه اختلاف بين نقاط البيانات الفعلية والنقاط التي تقع في دالة الانحدار.

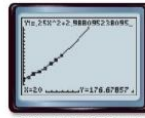
من التطبيق إلى النظرية

أسأل: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان عليك استخدام معادلة خطية أو تربيعية أو معادلة انحدار أسية للبيانات؟
الإجابة النموذجية: ضع مخططًا مبعثرًا لنقاط البيانات، وإذا كان يبدو قريبًا من خط مستقيم، فاستخدم معادلة الانحدار الخطي. وإذا كانت نقاط البيانات تتبع منحنى، فقم بتوفيق معادلة انحدار تربيعية ومعادلة انحدار أسية إلى النقاط التابعة لك. ويعتبر التمثيل ذي معامل التحديد الأقرب إلى 1 هو التمثيل المطلوب استخدامه.

الخطوة 4 توقع استخدام المعادلة.

إذا استمر هذا الاتجاه، فيمكننا التمثيل البياني الخاص بمعادلتنا لتوقع العدد الشهري للرحلات الجوية التي ستقوم بها شركة الطيران في سنة محددة. كي نتحقق من سنة 2020. أولاً، اضغط الباندا.

خطوات عملية على الحاسبة: CALC 2nd 1 في x ، أدخل 20 ENTER 5 20 ENTER



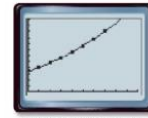
(0, 25) scl: 1 by (0, 200) scl: 5

سيكون هناك حوالي 177 رحلة جوية شهريًا إذا استمر هذا الاتجاه.

الخطوة 3 مثل معادلة الانحدار التربيعية بيانيًا.

• انسخ المعادلة إلى قائمة $Y=$ ومثل بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= VARS 5 1 ZOOM 9



(0, 10] scl: 1 by (0, 60) scl: 5

التباين

أنشئ مخططًا لكل مجموعة من نقاط البيانات. حدد ما إذا كان ينبغي استخدام معادلة انحدار خطية، أو تربيعية أو أسية. اذكر معامل التحديد.

1. **التربيعية:** $R^2 \approx 0.969$

x	y
1	30
2	40
3	50
4	55
5	50
6	40

$$\text{Sc. } y = (306)(0.96^x); R^2 = 0.957; D = \{x | x > 0\}; R = \{y | y > 0\}$$

الزمن (بالدقائق)	درجة الحرارة (°F)
0	350
5	244
10	178
15	137
20	112
25	96
30	89

2. **التربيعية:** $R^2 \approx 0.964$

x	y
0.0	12.1
0.1	9.6
0.2	6.3
0.3	5.5
0.4	4.8
0.5	1.9

3. **التربيعية:** $R^2 \approx 0.980$

x	y
0	11
2	3.3
4	2.9
6	5.6
8	11.9
10	19.8

4. **التربيعية:** $R^2 \approx 0.840$

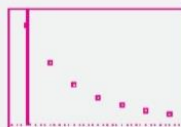
x	y
1	1.67
5	2.59
9	4.37
13	6.12
17	5.48
21	3.12

5. **الجواب:** أعدت أمانتي كمكة وتنتظرها لتبرد حتى تزينها. يوضح الجدول درجة حرارة الكعكة كل 5 دقائق بعد أن أخرجتها أمانتي من الفرن.

- a. ارسم مخطط انتشار للبيانات. **انظر الهامش.**
b. أي معادلة انحدار لها قيمة R^2 أقرب إلى 1؟ هل هذه هي أفضل معادلة ثلاث معادلات؟ اشرح استنتاجك.
c. أوجد معادلة الانحدار المناسبة. واذكر معامل التحديد. ما المجال والمدى؟ **انظر الهامش.**
d. سوف تزين أمانتي الكعكة عندما تصل درجة حرارة الغرفة (70°F). استخدم معادلة الانحدار لتوقع متى يمكنها تزيين كعكتها. **36 دقيقة**

إجابات إضافية

5a.



[−5, 35] scl: 1 ي. ف. [0, 400] scl: 1

5b. المعادلات التربيعية لديها قيمة R^2 أقرب إلى 1. رغم أنها في اتجاه تربيعي، إلا أن الكعكة ستبرد ثم تسخن مرة أخرى. يتناسب الانحدار الأسّي تمامًا مع سياق المسألة.

النمو والاضمحلال (التضائل)



لماذا؟ ازداد عدد الهواتف الإلكترونية أو الموديمات بمعدل شهري يبلغ 13.7% تقريباً على مدار 21 شهراً، يمكن تمثيل متوسط عدد الموديمات في الشهر بـ $y = 1.1(1 + 0.137)^t$ أو $y = 1.1(1.137)^t$ حيث تمثل y إجمالي عدد الموديمات بالملايين، و t هي عدد الأشهر منذ نوفمبر 2003.

الحالي 1 إيجاد حل للمسائل التي تتضمن نموًا أسّيًا.
2 إيجاد حل للمسائل التي تتضمن اضمحلالًا (تضائلًا) أسّيًا.

السابق لقد حلّلت الدوال الأسّيّة.

المفردات الجديدة
compound interest
المركبة

ممارسات في الرياضيات
للتدريس

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-3 تحليل الدوال الأسية.
الدرس 2-3 حل المسائل التي تحتوي على نمو أسّي، حل المسائل التي تحتوي على اضمحلال أسّي.
بعد الدرس 2-3 إيجاد العلاقة بين المتتاليات الهندسية والدوال الأسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

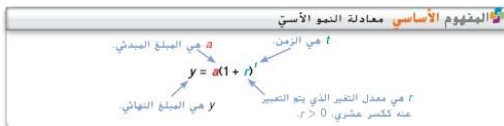
اطرح السؤال التالي:

- بالنظر إلى المعادلة، كيف يمكنك أن تعلم أن الدالة ليست خطية؟
الزمن، معبراً عنه بالقيمة t ، عبارة عن $أس$ ، ومن ثم، لا تكون الدالة خطية.
- استخدم المعادلة لتوقع قيمة متوسط الموديمات بالملايين في الشهر الثامن. **نحو 3 ملايين** بما تصف قيمة متوسط الموديمات في الشهر الواحد، أهو نمو أم اضمحلال؟ **نمو**

1 النمو الأسّي

المثال 1 يوضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية تحتوي على نمو أسّي.
المثال 2 يوضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية تحتوي على مراوحة مركبة.

1 النمو الأسّي تكون معادلة عدد الموديمات بالصيغة $y = a(1 + r)^t$ هذه هي المعادلة العامة للنمو الأسّي.



مثال 1 من الحياة اليومية النمو الأسّي

المسابقة تبدأ جوائز مسابقة إحدى المحطات الإذاعية ببطاقة هدايا بقيمة 100 AED. في أحد الأيام، يتم الإعلان عن اسم، أمام الشخص 15 دقيقة ليتصل ولا تتأجل الجائزة ليوم التالي وتزيد بنسبة 2.5%.

a. اكتب معادلة لتمثيل مبلغ بطاقة الهدايا بالدرهم بعد t من الأيام بدون فائزين.
 $y = a(1 + r)^t$ معادلة النمو الأسّي
 $y = 100(1 + 0.025)^t$ $a = 100 = 2.5\%$
 $y = 100(1.025)^t$ **بسط**

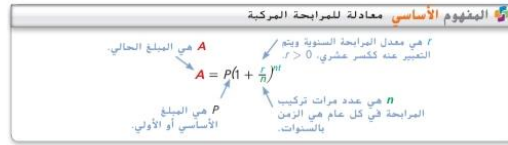
في المعادلة $y = 100(1.025)^t$ تمثل y مبلغ بطاقة الهدايا، و t هي عدد الأيام منذ بدء المسابقة.

b. كم ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا إذا لم يفز أحد بعد 10 أيام؟
 $y = 100(1.025)^t$ معادلة مبلغ بطاقة الهدايا
 $y = 100(1.025)^{10}$ $t = 10$
 ≈ 128.01 **استخدم حاسبة**
خلال 10 أيام، ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا 128.01 AED.

تكوين موجّه

1. **التعليم** أرتفعت تكاليف التعليم الجامعي بنسبة 5% كل عام منذ عام 2000، إذا كانت تكلفة التعليم في عام 2000 قد بلغت 10,850 AED فاكتمل معادلة لمبلغ تكلفة التعليم بعد t سنوات من عام 2000. توقع تكلفة التعليم في هذه الكلية في عام 2015.

المراوحة المركبة هي المراوحة المتحصلة أو المدفوعة على كل من الاستئثار الأولي والمراوحة المتحصلة سابقاً. إنها أحد تطبيقات النمو الأسّي.



مثال 2 من الحياة اليومية: المراوحة المركبة

المالية استثمر والدنا هدي 14,000 AED بنسبة 6% في السنة مركبة شهرياً. ما المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 10 أعوام؟

معادلة المراوحة المركبة

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

$$= 14,000 \left(1 + \frac{0.06}{12} \right)^{12(10)}$$

$$= 14,000 (1.005)^{120}$$

$$\approx 25,471.55$$

$P = 14,000$ $r = 6\%$ $n = 12$ $t = 10$
 بـسط.
 استخدم حاسبة.

سيكون هناك حوالي 25,471.55 AED في 10 سنوات.

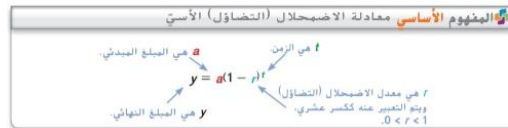
تقريب موجّه

2. **المالية** حدّد مبلغ أحد الاستثمارات إذا تم استثمار 300 AED بمعدل مراوحة مركبة شهرياً يساوي 3.5% شهرياً لمدة 22 عاماً.



2 الاضمحلال (التضاؤل) الأسّي

في الاضمحلال (التضاؤل) الأسّي، يتناقص المبلغ الأصلي بنسبة مئوية واحدة خلال مدة زمنية محددة، يمكن استخدام أحد أشكال معادلة النمو كمتعادلة عامة للاضمحلال الأسّي.



مثال 3 من الحياة اليومية: الاضمحلال (التضاؤل) الأسّي

السباحة عوامة طفل لحمام سباحة متفوخة تماماً تفقد 6.6% من الهواء بداخلها كل يوم. كانت العوامة تحتوي في الأصل على 74000 سنتيمتر مكعب من الهواء.

a. اكتب معادلة تمثل فقدان الهواء.

معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسّي

$$y = a(1 - r)^t$$

$$= 74000(1 - 0.066)^t$$

$$= 74000(0.934)^t$$

$a = 74000$ $r = 6.6\%$ 0.066
 بـسط.

حيث y هي الهواء في العوامة بالنسبة المئوية بعد t أيام. $y = 74000(0.934)^t$

117

نصيحة دراسية

النمو والاضمحلال (التضاؤل) a أو r تجمع مع 1. ستكون القيمة داخل القوسين أكبر من 1 في نمو النمو الأسّي في دوال الاضمحلال (التضاؤل) الأسّي ستقل هذه القيمة عن 1 بما أن r مطروحة من 1.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 عدد السكان في عام 2008 بلغ عدد السكان في مدينة فلات كريك 280,000 نسمة. وبلغ معدل النمو 0.85% في العام الواحد.

a. اكتب معادلة تعبر عن عدد سكان فلات كريك منذ عام 2008.

$$y = 280,000(1.0085)^t$$

b. طبقاً للمعادلة، كم سيصبح عدد سكان فلات كريك في عام 2018؟

2 الكلية عندما ولدت إيمان، وضع لها جدّها وجدها مبلغاً وقدره 1,000 AED في حساب توفير بمعدل ثابت مضاعف يبلغ 7% سنوياً. ستحصل إيمان على المبلغ عندما تصل إلى سن 18 عاماً لتساهم في تغطية مصاريف دراستها في الكلية. ما المبلغ الذي ستحصل عليه إيمان من هذا الاستثمار؟

2 الاضمحلال الأسّي

المثال 3 يوضح كيفية حل مسائل من الحياة اليومية التي تحتوي على اضمحلال أسّي.

انتبه!

مفاهيم خاطئة لدى الطلاب

ذكر الطلاب أنه في معادلات النمو والاضمحلال، سيكون القدر الموجود داخل الأقواس أكبر من 1 بالنسبة إلى النمو وأقل من 1 بالنسبة إلى الاضمحلال.

التركيز على محتوى الرياضيات

مراوحة مركبة على التفاضل من المراوحة البسيطة. يتم تطبيق المراوحة المركبة على المبلغ الأصلي وأي مراوحة مكتسبة مسبقاً. هناك أربع طرق لزيادة المبلغ الموجود في حساب المراوحة المركبة: أن يزيد المستثمر من المبلغ المبدئي، أو أن تزيد نسبة المراوحة السنوية، أو أن يزيد عدد القيم المركبة في العام الواحد، أو تزيد الفترة الزمنية التي يظل فيها المبلغ في الحساب.

ضع تقديرًا لكمية الهواء في العوامة بعد 7 أيام.

$$y = 74000(0.934)^t$$

معادلة فقدان الهواء

$$t = 7$$

استخدم حاسبة.

$$\approx 45880$$

سيبلغ مقدار الهواء في العوامة بعد 7 أيام 45880 سنتيمترًا مكعبًا تقريبًا.

تدوين موجّه

3. **تعداد السكان** ظل تعداد سكان مقاطعة كامبل في ولاية كنتاكي يتناقص بمعدل متوسط يبلغ 0.3% تقريبًا في السنة. في عام 2000، بلغ سكانها 88,647. اكتب معادلة تمثل تعداد السكان منذ عام 2000. إذا استمر الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2010.

التحقق من فهمك

- مثال 1** 1. **المرتّب** حصلت السيدة هداية على وظيفة كمعلمة براتب أولي يبلغ AED 125000. وفقًا لعقدّها، سوف تحصل على زيادة تبلغ 1.5% من مرتبها كل عام. كم سيبلغ مرتب السيدة هداية بعد 7 سنوات؟
- مثال 2** 2. **العمال** استثمر يوسف AED 400 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 5.5% مركبة شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار يوسف خلال 8 سنوات؟
- مثال 3** 3. **الالتحاق** في عام 2000، انضم 2200 طالب لـ مدرسة بولاريس الثانوية. كان الالتحاق ينخفض بنسبة 2% سنويًا.

a. اكتب معادلة لـ الالتحاق بـ مدرسة بولاريس الثانوية بعد t سنوات من عام 2000.

b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم عدد الطلاب الذين سيلتحقون في عام 2015؟

التدوين وحل المسائل

- مثال 1** 4. **العضويات** باعثة صالة الألعاب الرياضية 550 عضوية في عام 2001. ومنذ ذلك الوقت، ارتفع عدد العضويات التي تم بيعها بنسبة 3% سنويًا.
- a. اكتب معادلة لعدد العضويات التي تم بيعها في صالة الألعاب الرياضية بعد t من السنوات من عام 2001.
- b. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع عدد العضويات التي ستبيعها الصالة في عام 2020.
5. **الحواشيب** ارتفع عدد الأشخاص الذين يمتلكون حواسيب بنسبة 23.2% سنويًا منذ عام 1990. إذا كان نصف مليون شخص يمتلكون حاسوبًا في 1990، فتوقع عدد الأشخاص الذين سيملكون حاسوبًا في عام 2015.
6. **العملات** اشترى ماجد عملة معدنية بأدرة من تاجر مقابل AED 300. ارتفعت قيمة العملة بنسبة 5% كل عام. حدد قيمة العملة المعدنية بعد 5 سنوات.
- مثال 2** 7. **الاستثمارات** استثمر محمود AED 6600 بنسبة مرابحة تبلغ 4.5% مركبة شهريًا. حدد قيمة استثماره بعد 4 سنوات.
8. **المرابحة المركبة** استثمرت نسرين AED 1200 بمعدل مرابحة يبلغ 5.75% مركبة كل ثلاثة أشهر. حدد قيمة استثمارها بعد 7 سنوات. حوالي AED 1789.54
9. **الدقة** تدخر نجلاء المال لرحلة إلى جزر البهاما بتكلفة AED 1087.76 وضعت AED 550 في حساب ادخار يدفع مرابحة مركبة تبلغ 7.25% كل ثلاثة أشهر. هل سيكون لديها مال كاف في الحساب بعد 4 سنوات؟ اشرح.
- مثال 3** 10. **الاستثمارات** كان استثمار علي يبلغ AED 4500 يخسر قيمته بمعدل 2.5% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثماره خلال 5 سنوات؟

118 | الدرس 2-3 | النمو والاضمحلال (التضائل)

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	4-12, 16, 18-44	4-12 زوجي 16, 18-20, 25-44
OL أساسي	5, 11 فردي 13-16, 18, 44	4-12, 21-24 13-16, 18-20, 25-44
BL متقدم	13-41, (اختياري: 42-44)	

مثال إضافي

3. **أعمال خيرية** في أثناء الركود الاقتصادي، وجدت مؤسسة خيرية أن التبرعات التي كانت تحصل عليها قد انخفضت بنسبة 1.1% في العام الواحد. قبل الركود، بلغت التبرعات التي كانت تحصل عليها AED 390,000.

a. اكتب معادلة تعبر عن التبرعات التي حصلت عليها المؤسسة الخيرية منذ بداية الركود.

$$A = 390,000(0.989)^t$$

b. قدر مبلغ التبرعات بعد مرور 5 أعوام من بدء الركود. نحو

$$AED 369,017$$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-3 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

البحث على الإنترنت اجعل الطلاب يبحثون على الإنترنت عن العمر النصفى للعناصر المشعة المختلفة. اجعلهم يختاروا ثلاثة عناصر، وأطلب منهم أن يسحبوا عينة قدرها 500 جرام تظل لمدة 3 أعوام.

ملاحظات لحل التمرين

ورق مربعات بالنسبة للتمارين 25-27 و 42-44، سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يعبر الطلاب بالمهرون في الرياضيات عن الإجابات بدرجة من الدقة تتناسب مع سياق المسألة. في التمرين 9، وضح أن التقدير مناسب لإجابة السؤال. في التمرين 17، يمكن للطلاب أن يقرؤوا الإجابة من خلال التمثيل البياني على حاسبة التمثيل البياني. أو عن طريق التخمين والتحقق من تخمينهم على حاسبة علمية.

118 | الدرس 2-3 | النمو والاضمحلال (التضائل)

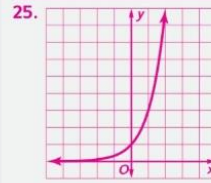
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب قم بعمل نسخ عدة من كل معادلة من المعادلات الخيس للنمو والاضمحلال. امنح كل طالب معادلة واحدة. عند مغادرة الطلاب لفرقة الصف، اطلب منهم أن يخبروك بها إذا كانت معادلاتهم عبارة عن نمو أم اضمحلال.

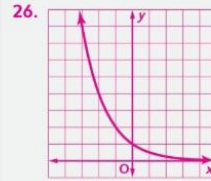
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للمفاهيم في الدروس 5-8 و 6-8.

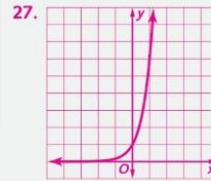
إجابات إضافية



1; D = {جميعها أعداد حقيقية};
R = {y | y > 0}



1; D = {جميعها أعداد حقيقية};
R = {y | y > 0}



1; D = {جميعها أعداد حقيقية};
R = {y | y > 0}

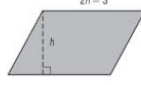
تدريب على الاختبار المعياري

23. اشترى عيسى سيارة مقابل AED 22,900. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 16% سنوياً. أي من المعادلات التالية يمثل قيمة سيارة عيسى بعد 5 سنوات؟

- A $A = 22,900(1.16)^5$
B $A = 22,900(0.16)^5$
C $A = 16(22,900)^5$
D $A = 22,900(0.84)^5$

24. إجابة شبكة تبلغ مساحة أحد الأسطح 4 أمتار في 6 أمتار. إذا كان عامل الطلاء يفرض AED 9.75 على المتر المربع شاملاً الضريبة، فكم ستبلغ تكلفة طلاء السطح بالدرهم؟

21. الهندسة تبلغ مساحة متوازي الأضلاع 35 سنتيمتراً مربعاً. أوجد الارتفاع h لمتوازي الأضلاع.



- A 3.5 سنتيمترات
B 4 سنتيمترات
C 5 سنتيمترات
D 7 سنتيمترات

22. أيهما أكبر من $64^{\frac{1}{2}}$ ؟
F $2^{\frac{1}{2}}$
G $64^{\frac{1}{6}}$
H $64^{\frac{1}{2}}$
J $64^{-\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

مثل كل دالة بيانياً. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.

25. $y = 3^x$
26. $y = (\frac{1}{2})^x$
27. $y = 6^x$

أوجد قيمة كل ناتج ضرب. عثر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة المعيارية.

28. $(4.2 \times 10^3)(3.1 \times 10^{10})$
29. $(6.02 \times 10^{23})(5 \times 10^{14})$
30. $(7 \times 10^5)^2$
31. $(1.1 \times 10^{12})^2$
32. $(9.1 \times 10^7)(0.4 \times 10^{12})$
33. $(3.14 \times 10^2)(6.1 \times 10^{-3})$

34. التخطيط لحدث لا تفرض إحدى الفاعات رسم إيجار طاليا يتم إيفاق AED 4000 على الأقل على الطعام. في حفلة التخرج تفرض الفاعة AED 28.95 على الشخص للطعام. كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يحضروا حفلة التخرج لتجنب دفع رسم إيجار الفاعة؟

حدد ما إذا كان التمثيلان البيانيان لكل زوجين من المعادلات متوازيين أو متعامدين أو ليسا أيًا منهما.

35. $y = -2x + 11$
 $y + 2x = 23$
36. $3y = 2x + 14$
 $-3x - 2y = 2$
37. $y = -5x$
 $y = 5x - 18$

عمر الخيل (x)	0	1	2	3	4	5
عمر الإنسان (y)	0	3	6	9	12	15

38. الأعمار يوضح الجدول الأعمار المكافئة للخيول والبشر. اكتب معادلة تربط العمر البشري بعمر الخيل وتجد عمر الخيل المكافئ لإنسان يبلغ عمره 16 عامًا.

أوجد السعر الإجمالي لكل عنصر.

39. البطنة AED 14.00
الضريبة: 5.5%
40. الصندوق AED 29.99 : AED 31.71
الضريبة: 5.75%
41. حقيبة الظهر AED 35.00
الضريبة: 7%

مراجعة المهارات

مثل كل مجموعة من الأزواج المرتبة بيانياً.

42. {3, 0}, {0, 1}, {-4, -6}
43. {0, -2}, {-1, -6}, {3, 4}
44. {2, 2}, {-2, -3}, {-3, -6}

120 | الفرس 2-3 | النمو والاضمحلال (التساؤل)

التدريس المتمايز

إذا كان يحتاج الطلاب إلى تحدٍ في هذا الدرس.

إذا اطلب من الطلاب أن يكتبوا مسائلهم الخاصة بالنمو أو الاضمحلال. مستخدمين بيانات من المطبوعات الدورية أو من الإنترنت. اجعلهم يشاركوا مسائلهم مع بقية الصف عندما يتمكنوا.

120 | الدرس 2-3 | النمو والاضمحلال (التساؤل)



مختبر الجبر تحويل التعابير الأسية

2-3

1 التركيز

الهدف استخدام خواص الأسس النسبية لتحويل التعابير من أجل الدوال الأسية إلى أشكال مكافئة لحل المسائل.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الطلاب في مجموعات ثنائية ذات قدرات متنوعة. ثم اجعل المجموعات تكمل النشاط والتارين من 1 إلى 3.

نصيحة للتدريس

وضّح للطلاب أن صيغة نسبة المراجعة السنوية مقربة إلى معدل الفائدة الشهري في صورة $12 \times \frac{1}{12}$ لأن هناك 12 شهرا في العام الواحد.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرين 4.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمرين 4 لتقييم فهم الطلاب لكيفية استخدام خواص الأسس في كتابة التعابير المكافئة للتمكن من المقارنة بين نسب المراجعة.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب أن يذكروا السبب وراء كون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ مكافئة تقريبا لـ $A = P(1 + r)^{\frac{1}{12}nt}$ من ناحية التمثيل البياني من خلال تثبيت القيم من أجل P و r و n . وحسب القيم المختارة، يجب أن يرى الطلاب أن التمثيلات البيانية للدالتين تتلاقى تقريبا لفترة زمنية كبيرة من مجالهما.

إجابات إضافية

3. يقارب 3.0% كل عام، وهذه النسبة أكبر من النسبة 2.5% في العام الواحد التي تقدمها الخطة B.

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسية إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط كتابة التعابير الأسية المكافئة

تحاول نبيلة أن تختار بين خطتي حساب ادخار. تقدم الخطة A نسبة مراهجة شهرية مركبة تبلغ 0.25%. بينما تقدم الخطة B مراهجة مركبة سنوياً تبلغ 2.5%. أي الخطتين أفضل؟ اشرح.

للمقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن بين النسبتين بالتكرار المركب نفسه. من طرق عمل هذا المقارنة بين نسبتي المراهجة الشهريتين التفرعيتين في الخطتين. ونسبياً أيضاً نسبة المراهجة الشهرية الفعلية. بينما نستطيع استخدام قانون المراهجة المركبة لإيجاد هذه النسبة. يمكنك أيضاً استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكتسبه نبيلة بعد t من السنوات من الخطة B. للتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار نبيلة هو 1 AED.

$$y = a(1 + r)^t \quad \text{معادلة النمو الأسّي}$$

$$A(t) = 1(1 + 0.025)^t \quad y = A(t), a = 1, r = 2.5\%$$

$$= 1.025^t \quad \text{بسط.}$$

اكتب الآن دالة تعادل A(t) تمثل تركيبتها في السنة، بقوة أسية تبلغ 12t بدلاً من 1 في السنة بقوة أسية تبلغ 12t.

$$A(t) = 1.025^{12t} \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$= 1.025^{(\frac{1}{12} \times 12)t} \quad 1 = \frac{1}{12} \times 12$$

$$= (1.025^{\frac{1}{12}})^{12t} \quad \text{رفع القوى}$$

$$\approx 1.0021^{12t} \quad (1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025} \approx 1.0021$$

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن النسبة الشهرية الفعلية في الخطة B تبلغ 0.0021 تقريباً أو حوالي 0.21% في الشهر. نقل هذه النسبة عن نسبة المراهجة الشهرية 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذا الخطة A هي الخطة الأفضل.

النموذج والتحليل

1. استخدم قانون المراهجة المركبة $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ لتحديد نسبة المراهجة الشهرية الفعلية للخطة B. كيف نقارن هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الأسلوب الوارد في النشاط بالأعلى؟
2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكتسبه نبيلة بعد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل A(t) لتمثيل المبلغ المكتسب بعد t من السنوات.
3. من التعبير الذي كتبت في التمرين 2، حدد نسبة المراهجة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في أن الخطة A هي الخطة الأفضل.
4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مراهجة مركبة كل ثلاثة أشهر تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لشرح أيهما الخطة الأفضل.

121

4. الدالة $A(t) = (1.025)^{12t}$ تعطينا القيمة التي أعطتنا الخطة B إياها بعد t عام.

$$A(t) = (1.025)^{12t} \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = (1.025)^{(\frac{1}{4} \cdot 4)t}$$

$$= [(1.025)^{\frac{1}{4}}]^4 t$$

$$1.0062^{4t} \approx (1.0062)^{4t} = \sqrt[4]{1.025} = (1.025)^{\frac{1}{4}} \text{ أو حوالي } 1.0062$$

تبلغ نسبة المراهجة الفعالة ربع السنوية نحو 0.0062 أو 0.62%. وهي أقل من نسبة المراهجة ربع السنوية البالغة 1.5% التي تقدمها الخطة A. ومن ثم، تكون الخطة A هي الخطة الأفضل.

المتتاليات الهندسية

2-4



- السابق: ربطت المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.
- الحالي: تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها.
- لماذا؟: ترسل رسالة إلكترونية تسلسلية إلى صديق ليبدأ إرسالها إلى خمسة أشخاص آخرين. بعد كل من هؤلاء الأشخاص الخمسة الرسالة الإلكترونية إلى خمسة أشخاص آخرين يشكل عدد الرسائل الإلكترونية الجديدة متتالية هندسية.

التعرف على المتتاليات الهندسية: ينشئ الشخص الأول 5 رسائل إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من هؤلاء الأشخاص رسالة إلكترونية إلى 5 أشخاص آخرين، يتم إنشاء 25 رسالة إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من الـ 25 شخصاً 5 رسائل إلكترونية، يتم إنشاء 125 رسالة إلكترونية. تسلسل الرسائل الإلكترونية الناشئة: 1, 5, 25, 125 ... يُعد مثالاً على **متتالية هندسية**.

في المتتالية الهندسية، الحد الأول ليس صفراً وكل حد بعد الأول يتحدد بضرب الحد السابق في قيمة ثابتة غير الصفر r تُسمى **النسبة المشتركة**. يمكن إيجاد النسبة المشتركة عبر قسمة أي حد على الحد السابق له.

المفردات الجديدة
متتالية هندسية
geometric sequence
نسبة مشتركة
common ratio

ممارسات في الرياضيات
حاول إيجاد البنية واستخدمها

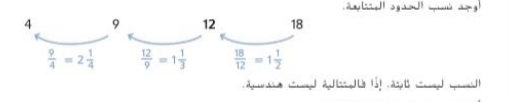
مثال 1 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح.

a. 256, 128, 64, 32, ...



b. 4, 9, 12, 18, ...



أوجد الفروق في الحدود المتتالية.



تكوين موجّه

- 1A. 1, 3, 9, 27, ...
- 1B. -20, -15, -10, -5, ...
- 1C. 2, 8, 14, 22, ...

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-4 إيجاد العلاقة بين المتتاليات الحسابية والدوال الخطية.

الدرس 2-4 تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها. إيجاد العلاقة بين المتتالية الهندسية والدوال الأسية.

بعد الدرس 2-4 كتابة صيغ تكرارية للمتتاليات الحسابية والهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا ما تم إرسال رسالة بريد إلكتروني واحدة في الجولة الأولى، فكم عدد الرسائل التي أرسلت في الجولة الثانية؟ والجولة الثالثة؟ والجولة الرابعة؟ **5; 25; 125**
- كيف يمكنك أن تحدد عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في كل جولة تالية من البريد الإلكتروني؟ **أضرب العدد السابق في 5.**
- ما المعادلة التي يمكن استخدامها لحساب عدد رسائل البريد الإلكتروني $y = 5^x$ لـ x بعد جولة؟

بمجرد معرفة النسبة المشتركة، يمكن توليد المزيد من الحدود في متتالية. يمكن إعادة كتابة القانون بالصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$ حيث n عدد الحدود و r هي النسبة المشتركة.

مثال 2 إيجاد حدود المتتاليات الهندسية

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

a. 1, -4, 16, -64, ...

الخطوة 1 أوجد النسبة المشتركة.

$$\frac{-4}{1} = -4, \quad \frac{16}{-4} = -4, \quad \frac{-64}{16} = -4$$

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$$\begin{array}{ccccc} -64 & 256 & -1024 & 4096 & \\ \times (-4) & \times (-4) & \times (-4) & & \end{array}$$

الحدود الثلاثة التالية هي 256 و -1024 و 4096.

b. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...

الخطوة 1 أوجد النسبة المشتركة.

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

نسبة r هي $\frac{1}{3}$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{81} & \\ \times \frac{1}{3} & \times \frac{1}{3} & \times \frac{1}{3} & & \end{array}$$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{27}$ و $\frac{1}{81}$.

2A. -3, 15, -75, 375, ...

2B. 24, 36, 54, 81, ...

2 المتتاليات والدول الهندسية سيكون من المربح التوصل إلى الحد n في متتالية هندسية إذا استخدمنا الطريقة المذكورة أعلاه. يوضح الجدول أدناه قاعدة لإيجاد الحد رقم n في متتالية هندسية.

الموضع، n	1	2	3	4	...	n
الحد، a_n	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$...	$a_1 r^{n-1}$

لاحظ أن النسبة المشتركة بين الحدود هي r . يوضح الجدول أنه للوصول إلى الحد n ، فإنك تضرب الحد الأول في النسبة المشتركة r مرفوعة إلى القوة الأسية $n - 1$. يمكن تعريف المتتالية الهندسية بدالة أسية تمثل فيها n المتغير المستقل، و a_n هي المتغير التابع و r هي الأساس. المجال هو أعداد الحدود.

123

1 التعرف على المتتاليات الهندسية

المثال 1 يوضح كيفية تحديد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. **المثال 2** يوضح كيفية حساب الحدود الإضافية لمتتالية هندسية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجبة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

- 1** حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. وضح السبب.
- a. 0, 8, 16, 24, 32, ...
حسابية، والفرق المشترك يبلغ 8.
- b. 64, 48, 36, 27, ...
هندسية، النسبة المشتركة تبلغ $\frac{3}{4}$.
- 2** أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.
- a. 1, -8, 64, -512, ...
4096; -32,768; 262,144
- b. 40, 20, 10, 5, ...
 $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$

2 المتتاليات والدوال الهندسية

المثال 3 يوضح كيفية حساب الحد النوني لمتتالية هندسية. **المثال 4** يوضح كيفية استخدام بيانات من الحياة اليومية لرسم تمثيل بياني لمتتالية هندسية.

تدريس الممارسات في الرياضيات

البنية يعين الطلاب البارعون في علم الرياضيات النظر جيدًا لتميز النمط أو البنية. اطلب من الطلاب أن يوضحوا السبب وراء كون الفرق المشترك سالبًا عند تغيير إشارات الحدود.

التركيز على محتوى الرياضيات

النسبة المشتركة عند إيجاد النسبة المشتركة، من الضروري أن تعد النسبة بالترتيب الصحيح. فمثلاً، في المثال 1، تم إعداد النسبة على أن تكون $\frac{256}{128}$ بدلاً من $\frac{128}{256}$. وتم إيجاد نسبة 2 غير صحيحة. لا بد وأن نلاحظ أنه عندما تكون المتتالية الهندسية متناقصة، فإن النسبة المشتركة لا بد وأن تكون بين 0 و 1.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الهدونة على مدونة صفك، اجعل الطلاب يكتبوا إدخال مدونة يصف العلاقة بين المتتاليات الهندسية والدوال الأسية.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

- 1A. هندسية، النسبة المشتركة هي 3.
1B. حسابية، الفرق المشترك هو 5.
1C. ليست أيًا منهما، لا توجد نسبة مشتركة أو فرق مشترك.

نصيحة دراسية
البناء إذا كانت حدود متتالية هندسية تتبدل من حدود موجبة إلى سالبة أو بالعكس، فالنسبة المشتركة سالبة.

الربط بتاريخ الرياضيات
توماس روبرت مالتوس (1766-1834) درس مالتوس أعداد السكان وكانت له آراء متشائمة في مستقبل سكان العالم. ذكر في أبحاثه أن "السكان يتزايدون بنسبة هندسية، بينما تزايد سبل العيشة بنسبة حسابية."

المفهوم الأساسي الحد n لمتتالية هندسية

يحدد الحد a_n الحد النوني n لمتتالية هندسية حيث الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r بالاعتماد التالي. حيث $r \neq 0$ و $a_1 \neq 0$ أي عدد صحيح موجب 0 .

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال 3 إيجاد الحد n لمتتالية هندسية

a. اكتب معادلة للحد n لمتتالية $-6, 12, -24, 48, \dots$.

الحد الأول في المتتالية هو -6 . إذا $a_1 = -6$ أوجد الآن النسبة المشتركة.

النسبة المشتركة هي -2

$$\frac{12}{-6} = -2 \quad \frac{-24}{12} = -2 \quad \frac{48}{-24} = -2$$

قانون الحد رقم n

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = -6(-2)^{n-1}$$

b. أوجد الحد التاسع في هذه المتتالية.

قانون الحد رقم n

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_9 = -6(-2)^{9-1}$$

$$= -6(-2)^8$$

$$= -6(256)$$

$$= -1536$$

لحد رقم n . $n = 9$.

بسط.

$(-2)^8 = 256$

تكوين موجّه

3. اكتب معادلة للحد n في المتتالية الهندسية $96, 48, 24, 12, \dots$ ثم أوجد الحد العاشر في المتتالية.

انتبه!
النسبة المشتركة السالبة
إذا كانت النسبة المشتركة سالبة، كما في المثال 3، فتأكد من إدراج النسبة المشتركة بين قوسين، -2 ، في $(-2)^{n-1}$.



الربط بالحياة اليومية
جررت أول مسابقة لاتحاد الرياضات الجامعية الوطني لكرة السلة للنساء في عام 1982. فازت جامعة تينيسي بأكثر الألقاب الوطنية بتعريفها 8 ألعاب حتى عام 2010.

المصدر: NCAA، كرة سلة

124 | الدرس 2-4 | المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية

أمثلة إضافية

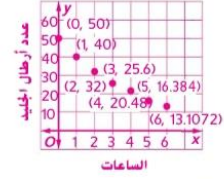
3. a. اكتب معادلة لحساب الحد النوني لمتتالية الهندسية

$$1, -2, 4, -8, \dots$$

$$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1}$$

b. أوجد الحد الثاني عشر في هذه المتتالية، -2048 .

4. فنون تمثال من الجليد وزن 50 كيلوجرامًا يذوب بمعدل 80% من وزنه تظل موجودة كل ساعة. ارسّم تمثيلًا بيانيًا يعبر عن عدد الأبطال التي ستبقى من التمثال كل ساعة.



إرشاد للمعلمين الجدد

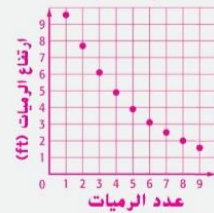
القوة الأسية r تأكد من قيام الطلاب برفع r إلى الأس $(n-1)$ في معادلاتهم من أجل الحد النوني للمتتالية الهندسية، بدلاً من n .

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج الطلاب البارعون في الرياضيات يهتمون بمعنى الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها. في التمرين 32، سل الطلاب عن السبب وراء عدم كون النسبة المشتركة 0.2، ما مدى علاقة النسبة المشتركة بمعنى المتتالية؟

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4. كرة التنس



التدريس المتمايز

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الطلاب إلى مجموعات ذات قدرات متنوعة في الرياضيات. اجعل المجموعات تناقش الفروق بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية. اقترح عليهم أن يتعاونوا معًا لعمل ملاحظات واضحة ومختصرة ودقيقة لها وللإمهام الأخرى التي تعلموها في هذا الدرس.

124 | الدرس 2-4 | المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-13 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

ورق المربعات للتمارين 13, 30, 37, 53-55. سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

إجابات إضافية

5. 160, 320, 640

6. 12.5, 6.25, 3.125

7. $-\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{256}$

8. 189, -567, 1701

13.



14. ليست أيًا منهما؛ لا توجد نسبة مشتركة أو فرق مشترك.

15. حسابية، الفرق المشترك هو 10.

16. هندسية، النسبة المشتركة هي 5.

17. هندسية، النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$.

18. حسابية، الفرق المشترك هو 2.

19. ليست أيًا منهما؛ لا توجد نسبة مشتركة أو فرق مشترك.

20. -250, 1250, -6250

21. $\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}$

22. 108, 324, 972

23. $\frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$

24. -2058; -14,406; -100,842

25. -2, $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{32}$

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح.

1. 200, 40, 8, ... 2. 2, 4, 16, ... 3. -6, -3, 0, 3, ... 4. 1, -1, 1, -1, ...

مثال 2

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

5. 10, 20, 40, 80, ... 6. 100, 50, 25, ... 7. 4, -1, $-\frac{1}{4}$, ... 8. -7, 21, -63, ...

مثال 3

اكتب صيغة للحد النوني n في كل متتالية هندسية وأوجد الحد المشار إليه.

9. الحد الخامس في ... -6, -24, -96, ...

10. الحد السابع في ... -1, 5, -25, ...

11. الحد العاشر في ... 72, 48, 32, ...

12. الحد التاسع في ... 112, 84, 63, ...

مثال 4

13. التجربة في تجربة في حصة لمادة الفيزياء. أسقطت ليس كرة من ارتفاع 16 مترًا. يصل كل ارتداد إلى 70% من ارتفاع الارتداد السابق. ارسم تخطيطًا بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح.

14. 4, 1, 2, ... 15. 10, 20, 30, 40, ... 16. 4, 20, 100, ...

17. 212, 106, 53, ... 18. -10, -8, -6, -4, ... 19. 5, -10, 20, 40, ...

مثال 2

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

20. 2, -10, 50, ... 21. 36, 12, 4, ... 22. 4, 12, 36, ...

23. 400, 100, 25, ... 24. -6, -42, -294, ... 25. 1024, -128, 16, ...

مثال 3

26. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 1. والنسبة المشتركة هي 9. ما الحد الثامن في المتتالية؟

27. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 2. والنسبة المشتركة هي 4. ما الحد الرابع عشر في المتتالية؟

28. ما الحد الخامس عشر في المتتالية الهندسية ... -9, 27, -81, ...

29. ما الحد العاشر في المتتالية الهندسية ... 6, -24, 96, ...

مثال 4

30. البندول تظهر حركة الأرجحة الأولى للبندول. في كل حركة أرجحة تالية، يبلغ طول النوس 60% من طول حركة الأرجحة السابقة. ارسم تخطيطًا بيانيًا يمثل طول القوس بعد كل حركة أرجحة.



31. أوجد الحد الثامن في متتالية هندسية بحيث تكون $81 = a_8$ و $3 = r$.

32. التبرير في موقع خرائط عبر الإنترنت، يلاحظ السيد عدنان أنه عندما يفر فوق نقطة على الخريطة، تقوم الخريطة بتكبير تلك النقطة. يزيد التكبير بنسبة 20% في كل مرة.

a. اكتب قانونًا للحد رقم n في المتتالية الهندسية يمثل التكبير في كل مستوى تكبير. (إرشاد: النسبة المشتركة ليست 0.2 فقط.)

b. ما الحد الرابع في هذه المتتالية؟ ما الذي يمثل؟

125

مصدر الصور والبيانات: © سميثسونيان مؤسسة تعليمية، مؤسسة جاكسون

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

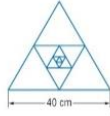
المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	14-31, 39-69	39-42, 47-69 زوجي 14-30
OL أساسي	32-37, 39-69	14-31, 43-46 فردي 32-37, 39-42, 47-69
BL متقدم	32-63, (اختياري: 64-69)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

التقد يمكن للطلاب البارعين في الرياضيات أن يفروا فرضيات الآخرين ويفرروا ما إذا كانت منطقية أم لا. في التمرين 39، انصح الطلاب بأن يبدووا بمقارنة الفرضيات سطراً تلو الآخر ليكتشفوا الفروق.

33 المصروف عرض والد ليلى عليها خيارين لتحصل على مصروفها على مدار 9 أسابيع خلال الصيف. يمكنها أن تحصل على AED 30 كل أسبوع أو AED 1 في الأسبوع الأول و AED 2 في الأسبوع الثاني و AED 4 في الأسبوع الثالث وهكذا.

- a. هل يثل الخيار الثاني متتالية هندسية؟ اشرح.
b. ما الخيار الذي ينبغي أن تختاره ليلى؟ اشرح.



34. مثلث سيرينسكي فُكر في المثلثات المتساوية الأضلاع المرسومة على اليسار. يبلغ محيط كل مثلث نصف محيط المثلث الأكبر التالي. فما محيط أصغر مثلث؟

35. إذا كان الحد الثاني في المتتالية الهندسية هو 3 والحد الثالث هو 1. فأوجد الحدين الأول والرابع في المتتالية.

36. إذا كان الحد الثالث في المتتالية الهندسية هو 12 والحد الرابع هو 24، فأوجد الحدين الأول والخامس في المتتالية.

37. الزلازل يُستخدم مقياس ريختر لقياس قوة الزلازل. يوضح الجدول الزيادة في مقدار القيم على مقياس ريختر.

a. انسج الجدول وأكمل. تذكر أن معدل التغير هو التغير في y مقسوماً على التغير في x .

b. ارسم الأزواج المرتبة (الزيادة في المقدار، رقم ريختر).

c. صف التمثيل البياني الذي صنعته من بيانات مقياس ريختر.

هل معدل التغير بين أي نقطتين واحد؟

d. اكتب معادلة أسية تمثل مقياس ريختر.

رقم ريختر (x)	الزيادة في المقدار (y)	معدل التغير (الميل)
1	1	—
2	10	9
3	100	
4	1000	
5	10,000	

مصادر مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. التحدي اكتب متتالية هندسية وحسابية. اشرح إجابتك.

39. التفكير النقدي يعمل إبراهيم وأحمد على التوصل إلى الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... -20، 10، -5، فهل أي منهما على صواب؟ وضح استنتاجك.

أحمد	إبراهيم
$r = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}$	$r = \frac{-20}{10} = -2$
$a_9 = -5(-\frac{1}{2})^{9-1} = -5(-\frac{1}{2})^8 = -5(\frac{1}{256}) = -\frac{5}{256}$	$a_9 = -5 \times (-2)^{9-1} = -5 \times (-2)^8 = -5 \times 256 = -1280$

40. التمييز اكتب متتالية أعداد تشكل شكلاً هندسياً لكنها ليست حسابية ولا هندسية. اشرح النقط.

41. الكتابة في الرياضيات ما وجه الشبه بين التمثيلات البيانية للمتتاليات الهندسية والدوال الأسية؟ هل هي مختلفة؟

42. الكتابة في الرياضيات اذكر بإيجاز كيفية التوصل إلى حد معين في متتالية هندسية.

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات امح كل طالب واحدة من المتتاليات الهندسية الخمس المختلفة. اطلب منهم أن يشرحوا كيفية حساب النسبة المشتركة لمتتالياتهم.

إجابات إضافية

47. 162, 486, 1458

48. -80, -160, -320

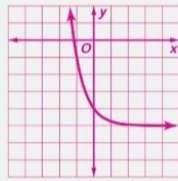
49. $\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

50. -0.1875, 0.09375, -0.046875

51. 0.1296, 0.07776, 0.046656

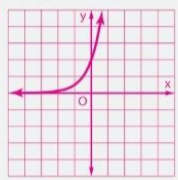
52. 20.25, 30.375, 45.5625

53.



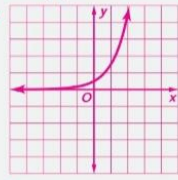
{كل الأعداد الحقيقية} $D = \{y | y > -5\}$

54.



{كل الأعداد الحقيقية} $D = \{y | y > -0\}$

55.



{كل الأعداد الحقيقية} $D = \{y | y > 0\}$

تدريب على الاختبار العملي

43. أوجد الحد الحادي عشر في المتتالية الهندسية 3, -6, 12, -24, ...

- A 6144 C 33
B 3072 D -6144

44. ما إجمالي مبلغ الاستئجار الظاهر في الجدول أدناه إذا كانت البرابحة مركبة شهرياً؟

الأولى	طول مدة الاستئجار
AED 500	4 سنوات
5.25%	نسبة الربابحة السنوية
F AED 613.56	H AED 616.56
G AED 616.00	J AED 718.75

مراجعة شاملة

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

47. 2, 6, 18, 54, ...

48. -5, -10, -20, -40, ...

49. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

50. -3, 15, -0.75, 0.375, ...

51. 1, 0.6, 0.36, 0.216, ...

52. 4, 6, 9, 13.5, ...

مثل كل دالة بيانياً. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال والمداى.

53. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$

54. $y = 2(4)^x$

55. $y = \frac{1}{2}(3)^x$

المبلغ	الشيك
AED 1300	750
AED 947	751

56. التخطيط المساحي: نمو شجرة صنوبر أرقي بمقدار 15 سنتيمتراً كل سنة في المتوسط. التخطيط المساحي بنمو نبات الشوكران بمقدار 10 سنتيمترات كل سنة في المتوسط. إذا كان طول الصنوبر الأزرق يبلغ 120 سنتيمتراً وطول الشوكران 180 سنتيمتراً، فاكتمل نظام معادلات لتنبئ بنموها. أوجد الحل وفسره في سياق الموقف.

57. المال: يفرض سيتي بنك حداً أدنى للرصيد يبلغ AED 1500 للحفاظ على مجانية خدمات إصدار الشيكات. إذا كان السيد إسمايل سيكتب شيكات بالبالغ المدرجة في الجدول، فما المبلغ الذي ينبغي أن يبدأ به لكي يحصل على إصدار الشيكات مجاناً؟

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم باستخدام الميل المعطى والمقطع من المحور الرأسي y المعطاة.

59. الميل: -3. المقطع من المحور الرأسي y : $-\frac{2}{3}$

58. الميل: 4. المقطع من المحور الرأسي y : 2

61. الميل: $-\frac{1}{2}$. المقطع من المحور الرأسي y : -9

60. الميل: $-\frac{1}{4}$. المقطع من المحور الرأسي y : -5

63. الميل: -6. المقطع من المحور الرأسي y : -7

62. الميل: $-\frac{2}{5}$. المقطع من المحور الرأسي y : $\frac{3}{4}$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكناً، فاكتمل هذه أبسط صورة.

64. $3u + 10u$

65. $5a - 2 + 6a$

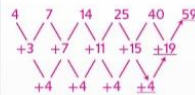
66. $6m^2 - 8m$

67. $4w^2 + w + 15w^2$

68. $13(5 + 4a)$

69. $(4t - 6)16$

التدريس المتمايز



التوسع غالباً ما لا يبدو أن لمتتاليات الأعداد، في العمليات الحسابية الأولى، نمطاً. في بعض الأحيان، ينتج عن الفروق بين الحدود أنفسها متتالية يمكن استخدامها من أجل تحديد الحد التالي في المتتالية الأصلية. اطلب من الطلاب أن يحددوا الحد السادس في المتتالية 4, 7, 14, 25, 40, اجعلهم يوضحوا كيفية حسابهم لهذا الحد.



مختبر الجبر متوسط معدل التغير في الدوال الأسية

أنت تعلم أن معدل التغير في الدالة الخطية ثابت بالنسبة لأي نقطتين على التمثيل البياني. معدل تغير دالة أسية ليس ثابتاً.

النشاط تقييم خطط الاستثمار

يملك علي AED 2000 لاستثمارها في إحدى خطتين. تقدم الخطوة 1 زيادة على مبلغه الأولي تبلغ 75 AED كل عام. بينما تعرض الخطوة 2 دفع مريحة مركبة شهرياً تبلغ 3.6%. تتحدد قيمة الدرهم لكل استثمار بعد t أعوام بـ $A_1 = 2000 + 75t$ و $A_2 = 2000(1.003)^{12t}$. على الترتيب. استخدم قيم الدالة ومتوسط معدل التغير والتمثيلات البيانية للمعادلات لتفسير الخطط والمقارنة بينها.

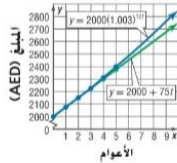
أنسخ الجدول أدناه واستكمله بإيجاد القيم المجهولة لكل من A_1 و A_2 .

t	0	1	2	3	4	5
A_1						
A_2						

الخطوة 2 أوجد متوسط معدل التغير لكل خطة من $t = 0$ إلى $t = 1$ ، و $t = 0$ إلى $t = 4$ ، و $t = 0$ إلى $t = 5$.
الخطة 1، $\frac{2075 - 2000}{1 - 0}$ أو 75 أو $\frac{2300 - 2225}{4 - 0}$ أو 75 أو $\frac{2375 - 2000}{5 - 0}$
الخطة 2، $\frac{2073.2 - 2000}{1 - 0}$ أو 73.2 أو $\frac{2309.27 - 2227.74}{4 - 0}$ أو حوالي 82 أو $\frac{2393.79 - 2000}{5 - 0}$ أو حوالي 79

الخطوة 3 ممل بيانياً الأرواح المربحة لكل دالة. قم بالتوصيل بين كل مجموعة نقاط بحيثى منتظم.

الخطوة 4 استخدم التمثيل البياني ومعدلات التغير للمقارنة بين الخطط. كلا التمثيلين البيانيين له معدل تغير يبلغ في العام الأول حوالي 75 AED في السنة. من العام 3 إلى 4، تواصل الخطوة 1 الزيادة بمعدل 75 AED في السنة. لكن الخطوة 2 تنمو بمعدل يزيد على 81 AED في السنة. متوسط معدل التغير على مدار أول خمسة أعوام في الخطوة 1 يبلغ 75 AED في العام وللخطوة 2 يزيد على 78 AED في العام. يشير هذا إلى أنه مع زيادة عدد الأعوام ينمو الاستثمار في الخطوة 2 بمعدل أسرع بشكل متزايد. بدعم هذا الجوة المتزايدة بين تمثيليهما البيانيين.



Copyright © 2013 Pearson Education, Inc. All rights reserved. This material is intended solely for the personal use of the individual user and is not to be disseminated broadly.

تمارين

تنخفض قيمة أحد أجهزة الشركة مع الوقت بسبب الاستهلاك. تمثل الدالة $y = 16,000(0.985)^{12t}$ القيمة بعد t أعوام.

- ما متوسط معدل التغير على مدى أول خمس أعوام؟
- ما متوسط معدل التغير في القيمة من العام 5 إلى العام 10؟
- ما الاستنتاج الخاص بالقيمة الذي يمكن أن نتوصل إليه بناء على متوسطات معدلات التغير هذه؟
- الانتظام** أنسخ الجدول واستكمله لـ $y = x^4$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

قارن متوسط معدل التغير لـ $x = -3$ إلى $x = 0$ ولـ $x = 0$ إلى $x = 3$ وقسّر ذلك.

1 التركيز

الهدف حساب وتفسير متوسط معدل التغير للدالة الأسية.

المواد الخاصة لكل طالب

- ورق مربعات

نصيحة للتدريس

اجعل الطلاب يستخدموا القيم المتزايدة لـ 25 على المحور الرأسى. فهذا سيمكنهم شرحاً أوضح للفرق بين التمثيلين البيانيين.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب على مجموعات متنوعة العدرات من اثنين أو ثلاثة طلاب. واطلب من المجموعات إكمال الأنشطة والتمرين 1.

- ناقش مدى تأثير طول الفترة الزمنية للاستثمار على المقارنة بين الخطط.

- اجعل الطلاب يوضحوا شكل التمثيل البياني لكل خطة ويناقشون مدى ارتباط الشكل بقيمة متوسط معدل التغير.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 4.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 3 لتقييم قدرة الطلاب على حساب وتفسير متوسط معدل التغير.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الانتظام الطلاب المتفوقون في الرياضيات يلاحظون ما إذا كانت العمليات الحسابية متكررة أم لا. وبحثون عن الأساليب والطرق المختصرة العامة. في التمرين 4، انصح الطلاب بأن يبحثوا عن الانتظام في عملياتهم الحسابية ويستخدموه.

من العملي إلى النظري

بعد أن يكمل الطلاب التمرين 4، اجعلهم يناقشوا سمات التمثيل البياني التي يمكنهم تحديدها من خلال فحص متوسط معدل التغير لدالة ما.

1 التركيز

التخطيط الواسي

قبل الدرس 2-5 كتابة صيغ مباشرة للتعبير عن المتتاليات الحسابية والهندسية.

الدرس 2-5 استخدام صيغة من أجل وضع الحدود في متتالية. كتابة الصيغ التكرارية من أجل المتتاليات الحسابية والهندسية.

بعد الدرس 2-5 تحديد الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المعطاة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تتغير التكلفة الإجمالية لخدمة النقل السريعة عندما تتم إضافة عميل؟ الإجابة النموذجية: ستتزايد التكلفة الإجمالية بمعدل 10 AED.

- هل هذه المتتالية حسابية، هندسية، أم ليست أيًا منهما؟ **حسابية**

- كم ستكون التكلفة الخاصة بتسعة عملاء؟ **105 AED**

الصيغ التكرارية

2-5



عدد العملاء	التكلفة (AED)
1	25
2	35
3	45
4	55
5	65
6	75

استخدام صيغ تكرارية • يتم نقل العملاء بحافلات مكتوبة لإدراج الحدود في متتالية.

1 استخدام صيغ تكرارية لإدراج الحدود في متتالية.

لقد كتبت صيغًا مباشرة للتعبير عن المتتاليات الحسابية والهندسية.

استخدام الصيغ التكرارية (الضمنية) تسمح لك الصيغة الصريحة بإيجاد أي حد a_n في متتالية باستخدام صيغة مكتوبة بدلالة n . على سبيل المثال، يمكن استخدام $a_n = 2n$ لإيجاد الحد رقم خمسة في المتتالية $a_5 = 2(5) = 10$.

تسمح لك **الصيغة التكرارية أو الضمنية** بإيجاد الحد رقم n في متتالية من خلال إجراء عمليات على واحد أو أكثر من الحدود السابقة. بما أن كل حد في المتتالية أعلاه أكثر بمقدار 2 عن الحد السابق له، يمكننا جمع 2 على الحد الرابع لإيجاد أن الحد الخامس يساوي $2 + 8 = 10$. ثم يمكننا كتابة صيغة تكرارية لـ a_n .

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 \text{ أو } 2 + 2 = 4 \\ a_3 &= a_2 + 2 \text{ أو } 4 + 2 = 6 \\ a_4 &= a_3 + 2 \text{ أو } 6 + 2 = 8 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

الصيغة التكرارية للمتتالية أعلاه هي $a_n = a_{n-1} + 2$ ، حيث $a_1 = 2$ ، لـ $n \geq 2$. لاحظ أن الحد الأول a_1 معطى وكذلك مجال n .

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية

أوجد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 7$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$ ، إذا كانت $n \geq 2$.

استخدم $a_1 = 7$ والصيغة التكرارية لإيجاد الحدود الأربعة التالية.

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 - 12 = 3(7) - 12 = 9 \\ a_3 &= 3a_2 - 12 = 3(9) - 12 = 15 \\ a_4 &= 3a_3 - 12 = 3(15) - 12 = 33 \\ a_5 &= 3a_4 - 12 = 3(33) - 12 = 87 \end{aligned}$$

أول خمسة حدود هي 7 و 9 و 15 و 33 و 87.

تقريب موجّه

1. أوجد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = -2$ و $a_n = (-3)a_{n-1} + 4$ ، إذا كانت $n \geq 2$.

المفردات الجديدة

صيغة تكرارية
recursive formula

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 استخدام الصيغ التكرارية

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد الحدود الخمسة الأولى لمتتالية باستخدام صيغة تكرارية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد قيمة الحدود الخمسة لمتتالية التي يكون فيها $a_1 = -8$ و $a_n = -2a_{n-1} + 5$ إذا كان $n \geq 2$
 $-8, 21, -37, 79, -153$

2 كتابة الصيغ التكرارية

المثال 2 يوضح كيفية كتابة صيغة تكرارية من أجل متتالية. **المثال 3** يوضح كيفية كتابة صيغة تكرارية وصريحة من أجل متتالية. **المثال 4** يوضح كيفية التحويل بين الصيغ التكرارية والصريحة.

مثال إضافي

2 اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية.
a. $23, 29, 35, 41, \dots$
 $a_1 = 23, a_n = a_{n-1} + 6, n \geq 2$
b. $7, -21, 63, -189, \dots$
 $a_1 = 7, a_n = -3a_{n-1}, n \geq 2$

2 كتابة الصيغ التكرارية

المفهوم الأساسي كتابة الصيغ التكرارية

- الخطوة 1** حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية بإيجاد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.
الخطوة 2 اكتب صيغة تكرارية.
المتتاليات الحسابية
 $a_n = a_{n-1} + d$ حيث d هي الفرق المشترك
المتتاليات الهندسية
 $a_n = r \times a_{n-1}$ حيث r هي النسبة المشتركة
الخطوة 3 اذكر الحد الأول والمجال في n .

نصيحة دراسية

تعريف n للحد n في متتالية يجب أن تكون قيمة n عدداً صحيحاً موجباً على الرغم من أنه يجب ذكر مجال n سنترضئ بدءاً من هذه النقطة أن n عدد صحيح.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية

اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية مما يلي.

a. $17, 13, 9, 5, \dots$

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$$13 - 17 = -4 \quad 9 - 13 = -4 \quad 5 - 9 = -4$$

هناك فرق مشترك يبلغ -4 . المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية}$$

$$a_n = a_{n-1} + (-4) \quad d = -4$$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 17 و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 17, a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2$

b. $6, 24, 96, 384, \dots$

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$$24 - 6 = 18 \quad 96 - 24 = 72 \quad 384 - 96 = 288$$

لا يوجد فرق مشترك. ابحث عن نسبة مشتركة بخصية كل حد على الحد السابق له.

$$\frac{24}{6} = 4 \quad \frac{96}{24} = 4 \quad \frac{384}{96} = 4$$

هناك نسبة مشتركة تبلغ 4 . المتتالية هندسية.

الخطوة 2 استخدم صيغة المتتالية الهندسية.

$$a_n = r \times a_{n-1} \quad \text{الصيغة التكرارية للمتتالية الهندسية}$$

$$a_n = 4a_{n-1} \quad r = 4$$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 6 و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 6, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

تمرين موجه

2A. $4, 10, 25, 62.5, \dots$

2B. $9, 36, 63, 90, \dots$

إرشاد للمعلمين الجدد

الترميز: أحياناً ما يتم تحديد الصيغ التكرارية من أجل $a_n + 1$ وكتابتها في صورة a_n . بالنسبة إلى الجزء **a** الخاص بالمثال 2، يمكن كتابة الصيغة التكرارية في صورة $a_1 = 17, a_n + 1 = a_n - 4, n \geq 1$

أمثلة إضافية

3 السيارات يتل سعر سيارة ما عند نهاية كل عام.

السعر (AED)	العام
12,000	1
7200	2
4320	3
2592	4

a. اكتب صيغة تكرارية من أجل المتتالية. $a_1 = 12,000$, $a_n = 0.6a_{n-1}$

b. اكتب صيغة صريحة من أجل المتتالية. $a_n = 12,000(0.6)^{n-1}$

4. اكتب صيغة تكرارية من أجل المتتالية. $a_1 = -2$, $a_n = 2n - 4$, $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$.
b. اكتب صيغة صريحة من أجل المتتالية. $a_1 = 84$, $a_n = 1.5a_{n-1}$, $a_n = 84(1.5)^{n-1}$, $n \geq 2$

إرشاد للمعلمين الجدد

الحدود الحد الأول لمتتالية ما عادة ما يشار إليه في صورة a_0 .

يمكن تمثيل المتتالية بكل من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

مثال 3 كتابة صيغتين تكرارية وصريحة

التكثف ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن N هي عدد العملاء. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

الخطوات 1 و 2 اشرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$$35 - 25 = 10 \quad 45 - 35 = 10 \quad 55 - 45 = 10$$

هناك فرق مشترك يبلغ 10. المتتالية حسابية.

الخطوة 3 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية}$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \quad d = 10$$

الخطوة 4 الحد الأول a_1 هو 25، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 25$, $a_n = a_{n-1} + 10$, $n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

الخطوة 1 الفرق المشترك هو 10.

الخطوة 2 استخدم صيغة الحد رقم n لمتتالية حسابية.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{صيغة لحد رقم } n$$

$$= 25 + (n-1)10 \quad a_1 = 25 \text{ و } d = 10$$

$$= 25 + 10n - 10 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= 10n + 15 \quad \text{بسط}$$

الصيغة الصريحة للمتتالية هي $a_n = 10n + 15$.

تفريغ موجّه

3 المذكرات يحقّ المال الذي يملكه بدر في حسابه الإخباري ربما كل عام. لا يقوم بأي سحب أو إيداعات إضافية. بلغ رصيد الحساب في بداية كل عام 10,000 AED و 10,300 AED و 10,609 AED و 10,927.27 AED وهكذا. اكتب صيغة تكرارية وصيغة صريحة للمتتالية.

إذا كانت عدة حدود متتالية مطلوبة، فتكون الصيغة التكرارية مفيدة هنا إذا كان الحد رقم n في متتالية هو فقط المطلوب. فتكون الصيغة الصريحة مفيدة. ولهذا من المفيد أحياناً التحول بين الصيغتين.

مثال 4 التمثيل بين الصيغتين التكرارية والصريحة

a. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 6n + 3$.

$a_n = 6n + 3$ صيغة صريحة لمتتالية حسابية حيث $a_1 = 6(1) + 3 = 9$ ولهذا فالصيغة التكرارية لـ a_n هي $a_1 = 9$, $a_n = a_{n-1} + 6$, $n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة لـ $a_n = 0.8a_{n-1}$, $n \geq 2$.
 $a_1 = 120$, $a_n = 0.8a_{n-1}$, $n \geq 2$ صيغة تكرارية لمتتالية هندسية حيث $a_1 = 120$ و $r = 0.8$. ولهذا، فالصيغة الصريحة لـ a_n هي $a_n = 120(0.8)^{n-1}$.

تفريغ موجّه

4a. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 4(3)^{n-1}$.

3a. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = -16$, $a_n = a_{n-1} - 7$, $n \geq 2$.



مهمة من الحياة اليومية

التقل من التوقع أن يتوقع عدد الوظائف في مجال النقل بما يقرب من 1.1 مليون وظيفة بين عامي 2004 و 2014. تحدد مجالات معينة متطلبات تعليمية، وتشمل ديولوا من مدرسة عليا وشكلاً من أشكال التدريب الشخص.

المصدر: وزارة العمل في الولايات المتحدة

نصيحة دراسية المتتالية الهندسية تدّر أن صيغة الحد n لمتتالية هندسية هي $a_n = a_1 r^{n-1}$.

التدريس المتميز

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الصف إلى مجموعات مكونة من طالبين أو ثلاثة طلاب. اجعل كل طالب يكتب متتالية على بطاقة ملاحظات وصيغة تكرارية للمتتالية على بطاقة ملاحظات أخرى. كرر العملية على مدار 10 متتاليات. ثم اجعل الطلاب يضعوا البطاقات مغلوقة لأسفل. على كل طالب أن يأخذ دوره ويقلب بطاقتين محاولاً البحث عن تطابق بين متتالية وصيغتها التكرارية.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-9 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

تهيئ الرياضيات الطلاب الماهرون في الرياضيات يستخدمون أدوات مثل الرسوم التخطيطية لتحديد العلاقات بين الكميات المهمة في أحد المواقف العملية. في التمرين 22، أخبر الطلاب بأن بإمكانهم رسم الفناء ليساعدهم على رؤية النمط.

الفرضيات يمكن للطلاب البارعين في الرياضيات أن يتعرفوا على الأمثلة المماثلة ويستخدموها. في التمرين 33، أخبر الطلاب بأن بإمكانهم البدء بمتتالية يعلمون أنها صيغة تكرارية ويروا إذا كان بإمكانهم كتابة صيغة تكرارية تناسب المتتالية ليروا ما إذا كان بإمكانهم العثور على مثال مغاير للمباراة.

أنفبه!

تحليل الخطأ في التمرين 31، يجب أن يعرف الطلاب أن المتتالية هندسية ولها نسبة مشتركة تبلغ 1-، وبناءً عليه، يمكن التعبير عن المتتالية في صورة صيغة صريحة وفي صورة صيغة تكرارية كذلك.

إجابة إضافية

31. كلاهما. الإجابة النموذجية، يمكن كتابة المتتالية في صورة الصيغة التكرارية $a_1 = 2, a_n = (-1)^{n-1} a_{n-1}$ ، ويمكن أن تكتب المتتالية كذلك في صورة صيغة صريحة $a_n = 2(-1)^{n-1}$.

التحقق من فهمك

مثال 1

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

1. $a_1 = 16, a_n = a_{n-1} - 3, n \geq 2$ 2. $a_1 = -5, a_n = 4a_{n-1} + 10, n \geq 2$

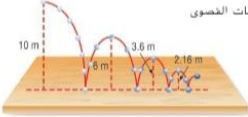
مثال 2

اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية.

3. 1, 6, 11, 16, ... 4. 4, 12, 36, 108, ...

مثال 3

5. الكرة سقطت مرة من ارتفاع 10 أمتار. موضح بالصورة الارتفاعات العنقوي التي تصل إليها الكرة في أول ثلاثة ارتدادات.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.
b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4

لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.

6. $a_1 = 4, a_n = a_{n-1} + 16, n \geq 2$ 7. $a_n = 5n + 8$
8. $a_n = 15(2)^{n-1}$ 9. $a_1 = 22, a_n = 4a_{n-1} - p, n \geq 2$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

10. $a_1 = 23, a_n = a_{n-1} + 7, n \geq 2$ 11. $a_1 = 48, a_n = -0.5a_{n-1} + 8, n \geq 2$
12. $a_1 = 8, a_n = 2.5a_{n-1} - p, n \geq 2$ 13. $a_1 = 12, a_n = 3a_{n-1} - 21, n \geq 2$
14. $a_1 = 13, a_n = -2a_{n-1} - 3, n \geq 2$ 15. $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2}, n \geq 2$

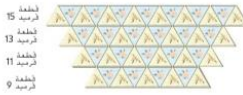
مثال 2

اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية.

16. 12, -1, -14, -27, ... 17. 27, 41, 55, 69, ...
18. 2, 11, 20, 29, ... 19. 100, 80, 64, 512, ...
20. 40, -60, 90, -135, ... 21. 81, 27, 9, 3, ...

مثال 3

22. **وضع النماذج** بني مهندس تصميم معماري فناء من الفرييد. يشمل جزء من الفناء نمطا مكونا من مثلثات. موضح بالصورة أول أربعة صفوف من النمط.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.
b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4

لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.

23. $a_n = 3(4)^{n-1}$ 24. $a_1 = -2, a_n = a_{n-1} - 12, n \geq 2$
25. $a_1 = 38, a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - p, n \geq 2$ 26. $a_n = -7n + 52$

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	10-26, 31, 33-59	11_25 فردي, 36_39 زوجي
OL أساسي	11-25 فردي, 27-31, 33-59	27-31, 33-35, 40-59
BL متقدم	27-53, (اختياري)	

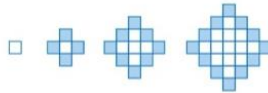
التمثيلات المتعددة

في التمرين 30، استخدم الطلاب المتعلق والتحليل وعلم الجبر في استكشاف متتالية فيبوناتشي وحساب الحدود كما تطلب الأمر.

27. **الرسائل النصية** تلقت أماني رسالة نصية متسلسلة أعادت إرسالها إلى خمس من صديقاتها. أعادت كل واحدة من صديقاتها إرسال الرسالة النصية إلى خمس صديقات أخريات، وهكذا.

- أوجد أول خمسة حدود في هذا التسلسل مثل عدد الأشخاص الذين يتلقون الرسالة النصية في الجولة n .
- اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.
- إذا كانت أماني مثل a_1 ، فأوجد a_8 .

28. **الهندسة** فكر في البسط أدناه. يزداد عدد المربعات الزرقاء وفقاً لبسط معين.



- اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي مثل عدد المربعات الزرقاء في كل شكل.
- إذا كان المربع الأول يمثل a_1 ، فأوجد عدد المربعات الزرقاء في a_8 .

29. **الأشجار** يتناطح شو نوع معين من الأشجار مع تقدم الشجرة في العمر. تظهر ارتفاعات الشجرة على مدار الأربع سنوات الماضية.



- اكتب صيغة تكرارية لارتفاع الشجرة.
 - إذا استمر البسط، فما الطول الذي ستصل إليه الشجرة بعد عامين آخرين؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.
30. **التمثيلات المتعددة** متتالية فيبوناتشي ليست حسابية أو هندسية ويمكن تعريفها بأنها صيغة تكرارية. الحدود الأولى هي $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$
- منطقتياً حدد العلاقة بين حدود المتتالية. ما الحدود الخمسة التالية في المتتالية؟
 - جبرياً اكتب صيغة للحد رقم n إذا كانت $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ و $n \geq 3$.
 - جبرياً أوجد الحد رقم 15.
 - تحليلياً اشرح السبب في أن متتالية فيبوناتشي ليست متتالية حسابية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

- تحليل الخطأ** يعمل بلال وجاسم على حل مسألة رياضية تتضمن المتتالية $2, -2, 2, -2, \dots$. يعتقد بلال أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة تكرارية. ويرى جاسم أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة صريحة. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.
- التحدي** أوجد a_4 للمتتالية حيث $a_4 = 1104$ و $a_n = 4a_{n-1} + 16$.
- الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. علل استنتاجك.
توجد صيغة تكرارية واحدة فقط لكل متتالية.
- التحدي** أوجد صيغة تكرارية لـ $4, 9, 19, 39, 79, \dots$.
- الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق بين الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

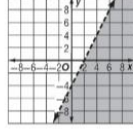
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب اجعل الطلاب ينشئوا متتالية عن طريق كتابة الحدود الخمسة الأولى. ثم اجعلهم يكتبوا صيغة صريحة وصيغة تكرارية للمتتالية.

تدريب على الاختبار العملي

38. أوجد متباينة في التمثيل البياني المعروض.



- A $y > 2x - 4$ C $y < 2x - 4$
B $y \geq 2x - 4$ D $y \leq 2x - 4$

39. اكتب معادلة للمستقيم الذي يمر بالنقطتين (4, 58) و (-2, -20).

- F $y = 13x + 6$ H $y = 19x + 18$
G $y = 19x - 18$ J $y = 13x - 6$

36. أوجد صيغة تكرارية للمتتالية ... 12, 24, 36, 48.

- A $a_1 = 12, a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2$
B $a_1 = 12, a_n = 4a_{n-1} - 24, n \geq 2$
C $a_1 = 12, a_n = a_{n-1} + 12, n \geq 2$
D $a_1 = 12, a_n = 12a_{n-1} + 12, n \geq 2$

37. الهندسة تبلغ مساحة أحد المستطيلات $36m^4n^6$ متر مربع. يبلغ طول المستطيل $6m^3n^3$ متر. فما عرض المستطيل؟

- F $216m^7n^9 m$
G $6mn^3 m$
H $42m^7n^3 m$
J $30mn^3 m$

مراجعة شاملة

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

40. 675, 225, 75, ... 41. 16, -24, 36, ... 42. 6, 18, 54, ...
43. 512, -256, 128, ... 44. 125, 25, 5, ... 45. 12, 60, 300, ...

46. الاستثمار استثمر أحمد 2000 AED بنسبة مراجعة مركبة تبلغ 5.75% شهرياً. ما المبلغ الذي سيكون مع أحمد بعد 5 سنوات؟

47. الجولات السياحية تشارك أسرة راشد وأسرّة صالح معاً في رحلة لزيارة مصنع حلويات. موضح الجدول أدناه عدد الأشخاص في كل أسرة والتكلفة الإجمالية. أوجد أسعار دخول الشخص البالغ والأطفال.

الأسرة	عدد البالغين	عدد الأطفال	التكلفة الإجمالية
راشد	2	3	AED 58
صالح	2	1	AED 38

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

48. $y + 6 = -3(x + 2)$ 49. $y - 12 = 4(x - 7)$ 50. $y + 9 = 5(x - 3)$
51. $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 15)$ 52. $y + 10 = \frac{2}{5}(x - 6)$ 53. $y - 4 = -\frac{2}{7}(x + 1)$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب هذه أبسط صورة.

54. $8x + 3y^2 + 7x - 2y$ 55. $4(x - 16) + 6x$ 56. $4n - 3m + 9m - n$
57. $6r^2 + 7r$ 58. $-2(4g - 5h) - 6g$ 59. $9x^2 - 7x + 16y^2$

التدريس المتمايز

التوسع بالنسبة إلى التمرين 30. كتب الطلاب صيغة تكرارية من أجل متتالية فيبوناتشي، وهي لا تعد حسابية ولا هندسية. اجعل الطلاب يكتبوا صيغة تكرارية من أجل متتالية أخرى لا تكون حسابية ولا هندسية.



مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-6

مختبر

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام حاسبة الجدول. وللقيام بذلك، سوف نكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة رسم بياني لحل المعادلات الأسية من خلال رسم مخطط بياني أو من خلال استخدام حاسبة الجدول.

المواد

- حاسبة رسم بياني أخرى

نصيحة تدريسية

في الخطوة 1 من النشاط 1 ذكر الطلاب أن يضعوا الأس بين قوسين.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

ضع الطلاب في مجموعات من اثنين أو ثلاثة، مازجاً القدرات. ثم اطلب من المجموعات الانتهاء من الأنشطة 1 و2 والتارين 1 و9.

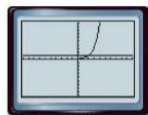
النشاط 1

- قبل البدء في مناقشة النشاط 1، استخدم معادلة بسيطة مثل $2x = 6$ لتذكير الطلاب بكيفية حل المعادلات عن طريق التمثيل البياني. ارس مخطط بياني للمعادلات $y = 2x$ و $y = 6$ ومن ثم حدد نقطة تقاطع الرسمين البيانيين.
- اسأل الطلاب لماذا من الضروري في الخطوة 1 أن تدخل المعادلة باستخدام قوسين حول الأس.
- اطلب من الطلاب استبدال حل النشاط 1 في المعادلة الأصلية للتأكد من صحته.

النشاط 1

$$\text{حل } 3^x - 4 = \frac{1}{9}$$

مثل كل طرف من المعادلة بيانياً في صورة دالة منفصلة. أرحل $3^x - 4$ باعتبارها Y1. تأكد من تضمين قوسين حول الأس. أرحل $\frac{1}{9}$ باعتبارها Y2. ثم مثل المعادلتين بيانياً.



[-10, 10] scl: 1 by [-1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية intersect.

يمكنك استخدام خاصية **intersect** (تقاطع) من قائمة **CALC** (احسب) لتقريب الزوج المركب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية. تبيّن شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي تتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.



[-10, 10] scl: 1 by [-1, 1] scl: 0.1

الخطوة 3 استخدم خاصية TABLE.

يمكنك أيضاً استخدام خاصية **TABLE** (الجدول) لتحديد موقع النقطة التي تتقاطع عندها المنحنيان. يظهر الجدول قيم x وقيم y المتساوية لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$ تكون لكتنا الدالتين قيمة y تبلغ 0.1 أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^x - 4 = \frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^2 - 4 = \frac{1}{9}$	عوّض بالعدد 2 عن x.
$3^2 - 4 = \frac{1}{9}$	بسط.
$1 = \frac{1}{9}$ ✓	تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسية.

(يتبع في الصفحة التالية)

■ في النشاط 2، تأكد من فهم الطلاب سبب الحاجة إلى إعادة كتابة المتباينة باعتبارها نظام من المتباينات.

تدريب اطلب من الطلاب الانتهاء من التمارين 2-9.

3 التقويم

تقویم تکوینی

استخدم التمارين 4 و 9 لتقويم ما إذا كان يمكن للطلاب فهم كيفية استخدام حاسبة رسم بياني لحل المعادلات والمتباينات الأسية.

من المادي إلى المعنوي

اطلب من الطلاب شرح كيفية يمكن أن تتغير مجموعة حلول النشاط 2 في حال كانت المتباينة $2x - 2 \leq 0.5x - 3$.

النشاط 2 وصف

حلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$



أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن علامة أقل من أو يساوي، فيجب أن نظل أسفل المنحنى.

ENTER أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح

لاختبار أيقونة "التحليل أسفل".

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5x - 3$. نظل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة أكبر من أو يساوي.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y \leftarrow \leftarrow ENTER ENTER ENTER \rightarrow \rightarrow 2 \wedge (
 X,T,0,n \leftarrow 2) ENTER \leftarrow \leftarrow ENTER ENTER \rightarrow
 \rightarrow 5 \wedge (X,T,0,n \leftarrow 3)



الخطوة 2 مثل النظام بيانيًا.

GRAPH خطوات العملية على الحاسبة:

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect** (تقاطع)، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية TABLE.

تحقق باستخدام خاصية TABLE (الجدول) وفي أعداد الجدول لإظهار قيم x . زيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: **2nd** **TBLSET** **0** **ENTER** **.5** **ENTER** **2nd** **[TABLE]**

لاحظ أنه بالنسبة لـ x التي تكون أكبر من $x = 2.5$ ، فإن $y_1 > y_2$. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

 $[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

10. نظرًا لأن النظام يتكون من التعابير الموجودة على كلا طرفي المعادلة الأصلية أو المتبينة، فإن أي قيم تكون حلولاً للنظام سوف تحقق المعادلة الأصلية أو المتبينة.

تمارين

حلّ كل معادلة أو متباينة.

$$1. 9^x - 1 = \frac{1}{81} \quad -1$$

2. $4^x + 3 = 2^{5x}$ **2**

3. $5^{x-1} = 2^x$ **1.76**

4. $3.5^x + 2 = 1.75^x + 3$ **-1.2**

$$5. -3^{x+4} = -0,5^{2x+3} - 2,6$$

6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2}$ ($x \mid x > 1.8$)

7. $16^x - 1 > 2^{2x+2}$ ($x \mid x > 3$)

8. $3^x - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}} \{x \mid x < 2\}$

9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$ ($x \mid x \leq -2.2$)

10. **الكتابة في الرياضيات** وضح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانياً على حل المعادلات والمتباينات الأسية.

حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-6

1 التركيز

انحياز عمودي

قبل الدرس 2-6 | رسم مخطط بياني للدوال الأسية.

الدرس 2-6 حل المعادلات الأسية. حل المتباينات الأسية.

بعد الدرس 2-6 بسط التعابير الجذرية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الخاص بالدرس.

اسأل:

■ ما هي قيمة x التي تمثل العام 2010؟

■ كم عدد الأعضاء الذين يمثلون في $y = 5.2$ ؟ 5,200,000

■ كم عدد الأعضاء الذين سيتواجدون في 2012؟ نحو 27,300,000

لماذا؟

الحالي

السابق



● حل المعادلات الأسية. ● نتج العضوية مواقع شبكات التواصل الاجتماعي إلى الزيادة بمعدل أسي. ويمكن تمثيل نمو هذه العضوية على أحد المواقع من خلال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ حيث x هو عدد الأعوام منذ 2004 و y هو عدد الأعضاء بالملايين. يمكنك استخدام $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد كم سيكون عدد الأعضاء في عام ما محدد. أو لتحديد العام الذي بلغت فيه العضوية مستوى معينًا.

● فمت يمثل الدوال الأسية بيانيًا.

1

2

1 إيجاد حل المعادلات الأسية في المتباينات الأسية. تأني المتغيرات على شكل أس.

المفهوم الأساسي خاصية التساوي في الدوال الأسية

الشرح افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. إذا $b^x = b^y$ فخط عندما يكون $x = y$.
مثال إذا كانت $3^x = 3^5$ ، إذا $x = 5$ كانت $x = 5$ ، إذا كانت $3^x = 3^5$.

الشرح

المفردات الجديدة

المعادلة الأسية
exponential equation
المربحة المركبة
compound interest
المتباينة الأسية
exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية
وكيفية.

يمكن استخدام خاصية التساوي لحل المعادلات الأسية.

مثال 1 حل المعادلات الأسية

حل كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$

$2^x = (2^3)^3$

$2^x = 2^9$

$x = 9$

المعادلة الأصلية

أعد كتابة 8 بالصيغة 2^3 .

قوة أسية لقوة أسية

خاصية التساوي في الدوال الأسية

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$

$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$

$3^{4x-2} = 3^{6x}$

$4x - 2 = 6x$

$-2 = 2x$

$-1 = x$

المعادلة الأصلية

أعد كتابة 9 بالصيغة 3^2 .

قوة أسية لقوة أسية

خاصية التساوي في الدوال الأسية

اطرح $4x$ من كل طرف.

اقسم كل طرف على 2.

تمرين موجّه

1A. $4^{2x-1} = 64$

1B. $5^{5x} = 125^x + 2$

يمكنك استخدام المعلومات المتعلقة بالنمو أو التناقص لكتابة المعادلة الخاصة بدالة أسية.

مثال 2 من الحياة اليومية كتابة الدالة الأسية

العلوم بدأت هدى تجربة بسـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد 4 ساعات، أصبح هناك 23,000 خلية. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، كان الوقت 0 ساعة وكان يوجد 7500 خلية بكتيرية. وبالتالي، تكون قيمة التناقص مع المحور الرأسي a وقيمة b هي 7500.

عندما يكون $x = 4$ يكون عدد الخلايا البكتيرية 23,000. عوض عن هذه القيم في دالة أسية لتحديد قيمة b .

$y = ab^x$	دالة أسية
$23,000 = 7500 \cdot b^4$	عوض عن x بسـ 4، وعن y بسـ 23,000. وعن a بسـ 7500.
$3.067 \approx b^4$	اقسم كل طرف على 7500.
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	احسب الجذر الرابع لكل طرف.
$1.323 \approx b$	استخدام الحاسبة.

المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. كم عدد الخلايا البكتيرية التي يمكن توقعها في العينة بعد 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	تمثيل المعادلة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	عوض عن x بسـ 12.
$\approx 215,665$	استخدام آلة حاسبة.

سيكون هناك تقريباً 215,665 خلية بكتيرية بعد 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير قامت جهة تصنيع بتوزيع 3.2 ملايين علبة الألومنيوم في عام 2005.

A. وفي 2010، وزعت هذه الجهة 420,000 علبة تصلفة من العلب المتعاد تدويرها، والتي قامت بتوزيعها من قبل. وافترض أن معدل إعادة التدوير يستمر. اكتب معادلة لتمثيل توزيع العلب المتصلفة من الألومنيوم المتعاد تدويره كل عام.

B. كم عدد العلب المتصلفة من الألومنيوم المتعاد تدويره الذي يمكن توقعه في عام 2050؟ **أوجد**

$$y = 3.2(0.67)^x$$

لستخدم الدوال الأسية في الحالات التي تنطوي على مراحلة مركبة. **المراحلة المركبة** هي فائدة يتم دفعها على أساس رأس المال الأصلي للاستثمار بالإضافة إلى أي فوائد مكتسبة سابقاً.

المفهوم الأساسي المراحلة المركبة

يمكنك حساب المراحلة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد t من الأعوام، ويمثل P المبلغ الأصلي المستثمر، ويمثل r نسبة المراحلة السنوية، ويمثل n عدد الفترات المركبة كل عام.

مسائل من الحياة اليومية

في عام 2008، ساهم معدل إعادة تدوير المعادن في الولايات المتحدة البالغ 35% في الوفاة من الميثان ما يقارب 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء - الكمية الممتدة سنوياً من 4.5 ملايين سيارة تقريباً. المصدر: وكالة حماية البيئة



1 حل معادلات تربيعية

المثال 1 يوضح كيفية حل معادلة أسية. المثال 2 يوضح كيفية كتابة دالة أسية للتعبير عن موقف في الحياة اليومية. المثال 3 يوضح كيفية تحديد القاعدة المركبة باستخدام دالة أسية.

تقويم تكويني

استخدم تمارين الممارسة الموجهة بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمبادئ.

أمثلة إضافية

1 حل جميع المعادلات.

a. $3^x = 9^4$ 8

b. $25^x = 4^{2x-1}$ -2

2 السكان في 2000. كان تعداد السكان في فينيكس 1,321,045 وبحلول 2007، تم تقديره بنحو 1,512,986.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها للتعبير عن سكان فينيكس. اكتب x فيما يتعلق بعدد السنوات منذ عام 2000.

$$y = 1,321,045(1.0196)^x$$

b. توقع تعداد سكان فينيكس في 2013. 1,700,221

التركيز على المحتوى الرياضي

حل المعادلات الأسية يمكن حل المعادلات الأسية البسيطة من خلال إعادة كتابة أحد أو كلا طرفي المعادلة وبالتالي تكون القواعد واحدة. بمجرد تحقيق ذلك، يمكن استخدام خاصية التباين للدوال الأسية للحل للحصول على المتغير.

مثال إضافي

3 يدفع حساب استثماري فائدة مركبة سنوية بنسبة 5.4% بشكل ربع سنوي. إذا كان قد تم إيداع 4000AED في هذا الحساب، أوجد الحساب بعد 8 أعوام. **6143.56AED**

2 حل معادلات تربيعية

المثال 4 يوضح كيفية حل متباينة أسية.

مثال إضافي

4 حل $x < \frac{7}{2}$, $5^3 - 2x > \frac{1}{625}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة اطلب من الطلاب كتابة مدخلة في المدونة توضح خواص معادلة أو متباينة أو دالة أسية.

مثال 3 المراجعة المركبة

يدفع حساب استثماري مراجعة سنوية مركبة بنسبة 4.2% شهرياً. فإذا تم استثمار مبلغ 2500 AED في هذا الحساب، فكم سيصبح الرصيد بعد 15 عامًا؟

الهدف أوجد المبلغ الإجمالي في الحساب بعد 15 عامًا.

خطط استخدم قانون المراجعة المركبة.

$t = 15$ و $n = 12$ و $r = 0.042$ و $P = 2500$

أوجد الحل

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

$$= 2500 \left(1 + \frac{0.042}{12} \right)^{12 \cdot 15}$$

$$\approx 4688.87$$

قانون المراجعة المركبة

$P = 2500$, $r = 0.042$, $n = 12$, $t = 15$

استخدم حاسبة.



[0, 20] scl: 1 by [0, 10,000] scl: 1000

تحقق مثل المعادلة التالية بياناً

$2500(1.0035)^{180} = 4688.87$ باستخدام قيمة CALC لإيجاد y

عندما تكون $x = 15$

قيمة y البالغة 4688.8662 قريبة جداً من 4688.87.

لذلك فالإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

3. أوجد رصيده الحساب بعد 20 عامًا إذا تم وضع 100 AED في حساب يدفع مراجعة مركبة قدرها 1.2% مرتين في الشهر. **AED 127.12**

انتبه!

النسب المئوية تذكر أن تحويل جميع النسب المئوية إلى صيغة كسور عشرية، 0.042 تصبح 2.4%

2 حل المتباينات الأسية

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن متغير أسية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال الأسية

الشرح افترض أن $b > 1$. فإن $b^x > b^y$ فقط عندما تكون $x > y$ ، و $b^x < b^y$ فقط عندما تكون $x < y$.

مثال إذا كانت $2^6 > 2^8$ فإن $x > 6$ ، فإن كانت $x > 6$ ، إذا $2^x > 2^6$

تنطبق هذه الخاصية أيضاً على \geq و \leq .

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حل $16^{2x-3} < 8$

$$16^{2x-3} < 8$$

المتباينة الأصلية

$$(2^4)^{2x-3} < 2^3$$

أعد كتابة 16 بالصيغة 2^4 و 8 بالصيغة 2^3

$$2^{8x-12} < 2^3$$

قوة أسية لقوة أسية

$$8x - 12 < 3$$

خاصية التباين في الدوال الأسية

$$8x < 15$$

اجمع 12 إلى كل طرف.

$$x < \frac{15}{8}$$

اقسم كل طرف على 8.

تمرين موجّه

حل كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$ $\{x | x \geq -2\}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $\{x | x > -7\}$

التعليم المهميز

في حال أنت تريد من الطلاب أن يتحققوا لبروا ما إذا كانت الإجابة صحيحة.

إذا ذكر الطلاب أن يختاروا أي قيمة في وقت الحل ويروا إذا كانت تنماشى مع المتباينة الأصلي.

3 التمرين

تقويم تكويني

استخدم التمارين من 1-8 للتحقق من الفهم.

استخدم التمثيل البياني في أسفل الصفحة القادمة لتخصيص الواجبات لطلابك.

تدريس الممارسات الرياضية

التمثيل يمكن للطلاب المتميزين رياضياً تطبيق الرياضيات التي يعرفونها لحل المسائل المتواجدة في الحياة اليومية وتحليل العلاقات رياضياً لرسم نتائج وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق موقف ما.

التحقق من فهمك

مثال 1

حل كل من المعادلات التالية.

1. $3^{5x} = 27^{2x-4}$ 12
2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ $\frac{7}{3}$
3. $2^{6x} = 32^{x-2}$ -10
4. $49^x + 5 = 7^{8x-6}$ $\frac{8}{3}$

مثال 2

مثال 5a. $c = 2\frac{4}{15}$
مثال 5b. $c = 16$

5. العلوم انقسام الخلية هو العملية التي تنقسم فيها الخلية إلى اثنتين. وتُعدّ الإشريكية القولونية واحدة من أسرع أنواع البكتيريا نمواً. ذلك أنه يمكنها أن تتكاثر بنفسها في 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسية لتمثيل عدد الخلايا c بعد عدد t من الدقائق.

b. إذا بدأت بحلية إشريكية قولونية واحدة، فكم سيكون عدد الخلايا خلال ساعة واحدة؟

6. تدفع شهادة إيداع مراهقة مركبة كل أسبوعين قدرها 2.25%. فإذا أودعت AED 500 في هذه الشهادة، فكم سيكون الرصيد بعد 6 أعوام؟ **AED 572.23**

مثال 3

حل كل من المتباينات التالية.

7. $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$ $\{y | y \leq 0\}$
8. $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$ $\{x | x \geq 4.5\}$

مثال 4

التمرين وحل المسائل

مثال 1

حل كل من المعادلات التالية.

9. $8^{4x+2} = 64$ 0
10. $5^{x-6} = 125$ 9
11. $81^{x+2} = 3^{4x+1}$ -7
12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ -1
13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ $\frac{5}{3}$
14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ -4

مثال 2

15. تمثيل النماذج في عام 2009، استلكت ربهام مبلغاً قدره AED 10,000 من جديتها، واستثمر والداها هذا المبلغ المالي كله، وبحلول عام 2021، سيكون هذا المبلغ قد نما ليصل إلى AED 16,960.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل المبلغ المالي y ، واكتب الدالة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ عام 2009. **$y = 10,000(1.045)^x$**

b. افترض أن هذا المبلغ المالي استمر في النمو بنفس المعدل، فكم سيكون رصيده هذا الحساب في عام 2031؟ **حوالي AED 26,336.52**

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. $(0, 6.4)$ و $(3, 100)$ **$y = 6.4(2.5)^x$**
17. $(0, 256)$ و $(4, 81)$ **$y = 256(0.75)^x$**
18. $(0, 128)$ و $(5, 371,293)$ **$y = 128(4.926)^x$**
19. $(0, 144)$ و $(4, 21,609)$ **$y = 144(3.5)^x$**

مثال 3

20. أوجد رصيده الحساب بعد 7 أعوام إذا تم إيداع مبلغ AED 700 في حساب يدفع مراهقة قدرها 4.3% شهرياً. **AED 945.34**

21. حدد كم سيكون المبلغ الموجود في حساب تتأعد بعد 20 عاماً إذا تم استثمار AED 5000 بنسبة مراهقة مركبة قدرها 6.05% أسبوعياً. **AED 16,755.63**

22. يقدم حساب توفير مراهقة مركبة قدرها 0.7% كل شهرين، وإذا تم إيداع مبلغ AED 110 في هذا الحساب، فكم سيكون الرصيد بعد 15 عاماً؟ **AED 122.17**

23. يدفع حساب توفير جامعي مراهقة سنوية قدرها 13.2% كل نصف عام، فكم سيكون رصيده الحساب بعد 12 عاماً إذا تم إيداع مبلغ AED 21,000 بشكل أولي؟ **AED 97,362.61**

مثال 4

حل كل من المتباينات التالية.

24. $625 \geq 5^{a+8}$ **$\{a | a \leq -4\}$**
25. $10^{5b+2} > 1000$
26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$
27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$ **$\{d | d \geq -1\}$**
28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$ **$\{t | t \leq -40\}$**
29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$

140 | الدرس 2-6 | حلّ المعادلات والمتباينات الأسية

خيارات الواجب المنزلي المميزة

مستوى	واجب	خيار اليوميين
أساسي م.5	9-29, 42-43, 45-71	9-29, 50-53, 54-71, 45-49, 42-43, 10-28 زوجي
جوهري م.6	31-37, 30, 9-29 فردي, 45-71, 38-43	9-29, 50-53, 30-43, 45-49, 54-71
متقدم م.7	30-67, (اختياري, 68-71)	

140 | الدرس 2-6 | حلّ المعادلات والمتباينات الأسية

إجابات إضافية
38d. نحو 9.3498 مليار؛ لأن التوقع لعام 200 كان أكبر من التعداد الفعلي للسكان. وهذا التوقع من المحتمل أن يكون أعلى من التعداد الفعلي الذي سيكون في ذلك الوقت.



- 30. العلوم** تبلغ حرارة كوب من الشوكولاته الساخنة 90°C عند الوقت $t = 0$. وهذا الكوب يحاط بهواء درجة حرارته ثابتة عند 20°C . فإذا تم تطبيقه بانتظام، ستصبح حرارته بالدرجة المتوبة بعد t من الدقائق $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-kt}$.
a. أوجد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 15 دقيقة. **45.02°C**
b. أوجد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 30 دقيقة. **28.94°C**
c. درجة الحرارة المتتالية للشرب هي 60°C . فهل سيكون كوب الشوكولاته الساخنة عند درجة الحرارة هذه أم أقل. فيها بعد 10 دقائق؟ **أقل منها**

- 31. الحيوانات** تُظهر الدراسات أن أي حيوان سوف يدافع عن منطقته في حيز يُقدر بالأمتر المربعة يكون متناسلاً بشكل طردي مع قوة قدرها 1.31 من وزن الحيوان بالكيلوغرام.
a. إذا دافع قندس وزنه 45 كيلوجراماً عن مساحة قدرها 170 مترًا مربعاً، فاكتمل معادلة تمثل المساحة A التي يتم الدفاع عنها بواسطة قندس وزنه w من الكيلوجرامات. **$A = 1.16w^{1.31}$**
b. يعتقد العلماء أنه منذ آلاف السنين، كان أسلاف القندس بطول 11 m ووزن 430 كيلوجراماً. استخدم معادلتك لتحديد المساحة التي دافعت عنها تلك الحيوانات. **حوالي 3268 km**
حَن كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1} \cdot \frac{2}{5}$ 33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2} \cdot \frac{1}{7}$ 34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3} \cdot 6$
 35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4} \cdot \frac{4}{13}$ 36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4} \cdot \frac{11}{8}$ 37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{3x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1} \cdot 1$

- 38. تمثيل النماذج** في عام 1950، بلغ تعداد سكان العالم 2.556 مليار نسمة. وبحلول عام 1980، ازداد العدد إلى 4.458 مليار نسمة.
a. اكتب دالة أسية بالصيغة $y = ab^x$ والتي يمكن استخدامها لتمثيل تعداد سكان العالم y بالمليارات للفترة من 1950 وحتى 1980. اكتب المعادلة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ 1950. أقرب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. **$y = 2.556(1.0187)^x$**
b. افترض أن هذا التعداد استمر في النمو بهذا المعدل. قَدِّر التعداد في عام 2000. **6.455 مليارات**
c. في عام 2000، بلغ تعداد سكان العالم حوالي 6.08 مليارات نسمة. قارن تقديرك بالتعداد الفعلي للسكان.
d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء **b** لتقدير تعداد سكان العالم في العام 2020. ما مدى دقة هذا التقدير برأيك؟ اشرح استنتاجك. **كان التعداد المتوقع أكثر من الفعلي بحوالي 375 مليوناً.**
39. الأشجار يتغير قطر الدائرة لقاعدة جذع شجرة بالستينترات طردياً مع $\frac{3}{2}$ قوة ارتفاعها بالأمتار.
a. يبلغ طول شجرة سكوية صغيرة 6 أمتار، ويبلغ قطر قاعدتها 19.1 سنتيمتراً. استخدم هذه المعلومات لكتابة معادلة للقطر d الخاص بقاعدة شجرة السكوية إذا كان ارتفاعها يبلغ h من الأمتار.
b. يبلغ طول شجرة الجنرال شيرمان في حديقة سكوي الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 متراً. أوجد قطر قاعدة شجرة الشيرمان العامة. **حوالي 1001 cm**

الخيار A	الخيار B
نسبة مئوية 6.5% تزداد بشكل ربع سنوي، ويبلغ الحد الأدنى للوديعة AED 5000	نسبة مئوية 4.2% تزداد شهرياً، ويبلغ الحد الأدنى للوديعة AED 5000
بالإضافة إلى	بالإضافة إلى
رصيد الخيار A	رصيد الخيار B
رصيد الخيار B	رصيد الخيار A
لذلك فالخيار A هو الخيار الأفضل.	لذلك فالخيار B هو الخيار الأفضل.

- 40. المعرفة المالية** لدى السيدة آمنة خططان استثمارتان مختلفتان تتعلقان بالتقاعد لخيار واحدة من بينهما.
a. اكتب معادلتين للخيار A والخيار B بناءً على الحد الأدنى للإيداعات.
b. ارسم تخطيطاً بيانياً لإظهار الأرصدة لكل خيار استثماري بعد عدد t من الأعوام. انظر الهامش
c. اشرح ما إذا كان الخيار A أو الخيار B هو الخيار الأفضل للاستثمار.

40c. الإجابة: خلال أول 22 عاماً، يكون الخيار B هو الخيار الأفضل لأن الإجمالي يكون أعلى من ذلك الخاص بالخيار A. ومع ذلك، بعد حوالي 22 عاماً، سيتجاوز رصيد الخيار B رصيد الخيار A لذلك فالخيار A هو الخيار الأفضل.

التعليم الهيميز

تهديد اسبح للطلاب بتطوير الشعور الاستهلاكي من خلال إعطائهم مبلغ إبداع مبدئي والطلب منهم التسوق في الأنحاء للحصول على أفضل سعر فائدة، ينبغي على الطلاب تسجيل المعلومات ذات الصلة بما في ذلك اسم البنك ونوع الحساب ومعدل الفائدة وكَم مرة تم تركيب الفائدة والقيود المفروضة على الحساب. اطلب من الطلاب رسم مخطط بياني لنمو وديعتهم المبدئية بمرور الوقت.

تدريس الممارسات الرياضية

برهان يمكن للطلاب المتميزون رياضياً فهم واستخدام الافتراضات والتعريفات المذكورة والتأنيق المتوصل إليها سابقاً لبناء البرهان. فإنهم يخمنون ويبنون تقدماً منطقيًا للعبارات لاستكشاف حقيقة تخميناتهم. وهم قادرون على تحليل المواقف من خلال تحليلها إلى حالات ويمكنهم التعرف على الأمثلة العكسية واستخدامها.

41. **التثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الزيادة السريعة لإحدى الدوال الأسية. ثم قم ورقة كبيرة إلى نصفين. ووضعت إحدى القطعتين الناتجتين على القطعة الأخرى. بعد ذلك، ثم قم القطعتين الموجودتين في هذه الكومة إلى نصفين ووضعت القطع الناتجة فوق بعضها البعض. افترض أنه تم تكرار هذا الإجراء عدة مرات.
- a. **عملياً** بقّ هذا النشاط وقم بإحصاء عدد الأوراق في الكومة بعد الفص أول مرة. كم سيكون عدد قصاصات الورق في الكومة بعد ثاني عملية قص؟ وكم سيكون عدد قصاصات الورق بعد ثالث مرة؟ وكم سيكون عدد قصاصات الورق بعد رابع مرة؟ **2, 4, 8, 16**
- b. **جدولياً** سجّل نتائجك في جدول. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**
- c. **رمزيًا** استخدم النمط الموجود في الجدول لكتابة معادلة لعدد قصاصات الورق في الكومة بعد عدد x من عمليات القص. **$y = 2^x$**
- d. **تحليليًا** يبلغ شيك ورقة عادية حوالي 0.003 سنتيمتر. اكتب معادلة للتعبير عن شيك كومة من هذه الورقة بعد عدد x من عمليات القص. **$y = 0.003(2)^x$**
- e. **تحليليًا** كم سيكون شيك كومة الورق بعد 30 قصاً؟ **حوالي 3,221,225.47 in.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المراجعة المركبة، صف ماذا يحدث عندما تصبح الفترات المركبة أكثر تكراراً. بينما يظل المبلغ الأصلي والوقت الكلي كما هما. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

43. **تحليل الخطأ** حل كل من أسئلة وبندرية المعادلة $36^{-x} > 6^x - 3$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

43. **الإجابة النموذجية:** جميعت أمية وبندرية الأسس بدلاً من ضربها عند أخذ لقوة الأسية. 45. سيكون تحليل المدة أكثر فائدة. ذلك أن المضاعف يكون 1.3756 لمدة 4 أعوام و 1.3828 و النسبة 5.6%.

بندرية

$$6^x - 3 > 36^{-x} - 1$$

$$6^x - 3 > (6^2)^{-x} - 1$$

$$6^x - 3 > 6^{-2x} - 2$$

$$x - 3 > -2x - 2$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

أمية

$$6^x - 3 > 36^{-x} - 1$$

$$6^x - 3 > (6^2)^{-x} - 1$$

$$6^x - 3 > 6^{-2x} - 2$$

$$x - 3 > -2x - 2$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

46a. **دائماً**، حيث ستكون 2^x موجبة دائماً، وستكون $-g^{20x}$ سالبة دائماً. 46b. **دائماً**، فحسب التعريف، سيتزايد التمثيل البياني دائماً حتى ولو كان لزيادة ضئيلاً.

46c. **غير صحيحة على الإطلاق؛** فحسب التعريف، سيتناقص التمثيل البياني دائماً حتى ولو كان تناقصاً ضئيلاً.

49. **الإجابة النموذجية:** تتم

قصة الكمية النهائية على الكمية الأولية. وإذا كان n هو عدد الفترات الزمنية الفاصلة التي تمر، فيتم حساب الجذر النوني n للإجابة.

44. **تحقق** حل لإيجاد $4^x = 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18}$. **$x = 37.1610$**

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التعبير الذي قد يكون أكثر فائدة لفرض مدته 5 أعوام بمراجعة مركبة نسبتها 8% شهرياً، تقليل المدة إلى 4 أعوام أم تقليل نسبة المراجعة إلى 6.5%؟

46. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. $8^{20x} - 3 > 2^x$ لجميع قيم x .
b. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة ذو أس.

c. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة تضالو أس.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينة أسية مع حل $x \leq 2$. **الإجابة النموذجية: $4^x \leq 4^2$**

48. **البرهان** أثبت أن $9^{4x+1} + 3^{2x+2} = 81^{x+1} + 27^{2x}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا كانت لديك الكمية الأولية والنهائية لمادة مشعة ما ومقدار الوقت الذي يمر، فكيف يمكنك تحديد معدل زيادة أو انخفاض الكمية من أجل كتابة معادلة؟

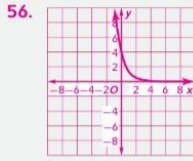
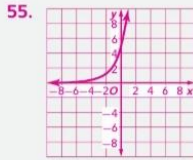
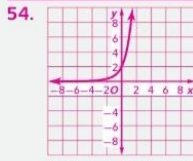
انتبه!

تحليل خاطئ في التمرين 43
قد يخفق الطلاب في التعرف على استخدام قواعد الأس الأساسية عندما تتدخل المتغيرات. ذكرهم بأن $(a^m)^n = a^{mn}$.

4 التقويم

اطلق اسم على الرياضيات اطلب من الطلاب وصف مجموعة القيم المعبرة عن b الممكنة في دالة أسية من الصيغة $y = b^x$.

إجابات إضافية



تدريب على الاختبار المعياري

52. إجابة شبيهة: تمثل الزوايا الثلاث المثلث في $3x$ و $10 + x$ و $2x - 40$. أوجد قياس أصغر زاوية في المثلث. **30**
53. SAT/ACT أي مما يلي يكون مساوياً لـ $(x)(x)(x)(x)$ لجميع رموز x ? **E**
- A $x + 4$ D $4x^2$
B $4x$ E x^4
C $2x^2$

50. $3 \times 10^{-4} = B$
- A 0.003 C 0.00003
B 0.0003 D 0.000003
51. أي مما يلي يمكن ألا يكون حلاً لـ $5 - 3x < -3$? **F**
- F 2.5 H 3.5
G 3 J 4

مراجعة شاملة

مثل كل دالة بيانياً. **التمرين 1-2: 54-56. انظر الهامش.**

54. $y = 2(3)^x$

55. $y = 5(2)^x$

56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل. **التمرين 4-1: 57-62. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

57. $4m^3n^2 + 16m^2n^3 - 8m^3n^4 = 4m^2n^2(m + 4n - 2mn^2)$

58. $12j^4k^4 + 36j^3k^2 - 3j^2k^2 = 3j^2k^2(4j^2k^2 + 12j - 1)$

حلل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

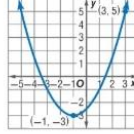
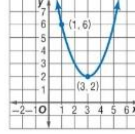
59. $x^2 - 4x + 3xy - 12y = (x + 3y)(x - 4)$

60. $4a - 10ab + 6b - 15b^2 = (2a + 3b)(2 - 5b)$

اكتب معادلة بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. **التمرين 7-1: 61-65.**

61. $y = (x - 3)^2 + 2$

62. $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$



63. $f(x) = \frac{2}{3}(2)^x$

64. $f(x) = 4^x + 3$

65. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

66. الجوائز: ستستخدم آلة لإلقاء الضمان على الجمهور في مباريات لكرة السلة. **التمرين 1-7: 67-70.**



a. ما الارتفاع الأولي للقفز؟ **4 ft**
b. إذا تم الإمساك بالقفز بعد ثانيتين، فإذن سيكون الارتفاع؟ **8 ft**

مراجعة المهارات

أوجد $(h \circ g)(x)$ و $(g \circ h)(x)$.

66. $h(x) = 2x - 1$ **$6x + 1$**
 $g(x) = 3x + 4$ **$6x + 7$**

67. $h(x) = x^2 + 2$
 $g(x) = x - 3$ **$x^2 - 1$; $x^2 - 6x + 11$**

68. $h(x) = x^2 + 1$ **$-2x^2 - 1$**
 $g(x) = -2x + 1$ **$4x^2 - 4x + 2$**

69. $h(x) = -5x$
 $g(x) = 3x - 5$ **$-15x - 5$; $-15x + 25$**

70. $h(x) = x^3$
 $g(x) = x - 2$ **$x^3 - 2$; $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$**

71. $h(x) = x + 4$ **$|x + 4|$; $|x| + 4$**
 $g(x) = |x|$

143

التعليم المهم

تهدف اطلب من الطلاب مد الحل للمثال 3 للحصول على عدد متزايد من الفترات المركبة. جرب التركيب اليومي ($n = 365$). ومن ثم استكشف ماذا يحدث في حال n تغيرت إلى عشرات من الآلاف من المرات خلال العام. يقترب المبلغ النهائي من الحد العلوي، الذي يبلغ في هذه الحالة نحو 4694.03AED.



مختبر الجبر تحويل التعابير الأسية

يستخدم استخدام خواص الأسس السببية في تحويل الدوال الأسية إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط اكتب التعابير الأسية المكافئة

تحاول غاية أن تختار من بين خطتي حساب ادخار، وتقدم الخطة A نسبة مراهجة مركبة شهرية تبلغ 0.25%. بينما تقدم الخطة B نسبة مراهجة مركبة سنوية تبلغ 2.5%. فأي الخطين الأفضل؟ اشرح.

من أجل المقارنة بين الخطين، يجب أن نقارن النسبتين بالتكرار المركب نفسه. فالطريقة الأولى للقيام بهذا تتمثل في المقارنة بين نسبتي المراهجة الشهريتين التقريبتين للخطين. وللتبين أن نسبة المراهجة الشهرية الفعلية، وعلى الرغم من أنه يمكنك استخدام قانون المراهجة المركبة لإيجاد هذه النسبة، فيمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكتسبه غاية بعد عدد t من السنوات من خلال الخطة B وللتبسيط، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار غاية هو AED 1.

$$y = a(1 + r)^t \quad \text{معادلة النمو الأسّي}$$

$$A(t) = 1(1 + 0.025)^t \quad y = A(t) \text{ أو } a = 1 \text{ أو } r = 2.5\% \text{ أو } 0.025$$

يشط.

الآن، اكتب دالة تعادل A(t) تمثل تركيبتها في السنة. بقوة أسية تبلغ 12t، بدلاً من 1 في السنة، بقوة أسية تبلغ 12t.

$$A(t) = 1.025^{12t} \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \cdot 12\right)t} \quad 1 = \frac{1}{12} \cdot 12$$

$$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t} \quad \text{قوة أسية لقوة أسية}$$

$$\approx 1.0021^{12t} \quad 1.0021^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$$

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن نسبة المراهجة الشهرية الفعلية حسب الخطة B تبلغ 0.0021 تقريباً أو حوالي 0.21% في الشهر. حيث نقل هذه النسبة عن نسبة المراهجة الشهرية البالغة 0.25% في الشهر التي قدمها الخطة A. إذاً، فإن الخطة A هي الخطة الأفضل.

التمثيل والتحليل

1. استخدم قانون المراهجة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المراهجة الشهرية الفعلية للخطة B. ما وجه مقارنة هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الطريقة الواردة في النشاط أعلاه؟ **حوالي 0.21% في الشهر؛ وهما متماثلتان تقريباً.**

2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكتسبه غاية بعد عدد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل A(t) التي تمثل المبلغ المكتسب بعد عدد t من السنوات. **$A(t) = (1.0025)^t$; $A(t) \approx (1.030)^{12t}$**

3. من التعبير الذي كتبت في التمرين 2، حدد نسبة المراهجة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في كون الخطة A هي الخطة الأفضل. **انظر الهامش.**

4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مراهجة مركبة ربع سنوية تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لتوضيح أيهما الخطة الأفضل. **انظر الهامش.**

4. الدالة $A(t) = (1.025)^t$ يعطي المبلغ الذي كسبته الخطة B بعد t عام.

$$A(t) = (1.025)^t \quad \text{دالة أصلي}$$

$$= (1.025)^{(1_4 \cdot 4)t} \quad 1 = 1_4 \cdot 4$$

$$= \left[(1.025)^{1_4} \right] 4t \quad \text{قوة القوة}$$

$$\text{أو حول } 4\sqrt{1.025} = (1.025)^{1_4} \quad 4t \approx 1.0062$$

ببلغ معدل الفائدة الربعي الفعال نحو 0.0062 أو 0.62%. وهو أقل من معدل الفائدة الربعي الذي يبلغ 1.5% الذي قدمته الخطة A. وبالتالي فإن الخطة A هي أفضل خطة.

1 التركيز

الهدف استخدام خصائص الأسس المنطقية لتحويل التعابير من دوال أسية إلى صيغ مناسبة لحل المشكلات.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

نظم الطلاب في مجموعات من 2. مازجاً القدرات. ثم اطلب من المجموعات الانتهاء من النشاط والتمارين من 1-3.

نصيحة تدريسية

وضح للطلاب أن صيغة الفائدة السنوية تقريبية باعتبارها معدل فائدة شهري باستخدام $\frac{1}{12} \cdot 12$ لأنه يوجد 12 شهراً في العام. ممارسة اطلب من الطلاب الانتهاء من التمارين 4.

3 التقويم

تقويم تكويني

استخدم التمرين 4 لتقويم ما إذا كان يمكن للطلاب فهم كيفية استخدام خواص الأسس لكتابة التعابير المعادلة من أجل مقارنة معدل الفائدة.

من المادي إلى المعنوي

اطلب من الطلاب برهنة أن $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ وهو ما يُعادل تقريباً $A = P\left[1 + \left(\frac{r}{n}\right)\right]^{nt}$ بالتمثيل البياني عن طريق تثبيت القيم للحصول على r, P و n . اعتماداً على القيم التي تم اختيارها، ينبغي على الطلاب رؤية أن الرسوم البيانية للـ A تتداخل تقريباً في فترة كبيرة من مجالاتها.

إجابات إضافية

3. نحو 3.0% في العام؛ هذا المعدل أكبر من 2.5% في العام الذي قدمته الخطة B.

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

- الدوال الأسية (الدراسات 8-5 و 8-6)**
- معادلة النمو الأسي هي $y = a(1 + r)^t$ حيث $r > 0$. معادلة الاضمحلال الأسي هي $y = a(1 - r)^t$ حيث $r > 0$. a هي المبلغ الأولي، و r هي معدل التغيير و t هي الزمن بالأعوام.

مطويات منظم الدراسة



تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

monomial	أحادية الحد	common ratio	نسبة مشتركة
negative exponent	أس سالب	compound interest	المراجعة المركبة
nth root	الجذر النوني n	constant	ثابت
order of magnitude	رتبة المقدار	cube root	الجذر التكعيبي
rational exponent	الأس النسبي	exponential decay	الاضمحلال الأسي
recursive formula	صيغة تكرارية	exponential equation	المعادلة الأسية
scientific notation	الترميز العلمي	exponential function	الدالة الأسية
zero exponent	الأس الصفرى	exponential growth	النمو الأسي
		geometric sequence	متتالية هندسية

مراجعة المفردات

- اختر أفضل كلمة أو مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.
1. $7xy^4$ مثال على _____.
2. من 95,234 هي 10^5 _____.
3. 2 هي _____ لـ 8.
4. يمكن تحديد قواعد العمليات باستخدام الأسس لتنطبق على التعابير التي بها _____ مثل $7^{\frac{2}{3}}$.
5. العدد المكتوب بـ _____ يكون بالصيغة $a \times 10^n$ حيث $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح.
6. $f(x) = 3^x$ مثال على _____.
7. $a_1 = 4$ و $a_n = 3a_{n-1} - 1$. إذا كانت $n \geq 2$ هي _____ للمتتالية $4, -8, -20, -32, \dots$.
8. $2^{3x} - 1 = 16$ مثال على _____.
9. معادلة $y = C(1 - r)^t$ هي _____.
10. إذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n ، فإن a هي _____ في b .

145

التقويم التكويني

المفردات الأساسية إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10. فذكرهم أنه يمكنهم مراجعة الدروس لإعناش ذاكرتهم بشأن المفردات.

مطويات منظم الدراسة

مطويات دينا زاك®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا أمثلة إلى مطوياتهم لكل درس بالوحدة. واقترح على الطلاب إنشاء مطوياتهم معهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة. ووضح أن المطويات تعد بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

2 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسية

مثل كل دالة بيانياً. أوجد المقطع من المحور الرأسي y واذكر المجال وال المدى.

$$42. y = 2^x$$

$$43. y = 3^x + 1$$

$$44. y = 4^x + 2$$

$$45. y = 2^x - 3$$

46. علم الأحياء: يزداد عدد البكتيريا في طبق معلمي وفقاً للنموذج $p = 550(2.7)^{0.008t}$ حيث t هي عدد الساعات و $t = 0$ تعادل الساعة 1:00 مساءً. استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا في الطبق في الساعة 5:00 مساءً.

مثال 1

مثل بيانياً $y = 3^x + 6$. أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي واذكر المجال وال المدى.

x	$3^x + 6$	y
-3	$3^{-3} + 6$	6.04
-2	$3^{-2} + 6$	6.11
-1	$3^{-1} + 6$	6.33
0	$3^0 + 6$	7
1	$3^1 + 6$	9



نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $(0, 7)$. المجال هو كل الأعداد الحقيقية وال المدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 6.

2-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

$$y = 3x^2 \text{ تربيعية}$$

$$y = 2^x \text{ أسية}$$

$$y = -x^2 \text{ تربيعية}$$

مثال 2

حدد النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثم اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	3	4	5	6	7

الخطوة 1

مثل البيانات دالة خطية.

الخطوة 2: الميل يساوي 1 والتقاطع مع المحور y هو 3. إذا فالمعادلة هي $y = x + 3$.

إجابات إضافية

23. تم تحويل 8 وحدات إلى الأعلى
 24. تم تحويل 3 وحدات إلى الأسفل
 25. التهديد الرأسي
 26. التهديد الرأسي والحركة
 18 وحدة إلى الأسفل
 27. الضغط الرأسي
 28. الضغط الرأسي
 30. تم العكس عبر المحور الأفقي x ، وتم التهديد رأسياً. وتم التحريك 100 وحدة إلى الأعلى

2-3 النمو والاضمحلال (التفاضل)

47. أوجد القيمة النهائية لـ $AED 2500$ تم استثماره بنسبة مريحة تبلغ 2% مركبة شهرياً لمدة 10 سنوات.

48. أجهزة الحاسوب يتعرض حاسوب غلباء للأهلاك بمعدل 3% في السنة. اشترت الحاسوب مقابل $AED 1200$.
 a. اكتب دالة لتمثيل هذا الموقف.
 b. كم ستبلغ قيمة الحاسوب بعد 5 سنوات؟

مثال 3

أوجد القيمة النهائية لمبلغ $AED 2000$ تم استثماره بنسبة مريحة مركبة تبلغ 3% كل ثلاثة أشهر لمدة 8 سنوات.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

معادلة المريحة المركبة
 $r = 0.03$ و $P = 2000$
 $t = 8$ و $n = 4$
 $A = 2000 \left(1 + \frac{0.03}{4} \right)^{4(8)}$
 $\approx AED 2540.22$
 استخدم حاسبة.

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

49. $-1, 1, -1, 1, \dots$

50. $3, 9, 28, \dots$

51. $256, 128, 64, \dots$

اكتب معادلة للحد n في كل متتالية هندسية.

52. $-1, 1, -1, 1, \dots$

53. $3, 9, 27, \dots$

54. $256, 128, 64, \dots$

55. الرياض: سقطت كرة سلة من ارتفاع 20 متراً ثم ظلت ترتد إلى $\frac{1}{2}$ ارتفاعها بعد كل ارتداد. ارسم تخطيطاً بيانياً يمثل هذا الموقف.

مثال 4

أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية الهندسية

$2, 6, 18, \dots$

أوجد النسبة المشتركة. يبلغ كل عدد 3 أضعاف العدد السابق. إذا $r = 3$.

الخطوة 2

اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.
 $18 \times 3 = 54, 54 \times 3 = 162, 162 \times 3 = 486$
 الحدود الثلاثة التالية هي 54 و 162 و 486.

مثال 5

اكتب معادلة الحد n للمتتالية الهندسية

$-3, 12, -48, \dots$

النسبة المشتركة هي -4 . إذا $r = -4$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

قانون الحد n
 $a_n = -3(-4)^{n-1}$
 $a_1 = -3$ و $r = -4$

دليل الدراسة والمراجعة تب

مراجعة درس بدرس

2-5 الصيغ التكرارية

مثال 6

اكتب صيغة تكرارية للمتتالية $3, 1, -1, -3, \dots$.
الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.
 $1 - 3 = -2, -1 - 1 = -2, -3 - (-1) = -2$
 هناك فرق مشترك يبلغ -2 . المتتالية حسابية.
الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.
 $a_n = a_{n-1} + d$
 $a_n = a_{n-1} + (-2)$
الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 3 و $n \geq 2$.
 الصيغة التكرارية هي $a_n = a_{n-1} - 2, n \geq 2$.
 $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} - 2, n \geq 2$

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

56. $a_1 = 11, a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2$
 57. $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 6, n \geq 2$
 58. $2, 7, 12, 17, \dots$
 59. $32, 16, 8, 4, \dots$
 60. $2, 5, 11, 23, \dots$

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسية

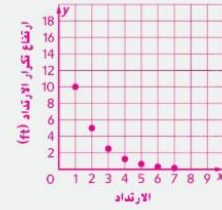
مثال 7

حلّ $4^{3x} = 32^{x-1}$ لإيجاد قيمة x .
 المعادلة الأصلية
 $4^{3x} = 32^{x-1}$
 $(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$
 أعد كتابة المعادلة بحيث يكون للطرفين الأساس ذاته.
 $2^{6x} = 2^{5x-5}$
 قوة أسية تقوى أسية
 $6x = 5x - 5$
 خاصية التساوي في الأسس
 $x = -5$
 اطرح $5x$ من كل طرف.
 الحل يساوي -5 .
 $y = 5000(1.240)^x$

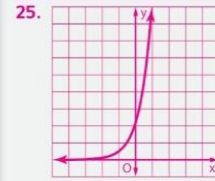
حلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي.
 22. $x > -\frac{2}{3}$
 12. $16^x = \frac{1}{64}$
 13. $3^{4x} = 9^{3x+7}$
 14. $64^{3n} = 8^{2n-3}$
 15. $8^3 - 3y = 256^{4y}$
 16. $9^x - 2 > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$
 17. $27^{3x} \leq 9^{2x} - \frac{2}{5}$
 18. **البكتيريا** بدأ عدد أجد أنواع البكتيريا بـ 5000 كائن بكتيري. وبعد 8 ساعات. بلغ عدد البكتيريا 28,000 في العينة.
 اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

إجابة إضافية

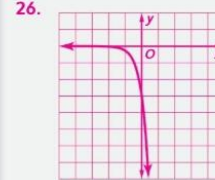
55. تكرار ارتداد كرة السلة



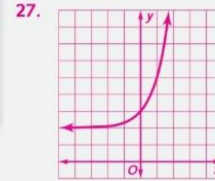
إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)



25. $D = \{x \mid x > 0\}$,
 $R = \{y \mid y > 0\}$



26. $D = \{x \mid x < 0\}$,
 $R = \{y \mid y < 0\}$



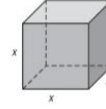
27. $D = \{x \mid x > 2\}$,
 $R = \{y \mid y > 2\}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $(x^2)(7x^8)$

2. $(5a^7bc^2)(-6a^2bc^5)$

3. الاختيار من متعدد عثر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد.



A x^3

B $6x$

C $6x^3$

D x^6

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0.

4. $\frac{x^6 y^8}{x^2}$

5. $\left(2a^4b^3\right)^0$

6. $\frac{2xy^{-7}}{8x}$

بسط.

7. $\sqrt{1000}$

9. $1728^{\frac{1}{3}}$

11. $27^{\frac{2}{3}}$

13. $27^{\frac{5}{3}}$

8. $\sqrt[3]{3125}$

10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

12. $10,000^{\frac{3}{4}}$

14. $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}$

حلّل كل من المعادلات التالية.

15. $12^x = 1728$

16. $7^x - 1 = 2401$

17. $9^x - 3 = 729$

عثر عن كل عدد بالترميز العلمي.

18. 0.00021

19. 58,000

عثر عن كل عدد بالصيغة القياسية.

20. 2.9×10^{-5}

21. 9.1×10^6

أوجد قيمة كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة. عثر عن النتائج بالترميز العلمي.

22. $(2.5 \times 10^3)(3 \times 10^4)$

23. $\frac{8.8 \times 10^2}{4 \times 10^{-4}}$

24. علم الفلك يبلغ متوسط المسافة من كوكب عطارد إلى الشمس 57,910,000 km. عثر عن هذه المسافة بالترميز العلمي.

مثّل كل دالة بيانياً. أوجد المقطع من المحور الرأسي y. واذكر المجال والمداي.

25. $y = 2(5)^x$

26. $y = -3(11)^x$

27. $y = 3^x + 2$

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

28. 2, -6, 18, ...

29. 1000, 500, 250, ...

30. 32, 8, 2, ...

31. الاختيار من متعدد استثمرت شياء 500 AED في حساب بنسبة مراجعة مركبة تبلغ 6.5% شهرياً. كم ستبلغ قيمة استثمار شياء خلال 10 سنوات؟

F AED 600.00

G AED 938.57

H AED 956.09

J AED 957.02

32. الاستثمارات كان استثمار سها يبلغ 3000 AED يخسر من قيمته بعدل 3% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثمارها خلال 6 سنوات؟

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

33. $a_1 = 18, a_n - a_{n-1} = 4, n \geq 2$

34. $a_1 = -2, a_n - 4a_{n-1} = 5, n \geq 2$

2 التحضير للاختبارات المعيارية



استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الحاسبات العلمية وحاسبات التمثيل البياني أدوات قوية لحل المسائل. هناك أوقات يمكن استخدام حاسبة فيها لإجراء الحسابات بشكل أسرع وأسهل. مثل الحاسبات التي تتضمن أرقامًا كبيرة للغاية. إلا أن هناك أوقات من اللازم فيها استخدام حاسبة. مثل تقدير الأعداد غير النسبية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني إلى جانب الوظائف التي ينبغي استخدامها فيها.

- **الأسس** الترميز العلمي. الحسابات ذات الأعداد الكبيرة أو الصغيرة
- π (PI) حل مسائل الدائرة. مثل المحيط والمساحة
- **الجذور التربيعية** المسافة على مستوى إحداثي. نظرية فيثاغورث
- **التمثيلات البيانية** تحليل ثنائيات البيانات في مخطط التشتت. تمثيل الدوال بيانيًا. إيجاد جذور المعادلات

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر أن تعمل بكفاءة قدر الإمكان. قد يتم إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد. بينما ينبغي استكمال خطوات أخرى باستخدام حاسبتك.
- إذا سمح الوقت. فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

تبلغ المسافة من الشمس إلى كوكب المشتري 7.786×10^{11} متر تقريبًا. إذا كانت سرعة الضوء تبلغ 3×10^8 متر في الثانية تقريبًا. فكم يستغرق الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري؟ فُزب إلى أقرب دقيقة.

- | | |
|------------------|--------------------|
| A حوالي 43 دقيقة | C حوالي 1876 دقيقة |
| B حوالي 51 دقيقة | D حوالي 2595 دقيقة |

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية استخدام الحاسبة العلمية لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطرح السؤال التالي:

- ما أنواع المسائل الحسابية التي استخدمت معها الحاسبة العلمية؟

ستكون الإجابات متنوعة.

- هل هناك أنواع من المسائل الحسابية وجدت فيها أنه من الأسرع أو الأسهل ألا تستخدم حاسبة علمية؟ **ستكون الإجابات متنوعة.**

- هل من الأكثر أم من الأقل ترجيحًا أن تقع في أخطاء في العمليات الحسابية عند استخدام حاسبة علمية؟ **وضوح السبب. الإجابة النموذجية: من الأقل ترجيحًا أن تقع في خطأ أثناء العملية الحسابية. ولكن لا يزال من الممكن أن تقع في خطأ إذا ما أدخلت الأعداد بشكل غير صحيح أو استخدمت الصيغ بشكل غير صحيح أو قربت الأعداد بشكل غير صحيح.**

مثال إضافي

ينتقل الضوء ببعد نحو 9.46×10^{12} كيلومترًا في العام الواحد. وبعيد النجم الطائر بمسافة قدرها 1.5136×10^{14} كيلومترًا عن الأرض، فكم شهرًا سيستغرق الضوء لكي ينتقل من الأرض إلى النجم الطائر؟ **B**

- A نحو 1920 شهرًا
B نحو 192 شهرًا
C نحو 160 شهرًا
D نحو 16 شهرًا

3 التقويم

استخدم التمارين 1-4 لتقويم فهم الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. حصلت على المسافة التقريبية بين الشمس وكوكب المشتري إلى جانب سرعة الضوء. كلا المتغيرين المذكوران يرميز علمي. مطلوب منك أن تجد عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري. استخدم مسافة العلاقة = السرعة \times الزمن لإيجاد البعد.

$$d = r \times t$$

$$\frac{d}{r} = t$$

لإيجاد مقدار الزمن، اقم المسافة على السرعة. لاحظ أن وحدات الزمن ستكون الكوازي.

$$7.786 \times 10^{11} \text{ m} = t \text{ ثانية}$$

$$3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

استخدم حاسبة علمية للتوصل بسرعة إلى ناتج القسمة. في معظم الحاسبات العلمية، يُستخدم محتاج EE لإدخال الأرقام بالترميز العلمي.

خطوات العملية على الحاسبة: $7.786 \text{ [2nd] [EE] 11 [÷] 3 \text{ [2nd] [EE] 8 [ENTER]}$

النتيجة هي 2595.33333333 ثانية. لتحويل هذا العدد إلى دقائق، استخدم حاسبتك لقسمة النتيجة على 60. يعطي هذا إجابة تبلغ حوالي 43.2555 دقيقة. الإجابة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. منذ إنشاء موقع إلكتروني شهير على الإنترنت قبل 5 سنوات، تم بيع حوالي 2.504×10^7 عنصر أو تداوله عليه. ما المتوسط اليومي لعدد العناصر التي يتم بيعها أو تداولها على مدار 5 سنوات؟

- A حوالي 9640 عنصرًا في اليوم
B حوالي 13,720 عنصرًا في اليوم
C حوالي 1,025,000 عنصر في اليوم
D حوالي 5,008,000 عنصر في اليوم

2. أوجد قيمة \sqrt{ab} إذا كانت $a = 121$ و $b = 23$

- F حوالي 5.26
G حوالي 9.90
H حوالي 12
J حوالي 52.75

3. يبلغ تعداد سكان الولايات المتحدة 3.034×10^8 نسمة تقريبًا. تبلغ مساحة البلد 3.54 إلى 9.17 كيلومتر مربع تقريبًا. ما متوسط الكثافة السكانية (عدد الأشخاص في الميل المربع) في الولايات المتحدة؟

- A حوالي 136.3 شخص في الكيلومتر المربع
B حوالي 30.2 شخص في الكيلومتر المربع
C حوالي 94.3 شخص في الكيلومتر المربع
D حوالي 33.1 شخص في الكيلومتر المربع

4. تصنع غاية غطاء لطيلة الغرفة العسكرية. يبلغ قطر الطيلة 20 سنتيمترًا. ضع تقديرًا لمساحة سطح الطيلة الكبيرة.

- F 31.41 سنتيمتر مربع
G 62.83 سنتيمتر مربع
H 78.54 سنتيمتر مربع
J 314.16 سنتيمتر مربع

تدريب على الاختبار المعياري

تراكبي: الوحدات من 1 إلى 2

4. اكتب صيغة تكرارية للتتالية التي تمثل عدد المربعات في كل شكل.



F $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 3, n \geq 1$

G $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

H $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$

J $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} + 4, n \geq 2$

5. أوجد قيمة $(4.2 \times 10^6)(5.7 \times 10^8)$.

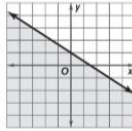
A 2.394×10^{15}

B 23.94×10^{14}

C 9.9×10^{14}

D 2.394×10^{48}

6. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني؟



F $y \leq -\frac{2}{3}x - 1$

G $y \leq -\frac{3}{4}x - 1$

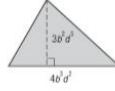
H $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$

J $y \leq -\frac{3}{4}x + 1$

اختبار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. عثر عن مساحة المثلث بالأدنى بدالة أحادية الحد.



A $12b^5d^7$

B $12b^6d^{10}$

C $6b^6d^{10}$

D $6b^5d^7$

2. حول التعبير التالي لأبسط صورة.

$$\left(\frac{2w^5z^3}{3y^4} \right)^3$$

F $\frac{2w^5z^8}{3y^7}$

G $\frac{8w^6z^{15}}{27y^{12}}$

H $\frac{8w^5z^8}{27y^7}$

J $\frac{2w^6z^{15}}{3y^{12}}$

3. ما معادلة المستقيم المتعامد على

$y = \frac{3}{5}x - 3$?

A $y = -\frac{5}{3}x + 2$

B $y = -\frac{3}{5}x + 2$

C $y = \frac{5}{3}x - 2$

D $y = \frac{3}{5}x - 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم قوانين الأسس لنحوّل التعبير لأبسط صورة. تذكر أنه لإيجاد القوة الأسية لقوة أسية، اضرب الأسس.

خيارات الواجب المنزلي

الاستعداد للوحدة 8 اطلب من الطلاب حل التمارين الموجود في ص 461 كواجب منزلي لمعرفة هل حققوا المهارات المطلوبة المتطلبة للوحدة القادمة.

10. إجابة شكية في مركز ألعاب عائلي. اشترت كل من عائشة عامر وعبد الله رموز لعبة فيديو ورموز ملعب لضرب الكرة كما يظهر في الجدول.

الأسرة	عامر	عبد الله
عدد رموز لعبة الفيديو	25	30
عدد رموز ملعب ضرب الكرة	8	6
التكلفة الإجمالية	AED 26 50	AED 25 50

ما تكلفة رمز ملعب ضرب الكرة بالدرهم في مركز الألعاب العائلي؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجابتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

11. يعرض الجدول أدناه المسافات من الشمس إلى كوكب عطارد والأرض والمريخ وزحل. استخدم البيانات للإجابة عن كل سؤال.

الكوكب	المسافة من الشمس (بالمليون)
عطارد	5.79×10^7
الأرض	1.50×10^8
المريخ	2.28×10^8
زحل	1.43×10^9

a. من بين الكواكب المدرجة، أيهم الأقرب إلى الشمس؟

b. كم ضعفًا يبلغ بعد المريخ عن الشمس بالمقارنة بالأرض؟

الإجابة المختصرة/الإجابة الشكية

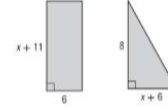
7. أنشأ سعيد موقع ويب لتريق الأولمبياد العلي. يظهر العدد الإجمالي للزيارات التي تلقاها الموقع.

اليوم	إجمالي الزيارات	اليوم	إجمالي الزيارات
3	5	17	27
6	7	21	33
10	12	26	40
13	17	34	55

a. أوجد معادلة خط الاتجاه.

b. توقع عدد الزيارات الإجمالي الذي سيكون الموقع الإلكتروني قد تلقاه بحلول اليوم 46.

8. أوجد قيمة x بحيث تكون الأشكال بمساحة واحدة.

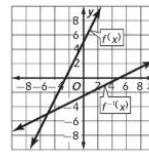


9. ما حل نظام المعادلات التالي؟ اكتب الحل هنا.

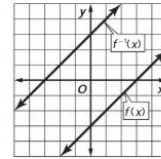
$$\begin{cases} y = 6x - 1 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$$

استعد للوحدة 2

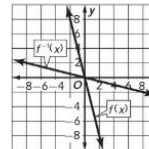
6. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



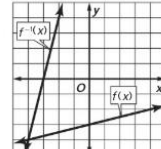
7. $f^{-1}(x) = x + 3$



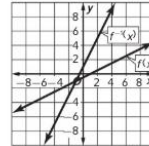
8. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$



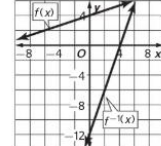
9. $f^{-1}(x) = 4x + 12$



10. $f^{-1}(x) = 2x + 1$

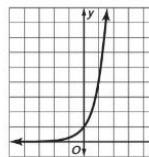


11. $f^{-1}(x) = 3x - 12$



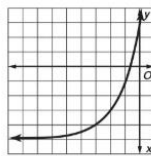
الدرس 2-1 (تمرين موجه)

1.



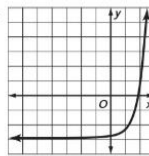
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{y \mid y > 0\}$

2A.



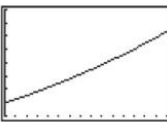
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{y \mid y > -5\}$

2B.



$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{y \mid y > -3\}$

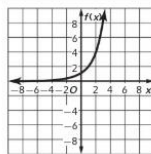
3.



[0, 15] scl: 1 by [70, 150] scl: 10

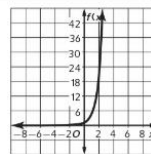
الدرس 2-1

1.



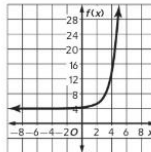
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$

2.



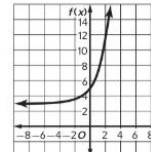
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$

3.



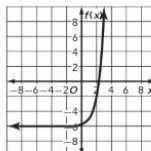
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > 4\}$

4.



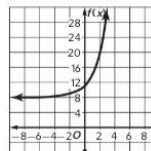
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > 3\}$

5.

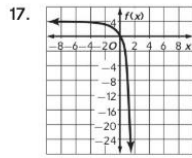


$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > -6\}$

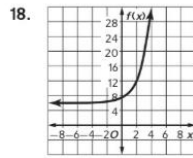
6.



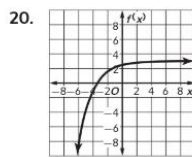
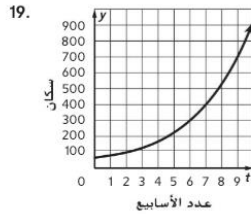
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}; R = \{f(x) \mid f(x) > 8\}$



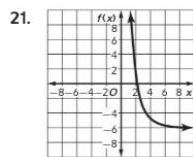
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 4\}$



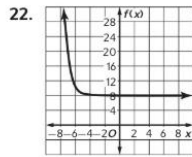
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 6\}$



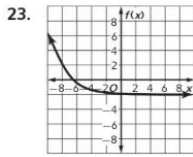
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 3\}$



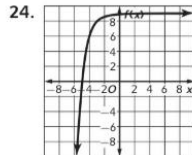
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > -6\}$



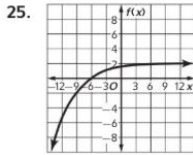
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 8\}$



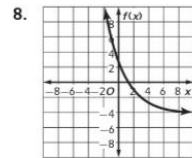
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > -2\}$



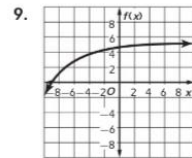
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 9\}$



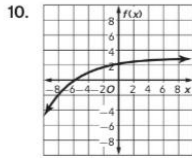
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 2\}$



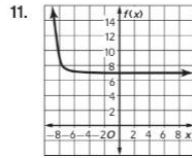
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > -4\}$



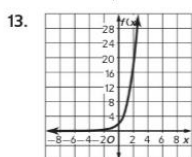
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 5\}$



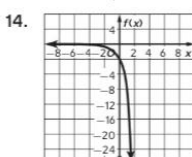
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 3\}$



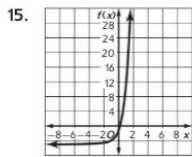
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 7\}$



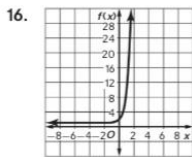
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$



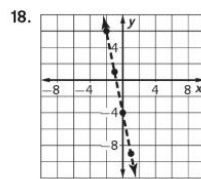
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) < 0\}$



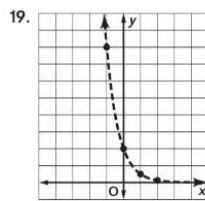
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > -5\}$



$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\};$
 $R = \{f(x) \mid f(x) > 1\}$



خطية



أسية

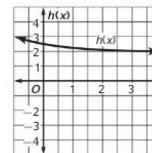
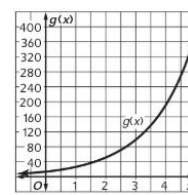
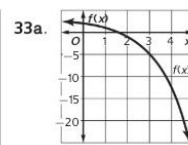
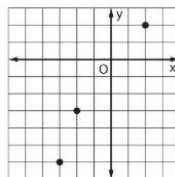
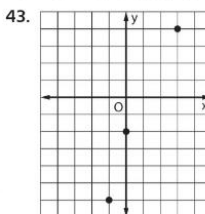
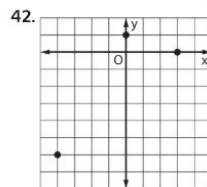
29a.

الوقت (بالساعة)	0	1	2	3	4
الكمية الكهربائية	12	36	108	324	972

الدرس 2-3

19. الإيجابية النموذجية: يمكن أن تنمو النماذج الأسية دون حدّ، ولكن ذلك لا يمثل في العادة الحالة التي يجري تمثيلها. فعلى سبيل المثال، لا يمكن أن ينمو تعداد دون حدّ بسبب قيود المكان والغذاء. ولذلك عند استخدام نموذج لاتخاذ القرارات، فينبغي أن تُدرس الحالة عند استخدامها من أجل اتخاذ قرارات.

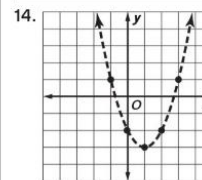
20. صيغة النمو الأسّي هي $y = a(1 + r)^t$ ، حيث تمثل a القيمة الأولية، وتمثل t الزمن، وتمثل y القيمة النهائية، وتمثل r معدل التغيير معبّرًا عنه في صورة عدد عشري. بشكل أساسي، تكون صيغة الاضمحلال الأسّي هي نفسها باستثناء كون المعدل مطروحًا من 1 وكون r تمثل معدل الاضمحلال.



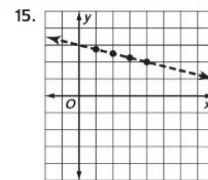
33b. الإيجابية النموذجية: $f(x)$ ، التمثيل البياني لـ $f(x)$ عبارة عن انعكاس على طول المحور x قيم الناتج في الجدول سالبة.

33d. الإيجابية النموذجية: $f(x)$ و $g(x)$ تعبر عن نمو و $h(x)$ تعبر عن اضمحلال؛ تزيد القيمة المطلقة للناتج في دوال النمو وتقل في دوال الاضمحلال.

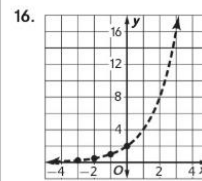
الدرس 2-2



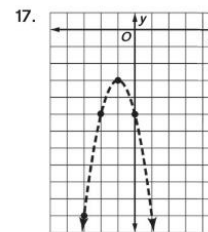
خطية



تربيعية

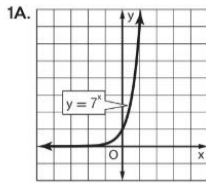


أسية



تربيعية

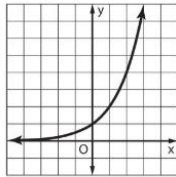
الدرس 2-5 (تمرين موجّه)



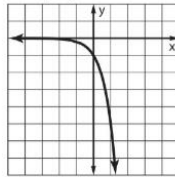
كل الأعداد الحقيقية: $D = \{(0, 1)\}$; $R = \{y \mid y > 0\}$

الدرس 2-5

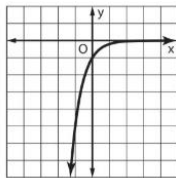
1. 1; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y > 0\}$



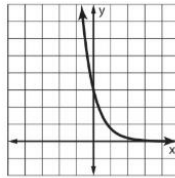
2. -1; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y < 0\}$



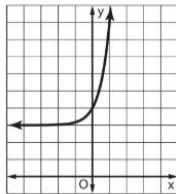
3. -1; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y < 0\}$



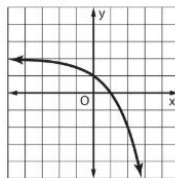
4. 3; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y > 0\}$



5. 4; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y > 3\}$



6. 1; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y < 2\}$

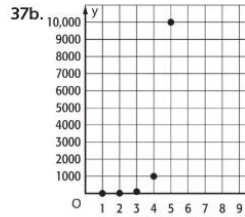
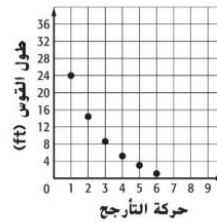


10. 2; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y > 0\}$

11. 2; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$; $R = \{y \mid y > 0\}$

الدرس 2-4

30. البندول



37c. يبدو التمثيل البياني أسياً، ولا يتطابق معدل التغير بين أي نقطتين مع أي معدلات أخرى.

39. لا هذا ولا ذاك. إبراهيم حسب الأس بشكل غير صحيح. وأحمد لم يحسب $(-2)^8$ بشكل صحيح.

41. الإجابة النموذجية: عند التمثيل البياني، تقع حدود المتتالية الهندسية على منحنى يمكن التعبير عنه بواسطة دالة أسية. وتختلف هنا في كون مجال المتتالية الهندسية عبارة عن مجموعة من الأعداد العادية، بينما يكون مجال الدالة الأسية كله عبارة عن أعداد حقيقية. ومن ثم، تكون المتتاليات الهندسية منفصلة، بينما تكون الدوال الأسية متصلة.

42. الإجابة النموذجية: أوجد أولاً النسبة المشتركة. ثم استخدم الصيغة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. اطرح الحد الأول لـ a_1 والنسبة المشتركة لـ r . اجمل n مساوية لعدد الحد الذي تقوم بحساب قيمته. ثم حل المعادلة.

56. $y = 120 + 15x$, $y = 180 + 10x$. يعني أنه في خلال 12 عاماً، ستظل الأشجار بنفس الارتفاع، وهو 300 سنتيمتر أو 3 أمتار.

58. $y = 4x + 2$

59. $y = -3x - \frac{2}{3}$

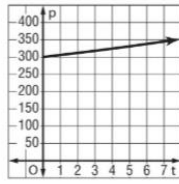
60. $y = -\frac{1}{4}x - 5$

61. $y = \frac{1}{2}x - 9$

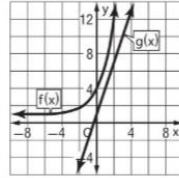
62. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}$

63. $y = -6x - 7$

نقطة التقاطع p تكون 300،
هناك 300 يكتبريا في الساعة
9:00 صباحاً:
 $D = \{t \mid t \geq 0\}$
 $R = \{p \mid p \geq 300\}$.

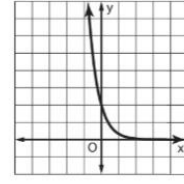
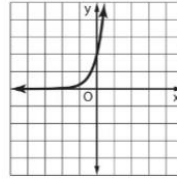


44. الإجابة النموذجية: لنقل أن $b = 2$ و $a = 3$ و $c = 1$.

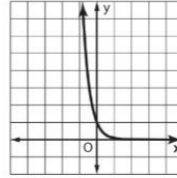


$g(x) = 3x + 1$	$f(x) = 3 \times 2^x + 1$	x
-14	1.09375	-5
-11	1.1875	-4
-8	1.375	-3
-5	1.75	-2
-2	2.5	-1
1	4	0
4	7	1
7	13	2
10	25	3
13	49	4
16	97	5

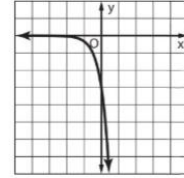
نقطة التقاطع y لـ $f(x)$ هي 4 ونقطة التقاطع y لـ $g(x)$ هي 1. وكل من $f(x)$ و $g(x)$ يتزايدان بزيادة قيمة x . جميع قيم الدالة $f(x)$ موجبة، بينما $g(x)$ لديها قيم موجبة وقيم سالبة. ليس لـ $f(x)$ و $g(x)$ تقاطع فصوصي أو تقاطع صغرى. وليس لأي منهما تماثل.



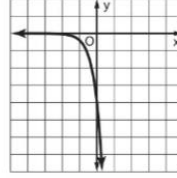
12. 1; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y > 0\}$



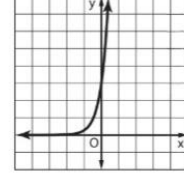
13. -3; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y < 0\}$



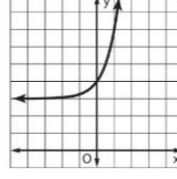
14. -4; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y < 0\}$



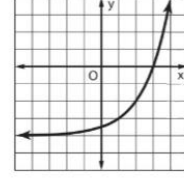
15. 3; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y > 0\}$



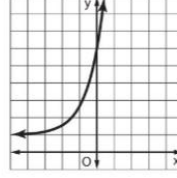
16. 4; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y > 3\}$



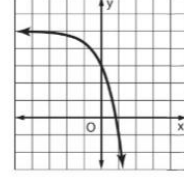
17. -3.5; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y > -4\}$



18. 6; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y > 1\}$



19. 3; $D = \{\text{كل الأعداد الحقيقية}\}$;
 $R = \{y \mid y < 5\}$



الدرس 2-6

41 b.

تخفيضات	قطع
1	2
2	4
3	8
4	16

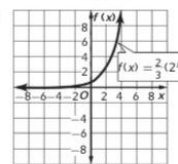
42. الإجابة النموذجية: كلما تم تركيب العائدة بشكل متكرر، كلما ارتفع رصيد الحساب.

48. $27^{2x} \cdot 81^x + 1 = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$
المعادلة الأصلية $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, and $3^4 = 81$
 $(3^3)^{2x} \cdot (3^4)^x + 1 = 3^{2x+2} \cdot 3^{4x+1}$

قوة القوة $3^{6x} \cdot 3^{4x+4} = 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2}$
دالة القوى $3^{10x+4} = 3^{10x+4}$
خاصية التباين للدوال الأسية $10x + 4 = 10x + 4$

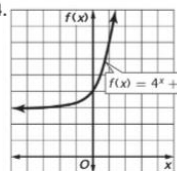
$10x = 10x$
 $x = x$
اطرح 4 من كل طرف
اقسم كل طرف على 10

63.



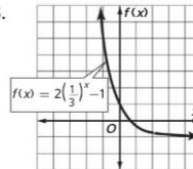
$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$

64.



$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) > 3\}$

65.



$D = \{\text{كافة الأعداد الحقيقية}\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) > -1\}$

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

3

مشروع الوحدة

الاستفادة من التعلم السابق

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن الدوال النسبية لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة المبنية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الواحد والعشرين.

المفردات الأساسية وضح المفردات الأساسية في الوحدة متبعا النظام التالي.

التعريف: المجذور هو التعبير الموجود أسفل إشارة الجذر.

مثال: $\sqrt[2]{\frac{2ab}{c}}$ هو المجذور في

التعبير $\sqrt[2]{\frac{2ab}{c}}$

السؤال: ما الذي تشير إليه إشارة الجذر فيما يتعلق بالمجذور؟ **الجذر التربيعي للمجذور**

Copyright © 2012 McGraw-Hill Education. All rights reserved. Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education. All rights reserved.

لماذا؟

محيطات تولد تسونامي، أو الأمواج الكبرى، من الزلازل الواقعة تحت البحر ويمكن استخدام المعادلة الجذرية لإيجاد سرعة تسونامي بالأمتار في الثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

الحالي

- بعد دراسة هذه الوحدة ستكون قادرا على:
 - تشكل الدوال الجذرية بيانيا وتحولها.
 - تبسيط التعبيرات الجذرية وحلها وطرحها وحلها.
 - حل المعادلات الجذرية.
 - استخدام نظرية فيثاغورس.

السابق

وجدت حل المعادلات التربيعية والأسية.

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

مخطط الوحدة

التقويم التشخيصي		تدريب سريع	
الفترة	3-1	الفترة	3-2
45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم	45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: 0.5 يوم
العنوان	دوال الجذر التربيعي	مختبر تقنية التمثيل البياني: التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي	المعادلات الجذرية
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> تمثيل تمديدات الدوال الجذرية وتحليلها. تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية وتحليلها. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدم حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف الرسوم البيانية لدوال الجذر التربيعي. 	<ul style="list-style-type: none"> حل المعادلات الجذرية. حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.
المفردات الأساسية	دالة الجذر التربيعي square root function دالة جذرية radical function مجذور radicand		معادلات جذرية radical equations حلول دخيلة extraneous solutions

Chapter sourced from Integrated Math 1 Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة الحقوق للنائب ©



الدرس 3-3	الاستكشاف 3-4	الدرس 3-4	الدرس 3-4
45 دقيقة، يوم واحد 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، يوم واحد 90 دقيقة، 0.5 يوم
التغير العكسي	مختبر تقنية التمثيل البياني: مجموعة الدوال النسبية	الدوال النسبية	
<ul style="list-style-type: none"> تحديد التغيرات العكسية واستخدامها. تمثيل التغيرات العكسية بيانياً. 	<ul style="list-style-type: none"> استخدام تقنية التمثيل البياني لاستكشاف مجموعات الدوال النسبية. 	<ul style="list-style-type: none"> تحديد القيم المستبعدة. تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانياً. 	
تغير عكسي inverse variation قاعدة ناتج الضرب product rule		دالة نسبية rational function قيمة مستبعدة excluded value خط تقارب asymptote	
		التكوين التكويني اختبار نصف الوحدة	

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية مخطط الوحدة

		التوسيع 3-5 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.25 يوم	التمرين 3-5 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	
		العنوان	المعادلات النسبية	
		الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> حل المعادلات النسبية. استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل. 	
			معادلة نسبية rational equation حل دخيل extraneous solution مسائل العمل والمسائل النسبية work and rate problems	المفردات الأساسية
		التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تمرين على الاختبار		

التشخيص	سبل الحل
الاستعداد للوحدة 3 كتاب الطالب	بداية الوحدة 3
	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم
السابق، الحالي، لماذا كتاب الطالب	بداية كل درس
	الوحدة 0 كتاب الطالب
أثناء / بعد كل درس	
تمرين موجه كتاب الطالب. كل مثال التحقق من فهمك كتاب الطالب مسائل مهارات التفكير العليا كتاب الطالب مراجعة شاملة كتاب الطالب أمثلة إضافية كتاب المعلم اشبه! كتاب المعلم الخطوة 4. التقويم كتاب المعلم	التدريس المتميز كتاب المعلم خيارات الواجب المنزلي المتبايزة كتاب المعلم
اختبار نصف الوحدة كتاب الطالب	نصف الوحدة
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة كتاب الطالب تمرين على الاختبار كتاب الطالب تدريب على الاختبار المعياري كتاب الطالب	اختبار ما قبل الوحدة

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اطلب من الطلاب البحث عن طريقة لقسمة كثيرات الحدود فيما يعرف باسم القسمة التركيبية. ثم اطلب من الطلاب مقارنة تلك الطريقة باستخدام القسمة المطولة. والمثال أدناه يوضح ذلك لـ $(x-3) \div (3x^3 - 5x^2 - 6x - 2)$.

القسمة المطولة:	القسمة التركيبية
$\begin{array}{r} 3x^2 + 6x + 6 \\ x-3 \overline{) 3x^3 - 5x^2 - 6x - 2} \\ \underline{3x^3 - 9x^2} \\ 4x^2 - 6x \\ \underline{4x^2 - 12x} \\ 6x - 2 \\ \underline{6x - 18} \\ 16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 3 - 5 - 6 - 2 \\ \underline{3 4 6 16} \\ 9 12 18 \end{array}$

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة AL OL BL

المتعلمون أصحاب النهج الاجتماعي اطلب من الطلاب العمل في مجموعات. كلف كل طالب بمسألة قسمة كثيرة الحدود. اطلب من الطلاب دراسة المسائل الخاصة بهم لدقائق معدودة لتحديد طريقة إيجاد ناتج القسمة. بعد ذلك، اطلب من كل طالب أن يقوم "بتدريس" طريقة إيجاد ناتج القسمة للمجموعة. اطلب من المجموعات مناقشة إذا ما كانت الطريقة التي تم "تدريسها" صحيحة أم لا.

المتعلمون أصحاب النهج السعي يعمل الطلاب، في مجموعات ثنائية أو صغيرة، على حل التمرين 18 والتحدث عن كل خطوة من خطوات الحل أثناء توضيح عملهم. اطلب منهم التحقق من حلولهم ومناقشة السبب في وجود حل دخيل من بين الحلول.

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية تم تحديد متوسط السرعة r في المعادلة $r = \frac{d}{t}$ حيث إن d ترمز إلى المسافة المقطوعة و t ترمز إلى الزمن المستغرق في قطع المسافة. اطلب من الطلاب اختيار مسافة تبلغ 50 متراً على سبيل المثال يستطيع الأشخاص قطعها. بمجرد اختيار المسافة، اطلب منهم إنشاء تمثيل بياني. وإجراء تجربة على المسافة المعطاة، ثم التحديد، بعد ذلك، إذا ما كان التمثيل البياني يجسد بدقة أداء مشاركتهم. يجب إجراء تحليلات لتوضيح كيفية ارتباط نقاط البيانات بالتمثيل البياني.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اطلب من الطلاب كتابة مسائل قسمة تتضمن تعابير نسبية على بطاقات ملحوظات أو قصاصات ورقية أو أي شيء آخر يمكنهم استخدامه. ثم اطلب من الطلاب "قلب" الكسور بشكل مادي للضرب في المقلوب الضربي. يساعد "قلب" الكسور في ترسيخ المفهوم في عقول الطلاب.

3 التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

معاينة درس تلو الآخر

قبل الوحدة 3

الموضوعات ذات الصلة

- تمثيل المربعات والجذور التربيعية باستخدام نماذج هندسية
- تقريب قيم الأعداد غير النسبية عندما تنتج من مواقف المسائل

موضوعات سابقة

- استخدام خاصية التوزيع لتحويل التعبيرات الجبرية لأبسط صورة
- حل المعادلات التربيعية باستخدام الطرق الجبرية
- حل المسائل التي تتضمن تغييرًا تناسبيًا
- تمثيل الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانيًا وتحليلها
- إعادة كتابة التعبيرات التي تنطوي على الجذور والأسس النسبية مستخدمًا خواص الأسس

الوحدة 3

الموضوعات ذات الصلة

- جميع التعبيرات الجذرية وطرحها وضربها وتحليلها لأبسط صورة
- حل المعادلات الجذرية

بعد الوحدة 3

الإعداد

- استخدام نظرية فيثاغورس
- تحديد الأنماط من المثلثات المناسبة لحل مسائل ذات معنى وتطبيق هذه الأنماط
- استخدام صيغ للطول والميل ونقطة المنتصف
- استخدام النسب لحل المسائل التي تتضمن أشكالاً متشابهة
- صياغة المعادلات والمتباينات بناءً على دوال الجذر التربيعي، واستخدام طرائق متنوعة في حلها، وتحليل الحلول من حيث الموقف

3-1 دوال الجذر التربيعي

تسمى دالة الجذر التربيعي بهذا الاسم لأن الدالة تحتوي على متغير داخل رمز الجذر التربيعي. الدالة الأم لأي دالة جذر تربيعي هي $f(x) = \sqrt{x}$. ولكي تصبح الدالة التربيعية عددًا حقيقيًا، فإن الجذور لا يمكن أن يكون سالبة. وعند التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي، فإنه يجب استبعاد الأعداد التي تجعل الجذور سالبة من مجال الدالة. يبدأ التمثيل البياني $y = a\sqrt{x}$ من عند نقطة الأصل ويمر إلى النقطة $(1, a)$. إذا كان a موجبًا، فإن التمثيل البياني يكون في الربع الأول، وإذا كان a سالبًا، فإن التمثيل البياني يكون انعكاسًا للتمثيل البياني $y = |a|\sqrt{x}$ ويقع في الربع الرابع.

3-2 المعادلات الجذرية

المعادلات التي تحتوي على متغيرات في الجذور تسمى معادلات جذرية. ولحل المعادلات الجذرية، يجب أولاً فصل الجذر في طرف واحد من طرفي المعادلة، ثم يتم تربيع كلا الطرفين. سوف يؤدي ذلك إلى حذف الجذر. وفي بعض الأحيان، قد ينتج عن تربيع كل طرف حلول دخيلة، وهي نتائج لا تمثل حلولاً للمعادلة الأصلية. تأكد من أن جميع الحلول تعود إلى المعادلة الأصلية للتحقق من صلاحيتها.

3-3 التعبير العكسي

بعض المواقف التي يزداد فيها y بزيادة x تكون معروفة باسم *التغييرات المباشرة* (الدرس 3-4). وبعض المواقف التي تنقص فيها y بنقص x ، أو العكس، تكون معروفة باسم *التغييرات العكسية*. ويمكن تمثيل التغييرات العكسية بالمعادلات المكتوبة بالصيغة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$. وتكون قيمة التعبير العكسي غير محددة إذا كان $x = 0$.

تنص قاعدة ناتج الضرب للتعبير العكسي أنه إذا كان (x_1, y_1) وكانت حلول التعبير العكسي هي (x_2, y_2) ، فإن $x_1 y_1 = x_2 y_2$. لأن كل من $x_1 y_1 = k$ و $x_2 y_2 = k$ ، يمكن استخدام المعادلة $x_1 y_1 = x_2 y_2$ لإيجاد حل القيم المفقودة لكل من x و y .

3-4 الدوال النسبية

الدالة النسبية هي دالة مكتوبة بالصيغة $y = \frac{p}{q}$ ، حيث يكون البسط p والمقام q كلاهما من كثيرات الحدود، وأي قيمة تجعل قيمة q تساوي 0 تسمى القيمة المستبعدة للدالة النسبية ويجب أن يتم استبعادها من مجال الدالة. وبناءً على الموقف الذي نمثله أي دالة نسبية، قد تكون هناك كذلك قيم إضافية مستبعدة، فالتمثيل البياني لدالة نسبية بالصيغة $y = \frac{a}{x-b}$ (حيث $a \neq 0$) يوجد به خطان تقاربان: وهما الخط $x = b$ والخط $y = 0$. وبالنسبة إلى التمثيل البياني للدالة فإنه يبدو مقترَّبًا من هذين الخطين.

3-5 المعادلات النسبية

المعادلات النسبية هي معادلات تحتوي على تعبير نسبي، وإذا كان طرفا المعادلة النسبية عبارة عن كسور فردية، فإنه يمكن استخدام نواتج الضرب التقاطعي للتخلص من الكسور، ثم حل المعادلة الناتجة.

عند حل معادلة نسبية، فإنه قد ينتج أكثر من حل. تحقق دائمًا من جميع الحلول في المعادلة الأصلية، لأن بعض الحلول قد تكون حلولًا دخيلة.

إجابات إضافية

11. 0, 2
12. $-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$
13. 2, 5
14. $-4, \frac{1}{2}$

السؤال الأساسي

■ كيف يمكنك اختيار نموذج لتمثيل موقف من الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: لنمذجة مجموعة من البيانات، يمكنك إنشاء مخطط انتشار واختيار دالة ذات تمثيل بياني يناسب البيانات. ولنمذجة الموقف الفعلي، يمكنك إنشاء مخطط لتمثيل موقف باستخدام شكل له خواص معروفة.

الاستعداد للوحدة

1

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة	تدريب سريع
<p>أوجد كل جذر تربيعي. وعند الضرورة، قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.</p> <p>1. $\sqrt{82}$ 2. $\sqrt{26}$</p> <p>3. $\sqrt{15}$ 4. $\sqrt{99}$</p> <p>5. صندوق الرمل يصنع عيسى صندوق مكعباً مساحة قاعدته 100 متر مربع. فكم طول الضلع في الصندوق؟</p>	<p>مثال 1</p> <p>أوجد الجذر التربيعي لـ $\sqrt{50}$. وعند الضرورة، قَرِّب إلى أقرب جزء من المئة.</p> <p>استخدم الآلة الحاسبة.</p> <p>$\sqrt{50} = 7.071067812\dots$</p> <p>إلى أقرب جزء من المئة، $\sqrt{50} = 7.07$.</p>
<p>حوّل كل تعبير لأبسط صورة.</p> <p>6. $(21x + 15y) - (9x - 4y)$</p> <p>7. $13x - 5y + 2y$</p> <p>8. $(10a - 5b) + (6a + 5b)$</p> <p>9. $6m + 5n + 4 - 3m - 2n + 6$</p> <p>10. $x + y - 3x - 4y + 2x - 8y$</p>	<p>مثال 2</p> <p>بسط $3x + 7y - 4x - 8y$</p> <p>$3x + 7y - 4x - 8y$ $= (3x - 4x) + (7y - 8y)$ $= -x - y$</p> <p>اجمع الحدود المتشابهة. بسط.</p>
<p>حلّ كل من المعادلات التالية.</p> <p>11. $2x^2 - 4x = 0$ 12. $6x^2 - 5x - 4 = 0$</p> <p>13. $x^2 - 7x + 10 = 0$ 14. $2x^2 + 7x - 5 = -1$</p> <p>15. الهندسة مساحة المستطيل المجاور تساوي 90 متراً مربعاً. أوجد x.</p>	<p>مثال 3</p> <p>حلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.</p> <p>المعادلة الأصلية حلّ إلى العوامل. خاصية ناتج الضرب الصفري حلّ كل معادلة.</p> <p>$x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ $x - 3 = 0$ أو $x - 2 = 0$ $x = 3$ أو $x = 2$</p>

المطويات منظّم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

التركيز بينما يقرأ الطلاب هذه الوحدة ويدرسونها، يقومون بتوضيح أمثلة وكتابة ملاحظات حول الدوال الجذرية والهندسة في الكتيب الخاص بهم.

التدريس اطلب من الطلاب تصميم المطويات الخاصة بهم ورسهبا كما هو موضح. وقبل البدء، اطلب منهم تصفح الوحدة وتدوين أي مسائل من الوحدة يعتقدون بأنها صعبة على الصفحة اليمنى للدروس الخاصة بالمسألة. وبينما يعمل الطلاب خلال هذه الوحدة، أكد على أن الطلاب قادرون على إيجاد الإجابات على مسألتهم.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على الإضافة إلى مطوياتهم أثناء عملهم خلال الوحدة واستخدامها للمراجعة استعدادًا لاختبار الوحدة.

البدء في الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك الوحدة 3. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

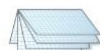
المفردات الجديدة

دالة الجذر التربيعي square root function
مجدور radicand
دالة جذرية radical function
تعبير جذري radical expression
مرافق conjugate
إسقاط المقام rationalize the denominator
مغلقة closed
معادلات جذرية radical equations
حلول دخيلة extraneous solutions
تغير عكسي inverse variation
قاعدة ناتج الضرب product rule
دالة نسبية rational function
قيم مستبعدة excluded values
خط تقارب asymptote
معادلة نسبية rational equation
مسألة عمل work problem
مسألة معدل rate problem

مطويات منظّم الدراسة

الدوال الجذرية والهندسة اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظتك عن الوحدة 3 المتعلقة بالدوال الجذرية والهندسة. ابدأ باستخدام أربع ورقات من ورق التيتل البني.

1 اطو الورق إلى نصفين بالعرض.



2 دس بطول الطية.



3 اقلب الطية إلى اليمين واكتب عنوان الوحدة في الأمام. في كل صفحة بنى من المطوية، اكتب عنوان درس من دروس الوحدة.



مراجعة المفردات

طريقة قول لضرب زوج من ثنائيات الحدود. أوجد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين، والحددين الطرفيين، والحددين الوسطيين. والحددين الآخرين.

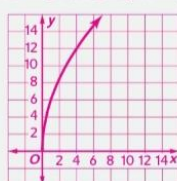
البرج الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

التناسب هو معادلة لها الصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ توضح أن النسبتين متكافئتان

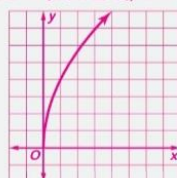
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc$$

إجابات إضافية (الدرس 10-1، تمرين موجه)

1B. $D = \{x \mid x \geq 0\}$, $R = \{y \mid y \geq 0\}$



1A. $D = \{x \mid x \geq 0\}$, $R = \{y \mid y \geq 0\}$



دوال الجذر التربيعي

3-1

1 التركيز

التخطيط الواسي

قبل الدرس 3-1 تمثيل الدوال الخطية والأسية والتربيعية وتحليلها.

الدرس 3-1 تمثيل تمديدات الدوال الجذرية وتحليلها. تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية وتحليلها.

بعد الدرس 3-1 إيجاد حل المعادلات الجذرية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الجزء في المعادلة الذي يشير إلى أنها دالة جذر تربيعي؟ إشارة الجذر التي تمثل الجذر التربيعي

- إذا كان لا يمكن للعدد تحت إشارة الجذر أن يكون سالبًا. فماذا يجب أن يكون صحيحًا بشأن $\frac{E}{d}$ ؟ يجب أن يكون ناتج قسمة أكبر من أو يساوي الصفر.

- إذا كان d ثابتًا و E يتزايد، فماذا سيحدث لـ c ؟ يتزايد.

لماذا؟

- يستخدم العلماء أصوات الحيتان لتتبع تحركاتها. ويمكن إيجاد المسافة إلى الصوت عن طريق الربط بين الزمن وسرعة الصوت في الماء.
- يمكن وصف سرعة الصوت في الماء بدالة الجذر التربيعي $c = \sqrt{\frac{E}{d}}$ حيث E تمثل مجموعة معامل البرونة للماء و d تمثل كثافة الماء.

الحالي

- تمثيل تمديدات الدوال الجذرية وتحليلها.
- تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية وتحليلها.

السابق

- تمثيل الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانياً وحللتها.

تمديد الدوال الجذرية تشتمل **دالة الجذر التربيعي** على الجذر التربيعي لمتغير. وتعد دوال الجذر التربيعي نوعاً من أنواع **الدالة الجذرية**. ونطلق على التعبير تحت إشارة الجذر، **المجذور** لكي يكون الجذر التربيعي عدداً حقيقياً. لا يمكن أن يكون المجذور سالباً. القيم التي تجعل المجذور سالباً لا يتم تضمينها في المجال.

المفهوم الأساسي دالة الجذر التربيعي



الدالة الأصلية: $f(x) = \sqrt{x}$
نوع التمثيل البياني: منحنى
المجال: $\{x | x \geq 0\}$
المدى: $\{y | y \geq 0\}$

مثال 1 تمديد دالة الجذر التربيعي

مثل $f(x) = 2\sqrt{x}$ بيانياً. واذكر المجال والمدى.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً.



x	0	0.5	1	2	3	4
f(x)	0	≈1.4	2	≈2.8	≈3.5	4

المجال هو $\{x | x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y | y \geq 0\}$. لاحظ أن التمثيل البياني يتزايد على المجال بالكامل. والقيمة الصغرى هي 0. ولا يوجد تماثل.

تمرين موجّه

1A. $g(x) = 4\sqrt{x}$

1B. $h(x) = 6\sqrt{x}$

المفردات الجديدة
دالة الجذر التربيعي
square root function
دالة جذرية
radical function
مجذور
radicand

ممارسات في الرياضيات
مراجعة الدقة.

1 تمديدات الدوال الجذرية

المثال 1 يوضح كيفية تمثيل تمديد الدالة الجذرية بيانياً.

التقويم التكويني

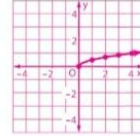
استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 مثل بيانياً $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ واذكر

المجال وال المدى.

$$D = \{x \mid x \geq 0\}; R = \{y \mid y \geq 0\}$$



2 انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية

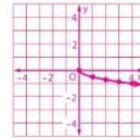
المثالان 2 و 3 يوضحان كيفية تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية بيانياً. **المثال 4** يوضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية مشتملة على دالة جذرية. **المثال 5** يوضح كيفية التمثيل البياني لدالة جذرية بها أكثر من تحويل واحد.

مثال إضافي

2 مثل بيانياً $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ وقارن

بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى. انضغاط رأسي

$$y = \sqrt{x} \text{ وانعكاس على المحور } x; R = \{y \mid y \leq 0\}$$



2 الانعكاس والإزاحة للدوال الجذرية تذكر أنه عندما تكون القيمة h سالبة في الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ يكون التمثيل البياني للدالة الأصلية منعكساً للأسفل على المحور x .

$$y = a\sqrt{x+h}+k$$

الملاحظة 1 ارسم تمثيلاً بيانياً لـ $y = a\sqrt{x}$ يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1, a)$. إذا كان $a > 0$ ، فالتمثيل البياني يكون في الربع الأول. إذا كان $a < 0$ ، فالتمثيل البياني يكون منعكساً للأسفل على المحور x ويكون في الربع الرابع.

الملاحظة 2 أخرج التمثيل البياني k وحدات لأعلى إذا كان $k > 0$ و $|k|$ وحدات لأسفل إذا كان $k < 0$.

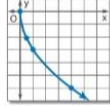
الملاحظة 3 أخرج التمثيل البياني h وحدات يساراً إذا كان $h > 0$ و $|h|$ وحدات يميناً إذا كان $h < 0$.

نصيحة دراسية

التمثيل البياني للدوال الجذرية أكثر الترميزات الكاملة لقيم x التي سوف تنتج عنها إحداثيات سهلة التعيين.

مثال 2 انعكاس دالة الجذر التربيعي

مثل $y = -3\sqrt{x}$ بيانياً. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.



أنتش جدولاً للقيم ثم عيّن النقاط على النظام الإحداثي وارسم منحنى منتظماً يصلها ببعض.

x	0	0.5	1	4
y	0	-2.1	-3	-6

لاحظ أن التمثيل البياني يكون في الربع الرابع. ويتم الحصول عليه عن طريق تمديد التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ رأسياً ثم انعكاسه على المحور x . المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. وال المدى هو $\{y \mid y \leq 0\}$.

تمرين موجّه

2A. $y = -2\sqrt{x}$

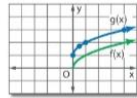
2B. $y = -4\sqrt{x}$

مثال 3 إزاحة دالة الجذر التربيعي

مثل كل دالة بيانياً. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} + 1$

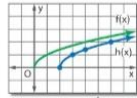
x	0	0.5	1	4	9
y	0	1.7	2	3	4



لاحظ أن قيم $g(x)$ أكثر بوحدة من قيم $f(x) = \sqrt{x}$. هذه إزاحة رأسية بارتفاع وحدة واحدة لأعلى من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. وال المدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.

b. $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2	3	4	6
y	0	1	1.4	2



هذه إزاحة أفقية بارتفاع وحدتين يميناً من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$. وال المدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

158 | الدرس 3-1 | دوال الجذر التربيعي

التركيز على محتوى الرياضيات

دوال الجذر التربيعي تعد دوال الجذر التربيعي نوعاً من أنواع الدالة الجذرية. دالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x}$ هي دالة عكسية لـ $y = x^2$ حيث $x \geq 0$. يمكن تمثيلها في الصيغة $y = x^{\frac{1}{2}}$. لتمثيل دالة جذر تربيعي بيانياً، أستخدم من المجال أي قيم ينتج عنها مجذور سالب.

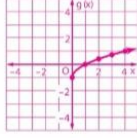
إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي وضح للطلاب أن الحدود على المجال وال المدى لدالة الجذر التربيعي تكون ممثلة أيضاً لنقطة البداية للتمثيل البياني للدالة حيث x هي القيمة الصغرى في المجال و y هي القيمة الصغرى في المدى.

أمثلة إضافية

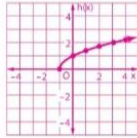
3 مثل كل دالة بيانيًا. وقرن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} - 1$ ثبت إزاحتها بمقدار وحدة واحدة لأسفل;
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$;
 $R = \{g(x) \mid g(x) \geq -1\}$



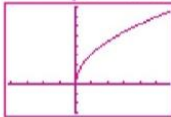
b. $h(x) = \sqrt{x + 1}$ ثبت

إزاحتها بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار;
 $D = \{x \mid x \geq -1\}$;
 $R = \{h(x) \mid h(x) \geq 0\}$



4 أمواج تسونامي سرعة s أمواج

تسونامي بالمتر في الثانية تحطيتها بالمعادلة $s = 3.1\sqrt{d}$. حيث d هو عمق مياه المحيط بالمتر. مثل الدالة بيانيًا. إذا كانت أمواج تسونامي تنتقل عبر مياه عمقها 26 مترًا، فما سرعتها؟ حوالي 15.8 m/s



scl 1 على $[-5, 5]$; scl 1 على $[-4, 7]$

المتابعة

استكشف الطلاب دوال الجذر التربيعي في السابق.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا تختار استخدام دالة جذر تربيعي لتمثيل مجموعة من البيانات بدلاً من استخدام دالة كثيرة الحدود؟
- الإجابة النموذجية: قد يناسب السلوك الطرفي لدالة الجذر التربيعي البيانات بطريقة أفضل. وكذلك، فإن مجال دالة الجذر التربيعي هو $x \geq 0$ ، وهو مجال يمكن تطبيقه على العديد من مواقف الحياة اليومية التي تشتمل على كميات مثل الوقت والمسافة.

تمرين موجّه

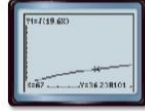
3A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

3B. $h(x) = \sqrt{x} + 3$

يمكن تمثيل ظاهرة فيزيائية مثل الحركة عن طريق الدوال الجذرية. غالبًا ما تكون هذه الدوال تحويلات من دالة الجذر التربيعي الأصلية.

مثال 4 من الحياة اليومية تحليل الدالة الجذرية

الجسور يمتد جسر جولدن جيت لمسافة 67 مترًا تقريبًا فوق سطح الماء. السرعة المتجهة v لجسم ما في سقوط حر من h أمتار تُحدد بالمعادلة $v = \sqrt{2gh}$. حيث g هو ثابت مسافة 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة. مثل الدالة بيانيًا. إذا سقط جسم ما من الجسر، فإذًا ستكون سرعته المتجهة عندما يصطدم بالماء؟



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا. لإيجاد السرعة المتجهة للجسم. عوض بـ 67 مترًا عن h .

الدالة الأصلية
 $v = \sqrt{2gh}$
 $g = 9.8$ و $h = 67$
 $= \sqrt{2(9.8)(67)}$
 $= \sqrt{1313.2}$
 بـسط.
 $\approx 36.2 \text{ m/s}$
 استخدم الآلة الحاسبة.

السرعة المتجهة للجسم تقدر بحوالي 36.2 مترًا لكل ثانية بعد السقوط من ارتفاع 67 مترًا.

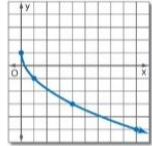
تمرين موجّه

4. استخدم التمثيل البياني أعلاه لتقدير الارتفاع الأولي لجسم ما إذا كان يتحرك بسرعة 20 مترًا لكل ثانية عند اصطدامه بالماء.

ويمكن الجمع بين تحويلات مثل الانعكاسات والإزاحات والتدويرات في معادلة واحدة.

مثال 5 تحويلات دالة الجذر التربيعي

مثل $y = -2\sqrt{x} + 1$ بيانيًا. وقرن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.



هذا التمثيل البياني نتيجة نداء رأسي للتمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$. يتعدى انعكاس على المحور x . ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة. النجاة هو (x, y) ، والذي هو (x, y) ، والذي هو (x, y) .

تمرين موجّه

5A. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$

5B. $y = -2\sqrt{x} - 1$

التدريس المتقدم

إذا

أوضح الطلاب استيعابهم لإزاحات التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

عندما

دفع الطلاب يعملوا في مجموعات ثنائية لتمثيل دوال الجذر التربيعي مثل $y = \sqrt{x^2 + 2}$. واطلب منهم دُر مجال الدوال ومداها ووصف التمثيلات البيانية. واسأل الطلاب عن كيف يمكنهم استخدام التمثيل البياني للتربيع تحت إشارة الجذر لإيجاد مجال الدالة ومداها.



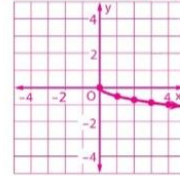
الربط بالحياة اليومية

تعتبر 39 مليون سيارة تقريبًا جسر جولدن جيت في سان فرانسيسكو كل عام. المهندسون، موزان سان فرانسيسكو المهندسين والمهندسين

مثال إضافي

5 مثل $y = 3\sqrt{x-2}$ بيانًا وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

تعد رأسي لـ $y = \sqrt{x}$ إزاحة بمقدار وحدتين إلى اليمين: $D = \{x | x \geq 2\}$; $R = \{y | y \geq 0\}$



3 تمرين

التقويم التكويني

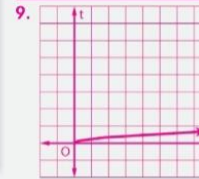
استخدم التمارين من 1 إلى 13 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 44، سيستخدم الطلاب التمثيلات البيانية ودالة متعددة التعريف لمقارنة الدوال التربيعية ودوال الجذر التربيعي.

إجابات إضافية



160 | الدرس 3-1 | دوال الجذر التربيعي

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3

مثل كل دالة بيانًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

1. $y = 3\sqrt{x}$

2. $y = -5\sqrt{x}$

3. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

4. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

5. $y = \sqrt{x} + 3$

6. $y = \sqrt{x} - 2$

7. $y = \sqrt{x+2}$

8. $y = \sqrt{x-3}$

9. **المسقط الحر** الزمن t . بالوان، الذي يستغرقه جسم ما للمسقط على مسافة d . بالأمطار. يعطى بالدالة $t = \frac{5}{11}\sqrt{d}$ (مع افتراض صخرية مقاومة الهواء). مثل الدالة بيانًا. واذكر المجال وال المدى.

مثال 4

مثال 5

مثل كل دالة بيانًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

10. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 2$

11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x} - 1$

12. $y = -2\sqrt{x+1}$

13. $y = 3\sqrt{x-2}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3

مثل كل دالة بيانًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

14. $y = 5\sqrt{x}$

15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

16. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$

17. $y = 7\sqrt{x}$

18. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$

19. $y = -\sqrt{x}$

20. $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x}$

21. $y = -7\sqrt{x}$

22. $y = \sqrt{x} + 2$

23. $y = \sqrt{x} + 4$

24. $y = \sqrt{x} - 1$

25. $y = \sqrt{x} - 3$

26. $y = \sqrt{x} + 1.5$

27. $y = \sqrt{x} - 2.5$

28. $y = \sqrt{x+4}$

29. $y = \sqrt{x-4}$

30. $y = \sqrt{x+1}$

31. $y = \sqrt{x-0.5}$

32. $y = \sqrt{x+5}$

33. $y = \sqrt{x-1.5}$

34. **الهندسة** محيط المربع يعطى بالدالة $P = 4\sqrt{A}$ ، حيث A هي مساحة المربع.

مثال 4

a.

b. حدد محيط مربع له مساحة 225 m^2 .

c. متى سيصبح المحيط والمساحة بقيمة واحدة؟

مثال 5

مثل كل دالة بيانًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال وال المدى.

35. $y = -2\sqrt{x} + 2$

36. $y = -3\sqrt{x} - 3$

37. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+2}$

38. $y = -\sqrt{x-1}$

39. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x-1} + 2$

40. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$

41. **الطاقة** يكون لجسم ما طاقة حركية عندما يتحرك. السرعة المتجهة بالأمطار لكل ثانية لجسم ما كتلتها m كيلوجرامات بطاقة E جول. يعطى بالدالة $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة التي تغير عن السرعة المتجهة لكرة سلة كتلتها 0.6 كيلوجرام. بيانًا.

160 | الدرس 3-1 | دوال الجذر التربيعي

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
متدني (AL)	14-40, 47, 49-64	الأعداد الزوجية 14-40, 47, 49-52, 57-64
أساسي (OL)	الأعداد الفردية 15-39, 41-44, 47, 49-64	15-39, 41-44, 47, 49-52, 57-64
متقدم (BL)	41-64	

تدريس ممارسات في الرياضيات

الأدوات براعي الطلاب البارعون في الرياضيات الأدوات المتاحة أثناء حل مسألة رياضيات. في التمرين 48، شجّع الطلاب على اعتبار استخدام ورق التمثيل البياني أو إحدى تقنيات التمثيل البياني لمساعدتهم على كتابة دالتهم.



42. الهندسة نصف قطر الدائرة يعطى بالمعادلة $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. حيث A هي مساحة الدائرة.

a. مثل الدالة بيانياً.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحديد نصف قطر دائرة لها المساحة 27 cm^2 .

43. سرعة الصوت تحدد سرعة الصوت في الهواء بدرجة حرارة الهواء. السرعة v بالأمتار لكل ثانية تعطى بالمعادلة $v = 331.5 \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}}$ حيث t هي درجة حرارة الهواء بالدرجات المئوية.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانياً.

b. ما مدى سرعة انتقال الصوت عندما تكون درجة الحرارة 55°C ؟

c. كيف ستتأثر سرعة الصوت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى 65°C ؟

44. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والخطوط الكافئة.

a. بيانياً مثل $y = x^2$ بيانياً على نظام إحداثي.

b. جرباً اكتب دالة متعددة التعريف لوصف التمثيل البياني لـ $x = y^2$ في كل ربع.

c. بيانياً على النظام الإحداثي نفسه، مثل $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$ بيانياً.

d. بيانياً على النظام الإحداثي نفسه، مثل $y = x$ بيانياً. عتّن النقاط $(4, 2)$ ، و $(2, 4)$ ، و $(1, 1)$.

e. تحليلياً قارن بين التمثيل البياني للقطع الكافئ بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التحدي حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. أعط مثالاً أو مثلاً مضاداً لدعم إجابتك.

45. الأعداد في مجال الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائماً.

46. الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائماً.

47. **الكتابة في الرياضيات** لماذا توجد حدود لمجال دوال الجذر التربيعي ومدها؟

48. **الأدوات** اكتب دالة جذرية يكون مجالها كل الأعداد الحقيقية التي تكون أكبر من أو تساوي 2 ويكون مدها كل الأعداد الحقيقية التي تكون أقل من أو تساوي 5.

49. أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟ أوجد المعادلة التي لا تتوافق مع المجموعة. اشرح.

$$y = 3\sqrt{x}$$

$$y = 0.7\sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x} + 3$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{6}$$

50. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة تكون نتيجة انعكاس وإزاحة وشد للتمثيل البياني الأصلي لـ $y = \sqrt{x}$.

51. **التبرير** إذا كان مدى الدالة $y = a\sqrt{x}$ هو $y \leq 0$ ، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن قيمة a ؟ اشرح استنتاجك.

52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$.

تعيين مصطلح الرياضيات أعط الطلاب
دالة جذر تربيعي مثل $y = \sqrt{x - 5}$
واطلب منهم توضيح طريقة إيجاد مجال
الدالة ومداه.

55. أي مما يلي هي معادلة مستقيم مواز لـ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-1, -2)$ ؟

$$C \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

D $y = -\frac{1}{2}x - 2$

A $y = x^2$ C $y = \sqrt{x}$
B $y = 2^x$ D $y = x$

54. العبارة " $x < 10$ و $3x - 2 \geq 7$ " تكون صحيحة عندما x يساوي ماذا؟

F 0
G 2

57. **الصحة** تتمرن خولة كل يوم بالمشي والجري لمسافة لا تقل عن 3 كيلومترات، وتبشي خولة بعدد 4 كيلومترات في الساعة، وتجر 8 كيلومترات في الساعة. افترض أنه متاح لديها نصف ساعة فقط

b. أعط ثلاثة حلول ممكنة.

58. لتغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يعبر عن ارتباط موجب، أم سالب، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فاشرح دلالته في هذه الحالة.



61. 150rt

64. $-160x^2y^4$

162 | الدرس 3-1 | دوال الجذر التربيعي

التوسع اكتب عدة دوال جذر تربيعي على اللوحة. وكَلِّف الطلاب بتحديد المجال واليدى لكل منها. قد تمثل الأمثلة $y = \sqrt{3x+2}$ ، $y = -5\sqrt{\frac{x+2}{8}}$ أو $y = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$. شجّع الطلاب على تمثيل الدوال بيانياً للتحقق من المجال واليدى.

$$D: \left\{ x \mid x \geq -\frac{2}{3} \right\}; R = \{ y \mid y \geq 0 \}; D = \{ x \mid x \geq -2 \}; R = \{ y \mid y \leq 0 \}; D = \{ x \mid x > -2 \}; R = \{ y \mid y > 0 \}$$



مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي

3-1

1 التركيز

الهدف استخدم حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

المواد الخاصة لكل طالب

- حاسبة تمثيل بياني
- ورق مربعات

نصيحة للتدريس

قبل بدء هذه التجربة، عزّف الطلاب على خيار ZoomFit الموجود في الشاشة. هذا الخيار يسمح للحاسبة بتكبير نافذة العرض تلقائياً لتناسب التمثيل البياني. اقترح على الطلاب استخدام هذا الخيار للحصول على عرض أفضل لشكل التمثيل البياني لأي دالة جذر تربيعي.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعانة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات، متنوعة القدرات، مكونة من ثلاثة أو أربعة طلاب لإكمال النشاطين 1 و 2.

- اطلب من الطلاب استخدام عملية الضميمة من قائمة "CALC" لإيجاد قيمة الدالة عند قيم x مختلفة. اضغط $[2\text{nd}] [CALC] 1$ ثم أدخل قيمة x . من المفترض أن يرى الطلاب أن قيمة الدالة هي الجذر التربيعي لمجذور الدالة.

تمرين اطلب من الطلاب إتقان التمرينات من 1 إلى 5.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الثلاثة بطريقة إستراتيجية

لكي يكون الجذر التربيعي عدداً حقيقياً، لا يمكن أن يكون المجذور سالماً. عند تمثيل الدالة الجذرية بيانياً، حدد متى سيكون المجذور سالماً واستبعد هذه القيم من المجال.

النشاط 1 الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانياً.

أدخل المعادلة في الشاشة $Y=$ وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: $Y= [2\text{nd}] [\sqrt{}] [X,T,\theta,n] [=] [ZOOM]$ 6

1A. نتخض التمثيل البياني. ما مجال الدالة؟

1B. ما مدى الدالة؟



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-1, 1]$ scl: 1

النشاط 2 إزاحة الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x-2}$ بيانياً.

أدخل المعادلة في الشاشة $Y=$ وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: $Y= [2\text{nd}] [\sqrt{}] [X,T,\theta,n] [=] 2 [ZOOM]$ 6

2A. ما مجال الدالة ومداها؟

2B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x-2}$ والتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$ ؟



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-1, 1]$ scl: 1

تمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانياً. وارسم التمثيل البياني على الورقة. واذكر المجال والمداى. وشرح وجه الاختلاف بين التمثيل البياني عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$.

1. $y = \sqrt{x-1}$

2. $y = \sqrt{x+3}$

3. $y = \sqrt{x-2}$

4. $y = \sqrt{-x}$

5. $y = -\sqrt{x}$

6. $y = \sqrt{2x}$

7. $y = \sqrt{2-x}$

8. $y = \sqrt{x-3} + 2$

9. $x = y^2$

10. $x^2 + y^2 = 4$

11. $x^2 + y^2 = 2$

حلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد y . هل تمثل المعادلة دالة؟ اشرح استنتاجك.

أكتب دالة بتمثيل بياني يزيح $y = \sqrt{x}$ في كل اتجاه مما يلي.

12. إزاحة 4 وحدات يساراً

13. إزاحة 7 وحدات أعلى

14. إزاحة 6 وحدات لأسفل

15. إزاحة 5 وحدات يميناً و 3 وحدات أعلى

من العملي إلى النظري

استخدم التمرين 15 لتقويم إذا ما كان الطلاب يستطيعون كتابة دالة إذا كان لديهم وصف للتمثيل البياني للدالة.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 8 لتقويم إذا ما كان الطلاب يفهمون كيفية تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانياً ووصف كيفية اختلاف التمثيل البياني عن الدالة الأم.

المعادلات الجذرية

3-2



● طول خط الباء للثارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنعه حافة الباء عندما يكون الثارب مثبته وسرعة جسم الثارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها. يمكنك تقدير سرعة جسم الثارب h باستخدام الصيغة $h = 1.34\sqrt{\ell}$ حيث ℓ هو طول خط الباء للثارب الشراعي.

● أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.

● أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.

السابق

الحالي

لماذا؟

1 معادلات جذرية المعادلات التي تشتمل على متغيرات في صورة مجذور. مثل $h = 1.34\sqrt{\ell}$.
تسمى **معادلات جذرية** ولإيجاد حلها، يجب أولاً عزل المتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة. ثم يتم تربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

المفردات الجديدة
معادلات جذرية (radical equations)
حلول دخيلة (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح إذا قُسمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضاً.

الرموز إذا كان $a = b$ ، فإذا $a^2 = b^2$.

أمثلة إذا كان $\sqrt{x} = 4$ ، فإذا $(\sqrt{x})^2 = 4^2$.

مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار يبحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدوا أن سرعة جسم الثارب تبلغ 9 كيلومترات في الساعة بعد قياسها. فأوجد طول خط الباء للثارب الشراعي. قُرب إلى أقرب متر.

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك الثارب وأنها ترتبط بالطول.
التخطيط يقطع الثارب 9 كيلومترات في الساعة. صيغة سرعة جسم الثارب هي $h = 1.34\sqrt{\ell}$.

الحل صيغة سرعة جسم الثارب: $h = 1.34\sqrt{\ell}$
عوض h عن 9: $9 = 1.34\sqrt{\ell}$
اقسم كل طرف على 1.34: $\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$
بسط: $6.72 \approx \sqrt{\ell}$
قم بتربيع طرفي المعادلة: $(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$
بسط: $45.16 \approx \ell$

طول خط الباء للثارب الشراعي يبلغ حوالي 45 متراً. تحقق من طريق التحويل بالتقدير في الصيغة الأصلية.

التحقق صيغة سرعة جسم الثارب: $h = 1.34\sqrt{\ell}$
 $h = 9$ و $\ell = 45$: $9 \stackrel{?}{=} 1.34\sqrt{45}$
 $9 \approx 8.98899327$ ✓
أضرب.

1 التركيز

التخطيط الواسي

قبل الدرس 3-2 جمع التعابير الجذرية وطرحها وضربها.

الدرس 3-2 حل المعادلات الجذرية. حل المعادلات الجذرية بحلول دخيلة.

بعد الدرس 3-2 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا كنت تعرف قيمة h ، فما الذي تحتاج عزله بالمعادلة؟ $\sqrt{\ell}$
- يمكنك عزله اقسم كل طرف على 1.34.
- هل يمكنك إزالة إشارة الجذر؟ قم بتربيع كل طرف من أطراف بالمعادلة.

1 المعادلات الجذرية

المثال 1 توضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية بمتغير في المتجذر. **المثال 2** توضح كيفية حل معادلة جذرية ذات تعبير جذري كالمستجدر.

التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

- 1 ارتفاع السقوط الحر** إذا أسقط جسم من ارتفاع مجهول ووصل إلى الأرض في 5 ثوانٍ. استخدم المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{9.8}}$ علماً بأن t هو الوقت باللواني و h هو الارتفاع لإيجاد الارتفاع الذي أسقط منه الجسم. **120 m**
- 2** الحل $25 \cdot \sqrt{x-3} + 8 = 15$

2 حلول دخيلة

المثال 3 يوضح كيفية تحديد حلول دخيلة عند حل معادلة جذرية بمتغير على كل طرف من طرفي إشارة المساواة.

مثال إضافي

- 3** أوجد حل $\sqrt{2-y} = y$ تحقق من حلك. **1**

التركيز على محتوى الرياضيات

حلول المعادلات الجذرية عند حل المعادلات الجذرية، فمن المهم دائماً التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية، لأنه يمكن أن يكون حلاً واحداً أو أكثر خارجياً.

تمرين موجّه

- 1 القيادة** المعادلة $v = \sqrt{21.4t}$ تمثل السرعة المتجهة العصى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون جاذب إذا كانت v هي السرعة المتجهة العصى بالكيلومترات و t هو نصف قطر الانعطاف بالأمطار. إذا ضُم الطريق لسرعة أفصاها 505 كيلومترات في الساعة، فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، ازل الجذر أولاً، ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

مثال 2 التعبير في صورة مجذور

حلّ المعادلة: $\sqrt{a+5} + 7 = 12$.

$\sqrt{a+5} + 7 = 12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5} = 5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2 = 5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a+5 = 25$	بسط.
$a = 20$	اطرح 5 من كل طرف.

تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية.

- 2A. $\sqrt{c-3} - 2 = 4$ 2B. $4 + \sqrt{h+1} = 14$

انتبه!

تربيع كل طرف
تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرفي المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

2

الحلول الدخيلة في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلّ لا يُعتمد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

مثال 3 المتغير عند كل طرف

حلّ المعادلة: $\sqrt{k+1} = k-1$. تحقق من صحة الحل.

$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2 = (k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k+1 = k^2 - 2k + 1$	بسط.
$0 = k^2 - 3k$	اطرح k و 1 من كل طرف.
$0 = k(k-3)$	حلل إلى العوامل.
$k = 0$ or $k-3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k = 3$	الحل.
$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3-1$	$k = 3$
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	بسط
$2 = 2 \checkmark$	صواب

$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0-1$	$k = 0$
$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	بسط
$1 \neq -1 \times$	خطأ

بما أن 0 لا تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

- 3A. $\sqrt{t+5} = t+3 -1$ 3B. $x-3 = \sqrt{x-1}$

نصيحة دراسية

الحلول الدخيلة
عند التحقق من الحلول بحثاً عن الحلول الدخيلة، فحين لا نعلم سون بالجذور الأساسية.

التدريس المتميز

إن كان الطلاب على دراية بحسابات التمثيل البياني.

اطلب من الطلاب رسم تمثيل بياني للمثال 3 للتحقق من الحل. اطلب منهم طرح $k-1$ من كلا طرفي المعادلة وأدخل بعد ذلك المعادلة بالصورة $y_1 = \sqrt{x+1} - x + 1$ على **GRAPH**. اضغط على **2nd** **[CALC]** 2 **[2nd]** لحساب نقطة الصفر أو نقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x . حرك المؤشر إلى يسار نقطة التقاطع الحد الأيسر مع المحور x . اضغط على **ENTER**. وإلى يمين نقطة تقاطع الحد الأيسر مع المحور x واضغط على **ENTER**. اضغط على **ENTER** لتقديم إحداثيات نقطة التقاطع x .

إجابة إضافية

37. الإجابة النموذجية: اجمع أو اطرح أي تعابير ليست في الجذور من كل طرف. اضرب أو اقسم أية قيم غير موجودة في المتجذر على كل طرف. قم بتربيع كل طرف من أطراف المعادلة. أوجد حل المتغير كما فعلت سابقاً. انظر أمثلة الطلاب.

29. التمثيلات المتعددة تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$

- بيانياً امسح الشاشة $Y=$. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالتالي $Y1 = \sqrt{2x-7}$. وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالتالي $Y2 = x-7$. اضغط على **GRAPH**.
 - بيانياً ارسم ما هو مبين على الشاشة.
 - تحليلياً استخدم ميزة التقاطع مع المحور على شاشة **CALC** لإيجاد نقطة التقاطع.
 - تحليلياً حلّ المعادلة الجذرية جبرياً. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟
30. **التجربة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة. حجمها 162 سنتيمتراً مكعباً. يمكن إيجاد نصف قطر r الحاوية عن طريق استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$. حيث V هو حجم الحاوية و h هو الارتفاع.
- إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 سنتيمتر، فأوجد ارتفاعها. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.
 - إذا كان ارتفاع الحاوية 10 سنتيمترات، فأوجد نصف قطرها. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.

مسابك مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

إيمان	أسماء
$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$	$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$
$\sqrt{6-b}^2 = \sqrt{b+10}^2$	$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$
$6-b = b+10$	$6-b = b+10$
$2b = 4$	$-2b = 4$
$b = 2$	$b = -2$
التحقق $\sqrt{6-(2)} \neq \sqrt{(2)+10}$ $\sqrt{4} \neq \sqrt{12}$ لا يوجد حل	التحقق $\sqrt{6-(-2)} \neq \sqrt{(-2)+10}$ $\sqrt{8} \neq \sqrt{8}$ ✓

32. **التبوير** أي معادلة مما يلي حلها هو $\sqrt{x+2} = \sqrt{4}$ ؟ اشرح.
A. $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$ B. $4 = x + 2$ C. $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$
33. **التبوير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل $5 = \sqrt{x} + 1$ وحل $5 = \sqrt{x+1}$.
34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.
35. **التبوير** هل المعادلة التالية صحيحة أحياناً أم دائماً أم غير صحيحة على الإطلاق؟ اشرح.
 $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$
36. **التحدي** حلّ المعادلة $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$.
37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب توضيح كيف ساعد درس أمس في العمليات ذات التعابير الجذرية في درس اليوم في المعادلات الجذرية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

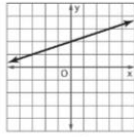
الهدوء اطلب من الطلاب كتابة مداخل في مدونة الفصل الدراسي عن الحلول الدخيلة. اطلب منهم توضيح طبيعة الحلول الدخيلة وكيف يمكنهم التحقق من حلولهم بيانياً وجبرياً.

إجابات إضافية

49. نعم؛ 12 هو العدد حقيقي ومن ثم أحادي الحد.
50. نعم؛ $4x^3$ هو ناتج عدد وثلاثة متغيرات.
51. لا؛ $a - 2b$ بوضوح الطرح وليس فقط الضرب في الأعداد والمتغيرات.
52. لا؛ $4n + 5p$ بوضوح الجمع وليس الضرب فقط في الأعداد والمتغيرات.
53. لا؛ $\frac{x}{y^2}$ يحتوي على متغير في الجذر.
54. نعم؛ $\frac{1}{5}abc^{14}$ هو ناتج عدد، $\frac{1}{5}$ وعدة متغيرات.

تدريب على الاختبار المعياري

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3
G $-\frac{1}{3}$

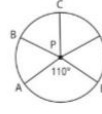
H $\frac{1}{3}$
J 3

41. ما حلول $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$ ؟

A 1, 6
B -1, -6

C 1
D 6

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقب عند A و B و C و D و E على الدائرة P.



إذا حفر حسن الثقب بحيث تكون $m\angle APE = 110^\circ$ وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس $m\angle CPD$ ؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون $w = 3$ ؟

A $\frac{w-3}{w+1}$
B $\frac{w^2-3w}{3w}$

C $\frac{w+1}{w^2-3w}$
D $\frac{3w}{3w^2}$

مراجعة شاملة

42. الكهرياء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية تعطى بالمعادلة $V = \sqrt{PR}$. حيث P هو القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأمم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

43. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$

44. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

45. $7\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$

46. $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$

47. $\sqrt{\frac{3c^2}{4d^3}}$

48. $\frac{\sqrt{9x^2y}}{\sqrt{16x^2y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية الحد. أكتب نعم أو لا؛ اشرح.

49. 12

50. $4x^3$

51. $a - 2b$

52. $4n + 5p$

53. $\frac{x}{y^2}$

54. $\frac{1}{5}$

مراجعة المهارات

بسط.

55. 9^2

56. 10^6

57. 4^5

58. $(8v)^2$

59. $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$

60. $(10y^2)^3$

التدريس المتمايز

التوسع وضح أن الوسط الهندسي لعددتين صحيحتين موجبتين هو الجذر التربيعي الموجب لنتاجهما. اطلب من الطلاب إيجاد زوج من الأعداد الزوجية المتتالية التي يكون الوسط الهندسي لها هو $4\sqrt{5}$. لأن $4\sqrt{5} = \sqrt{x(x+2)}$ ، أو $x = 8$ أو $x = -10$. نظراً لأن العددين موجبتين، فإن x يجب أن يساوي 8 ومن ثم، $x + 2 = 10$. العددين هما 8 و 10.

التقويم التكويني

استخدام الاختبار القصير بنصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل البجاء عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

مطويات منظّم الدراسة

Dinah Zike® مطويات

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة القصير، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 3-1 إلى 3-2 المكتوبة في مطوياتهم.

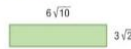
14. اختيار من متعدد أي من التعبيرات التالية يكافئ التعبير $\sqrt{\frac{16}{32}}$ (الدروس 3-2)

- F $\frac{1}{2}$
G $\frac{\sqrt{2}}{2}$
H 2
J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدروس 3-3)

15. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
16. $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$
17. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$
18. $\sqrt{27} - \sqrt{48}$
19. $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$
20. $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$
21. $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

22. هندسة أوجد مساحة المستطيل. (الدروس 3-3)



خسّل كل من المعادلات التالية، تحقق من صحة الحل. (الدروس 3-2)

23. $\sqrt{5x} - 1 = 4$
24. $\sqrt{a-2} = 6$
25. $\sqrt{15-x} = 4$
26. $\sqrt{3x^2-32} = x$
27. $\sqrt{2x-1} = 2x-7$
28. $\sqrt{x+1} + 2 = 4$

29. الهندسة المساحة الجانبية S للخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$ ، حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع الخروط. (الدروس 3-2)



مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي، واذكر المجال وال المدى. (الدروس 3-1)

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = -4\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
4. $y = \sqrt{x} - 3$
5. $y = \sqrt{x-1}$
6. $y = 2\sqrt{x-2}$

7. اختيار من متعدد طول ضلع المربع يعطى بالدالة $s = \sqrt{4}$ ، حيث A هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة 121 سنتيمترًا مربعًا؟ (الدروس 3-1)

- A 121 سنتيمتر
B 11 سنتيمتر
C 44 سنتيمتر
D 10 سنتيمترات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدروس 3-2)

8. $2\sqrt{25}$
9. $\sqrt{12} \sqrt{8}$
10. $\sqrt{72xy^5z^6}$
11. $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. الأقمار الصناعية أطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 كيلومتر. وتغطي السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصفحة $v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$ هي v هي السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و G هو ثابت تغطي، و m_E هي كتلة الأرض. r هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدروس 3-2)

- a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 متر. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟
b. كتلة الأرض هي 5.97×10^{24} كيلوجرام، والثابت G هو $6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.

3-3 التغير العكسي



- المسابق:**
- قمت بحل مسائل
 - مشتتلة على التغير الطردي.
- الحالي:**
- 1 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها.
 - 2 تمثيل التغيرات العكسية بيانياً.
- لماذا؟**
- الوقت الذي يستغرقه العداء لإتمام السباق يتناسب عكسياً مع متوسط وتيرة تقدمه. ويتناقص الوقت الذي يستغرقه العداء كلما ازدادت وتيرة تقدمه. إذاً تتناسب هاتان الكميتان عكسياً.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

بعد الدرس 3-3 حل المعادلات الجذرية.

الدرس 3-3 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها. تمثيل التغيرات العكسية بيانياً.

بعد الدرس 3-3 تحديد الدوال النسبية واستخدامها.

المفردات الجديدة
تغير عكسي
inverse variation
قاعدة ناتج الضرب
product rule

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل
والتجارة في حلها.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا كان العداء يحقق متوسط وتيرة تقدم 5 كيلو مترات في الساعة، فكم يستغرق من الوقت لتقطع مسافة 10 كيلو مترات؟ **ساعتان**
- إذا كان العداء يحقق متوسط وتيرة تقدم 6 كيلو مترات في الساعة، فكم يستغرق من الوقت لتقطع مسافة 10 كيلو مترات؟ **ساعة و 40 دقيقة**
- في كلتا الحالتين، ما العدد الذي لا يتغير؟ **المسافة، 10 كيلو مترات**

1 تحديد التغير العكسي واستخدامه يمكن تمثيل التغير العكسي بالمعادلة $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

y يتغير عكسياً مع x إذا وجد ثابت ما غير صفري k بحيث يكون $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $x, y \neq 0$.

في التغير العكسي، يبقى ناتج ضرب الخمتين ثابتاً. تذكر أن العلاقة التي تأتي بالصيغة $y = kx$ عبارة عن تغير طردي. الثابت k يطلق عليه ثابت التغير أو ثابت التناسب.

مثال 1 تحديد التغير العكسي والتغير الطردي

حدد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيراً عكسياً أم تغيراً طردياً. اشرح.

a.	<table> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> <tr><td>1</td><td>16</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td></tr> </table>	x	y	1	16	2	8	4	4
x	y								
1	16								
2	8								
4	4								
b.	<table> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> </table>	x	y	1	3	2	6	3	9
x	y								
1	3								
2	6								
3	9								

في أي تغير عكسي، xy يساوي الثابت k . أوجد xy لكل زوج مرتب في الجدول المبين.

$$1 \times 16 = 16 \quad 2 \times 8 = 16 \quad 4 \times 4 = 16$$

ناتج الضرب ثابت. إذاً الجدول يمثل تغيراً عكسياً.

$$3 = k(1) \quad 6 = k(2) \quad 9 = k(3)$$

$$3 = k \quad 3 = k \quad 3 = k$$

جدول الغم يمثل التغير الطردي $y = 3x$.

c. $x = 2y$

يمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة $y = \frac{1}{2}x$.
لذا، فإنها تمثل تغيراً طردياً.

d. $2xy = 10$

اكتب المعادلة:
أقسم كل طرف على 2:
 $xy = 5$

تمثل المعادلة تغيراً عكسياً.

تمرين موجّه

1A.

x	1	2	5
y	10	5	2

1B. $-2x = y$

يمكنك استخدام $xy = k$ لكتابة معادلة تغير عكسي تربط بين x و y .

مثال 2 كتابة التغير العكسي

افترض أن y يتغير عكسياً مع x . إذا كان $y = 18$ عندما يكون $x = 2$. فكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y .

$$\begin{aligned} xy &= k & \text{معادلة تغير عكسي} \\ 2(18) &= k & y = 18 \text{ و } x = 2 \\ 36 &= k & \text{بسط} \end{aligned}$$

ثابت التغير هو 36. إذا، المعادلة التي تربط بين x و y هي $xy = 36$ أو $y = \frac{36}{x}$.

تقويم موجّه

2. افترض أن y يتغير عكسياً مع x . إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = -4$. فكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y .

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن $x_1 y_1 = k$ و $x_2 y_2 = k$.

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= k & \text{عن } k \\ x_2 y_2 &= k & \text{عن } k \end{aligned}$$

المعادلة $x_1 y_1 = x_2 y_2$ تُسمى **قاعدة ناتج الضرب** للتغيرات العكسية.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي

الشرح إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن ناتجا ضرب $x_1 y_1$ و $x_2 y_2$ متساويين.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ أو } x_1 y_1 = x_2 y_2$$

مثال 3 الحل لإيجاد x أو y

افترض أن y يتغير عكسياً مع x . إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 12$. فأوجد x عندما يكون $y = 4$.

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= x_2 y_2 & \text{قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي} \\ 12 \times 3 &= x_2 \times 4 & x_1 = 12, y_1 = 3, y_2 = 4 \\ 36 &= x_2 \times 4 & \text{بسط} \\ \frac{36}{4} &= x_2 & \text{اقسم كل طرف على 4} \\ 9 &= x_2 & \text{بسط} \end{aligned}$$

إذا، عندما يكون $y = 4$ ، يكون $x = 9$.

تقويم موجّه

3. إذا كان y يتغير عكسياً مع x و $y = 4$ عندما يكون $x = -8$. فأوجد y عندما يكون $x = -4$.

يمكن استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي لكتابة معادلة بفرض حل مسائل من الحياة اليومية.

1 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها

المثال 1 توضيح كيفية تحديد التغيرات العكسية والطردية. **المثال 2** توضيح كيفية كتابة معادلة تغيرات عكسية للربط بين x و y . **المثال 3** توضيح كيفية استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغيرات العكسية لإيجاد قيمة x أو y . **المثال 4** توضيح كيفية استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغيرات العكسية لنمذجة موقف من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدّد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيراً عكسياً أم تغيراً طردياً. اشرح.

a.

x	6	8	10
y	3	4	5

التغير الطردى: $y = \frac{1}{2}x$.

b.

x	1	2	3
y	12	6	4

التغير العكسي: xy عبارة عن ثابت.

c. $-2xy = 20$ التغير العكسي؛ xy عبارة عن ثابت.

d. $x = 0.5y$ التغير الطردى؛ يمكن كتابة المعادلة في شكل $y = kx$.

2 افترض أن y يتغير عكسياً مثل x . إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 3$. اكتب معادلة التغير العكسي التي تربط بين x و y . $y = \frac{15}{x}$ أو $xy = 15$.

3 افترض أن y يتغير عكسياً مثل x . إذا كان $y = 5$ عندما $x = 12$. أوجد x عندما يكون $y = 15$.

قراءة في الرياضيات
معادلات التغير بالنسبة لمعادلات التغير الطردية: تقول إن y يتغير طردياً مع x . وبالنسبة لمعادلات التغير العكسي، تقول إن y يتغير عكسياً مع x .

مثال 4 من الحياة اليومية: استخدام التغير العكسي
 الفيزياء التصادم 8 لقرص الهوكي يتناسب عكسياً مع كتلته m . افترض أن قرص هوكي كتلته 164 جراماً تم ضربه بحيث يتسارع بمعدل 122 m/s^2 . أوجد تسارع قرص كتلته 158 جراماً إذا ضرب بنفس القدر من القوة.

القرص	الكتلة	التسارع
1	164 g	122 m/s^2
2	158 g	a_2

أنشئ جدولاً لتنظيم المعلومات.
 لكن، $m_1 = 164$ ، $a_1 = 122$ ، و $m_2 = 158$ ، $a_2 = ?$
 حل لإيجاد a_2
 استخدم قاعدة ناتج الضرب لكتابة معادلة: $m_1 a_1 = m_2 a_2$
 $164 \times 122 = 158 a_2$
 $20,008 = 158 a_2$
 بسط:
 $126.6 \approx a_2$
 قسم كل طرف على 158 وبسط:
 قرص هوكي كتلته 158 جراماً يكون له تسارع بمعدل 126.6 m/s^2 .

تمرين موجّه

4. السباق إذا كان عبد العزيز يركض بمتوسط 8 كيلومترات في الساعة، وأبني السباح في 0.39 ساعة، وأبني مارن السباح في 0.35 ساعة، فما متوسط وشرة تقدم مارن؟



الربط بالحياة اليومية
 قرص الهوكي القياسي يكون شبعته 2.5 سنتيمتر وطوره 7.6 سنتيمتر. وتتراوح كتلته بين 156 و 170 جراماً تقريبا.
 المصدر: كتاب دوري الهوكي الوطني للموسم

مثال إضافي

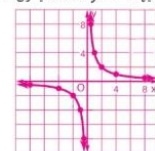
4 العلوم الطبيعية عندما تتم موازنة شخصين على أرجوحة، فإن مسافتهما من مركز الأرجوحة تتناسب عكسياً مع وزنيهما. ما المسافة التي يجب أن يبعدها الشخص البالغ وزنه 47 كيلوجراماً من مركز الأرجوحة للموازنة مع الشخص البالغ وزنه 29 كيلو جراماً والذي يبعد 1.06 متر من المركز؟ 0.65 m

2 التمثيل البياني للتغيرات العكسية

المثال 5 توضيح كيفية رسم تمثيل بياني لتغير عكسي يحتوي على قيم سالبة من x .

مثال إضافي

5 مثل معادلة تغير عكسي بيانياً، والتي فيها $y = 1$ عندما يكون $x = 4$.



التركيز على محتوى الرياضيات

التغير العكسي عندما يظل ناتج ضرب الكيتين ثابتاً، فإن الكميات تشكل تغيراً عكسياً. ويزيادة إحدى الكيتين، فإن الأخرى تقل. طالما $k > 0$ ، ناتج الضرب غير الصفري للكيتين xy يُطلق عليه ثابت التغير k .

تدريس ممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يفكر الطلاب المحترفون في الرياضيات في المسائل التناظرية ويجربون أشكالاً أبسط من المسألة الأصلية ليكتسبوا رؤية نافذة نحو حل المسألة. وضّح أن إجراء إنشاء جدول قيم وتمثيل النقاط بيانياً هو نفس الإجراء لأنواع المختلفة من الدوال.

2 تمثيل التغير العكسي بيانياً

التمثيل البياني للتغير العكسي خطاً مستقيماً مثل

مثال 5 تمثيل التغير العكسي بيانياً

مثل معادلة تغير عكسي بيانياً، والتي فيها $y = 8$ عندما يكون $x = 3$.

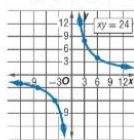
معادلة تغير عكسي
 $xy = k$
 $3(8) = k$
 $24 = k$
 بسط.

الخطوة 1 اكتب معادلة تغير عكسي.

معادلة التغير العكسي هي $xy = 24$ أو $y = \frac{24}{x}$.

الخطوة 2 اختر قيمة لكل من x و y بحيث يكون ناتج ضربهما 24.

الخطوة 3 عيّن كل نقطة وارسم منحنى منتظماً يصلها ببعض.



لاحظ أنه بما أن y غير معرف عندما يكون $x = 0$ ، فإنه لن توجد نقطة على التمثيل البياني عندما يكون $x = 0$. ونسعى لتمثيلها البياني قطعاً وانداً.

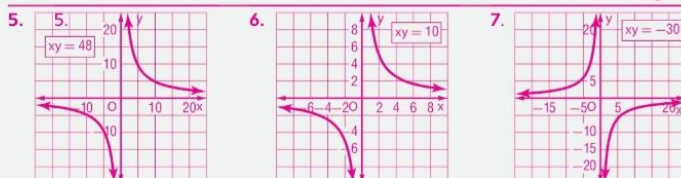
x	y
-12	-2
-8	-3
-4	-6
-2	-12
0	غير معرف
2	12
3	8
6	4
12	2

تمرين موجّه

5. مثل معادلة تغير عكسي بيانياً، والتي فيها $y = 16$ عندما يكون $x = 4$.

نصيحة في حل المسائل
الاستنتاج المنطقي
 أحياناً يلزم تقسيم المسألة إلى أجزاء، وحل كل جزء على حدة، ثم دمج حلول الأجزاء لإيجاد حل المسألة.

إجابات إضافية



3 تمرين

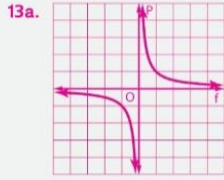
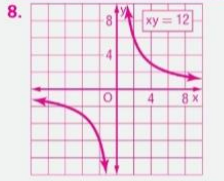
التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-13 للتحقق من استيعاب الطلاب.
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

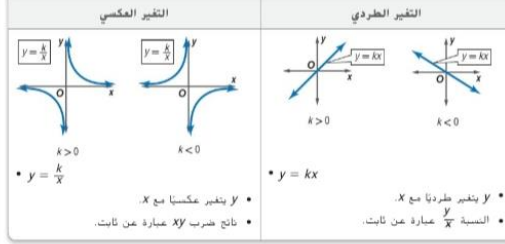
ملاحظات لحل التمرين

ورق المربعات للتمارين 5-8 و 13 و 22-27 و 51 وسيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

إجابات إضافية



ملخص المفهوم التغير الطردي و التغير العكسي



التحقق من فهمك

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

مثال 1

1.

x	1	4	8	12
y	2	8	16	24

2.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

3. $xy = 4$

4. $y = \frac{x}{10}$

المثالان 2 و 5 افترض أن y يتغير عكسيًا مع x . اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y . ثم مَسِّ المعادلة بيانيًا.

6. $y = 2$ عندما يكون $x = 5$

5. $y = 8$ عندما يكون $x = 6$

8. $y = -1$ عندما يكون $x = -12$

7. $y = 3$ عندما يكون $x = -10$

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x .

9. إذا كان $y = 8$ عندما يكون $x = 4$. فأوجد x عندما يكون $y = 2$.

10. إذا كان $y = 7$ عندما يكون $x = 6$. فأوجد y عندما يكون $x = -21$.

11. إذا كان $y = -5$ عندما يكون $x = 9$. فأوجد y عندما يكون $x = 6$.

12. السياق الوقت المستغرق لإكمال مسار سباق العربات الصغيرة يتناسب عكسيًا مع متوسط سرعة العربة الصغيرة. فإذا كان أحد المتسابقين متوسط سرعته 22.3 مترًا في الثانية وأكمل المسار في 30 ثانية. وأكمل متسابق آخر المسار في 25 ثانية. فما متوسط سرعة المتسابق الثاني؟

13. البصريات عندما لا تكون الرؤية واضحة لدى الشخص. فإن طبيب العيون يمكنه أن يصف له عدسات لتصحيح الحالة. قوة العدسة P . بوحدات تسمى ديوبتر. تساوي 1 مضمونًا على البعد البؤري f . بالأمتر. للعدسة.

a. مثل التغير العكسي $P = \frac{1}{f}$ بيانيًا.

b. أوجد قوى عدسات بعدها البؤري 0.2 + إلى -0.4 متر.

التدريس المتميز

إذا كان يحتاج الطلاب إلى تحدٍ في هذا الدرس.

عندئذٍ اقترح دعامة ورافعة وأوزانًا من مدرس علوم لإعادة إنشاء المثال الإضافي 4 أو التمرين 44. وبعد بعض التجارب. اطلب من الطلاب حساب المكان الذي يتم فيه وضع الأوزان على الرافعة للموازنة.

التحريين وحل المسائل

مثال 1

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

14.

x	y
1	30
2	15
5	6
6	5

15.

x	y
2	-6
3	-9
4	-12
5	-15

16.

x	y
-4	-2
-2	-1
2	1
4	2

17.

x	y
-5	8
-2	20
4	-10
8	-5

18. $5x - y = 0$

19. $xy = \frac{1}{4}$

20. $x = 14y$

21. $\frac{y}{x} = 9$

المثالان 5 و 2

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x . اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y . ثم مَثِّل المعادلة بيانيًا.

22. $y = 2$ عندما يكون $x = 20$ 23. $y = 18$ عندما يكون $x = 4$ 24. $y = -6$ عندما يكون $x = -3$
25. $y = -4$ عندما يكون $x = -3$ 26. $y = -4$ عندما يكون $x = 16$ 27. $y = 12$ عندما يكون $x = -9$

مثال 3

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x .

28. إذا كان $y = 12$ عندما يكون $x = 3$. فأوجد x عندما يكون $y = 6$.
29. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 6$. فأوجد x عندما يكون $y = 2$.
30. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 14$. فأوجد x عندما يكون $y = -5$.
31. إذا كان $y = 9$ عندما يكون $x = 9$. فأوجد y عندما يكون $x = -27$.
32. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = -2$. فأوجد y عندما يكون $x = 3$.
33. إذا كان $y = -8$ عندما يكون $x = -12$. فأوجد y عندما يكون $x = 10$.

مثال 4

34. علوم الأرض: يتغير مستوى الماء في النهر عكسيًا مع درجة حرارة الجو. عندما تكون درجة حرارة الجو 32° مئوية، يكون مستوى الماء 3.35 أمتار. فإذا كانت درجة حرارة الجو 43° ، فما مستوى الماء في النهر؟

35. الموسيقى: يتغير تردد الوتر البهتر في البيانو عكسيًا مع طول الوتر عند تطبيق ضغط متساو. فإذا كان يوجد وتر طوله 420 ملليمترًا بهتر بتردد 523 دورة في الثانية، فبأي تردد سيهتز وتر طوله 707 ملليمترًا؟

حدد إذا ما كانت كل حالة هي مثال للتغير العكسي أو التغير الطردي. برر استنتاجك.

36. يمكن أن يشتري نادي المسرح 10 قطع بسعر AED 2 لكل قطعة أو 5 قطع بسعر AED 4 لكل قطعة.
37. اشترت عائلة ربع عصائر ليمون بسعر AED 1.50 للعصير الواحد.
38. تجني أمال AED 14 نظير مجالسة الأطفال لمدة ساعتين، و AED 21 نظير مجالسة الأطفال لمدة 3 ساعات.
39. قطع معدنية للعبة فيديو تم تقسيمها بالتساوي على مجموعة من الأصدقاء.

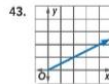
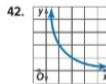
حدد إذا كان كل جدول أو تمثيل بياني يعبر عن تغير عكسي أم تغير طردي. اشرح.

40.

x	y
5	1
8	1.6
11	2.2

41.

x	y
-3	-7
-2	-10.5
4	5.25



خيارات الواجب المنزلي المتميزة

الثقة	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	14-35, 52, 54-74	14-34 زوجي, 52, 54-56, 61-74
OL أساسي	15-43, 44, 50-52, 54-74	36-52, 54-56, 61-74
BL متقدم	36-70, (اختياري: 71-74)	

تدريس ممارسات في الرياضيات

التفكير النقدي: يقرأ الطلاب المحترفون في الرياضيات افتراضات الآخرين ويحددون ما إذا كانت منطقية. في التحريين 52، وضع أن زوجًا فرديًا للضيقتين x و y يمكن أن يمثل تغيرًا طرديًا أو غير طردي. في هذه المسألة، x و y يمكن أن يتغيرا طرديًا.

إجابات إضافية

14. عكسي: $xy = 30$
15. طردي: $y = -3x$
16. طردي: $y = -\frac{1}{2}x$
17. عكسي: $xy = -40$
18. طردي: $y = 5x$
19. عكسي: $xy = \frac{1}{4}$
20. طردي: $y = kx$
21. طردي: $y = 9x$
36. عكسي: تكلفة كل باروكة مضروبًا في عدد الباروكات يساوي إجمالي المبلغ الذي يمكنهم دفعه، AED 20.
37. طردي: عدد الليمونات مضروبًا في تكلفة كل ليمونة يساوي التكلفة الإجمالية. لذا، النسبة الإجمالية التكلفة
عدد الليمونات هو ثابت AED 150.
38. طردي: عدد الساعات مضروبًا في معدل كل ساعة يساوي إجمالي الدفع. نسبة إجمالي المبلغ عدد الساعات الدفع هو ثابت AED 7.
39. عكسي: عدد الأصدقاء مضروبًا في عدد قطع النقود الرمزية لكل فرد يساوي ثابت 30.
40. طردي: $y = 0.2x$
41. عكسي: $xy = 21$
42. عكسي: $xy = 2$
43. طردي: $y = \frac{1}{2}x$
55. الإجابة النموذجية: يعتبر قانون القوة الجاذبية لنوتون مثالًا على التغير العكسي الذي يعمل على نمذجة مواقف من الحياة اليومية. قوة الجاذبية التي تُبذل في جسمين هي نسبة عكسية لترتيب المسافات بين الجسمين. القوة المبدولة في الجسمين مضروبة في ترتيب المسافة بين الجسمين تساوي ثابت الجاذبية مضروبًا في كتلة الجسمين.

إجابة إضافية

56. يمكن كتابة التغير الطردي في شكل $y = kx$ حيث k هو ثابت التناسب. التمثيل البياني لتغير طردي هو مستقيم خلال نقطة الأصل مع الميل k . التغير العكسي مكتوب في شكل $y = \frac{k}{x}$ التمثيل البياني عبارة عن منحنى من جزئين (قطع زائد).

44. **العلوم الفيزيائية** عندما يتوازن شخصان على أرجوحة، تكون المسافتان من مركز الأرجوحة متناسبتين عكسياً مع وزن الشخصين. فإذا كان شخص وزنه 53.5 كيلوجراماً يجلس على بعد 1.8 متر من مركز الأرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 56.7 كيلوجراماً أن يجلس عندها بعيداً عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسياً مع x .

45. إذا كان $y = 9.2$ عندما يكون $x = 6$ ، فأوجد x عندما يكون $y = 3$.

46. إذا كان $y = 3.8$ عندما يكون $x = 15$ ، فأوجد x عندما يكون $y = 0.3$.

47. إذا كان $y = \frac{1}{5}$ عندما يكون $x = -20$ ، فأوجد y عندما يكون $x = -\frac{8}{5}$.

48. إذا كان $y = -6.3$ عندما يكون $x = \frac{2}{3}$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 8$.

49. **السياحة** اشترى كل من بدر وخميس عضوية ارتفاع بحمام سياحة، وبالنسبة لكليهما، يتناسب متوسط التكلفة في اليوم عكسياً مع عدد الأيام التي يذهبان فيها إلى حمام السياحة. فإذا ذهب بدر إلى حمام السياحة 25 يوماً بمتوسط تكلفة 5.60 AED في اليوم، وذهب خميس إلى حمام السياحة 35 يوماً بمتوسط التكلفة في اليوم بالنسبة لخميس؟

50. **العلوم الفيزيائية** مقدار القوة المطلوبة للقيام بتمرين معين من العمل لتحريك جسم ما يتناسب عكسياً مع المسافة التي يتم تحريك الجسم فيها. افترض أن 90 N من القوة مطلوبة لتحريك جسم ما 10 أمتار، فأوجد القوة المطلوبة لتحريك جسم آخر 15 متراً إذا كان ينطوي على نفس القدر من العمل.

51. **القيادة** يجب أن تترنر بثينة على القيادة 40 ساعة مع أحد والديها أو أولياء أمورهما قبل السماح لها بإجراء اختبار للحصول على رخصة القيادة الخاصة بها. وهي تنوي الترنر بنفس عدد الساعات من كل أسبوع.

a. ليكن h يمثلًا لعدد الساعات في الأسبوع التي ستترنر فيها بثينة، أنشئ جدولاً بين عدد الأسابيع w التي سوف تحتاجها للترنر بالنسبة للقيام التالية لـ 1, 2, 4, 5, 8, 10.

b. اشرح كيف يتغير عدد الأسابيع كلما ازداد عدد الساعات في الأسبوع.

c. اكتب معادلة توضح العلاقة بين h و w ومثلها بيانياً.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. **التفكير النقدي** وجد أحمد وأمين معادلة يتغير فيها x و y عكسياً، ويكون $y = 10$ عندما يكون $x = 5$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.

أمين	أحمد
$k = xy$	$k = \frac{y}{x}$
$= (5/10) \text{ or } 50$	$= \frac{10}{2} = 5$
$y = \frac{50}{x}$	$y = 5x$

53. **التحدي** افترض أن f يتغير عكسياً مع g ، و g يتغير عكسياً مع h . ما العلاقة بين f و h ؟

54. **التبرير** هل $xy = -k$ تمثل تغيراً عكسياً عندما يكون $k \neq 0$ ؟ اشرح.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر حالة أو ظاهرة من الحياة اليومية يمكن تشبيهها بمعادلة تغير عكسي. استخدم المصطلحات الصحيحة لشرح مثالك وتفسير لماذا تعد هذه الحالة تغيراً عكسياً.

56. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التغير الطردي والتغير العكسي. قم بتضمين وصف للعلاقة بين الميل والتمثيل البياني للتغير الطردي والعكسي.

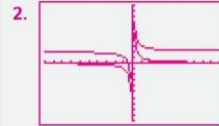
4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات قم بإعداد حقيبتين ورقيتين تحتويان على بطاقات ورقية، واحدة تحتوي على قيمة لـ x لكل بطاقة، والقيمة الأخرى y لكل بطاقة. اطلب من كل طالب تحديد القيمتين x و y واكتب معادلة تغير عكسي تربط بين y و x .

إجابات إضافية

61. موجب؛ يعني كلما ذاكتر، حصلت على درجة أفضل في الاختبار.

الإجابات الإضافية (الاستكشاف 4 - 3)

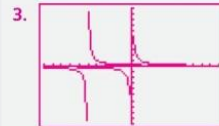


$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه، ولكن التمثيل البياني

$$y = \frac{1}{x} + 2 \text{ هو } y = \frac{1}{x}$$

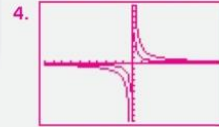
الوحدات أعلى التمثيل البياني $y = \frac{1}{x}$.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه، ولكن التمثيل البياني لـ

$$y = \frac{1}{x+5} \text{ هو } y = \frac{1}{x} \text{ على يسار التمثيل البياني لـ } y = \frac{1}{x}$$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

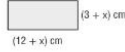
التمثيل البياني لـ $y = \frac{3}{x}$ أبعد من المحاور مقارنة بالتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$.

تدريب على الاختبار العملي

59. التخط حارب صورة ثعبان طوله متر واحد بجانب جدار من الطوب. عندما قام بتحريض الصور، بلغ طول الثعبان ذي المتر طولا سنتيمترين وارتفاع الجدار 4.5 سنتيمترات. فماذا كان الارتفاع العملي للجدار الطوبي؟

- A 2.25 cm
B 22.5 cm
C 225 cm
D 2250 cm

60. الإجابة القصيرة أوجد مساحة المستطيل.



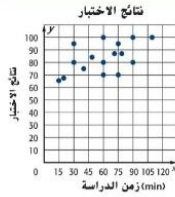
57. باعتبار وجود قوة ثابتة وأن تسارع جسم ما يتغير عكسياً مع كتلته، افترض أن هذه القوة الثابتة تطبق على جسم ما كتلته 6 كيلوجرامات وتنتج عنها تسارع معدله 10 m/s^2 . فإذا طُبقت نفس القوة على جسم آخر كتلته 12 كيلوجراماً، فماذا سيكون معدل التسارع الناتج؟

- A 4 m/s^2
B 5 m/s^2
C 6 m/s^2
D 7 m/s^2

58. إذا حصلت حياة على متوسط 56% في أول سعة اختبارات لها، فعلام ينبغي أن تحصل في اختبارها الثاني ليكون المتوسط 60% بالنسبة للاختبارات اللاحقة؟

- F 82%
G 88%
H 98%
J 100%

مراجعة شاملة



61. اختبارات حدد إذا ما كان التمثيل البياني على اليسار يعبر عن ارتباط موجب، أم سالب، أم لا يعبر عن أي ارتباط، وإذا وجد ارتباط، فوضح مدلوله.

افترض أن y يتغير طردياً مع x .

62. إذا كان $y = 2.5$ عندما يكون $x = 0.5$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 20$.

63. إذا كان $y = -6.6$ عندما يكون $x = 9.9$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 6.6$.

64. إذا كان $y = 2.6$ عندما يكون $x = 0.25$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 1.125$.

65. إذا كان $y = 6$ عندما يكون $x = 0.6$ ، فأوجد x عندما يكون $y = 12$.

66. المعرفة المالية باع يحصل على AED 32,000 في العام زائد 5% من قيمة البيعات التي يحققها. فما قيمة البيعات المطلوبة لكي يحصل على دخل سنوي أكبر من AED 45,000؟

مراجعة المهارات

بسط. افترض أن جميع المقامات لا تساوي الصفر.

67. $\frac{7^8}{7^6}$

68. $\frac{x^8 y^{12}}{x^2 y^7}$

69. $\frac{5pq^7}{10p^6q^3}$

70. $\left(\frac{2c^3d}{7z^2}\right)^3$

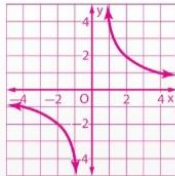
71. $\left(\frac{4a^2b}{2c^3}\right)^2$

72. $y^0(y^5)(y^{-9})$

73. $\frac{(4m^{-3}n^5)^0}{mn}$

74. $\frac{(3x^2y^3)^0}{(21x^3y^2)^0}$

التدريس المتمايز



التوسع اكتب $k = 4$ على اللوحة. اطلب من الطلاب كتابة ورسم تمثيل بياني لمعادلة تغير عكسي تستخدم 4 على أنها ثابت تغير. $xy = 4$



مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعة الدوال النسبية

3-4

استكشف 3-4

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحليل كيف يؤثر تغيير المعاملين a و b في صيغة $y = \frac{a}{x-b} + c$ على التمثيلات البيانية لمجموعة الدوال النسبية.

استكشف 3-4

1 التركيز

الهدف استكشاف مجموعات الدوال النسبية باستخدام تكنولوجيا التمثيل البياني.

المواد

- حاسبة تمثيل بياني

نصائح للتدريس

- دع الطلاب باستخدام **ZOOM** 6 لعرض التمثيلات البيانية في نافذة العرض القياسية.
- في الجزئين b و c ، يجب على الطلاب مسح القوائم $Y=$ للقيام. يمكنهم استخدام **CLEAR**.
- استخدم **TRACE** و **↓** أو **↑** لعرض المعادلة الخاصة بالتمثيل البياني.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الفصل في مجموعات ثنائية. تابع النشاط. اطلب من الطلاب التعاون مع زملائهم لإكمال التمرين 1.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 2 إلى 4.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 2 إلى 4 لتقويم قدرة كل طالب على التنبؤ بأوجه التشابه والاختلاف في الدوال النسبية.

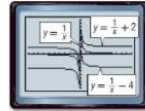
من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب التلخيص باستخدام التكنولوجيا لاستكشاف مجموعات الدوال النسبية.

النشاط تغيير المعاملات

مسّك كل مجموعة من المعادلات بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صف أي أوجه تشابه واختلاف بين التمثيلات البيانية.

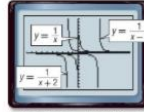
a. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = \frac{1}{x} - 4$



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

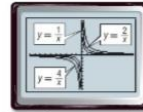
أدخل المعادلات في الشاشة $Y=$ ومكّنها بيانيًا في نافذة العرض القياسية. التمثيل البياني لهذا الشكل نفسه. كل تمثيل بياني يقترب من المحور y على كلا الجانبين. ولكن يختلف التمثيل البياني في الموضع الرأسي.

b. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x+2}$, $y = \frac{1}{x-4}$



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

c. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{4}{x}$



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الموضع الأفقي.

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الشكل.

النموذج والتحليل

1. كيف يؤثر a و b و c على التمثيل البياني لـ $y = \frac{a}{x-b} + c$ ؟ اذكر أمثلة.

تفحص كل زوج من المعادلات وتوقع أوجه التشابه والاختلاف من حيث التمثيل البياني لكل منهما. استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من توقعاتك. اكتب جملة واحدة أو جملتين تقارن بهما التمثيلين البيانيين.

2. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$

3. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x+5}$

4. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$

إجابة إضافية

- قيمة c تؤثر على الموضع الرأسي للتمثيل البياني. قيمة b تؤثر على الموضع الأفقي للتمثيل البياني. قيمة a تؤثر على التمثيل البياني. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x} + 5$ هو 5 وحدات فوق المحور x . التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x+5}$ هو 5 وحدات على يسار المحور y . التمثيل البياني لـ $y = \frac{5}{x}$ أبعد من المحاور مقارنة بالتمثيل البياني $y = \frac{1}{x}$.

الدوال النسبية 3-4



لماذا؟

- حلقة تقرأ كتاباً من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرأها كل يوم y يعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$ حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.

الحالي

1. تحديد القيم المستبعدة.
2. تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

السابق

- كتبت معادلات التعبير العكسي.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 كتابة معادلات التعبير العكسي.

الدرس 3-4 تحديد القيم المستبعدة. تحديد خطوط التقارب لتمثيل الدوال النسبية بيانياً واستخدامها.

ما بعد الدرس 3-4 استخدام الدوال النسبية لحل المسائل.

المفردات الجديدة

دالة نسبية rational function
قيمة مستبعدة excluded value
خط تقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات معقبة والتعليق على طرفة استنتاج الآخرين.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

2 التدريس

أسئلة الدائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما متوسط عدد الصفحات التي تقرأها حلقة في كل يوم؟ عدد الأيام التي تقرأ فيها
- ماذا يحدث إذا كانت قيمة y مثل x تزداد؟ فإنها تقل.
- ما هي قيم x التي تم استبعادها ولم تؤخذ في الاعتبار؟ x لا يمكن أن تساوي 0 أو أي عدد سالب.

1 تحديد القيم المستبعدة الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال للدالة النسبية. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح

هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة $y = \frac{p}{q}$ معادلة لها الصيغة $y = \frac{p}{q}$ حيث $q \neq 0$ و p كثيرات الحدود و $q \neq 0$ الدالة الأصلية. $f(x) = \frac{1}{x}$ نوع التمثيل البياني، قطع زائد النجاة، $\{x | x \neq 0\}$ النجاة، $\{y | y \neq 0\}$ النجاة.

التمثيل البياني

بما أن النسبة على صغر غير معززة، فأي قيمة للتعبير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية. يتم استبعادها من مجال الدالة. وتسمى هذه القيم بالقيم المستبعدة للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = \frac{2}{x}$

لا يمكن أن يساوي المقام 0 إذا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x+1}$

اجعل المقام يساوي 0.

$x+1=0$

$x=-1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$.

c. $y = \frac{5}{4x-8}$

$4x-8=0$

$4x=8$

$x=2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$.

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$

1B. $y = \frac{x}{x-7}$

1C. $y = \frac{4}{3x+9}$

بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفراً. من مجال الدالة النسبية. قد ينهي استبعاد قيم إضافية من المجال أيضاً. وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

السياق: إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمتار المربعة y لكل شخص. مثل هذه الدالة بيانياً.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفراً أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.



عدد الأشخاص x	10	5	4	2
أمتار مربعة لكل شخص y	2	4	5	10

لاحظ أنه كلما ازدادت x اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت المساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. **الهندسة:** مستطيل تبلغ مساحته 18 سنتيمتراً مربعاً. وتوضيح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثل الدالة بيانياً.



الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز، ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه. المصدر: مركز موارد لرحلات الفضاء

2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها في المثال 2. القيمة المستبعدة هي $x = 0$. لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المستقيم الرأسي $x = 0$. ولكن لا يسهه أبداً.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يسهه أبداً. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما خطين تقاربين. **خط التقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

المفهوم الأساسي: خطوط التقارب

الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x-b} + c$, $a \neq 0$ يكون لها خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفراً، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

الشرح:

خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفراً، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال

مجال $y = \frac{a}{x-b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. البدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع العلم الرصاص عن الورقة، لذا اختر قيم x على كلا جانبي خط التقارب الرأسي لتمثيل جزئي الدالة.

1 تحديد القيم المستبعدة

المثال 1 يوضح كيفية العثور على القيم المستبعدة للدوال النسبية. **المثال 2** يوضح كيفية رسم تمثيل بياني لدوال نسبية واقعية وتحديد القيم التي يمكن استبعادها.

التقويم التكويني

استخدم تمرينات التحقق من تقدمك الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = \frac{3}{x} \quad x = 0$

b. $y = \frac{3}{x+2} \quad x = -2$

c. $y = \frac{8}{2x+1} \quad x = -\frac{1}{2}$

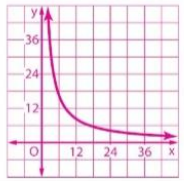
2 مساواة المواهب إذا كان x

سيكمل مساواة المواهب هذه التي تستمر 100 دقيقة، فإن الدالة $y = \frac{100}{x}$ التي تمثل عدد الدقائق متوفر لكل فعل.

اسم تمثيلاً بيانياً لكل لهذه الدالة. تمثيل بياني للقيم

الموجبة $y = \frac{100}{x}$ كما هو موضح أدناه من خلال (10, 10)

(5, 20), (20, 5), (25, 4)



إرشاد للمعلمين الجدد

المتنصل مقابل المتصل الدوال المستخدمة في المثال من الحياة اليومية 2 والمثال الإضافي 2 متنصلة وغير متنصلة.

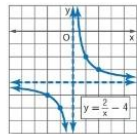
التدريس المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي يدرك معظم الطلاب أن الدالة ذات المقام الذي يساوي 10 غير محدد.

لمساعدة الطلاب في إدراك أن خطاً تقاربياً أفقياً يحدث في $y = c$ في دالة في شكل $y = \frac{a}{x-b} + c$ (حيث $a \neq 0$)، لديه طلاب يعقون جدول قيم لـ x و y وتمثيلاً بيانياً باستخدام المثال الموضح في المفهوم الأساسي. 1. $y = \frac{1}{x-2} + 1$ اطلب من الطلاب توسيع جدول القيم والتمثيل البياني حتى يوافقوا جميعاً أنه كلما زاد x أكثر فأكثر، y قارب 0، وأصبح y أقرب بشكل كبير لـ 1، الذي يشكل قيمة c .

مثال 3 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانياً

a. $y = \frac{2}{x} - 4$

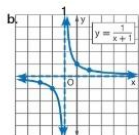


حدد خطوط التقارب وتمثلها بيانياً باستخدام الخطوط المتقطعة.

خط تقارب رأسي: $x = 0$
خط تقارب أفقي: $y = -4$

أنشئ جدولاً للقيم وعين النقاط، ثم صل بينها.

x	-2	-1	1	2
y	-5	-6	-2	-3



الخطوة 1 لإيجاد خط التقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستعدة.

اجعل المقام يساوي 0.
 $x + 1 = 0$
اطرح 1 من كل طرف.
 $x = -1$

خط تقارب رأسي: $x = -1$
خط تقارب أفقي: $y = 0$

x	-3	-2	0	1
y	-0.5	-1	1	0.5

تمرين موجّه

3A. $y = \frac{6}{x}$

3B. $y = \frac{1}{x-3}$

3C. $y = \frac{2}{x+2} + 1$

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

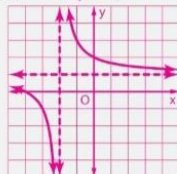
نسبية	جذرية	أسية	تربيعية
الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$ الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x-b} + c$	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$ الصيغة العامة: $y = \sqrt{x-b} + c$	الدالة الأصلية: تختلف الصيغة العامة: $y = ab^x$	الدالة الأصلية: $y = x^2$ الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$

180 | الدرس 3-4 | الدوال النسبية

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب تصوير تسجيلات فيديو توضح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانياً. اطلب منهم أولاً توضيح كيفية إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية ثم استخدام جدول قيم لرسم تمثيل بياني.

3C. $x = -2; y = 1$



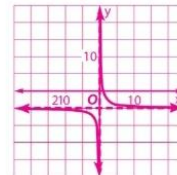
2 تحديد خط تقارب واستخدامه

المثال 3 توضيح كيفية تحديد خطوط تقارب لدالة واستخدامها لتمثيل الدالة بيانياً.

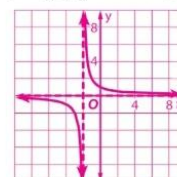
مثال إضافي

3 حدّد خطوط التقارب لكل دالة. ثم ممّن الدالة بيانياً.

a. $y = \frac{3}{x} - 4$ $x = 0; y = -4$

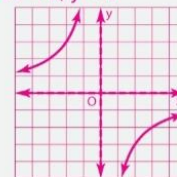


b. $y = \frac{2}{x+2}$ $x = -2; y = 0$

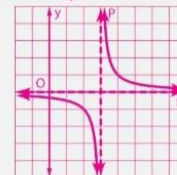


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3A. $x = 0; y = 0$



3B. $x = 3; y = 0$



180 | الدرس 3-4 | الدوال النسبية

تدريس ممارسات في الرياضيات

الفرضيات يمكن للطلاب الماهرين في مادة الرياضيات تحليل المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات وبيئتهم تعريف أمثلة مضادة واستخدامها. في التمرين 45، اقترح أن يرسم الطلاب تمثيلاً بيانياً لدالة نسبية وصوّر تحريك التمثيل البياني لاختبار الفرضية.

34. **الطيور** الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لبيئات 5000 كيلومتر أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة t بواسطة المعادلة $t = \frac{5000}{f}$ ، حيث f هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 ساعة في الطيران.



35. **رحلة ضمنية** سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيمسح كل شخص أيضاً ببعض مائي متساو لتسمية أحد النجوم.
- أكتب وصفاً لفظياً لتكلفة الشخص الواحد.
 - أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.
 - استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانياً. فسر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.
 - قدّر عدد الأشخاص المطلوبين ليساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي 15 AED.

مثّل كل دالة بيانياً. حدد خطوط التقارب.

$$36. y = \frac{4x+3}{2x-4}$$

$$37. y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$38. y = \frac{x}{x^2-9}$$

41. **الهندسة** المعادلة $h = \frac{2(64)}{b+8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 وحدة مربعة. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين متقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة، ويبلغ طول أحدهما b وحدات والآخر 8 وحدات.

- اذكر مجالا ومدى منطقيين للدالة.
- مثّل الدالة بيانياً في الربع الأول.
- استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. **التحدي** مثّل $y = \frac{1}{x^2-4}$ بيانياً. واذكر مجال الدالة ومداه.

40. **التحويل** دون عمل التمثيل البياني. اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x+5} - 2$.

41. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان التوازيان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

42. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثلاً مضاداً.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

43. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة** حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$$y = \frac{4}{x}$$

$$y = \frac{6}{x+1}$$

$$y = \frac{8}{x} + 1$$

$$y = \frac{10}{2x}$$

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

المعادلات النسبية 3-5

لماذا؟

أنواع الدلافين التي تعيش في المحيطات تستطيع السباحة بسرعة 8 كيلومترات في الساعة أسرع من الدلافين التي تعيش في السواحل. يستطيع الدلفين المحيطي السباحة لمسافة 4.8 كيلومترات في الوقت نفسه الذي يستغرقه الدلفين الساحلي للسباحة لمسافة 3.2 كيلومترات.

الدلافين		
النوع	المسافة	الزمن
الساحلي	x kmph	t ساعات
المحيطي	$x + 8$ kmph	t ساعات

بما أن الزمن = المسافة ÷ المعدل، فإن المعادلة التالية تمثل هذه الحالة:

الزمن الذي يسبح فيه الدلفين المحيطي يساوي الزمن الذي يسبح فيه الدلفين الساحلي.

المسافة ÷ المعدل = الزمن

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$

الحالي

1 حل المعادلات النسبية.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

السابق

وجدت حل التناسبات.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-5 تمثيل الدوال النسبية بيانياً.

الدرس 3-5 حل المعادلات النسبية. استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

بعد الدرس 3-5 استخدام الإحصائيات لتحليل البيانات.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- عند قطع الدلفين الساحلي مسافة x كيلومتر في الساعة، فما المعدل الذي يقطعه الدلفين المحيطي؟ $(x + 5)$ km/h
- عندما يقطع الدلفين الساحلي 2 كيلومتر، فما المسافة التي يقطعها الدلفين المحيطي؟ 3 كيلومترات
- في الوقت الذي يقطع فيه الدلفين المحيطي ليلو 6 أميال، ما الذي تعرفه بشأن المسافة التي يقطعها الدلفين الساحلي؟ إنه يقطع مسافة 4 كيلومترات.

المفردات الجديدة
معادلة نسبية (rational equation)
حل دخل (extraneous solution)
مسألة عمل (work problem)
مسألة معدل (rate problem)

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريبية
وكيفية
استخدام نماذج الرياضيات.

حل المعادلات النسبية تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. عندما تكون المعادلة النسبية عبارة عن تناسب، يمكنك استخدام الضرب التبادلي لحلها.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الضرب التبادلي لحل المعادلات

الدلافين راجع المعلومات المذكورة أعلاه. حل $\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$. لإيجاد سرعة الدلفين الساحلي. تحقق من الحل.

$$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$$

$$4.8x = 3.2x + 25.6$$

$$16x = 25.6$$

$$x = 16$$

المعادلة الأصلية

أوجد ناتج الضرب التبادلي.

خاصية التوزيع

اطرح $3.2x$ من كل طرف.

إذا، يستطيع الدلفين الساحلي السباحة بسرعة 16 كيلومتراً في الساعة.

التحقق

المعادلة الأصلية

عوض عن x بـ 16.

بسط.

بسط.

تمرين موجّه

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

1A. $\frac{7}{y-3} = \frac{3}{y+1}$

1B. $\frac{13}{10} = \frac{2f+0.2}{7}$

يمكن استخدام طريقة أخرى لحل أي معادلة نسبية وهي بإيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور في المعادلة. ثم بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور.

مثال 2 استخدام المقام المشترك الأصغر لحل المعادلات النسبية

حل المعادلة: $5 = \frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1}$. تحقق من الحل.

الحل: أوجد المقام المشترك الأصغر.

المقام المشترك الأصغر لـ $\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1}$ هو $y(y+1)$.

خطوة 2 اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر.

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر $y(y+1)$.

$$y(y+1) \left(\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} \right) = y(y+1)(5)$$

$$(y+1) \cdot 4 + y \cdot 5y = y(y+1)(5)$$

$$4y + 4 + 5y^2 = 5y^2 + 5y$$

$$4y + 4 + 5y^2 - 5y^2 = 5y^2 - 5y^2 + 5y$$

$$4y + 4 = 5y$$

$$4y - 4y + 4 = 5y - 4y$$

$$4 = y$$

التحقق

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{4}{4} + \frac{5(4)}{4+1} \stackrel{?}{=} 5$$

$$1 + 4 \stackrel{?}{=} 5$$

$$5 = 5 \quad \checkmark$$

تمرين موجّه

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

$$2A. \frac{2b-5}{b-2} - 2 = \frac{3}{b+2}$$

$$2B. 1 + \frac{1}{c+2} = \frac{28}{c^2+2c}$$

$$2C. \frac{y+2}{y-2} - \frac{2}{y+2} = -\frac{7}{3}$$

$$2D. \frac{n}{3n+6} - \frac{n}{5n+10} = \frac{2}{5}$$

تذكر أن أي قيمة للمتغير تجعل مقام التعبير النسبي صفراً يجب استبعادها من المجال.

وبنفس الطريقة، عندما ينتج عن حل المعادلة النسبية صفر في المقام، فإنه ينبغي استبعاد هذا الحل.

وتسمى مثل هذه الحلول **بالحلول الدخيلة**.

$$\frac{4+x}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \quad 5, 0, \text{ و } -1 \text{ لا يمكن أن تكون حلولاً.}$$

1 حل المعادلات النسبية

المثال 1 يوضح كيفية استخدام ناتج الضرب التفاضلي لحل التعبيرات النسبية عندما يكون كلا طرفي المعادلة عبارة عن كسور فرية. **المثال 2** يوضح كيفية حل المعادلات النسبية عن طريق ضرب كل طرف بالمعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور. **المثال 3** يوضح كيفية تحديد الحلول الخارجية عندما يكون كلا طرفي المعادلة النسبية مضروباً في المقام المشترك الأصغر للتعبير النسبية التي تشكل المعادلة.

التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 الأصدقاء

يمكن لسعيد أن يجري مسافة 3 كيلومترات في الساعة أسرع من سلطان. ويمكن لسعيد أن يجري 5 كيلومترات في نفس الوقت الذي يقطعه سلطان ليجري 3 كيلومترات. الحل $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+3}$ لإيجاد مدى سرعة سلطان، تحقق من الحل $\frac{4}{x} = \frac{1}{x+3}$ **4 كيلومتر في الساعة**

2 الحل $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2+x}$ تحقق من الحل $\frac{3}{4}$

افتيه!

تجنب الأخطاء اقترح على الطلاب أخذ ملاحظات ذهنية لغيم المتغير الذي يجعل المقام يساوي صفراً.

اقترح أن يتحقق الطلاب من حلولهم عن طريق تعويضهم بالرجوع إلى المعادلة الأصلية.

نصيحة دراسية
الحلول من الضروري التحقق من حلول المعادلات النسبية لتأكد من أنك حققت المعادلة الأصلية.

الربط بالمفردات
دخيل
الاستخدام اليومي
غير ذي صلة أو غير مهم
حل
دخيل
الاستخدام الرياضي
يُعتبر حلاً للمعادلة الأصلية

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض التمثيل البياني للدالة الجذرية على اللوحة، قم بحل المعادلة جبرياً ووضح للطلاب كيفية ارتباط هذا الحل بالتمثيل البياني. احفظ ملاحظاتك بتنسيق PDF وانشرها على موقع الويب الخاص بفضلك.

مثال 3: الحلول الدخيلة

حل $5 = \frac{2n}{n-5} + \frac{4n-30}{n-5}$ واذكر أي حلول دخيلة.

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n-5} + \frac{4n-30}{n-5} &= 5 && \text{المعادلة الأصلية} \\ (n-5) \left(\frac{2n}{n-5} + \frac{4n-30}{n-5} \right) &= (n-5) \cdot 5 && \text{اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، } n-5. \\ \left(\frac{2n}{1} + \frac{4n-30}{1} \right) &= (n-5) \cdot 5 && \text{خاصية التوزيع} \\ 2n + 4n - 30 &= 5n - 25 && \text{بسط.} \\ 6n - 30 &= 5n - 25 && \text{اجمع الحدود المتشابهة.} \\ 6n - 5n - 30 &= 5n - 5n - 25 && \text{اطرح } 5n \text{ من كل طرف.} \\ n - 30 &= -25 && \text{بسط.} \\ n - 30 + 30 &= -25 + 30 && \text{اجمع } 30 \text{ إلى كل طرف.} \\ n &= 5 && \text{بسط.} \end{aligned}$$

بما أن $n = 5$ ينتج عنه صفر في مقام المعادلة الأصلية، فهو حل دخيل. إذا، المعادلة ليس لها حل.

تمرين موجّه

3. حل المعادلة: $2 = \frac{10}{n^2-4} - \frac{3n}{n^2-4}$ واذكر أي حلول دخيلة.

نصيحة دراسية

الحلول من الممكن أن تحمل على كل من حل صالح وحل دخيل عند حل معادلة نسبية.

مثال إضافي

3 الحل $6 = \frac{6x-9}{x-1} + \frac{3x}{x-1}$. اذكر أي حلول خارجية. لا يوجد حل؛ 1

انتبه!

المفاهيم الخاطئة لدى الطلاب أكد على أنه يجب حل المعادلة لإيجاد الحلول ولتحديد ما إذا كانت الحلول خارجية. قيمة المتغير التي تجعل المقام صفرًا ليست بالضرورة حلًا دخيلًا للمعادلة النسبية.

التركيز على محتوى الرياضيات

الجذور الدخيلة إنها دائمًا مهمة للتحقق من الحل معادلة بالمعادلة الأصلية. ولكنها مهمة على وجه الخصوص عند ضرب كل طرف للمعادلة في متغير. إذا كان حلك تقريبيًا، فإنه أحيانًا يكون صعبًا لتحديد ما إذا كانت الاختلافات بسبب التقريب أو إذا كان الحل غير صحيح.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

المثال 4 يوضّح كيفية استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل الكلامية الواقعية. **المثال 5** يوضّح كيفية استخدام معادلات نسبية لحل مسائل النسب من الحياة الواقعية.

مثال إضافي

4 **تركيب التلفاز** في يوم السبت تساعد خولة والدها في تركيب أجهزة التلفاز المتصلة بالتمر الصاعدي. تستغرق البهام من والد خولة حوالي $2\frac{1}{2}$ ساعة، ولكن عندما تساعد خولة يستغرق الأمر $1\frac{1}{4}$ ساعة. إذا كانت خولة تعمل على تركيب جهاز تمر صناعي بنفسها، فكم تستغرق البهمة منها؟ $3\frac{3}{4}$ ساعة

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل يمكنك استخدام المعادلات النسبية لحل مسائل العمل أو مسائل تشتمل على معدلات العمل.

مثال 4 من الحياة اليومية مسألة عمل

وظائف في هذه الوظيفة ذات الدوام الجزئي في حديقة الحيوان، يستطيع رشيد تنظيف ساحة الطيور في ساعتين، ويستطيع حسام تنظيف الساحة نفسها في ساعة و 15 دقيقة. كم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

الفهم يستغرق رشيد ساعتين لإكمال العمل ويستغرق حسام $1\frac{1}{4}$ ساعة.

أنت تحتاج إلى إيجاد معدل عمل كل شخص والزمن الإجمالي t المستغرق منهما لإكمال العمل معًا.

التخطيط أوجد الكسر الذي يعبر عن العمل الذي يقوم به كل شخص في ساعة.

معدل رشيد $\leftarrow \frac{1}{2}$ عمل لكل ساعة

معدل حسام $\leftarrow \frac{1}{4}$ عمل - أو $\frac{1}{5}$ عمل لكل ساعة

بما أن المعدل \times الزمن = الكسر العبر عن العمل المنجز، فاضرب كل معدل في الزمن t لتشيل كمية العمل المنجز لكل شخص.

مثال إضافي

5 الحافلة تغادر الحافلة المحطة وتقطع متوسط مسافة 80 كيلومترا في الساعة تجاه المدينة. وهناك حافلة أخرى تغادر نفس المحطة بعد 20 دقيقة وتقطع نفس المسافة إلى المدينة والتي تبلغ 96 كيلومترا في الساعة؟ **ساعة وأربعين دقيقة، أو $\frac{2}{3}$ ساعة**

تدريس الممارسات في الرياضيات
الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكليات وعلاقتها بالمواقف المذكورة في المسائل. شجع على حل المسائل التي يعملون عليها بأنفسهم من خلال تخطيط معادلة ما وكتابتها على النحو الموضح في المثال 4.

عمل واحد يساوي الكسر البعير زائد الكسر البعير عن عمل رشيد البنجر

$$\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t = 1$$

اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، 10.

$$10(\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t) = 10(1)$$

خاصية التوزيع

$$10(\frac{1}{2}t) + 10(\frac{4}{5}t) = 10$$

بسط.

$$5t + 8t = 10$$

اجمع الحدود المتشابهة واقسم كل طرف على 13.

$$t = \frac{10}{13}$$

إذا، سيستغرقان $\frac{10}{13}$ ساعة أو حوالي 46 دقيقة لإنجاز العمل إذا عملا معا.

التحقق في $\frac{10}{13}$ ساعة، سوف بنجر رشيد $\frac{10}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{13}$ من العمل وسوف بنجر خسام $\frac{10}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{13}$ من العمل. معا، سينجزان $\frac{4}{13} + \frac{5}{13} = \frac{9}{13}$ أو عملا واحدا كاملا. إذا، الإجابة صحيحة. ✓

نصيحة دراسية
الاستنتاج عند حل مسائل العمل، تذكر أن المخطط الذي يمثل مرزا من العمل البنجر، يجب أن يكون بوحدة زمنية واحدة.

تمرين موجّه

4. كنس ورق الشجر تستطيع علياء كنس ورق الشجر في ساعتين. ويستغرق ذلك من أخيها زياد 3 ساعات. كم من الوقت سيستغرقان في كنس ورق الشجر إذا عملا معا؟

يمكن استخدام المعادلات النسبية أيضًا لحل **مسائل المعدل**

مثال 5 من الحياة اليومية: مسألة المعدل

الطائرات أقلعت طائرة وكانت تطير بمتوسط 772 كيلومترا في الساعة. بعد 15 دقيقة، غادرت طائرة أخرى واتجهت نحو المدينة نفسها بمعدل 900 كيلومتر في الساعة. كم من الوقت ستستغرق الطائرة الثانية لاجتياز الطائرة الأولى؟

دوّن المعلومات التي تعرفها في جدول.

الطائرة	المسافة	المعدل	الزمن
1	d كيلومترا	772 كيلومترا	t ساعات
2	d كيلومترا	900 كيلومتر	$t - \frac{1}{4}$ ساعة

بما أن كلتا الطائرتين ستكون سافرتا المسافة نفسها عندما تلتحق الطائرة 2 بالطائرة 1، فإنه يمكنك كتابة المعادلة التالية.

مسافة الطائرة 1 = مسافة الطائرة 2

المسافة = المعدل \times الزمن

$$772 \times t = 900 \times (t - \frac{1}{4})$$

خاصية التوزيع

$$772t = (900 \times t) - (900 \times \frac{1}{4})$$

بسط.

$$772t = 900t - 225$$

اطرح $560t$ من كل طرف.

$$-80t = -225$$

اقسم كل طرف على -80.

$$t = 1.75$$

إذا، ستلتحق الطائرة الثانية بالطائرة الأولى بعد 1.75 ساعة.

تمرين موجّه

5. غادرت مدي النزل وسارت بمعدل 3 كيلومترات في الساعة. بعد 10 دقائق، غادرت أمها النزل وسارت بالدراجة بمعدل 10 كيلومترات في الساعة. فبعد كم دقيقة، سلتحق الأم بابنتها؟



الربط بالحياة اليومية
تبلغ أطول رحلة جوية تجارية دون توقف 21,600 كيلومتر من مطار هونغ كونغ في الصين إلى مطار لندن - هيثرو في المملكة المتحدة. واستغرقت الرحلة 22 ساعة و42 دقيقة.

Macmillan-McGraw Hill Education © جميع الحقوق محفوظة

التدريس المتمايز

إذا كان نتخذ أن الطلاب قد يستفيدوا عن طريق تمثيل مفهوم في هذا الدرس.

عندما اطلب من الطلاب الرجوع إلى المثال 5. اطلب منهم تصميم مسألة نسبية يمكن لطلابهم حلها مثل سير مسافة معينة. اطلب من الطالبين البدء في وقت مختلف عن بعضهما. الطالب الذي بدأ متأخرا يستغرق خطوات أكثر في الثانية من الآخر. اطلب من طالب آخر تسجيل الوقت الذي تجاوز فيه طالب الآخر. ثم اعمل على حل المسألة لتوضيح إذا كانت الحسابات تعكس الوقت الفعلي.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 8-11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يقوم الطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات بإنشاء تمثيل منطقي للمسألة التي يقومون بحلها. في التمرين 28، ذكر الطلاب بخص حلولهم فيما يتعلق بالموقف.

الافتراضات يمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 39، ذكر الطلاب بأن المثال المضاد عبارة عن حالة خاصة تكون فيها العبارة خاطئة. لذا، إنهم بحاجة إلى كتابة معادلة نسبية بالحل 0.

إجابات إضافية

25a. المستقيم

$$25b. f(x) = \frac{x(x+5)(x-6)}{x-6} = x+5$$

$$25c. -5$$

26a. قطع مكافئ

$$26b. f(x) = \frac{x(x+2)(x-1)}{x+2} = x(x-1)$$

$$26c. 0, 1$$

27a. قطع مكافئ

$$27b. f(x) = x^2 + 6x + 12$$

27c. لا توجد أصفار حقيقية

التحقق من فهمك

حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

الأمثلة 1-3

$$1. \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x} \quad 2. \frac{t+3}{5} = \frac{2t+3}{9} \quad 3. \frac{a+3}{a} - \frac{6}{5a} = \frac{1}{a} \\ 4. 4 - \frac{p}{p-1} = \frac{2}{p-1} \quad 5. \frac{2t}{t+1} + \frac{4}{t-1} = 2 \quad 6. \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$$

مثال 4

7. إزالة الأعشاب الضارة يستطيع سلطان إزالة الأعشاب الضارة بالحديقة في 45 دقيقة. وتستطيع أخته عمير القيام بذلك في 50 دقيقة. فكم سيستغرقان من الوقت لإزالة الأعشاب الضارة بالحديقة إذا عملاً معاً؟

مثال 5

8. تنسيق الحدائق بدأ أمير دلوًا سعة 13.2 لترًا لري النباتات من صنوبر يتدفق منه الماء بمعدل 6.6 لترًا في الدقيقة. إذا كان سيضيف خرطومًا يتدفق منه الماء بمعدل 5.4 لترًا في الدقيقة، فكم عدد الدقائق التي سيستغرقها لملء الدلو؟ قُرب إلى أقرب جزء من عشرة.

التمرين وحل المسائل

حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

الأمثلة 1-3

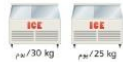
$$9. \frac{8}{n} = \frac{3}{n-5} \quad 10. \frac{6}{t+2} = \frac{4}{t} \quad 11. \frac{3g+2}{12} = \frac{g}{2} \\ 12. \frac{5h}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3h}{8} \quad 13. \frac{2}{3w} = \frac{2}{15} + \frac{12}{5w} \quad 14. \frac{c-4}{c+1} = \frac{c}{c-1} \\ 15. \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = -1 \quad 16. \frac{y+4}{y-2} + \frac{6}{y-2} = \frac{1}{y+3} \\ 17. \frac{a}{a+3} + \frac{a^2}{a+3} = 2 \quad 18. \frac{12}{a+3} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{8}{a+3} \\ 19. \frac{3n}{n-1} + \frac{6n-9}{n-1} = 6 \quad 20. \frac{n^2-n-6}{n^2-n} - \frac{n-5}{n-1} = \frac{n-3}{n^2-n}$$

مثال 4

21. الطلاء إذا كان سعيد يستغرق 3 ساعات لطلاء جانب واحد من السياج. ويستغرق ذلك من طارق 5 ساعات. فكم من الوقت سيستغرق ذلك منهما إذا عملاً معاً؟

مثال 5

22. غسل الصحون إذا كان عبيد يعمل غاسلاً للصحون ويستطيع غسل 500 صحن في ساعتين و 15 دقيقة. ويستطيع عبد الرحمن إنهاء 500 صحن في 3 ساعات. فكم سيستغرقان من الوقت لإنهاء كل الصحون إذا عملاً معاً؟



23. الثلج إذا كان الفندق به جهازان لصنع الثلج في المطبخ، فكم عدد الساعات التي سيستغرقها الجهازان لصنع 60 kg من الثلج؟ قُرب إلى أقرب جزء من عشرة.

24. قيادة الدراجات إذا أتجه فائدة دراجتين كل في اتجاه معاكس للأخر في مسار دائري طوله 5.6 كيلومترات. وبدأ في الوقت نفسه. وأكمل فائدة الدراجة الأول المسار في 22 دقيقة وفائدة الدراجة الثاني في 28 دقيقة. ففي أي وقت تجاوز كل منهما الآخر؟

حاسبة التمثيل البياني بالنسبة لكل دالة. (a) صف شكل التمثيل البياني. (b) استخدم التحليل إلى العوامل لتحول الدالة لأبسط صورة. (c) أوجد أصفار الدالة.

$$25. f(x) = \frac{x^2 - x - 30}{x - 6} \quad 26. f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2} \quad 27. f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x}$$

28. التبرير إذا كان عبد الكريم يستطيع طلاء منزل مساحته قياسية في حوالي 5 أيام. واستأجر مساعدين اثنين ليهتمه الأخيرة. فبأي معدل يجب على هذين المساعدين العمل لصالح عبد الكريم للوفاء بالموعد النهائي البالغ يومين؟

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

الثقة	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	9-24, 37-57	37-40, 45-57 زوجي 10-24
OL أساسي	9-27, 28-31, 33, 35, 37-57	9-24, 41-44 فردي 25-35, 37-40, 45-57
BL متقدم	25-57	

إجابة إضافية

38. الإجابة النموذجية: ضرب كل طرف بالمعادلة النسبية في المقام المشترك الأصغر يمكن أن يؤدي إلى حلول دخيلة. وبالتالي، يجب التحقق من جميع الحلول للتأكد من أنها تقي بالمعادلة الأصلية.

29. **الطائرات** إذا كانت الرياح المعاكسة تهب في اتجاه الطائرة وتظل من سرعتها الإجمالية، في حين تدفع الرياح الخلفية الطائرة وتزيد من سرعتها الإجمالية. لكن W يساوي سرعة الرياح. T يساوي السرعة التي حددها الطيار، و S يساوي السرعة الإجمالية.

- a. أكتب معادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح المعاكسة ومعادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح الخلفية.
b. استخدم قاعدة البعد لكتابة معادلة للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح المعاكسة ومعادلة أخرى للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح الخلفية. ثم حل كل معادلة لإيجاد الزمن بدلاً من المسافة.

30. **كوكيتل العصائر** إذا كان بائع عصائر العاكية لديه 3 لترات من عصير الأناناس ولتران من عصير البرتقال، وتريد فتحه إضافة المزيد من عصير البرتقال بحيث يكون 60% من كوكيتل عصير العاكية من عصير البرتقال. لكن x يساوي لترات عصير البرتقال التي تريد إضافتها.

- a. اسخ الجدول التالي وأكمله.

العصير	لترات عصير البرتقال	إجمالي لترات العصير	النسبة المئوية لعصير البرتقال
الكوكيتل الأصلي		5	
الكوكيتل النهائي	$x + 2$		0.6

- b. أكتب معادلة وحلها لإيجاد لترات عصير البرتقال المطلوب إضافتها.

31. **السكن الجماعي** إذا كان عدد الساعات h المستغرقة في تنظيف السكن الجماعي يتغير عكسياً مع عدد الأشخاص الذين ينظفونه، C ويتغير طردياً مع عدد الأشخاص الذين يعيشون هناك p .

- a. فأكتب معادلة توضح الارتباط بين h ، و C ، و p . (إرشاد: قم بتعيين الثابت K).
b. إذا كان تنظيف السكن الجماعي يستغرق 8 ساعات من 5 أشخاص عندما يوجد 100 شخص ساكن، فكم سيستغرق تنظيف السكن إذا كان يوجد 10 أشخاص ينظفون ولا زال عدد الأشخاص الذين يعيشون في السكن كما هو؟

حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

$$32. \frac{4b+2}{b^2-3b} + \frac{b+2}{b} = \frac{b-1}{b}$$

$$33. \frac{x^2-x-6}{x+2} + \frac{x^2+x^2}{x} = 3$$

$$34. \frac{y^2+5y-6}{y^3-2y^2} = \frac{5}{y} - \frac{6}{y^3-2y^2}$$

$$35. \frac{x-\frac{6}{5}}{x} = \frac{x-10\frac{1}{2}}{x-5} = \frac{x+21}{x^2-5x}$$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. التحدي حل المعادلة، $\frac{2x}{x-2} + \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$

37. **التبرير** ما وجه الارتباط بين القيمة المستبعدة من التعبير النسبي والحل الدخيل للمعادلة النسبية المناظرة؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يجب عليك التحقق من حلولك للمعادلات النسبية؟

39. **الفرضيات** أوجد مثالاً مضاداً للعبارة التالية.

حل المعادلة النسبية لا يمكن أبداً أن يكون صفراً.

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوات حل معادلة نسبية لا تكون عبارة عن تناسب.

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدهم معرفة تبسيط التعابير المختلطة في درس اليوم.

تدريب على الاختبار المعياري

43. تم صب عشرين لترا من عصير الليمون في وعائين لهما حجم مختلف. عثر عن كمية عصير الليمون التي تم صبها في الوعاء الأصغر بدلالة g . وهي الكمية التي تم صبها في الوعاء الأكبر.

A $g + 20$
B $20 + g$

C $g - 20$
D $20 - g$

44. الإجابة الشبكية صالة ألعاب رياضية بها أفراص ذات وزن كيلوجرامين و 5 كيلوجرامات. ويوجد أربعون قرصا بشكل إجمالي. فإذا كان الوزن الإجمالي لأفراص الكيلوجرامين هو نفسه الوزن الإجمالي لأفراص 5 كيلوجرامات. فكم عدد أفراص الكيلوجرامين الموجودة؟

41. يستغرق علي 4 ساعات في بناء سياج. وإذا استأجر عمر لمساعدته، فسوف يكتهما إنجاز العمل في 3 ساعات. فإذا بنى عمر السياج نفسه بمفرده، فكم من الوقت سيستغرق منه ذلك؟

A $1\frac{1}{2}$ ساعة
B $3\frac{2}{3}$ ساعات
C 8 ساعات
D 12 ساعة

42. في سباق 1000 متر، أكمل عدنان 35 مترا قبل منصور و 53 مترا قبل أوب. فما المسافة التي سبق منصور بها عدنان؟

F 18 m G 35 m H 53 m J 88 m

مراجعة شاملة

45. **التعداد السكاني** يشهد التعداد السكاني في دولة ما تناقصا سنويا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

46. **الطباطم** يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطباطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبدور تنتج عبوات بدور لـ 200 صنف من الطباطم، فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بدورا لها؟

47. **القيادة** يجب أن يبقى ضغط الإطارات في حدود مطلقين للبوصة البريعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مدى قيم الضغط المقبولة؟

عثر عن كل عدد بالصيغة العلمية.

48. 12,300

49. 0.0000375

50. 1,255,000

51. **المعرفة المالية** إذا كان مع محمد 13 AED لطلب بيتزا. وتبلغ تكلفة البيتزا 7.50 AED زائد 1.25 AED لكل إضافة. وهو يعتزم دفع 15% من التكلفة الإجمالية بيشيل. أكتب متباينة وحلها لإيجاد عدد الإضافات التي يمكن أن يطلبها.

حل كل متباينة. تحقق من صحة الحل.

52. $\frac{b}{10} \leq 5$

53. $-7 > -\frac{r}{7}$

54. $\frac{5}{8}y \geq -15$

مراجعة المهارات

حدد احتمال وقوع كل حدث إذا قيمت باختيار كرة زجاجية من حقيبة تحتوي على 9 كرات حمراء، و 6 كرات زرقاء، و 5 كرات صفراء.

55. $P(\text{زرقاء})$

56. $P(\text{حمراء})$

57. $P(\text{ليست صفراء})$

التدريس المتقدم

التوسع الحل $\frac{a}{x} = \frac{2}{3}$ لـ x فيما يتعلق بـ a . $x = \frac{3a}{2}$



مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات النسبية

التوسع 3-5

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية عن طريق التمثيل البياني، واستخدام الحداول وأحد النظم الجبرية الحاسوبية (CAS).

للحل بالتمثيل البياني، مثل تبايناً كلا طرفي المعادلة وحدد موقع نقطة (نقاط) التقاطع.

1 التركيز

الهدف حل المعادلات النسبية باستخدام تكنولوجيا التمثيل البياني.

المواد

- حاسبة تمثيل بياني

نصائح للتدريس

- للمنشاط 1 الخطوة 3، دُكر الطلاب بإدخال $\frac{5}{x+2}$ ، وسيحتاجون لوضع الأقواس حول المقام. وسيحتاجون إلى استخدام المفتاح tab لتحريك المؤشر خط الإدخال لكتابة $\frac{3}{x}$ في $f_2(x)$.
- عند تغيير إعدادات windows استخدم المفتاح tab للانتقال من حقل إلى آخر.
- يمكن أيضاً استخدام برنامج ورقة بيانات لإكمال النشاط 2.
- بالنسبة للمنشاط 3، دُكر الطلاب بأنهم لا يمكنهم تعديل خط بمجرد الضغط على enter. ومع ذلك، يمكنهم استخدام ctrl x و ctrl c لنسخ ولصق خط ثم القيام بإجراء التعديلات.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الفصل إلى مجموعات ثنائية، واعمل مع الصف على إتمام النشاط 1. ثم اطلب منهم التعاون مع زملائهم لإكمال التمارين من 1 إلى 10 والنشاطين 2 و 3. **تمرين** اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 11 إلى 15.

النشاط 1 حل المعادلة النسبية بالتمثيل البياني

حل المعادلة: $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 أضف صفحة Graphs جديدة.

الخطوة 2 استخدم خيار Window Settings من قائمة Window/Zoom لضبط النافذة إلى -20 إلى 20 بالنسبة لكل من X و Y اضبط المقاييس إلى 2.

الخطوة 3 أدخل $\frac{5}{x+2}$ إلى $f_1(x)$ و $\frac{3}{x}$ إلى $f_2(x)$.

الخطوة 4 غير شكل التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ عن طريق تحديد التمثيل البياني لـ $f_2(x)$ وخيار ctrl menu Attributes.

الخطوة 5 استخدم أداة Intersection Point(s) لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. حدد التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ ثم التمثيل البياني لـ $f_2(x)$ enter.



[-20, 20] scl: 2 يعمل [-20, 20] scl: 2

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند النقطة (3, 1)، وهذا يعني أن $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ كليهما يساويان 1 عندما يكون $x = 3$. إذاً، حل $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ هو $x = 3$.

تمارين

استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل كل معادلة.

1. $\frac{5}{x} + \frac{4}{x} = 10$

2. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

3. $\frac{6}{x} + \frac{3}{2x} = 12$

4. $\frac{4}{x} + \frac{3}{4x} = \frac{1}{8}$

5. $\frac{4}{x} + \frac{x-2}{2x} = x$

6. $\frac{3}{3x-2} + \frac{5}{x} = 0$

7. $\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{2}{x}$

8. $\frac{x}{x+2} + x = \frac{5x+8}{x+2}$

9. $\frac{1}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$

10. $\frac{4x-3}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} = 6$

مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات النسبية

3 التتويج

إرشاد للمعلمين الجدد

استخدام الجداول وضح للطلاب أن طريقة الجدول فقط تنجح عندما تشمل الجدول قيم الحلول X . إذا كان الحل غير موجود مع جدول ذي قيم أعداد صحيحة لـ X ، يجب على الطلاب تعديل القيم X أو استخدام طريقة أخرى لإيجاد أي حلول.

التتويج التكويني

استخدم التمارين من 16 إلى 19 لتتويج معرفة الطلاب بحل المعادلات النسبية.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص استخدام التكنولوجيا لإيجاد الحلول للمعادلات النسبية.

النشاط 2 حل المعادلة النسبية باستخدام جدول

حل المعادلة: $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ باستخدام جدول.

الخطوة 1 أضف صفحة Lists & Spreadsheet جديدة.

الخطوة 2 قم بتسمية العمود A بـ X . أدخل القيم من -4 إلى 4 في الخلايا A1 إلى A9.

الخطوة 3 في العمود B في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيسر من المعادلة النسبية مع وضع ثوابت الحدود بين أقواس. في العمود C في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيمن من المعادلة النسبية مع وضع ثوابت الحدود بين أقواس. حدد Variable Reference عندما يُطلب منك.

مُزّر حتى ترى أين تتساوى القيم في العمودين B و C. يحدث هذا عند $X = 4$. لذا، حل $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ هو 4.



يمكنك استخدام نظام جبري حاسوبي (CAS) أيضًا لحل المعادلات النسبية.

النشاط 3 حل المعادلة النسبية باستخدام نظام جبري حاسوبي

حل المعادلة: $\frac{x-3}{x} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{x}$ باستخدام نظام جبري حاسوبي (CAS).

الخطوة 1 أضف صفحة Calculator جديدة.

الخطوة 2 لحل المعادلة، حدد أرم Solve من الشاشة Algebra. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة مع وضع ثوابت الحدود بين الأقواس. أدخل = والطرف الأيمن من المعادلة. ثم أكتب فاصلة وأتبعها بـ X . ثم اضغط enter سيظهر الحل، 4.



تمارين

حل كل معادلة مما يلي باستخدام جدول أو نظام جبري حاسوبي.

11. $\frac{2}{x} + \frac{2+x}{2} = \frac{x+3}{2}$

12. $\frac{4}{x-2} = -\frac{1}{x+3}$

13. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 0$

14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 0$

15. $\frac{2}{x+4} + \frac{4}{x-1} = 0$

16. $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{4} = 2x$

17. $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{2} = x$

18. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x}$

19. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = x$

التقويم التكويني

المفردات الأساسية إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-7. فذكرهم أنه يمكنهم مراجعة الدروس لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

المطويات منظّم الدراسة

مطويات Dinah Zike®

اطلب من الطلاب إلغاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا أمثلة إلى مطوياتهم لكل درس بالوحدة. واقترح على الطلاب إنشاء مطوياتهم معهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة. ووضح أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

دوال الجذر التربيعي (الدرس 1-3)

- تستل دالة الجذر التربيعي على الجذر التربيعي لمتغير.
- الدالة الأصلية لمجموعة دوال الجذر التربيعي تكون $f(x) = \sqrt{x}$.



المعادلات الجذرية (الدرس 2-3)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما لا يوجد جذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
- لا يوجد أي جذور مشترك على كسور.
- لا يظهر أي جذور في مقام كسر.

التغير العكسي (الدرس 3-3)

- يمكنك استخدام $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لحل المسائل المشتملة على تغير عكسي.

الدوال النسبية (الدرس 4-4)

- القيم المستبعدة هي قيم متغير ينتج عنها مقام صفري.
- إذا حدثت خطوط مغاربة رأسية، فسوف تقع عند قيم مستبعدة.

المعادلات النسبية (الدرس 5-5)

- استخدم الضرب المتبادلي لحل المعادلات النسبية ذات كسر واحد على كل طرف من طرفي علامة يساوي.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

radical	دالة جذرية	asymptote	خط تقارب
function	مغلقة	closed	مغلقة
radicand	مغلق	conjugate	مرافق
rate problem	مسألة معدل	excluded	قيمة مستبعدة
rationalize	إنتاج المقام	value	قيمة
the denominator	المقام	extraneous	حل دخيل
function	دالة	solution	حل
rational	نسبية	inverse	تغير عكسي
equation	معادلة	variation	تغير
root	جذر	product rule	قاعدة ناتج الضرب
function	دالة	radical	معادلات جذرية
square	مربع	equations	معادلات
work problem	مسألة عمل	expression	تعبير جذري

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة أو التعبير أو العدد الذي تحته خط لصياغة جملة صحيحة.

1. التعبيران $12\sqrt{4}$ و $\sqrt{288}$ متكافئان.
2. التعبيران $2 + \sqrt{5}$ و $\sqrt{5} + 2$ مترافقان.
3. في التعبير $-5\sqrt{2}$ ، يكون الجذور هو 2.
4. إذا كان ناتج ضرب متغيرين عبارة عن ثابت غير صفري، فإن العلاقة بينهما تكون تقييداً عكسياً.
5. إذا كان المتغير $x = 8$ خطاً تقاربياً لأبسط لدالة ضمنية، فإذا تكون 8 قيمة مستبعدة.
6. القيم المستبعدة من التعبير $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ هي -2 و -3 .
7. المعادلة $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$ لها حل دخيل 2.

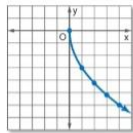
مراجعة درس بدرس

3-1 دوال الجذر التربيعي

مثال 1 مثل كل دالة بيانياً. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمداي.

x	0	1	2	3	4
y	0	-3	-4.2	-5.2	-6

أبشّر جدولاً. اختر قُبْنا غير سالبة لـ x .



التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ شدد رأسياً وانعكس على المحور x . المجال هو $\{x | x \geq 0\}$. المداي هو $\{y | y \leq 0\}$.

مثال 2 مثل كل دالة بيانياً. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمداي.

8. $y = \sqrt{x} - 3$
9. $y = \sqrt{x} + 2$
10. $y = -5\sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x} - 6$
12. $y = \sqrt{x} - 1$
13. $y = \sqrt{x} + 5$

14. الهندسة يمكن استخدام الدالة $s = \sqrt{A}$ لإيجاد طول ضلع المربع النحلي مساحته. استخدم هذه الدالة لاكتشاف طول ضلع مربع مساحته 90 سنتيمتراً مربعاً. قُرب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

مثال 2 حلّ المعادلة، $\sqrt{7x+4} - 18 = 5$.

- المعادلة الأصلية: $\sqrt{7x+4} - 18 = 5$
- اجمع 18 إلى كل طرف. $\sqrt{7x+4} = 23$
- قم بتربيع كل طرف. $(\sqrt{7x+4})^2 = 23^2$
- بسّط. $7x+4 = 529$
- اطرح 4 من كل طرف. $7x = 525$
- اقسم كل طرف على 7. $x = 75$
- المعادلة الأصلية: $\sqrt{7(75)+4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$
- اضرب. $\sqrt{529} - 18 \stackrel{?}{=} 5$
- اجمع. $23 - 18 \stackrel{?}{=} 5$
- بسّط. $5 = 5$ ✓
- صحيح.

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

34. $10 + 2\sqrt{x} = 0$
35. $\sqrt{5-4x} - 6 = 7$
36. $\sqrt{a+4} = 6$
37. $\sqrt{3x} = 2$
38. $\sqrt{x+4} = x-8$
39. $\sqrt{3x-14} + x = 6$

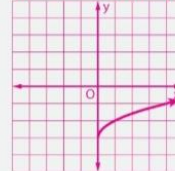
40. السقوط الحر يفترض عدم وجود مقاومة للهواء. يمكن إيجاد الزمن t بالثواني الذي يستغرقه جسم ما للسقوط من t أمتار. باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ، إذا فُز لاعب فُز حر من طائرة وكان في سقوط حر لمدة 10 ثوانٍ قبل فتح الخطة، فكم عدد أمتار السقوط الحر؟

مراجعة درس بدرس

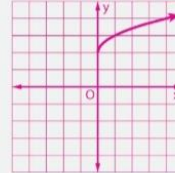
التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة. فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدتهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

8. انزياح للأسفل بمقدار 3 وحدات: $D = \{x | x \geq 0\}$ $R = \{y | y \geq 3\}$

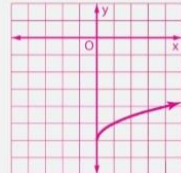


9. انزياح للأسفل بمقدار 2 وحدة: $D = \{x | x \geq 0\}$ $R = \{y | y \geq -2\}$



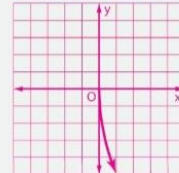
11. انزياح للأسفل بمقدار 6 وحدات:

$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \geq -6\}$$



10. تمّدد رأسي وانعكاس على المحور x

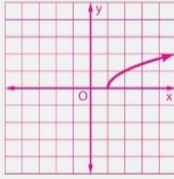
$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \leq 0\}$$



إجابات إضافية

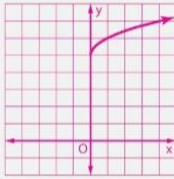
12. انزياح لليمين ببعدار وحدة واحدة:

$$D = \{x | x \geq 1\}, R = \{y | y \geq 0\}$$



13. انزياح لأعلى ببعدار 5 وحدات:

$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \geq 5\}$$



مراجعة درس بدرس

3-3 التغير العكسي

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسياً مع x .

41. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 1$ ، فأوجد x عندما يكون $y = 12$.

42. إذا كان $y = -1$ عندما يكون $x = -3$ ، فأوجد y عندما يكون $x = -9$.

43. إذا كان $y = 1.5$ عندما يكون $x = 6$ ، فأوجد y عندما يكون $x = -16$.

44. **الفيثاء** إذا كان شخص وزنه 61 كيلوجراماً يجلس على بعد 15 m من مركز أرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 49 كيلوجراماً أن يجلس عندها بعيداً عن المركز لئلا تارة الأرجوحة؟

لذا: $x = 21$ عندما يكون $y = 56$.

مثال 3

إذا كان y يتغير عكسياً مع x و $y = 28$ عندما يكون $x = 42$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 56$.

ليكن $x_1 = 42$ و $x_2 = 56$ و $y_1 = 28$ حل لإيجاد y_2 .

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \quad \text{تناسب للتغير العكسي}$$

$$\frac{42}{56} = \frac{y_2}{28} \quad \text{التعويض}$$

الضرب التبادلي:

$$1176 = 56y_2$$

$$21 = y_2$$

3-4 الدوال النسبية

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

45. $y = \frac{1}{x-3}$ 46. $y = \frac{2}{2x-5}$

47. $y = \frac{3}{3x-6}$ 48. $y = \frac{-1}{2x+8}$

49. **حقل البيثا** طلبت هيام بيثا ومياها غازية للمجموعة الدراسية لديها مقابل AED 38. التكلفة لكل شخص y تُعطى بالمعادلة $y = \frac{38}{x}$ ، حيث x هو عدد الأشخاص في المجموعة الدراسية. مثل الدالة بياناً واذكر الخطوط المقاربة.

مثال 4

اذكر القيمة المستبعدة من الدالة $y = \frac{1}{4x+16}$.

اجعل المقام يساوي الصفر.

$$4x + 16 = 0$$

اطرح 16 من كل طرف.

$$4x + 16 - 16 = 0 - 16$$

بسط.

$$4x = -16$$

اقسم كل طرف على 4.

$$x = -4$$

3-5 المعادلات النسبية

حل كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

50. $\frac{5n}{6} + \frac{1}{n-2} = \frac{n+1}{3(n-2)}$

51. $\frac{4x}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7x}{12} - 14$

52. $\frac{11}{2x} + \frac{2}{4x} = \frac{1}{4}$

53. $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2+3x-4}$

54. $\frac{1}{n-2} = \frac{n}{8}$

55. **الطلاب** إذا كانت وفاء تستطع طلاء غرفة في 6 ساعات، وتستطيع هانا طلاء الغرفة في 4 ساعات، فكم تستغرقان من الوقت لطلاء الغرفة إذا عملتا معاً؟

مثال 5

حل المعادلة: $\frac{3}{x^2+3x} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{x}$

$$\frac{3}{x^2+3x} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{x}$$

$$x(x+3)\left(\frac{3}{x(x+3)} + \frac{x+2}{x+3}\right) = x(x+3)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3 + x(x+2) = 1(x+3)$$

$$3 + x^2 + 2x = x + 3$$

$$x^2 + x = 0$$

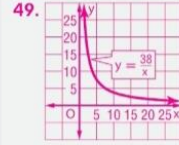
$$x(x+1) = 0$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 0$$

الحل هو -1. ويوجد حل دخيل يساوي 0.

3 تدريب على الاختبار

إجابة إضافية



خط التقارب الرأسي عند $x = 0$
وخط التقارب الأفقي عند $y = 0$

مثل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي، واذكر المجال والمداي.

- $y = -\sqrt{x}$
- $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$
- $y = \sqrt{x} + 5$
- $y = \sqrt{x + 4}$

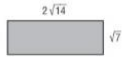
5. اختبار من متعدد طول ضلع المربع يغطي بالدالة $S = \sqrt{A}$ حيث A هي مساحة المربع، ما محيط دائرة مساحتها 64 سنتيمترًا مربعًا؟

- A 64 سنتيمترًا
B 8 سنتيمترات
C 32 سنتيمترًا
D 16 سنتيمترًا

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

- $5\sqrt{36}$
- $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$
- $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$
- $3\sqrt{6(5\sqrt{2})}$

10. اختبار من متعدد أوجد مساحة المستطيل.



- F $7\sqrt{2}$
G 14
H $14\sqrt{2}$
J $98\sqrt{2}$

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

- $\sqrt{10x} = 20$
- $\sqrt{4x} - 3 = 6 - x$

13. التعمية حاوية أسطوانية لبرج مشروب الشوكولاتة يبلغ حجمها حوالي 2564.7 m^3 . يمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ ، حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. إذا كان الارتفاع 21 سنتيمترًا، فأوجد نصف قطر الحاوية.

14. حدد ما إذا كان كل جدول يعبر عن تغير عكسي. اشرح.

x	y
2	10
4	12
8	14

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x .

- إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 9$ فأوجد x عندما يكون $y = 1$
- إذا كان $y = 2$ عندما يكون $x = 0.5$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 3$.

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x . أكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y .

- $y = 2$ عندما يكون $x = 8$
- $y = -3$ عندما يكون $x = 1$

19. اختبار من متعدد إذا كان حديد يستطيع إزالة الثلج من البير في 3 ساعات، ويستطيع حيد القيام بذلك في ساعتين، فكم من الوقت سيستغرقان إذا عملاً معًا؟

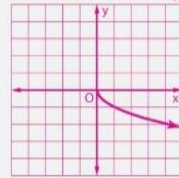
- F 6 ساعات
G 5 ساعات
H $\frac{3}{5}$ ساعة
J $\frac{6}{5}$ ساعة

20. الحلاء إذا كان مازن يستطيع طلاء جدار قياسه 60 قدمًا مربعًا في 40 دقيقة، وإذا عمل مع صديقه جمال، فإنهما يستطيعان طلاء الجدار في 25 دقيقة، فكم سيستغرق جمال من الوقت لإكمال العمل بمفرده؟

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

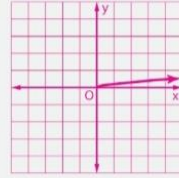
1. انعكاس على المحور x

$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \leq 0\}$$



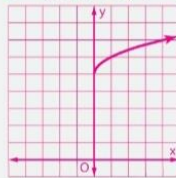
2. انضغاط رأسي

$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \geq 0\}$$



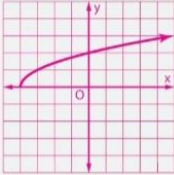
3. انزياح لأعلى بمقدار 5 وحدات

$$D = \{x | x \geq 0\}, R = \{y | y \geq 5\}$$



4. انزياح لأيسر بمقدار 4 وحدات

$$D = \{x | x \geq -4\}, R = \{y | y \geq 0\}$$



3 التحضير للاختبارات المعيارية

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية رسم صورة لحل مسائل الاختبار المعيارية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطرح السؤال التالي:

- هل قيمت من قبل برسم صورة للمساعدة في حل مسألة؟ **سوف** تتغير الإجابات.
- ما نوع المعلومات التي أدرجتها في الصورة؟ **سوف** تتغير الإجابات.
- لماذا تعتبر رسم صورة عند حل المسائل أمراً مفيداً؟
الإجابة النموذجية: أنها تسمح لك برؤية العلاقات بطريقة مختلفة. **وهو ما** يجعل الأمر أسهل في حل المسألة.

رسم صورة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل تصور كيفية حل المسألة إذا رسمت صورة أولاً. يمكنك رسم الصورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار الخاصة بك (إذا كان مسموحاً بذلك). ولكن انتبه ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما الكمية المجهولة التي نبحث عن الحل لإيجادها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة ومترها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكثر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- متر الصورة بالأسماء بعناية. احرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك في تمثيل حالة المسألة بمعادلة. ثم حل المعادلة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعيارية

اقرأ المسألة: حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

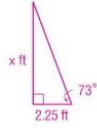
سلم طوله 5.5 أمتار يستند على بناء. من أجل الثبات، يجب أن تكون قاعدة السلم بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. فما الارتفاع الذي يصل السلم إليه على الجدار؟

مثال إضافي

الإجابة المختصرة: ينف بلال بجانب فقص أمين الأرجواني الموجود على الأرض. يتميز الفقص بظل يبلغ طوله 68.58 سنتيمترًا. توجد الشمس على ارتفاع 73° . فما ارتفاع فقص أمين الأرجواني؟ قُرب لأقرب جزء من عشرة من المتر.

الإجابة النموذجية من نقطتين:

ارسم مثلثًا قائمًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.



كُون معادلة وحلها.

$$\begin{aligned}\tan 73^\circ &= \frac{x}{68.58} \\ 68.58 \tan 73^\circ &= x \\ 2.24 &\approx x\end{aligned}$$

يبلغ ارتفاع فقص أمين الأرجواني 2.2

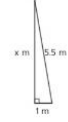
3 التقييم

استخدام التمرينين 1 و 2 لتقويم استيعاب الطلاب.

الدرجة	معايير رصد الدرجات
2	الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تدعيم شرح كامل يوضح كل خطوة.
1	النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.
0	ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.

اقرأ نص المسألة بعناية. أنت تعرف ارتفاع السلم المستند على المبني وتعرف أن قاعدة السلم يجب أن تكون بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. وأنت تحتاج إلى إيجاد الارتفاع الذي يصل إليه السلم على الجدار. مثال على إجابة من نقطتين: حوّل جميع القياسات إلى الأقدام أولاً. 100 سنتيمتر = متر واحد

استخدم مثلثًا قائمًا الزاوية لإيجاد مدى الارتفاع الذي يبلغه السلم. ارسم مثلثًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.



أنت تعرف قياسي إحدى الساقين والوتر. وتحتاج إلى معرفة طول الساق الأخرى. إذا، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس.

$$\begin{aligned}5.5^2 &= 1^2 + b^2 \\ 30.25 &= 1 + b^2 \\ 29.25 &= b^2 \\ \pm 5.4 &= b \\ 5.4 &\approx b\end{aligned}$$

100 سنتيمتر = متر واحد
يصل السلم إلى حوالي 5.4 أمتار.

تبايرين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

1. بناء بسط ظلاً طوله 4.6 أمتار. بينما لوحة إعلانات تسقط ظلاً طوله 1.4 متر. فإذا كانت لوحة الإعلانات ارتفاعها 7.9 أمتار، فما ارتفاع البناء؟ قُرب إلى أقرب جزء من عشرة. إذا لزم الأمر.

3 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 3

5. إذا كان بلال يلعب الألعاب في مركز ترفيهي للمعالمات، ويرج 38 بطاقة جائزة حتى الآن، فكم عدد البطاقات الإضافية التي يحتاج إلى الفوز بها ليجمع نفسه في فئة الجائزة الذهبية؟

عدد البطاقات	فئة الجائزة
1-20	برونزية
21-40	فضية
41-60	ذهبية
61-80	بلاتينية

$$F \quad 2 \leq t \leq 22$$

$$G \quad 3 \leq t \leq 22$$

$$H \quad 1 \leq t \leq 20$$

$$J \quad 3 \leq t \leq 20$$

6. أي مما يلي هي معادلة المستقيم العمودي على $4x - 2y = 6$ والبار بالنقطة $(4, -4)$ ؟

$$F \quad y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$G \quad y = -\frac{3}{4}x - 1$$

$$H \quad y = -\frac{1}{2}x - 4$$

$$J \quad y = -\frac{1}{2}x - 2$$

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم أكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. في كل عام يتولى ناو محلي رعاية دورة التنس، ويبدأ اللعب في 256 مشاركًا وخلال كل جولة، يتم إزالة نصف اللاعبين. فكم عدد اللاعبين الذين سيتبقون بعد 6 جولات؟

$$A \quad 128$$

$$B \quad 64$$

$$C \quad 16$$

$$D \quad 4$$

$$2. \text{ أوجد قيمة } \frac{5^5 - 5^6}{4}.$$

$$F \quad 5^6$$

$$G \quad 5^5$$

$$H \quad \frac{5}{4}$$

$$J \quad \frac{25}{4}$$

3. أي من الأعداد التالية أصغر من الصفر؟

$$A \quad 1.03 \times 10^{-21}$$

$$B \quad 7.5 \times 10^2$$

$$C \quad 8.21543 \times 10^{10}$$

$$D \quad \text{لا شيء مما سبق}$$

4. أكتب معادلة بصفة السيل والمقطع سيل $\frac{9}{10}$ والمقطع مع المحور y عند 3.

$$F \quad y = 3x + \frac{9}{10}$$

$$G \quad y = \frac{9}{10}x + 3$$

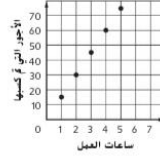
$$H \quad y = \frac{9}{10}x - 3$$

$$J \quad y = 3x - \frac{9}{10}$$

خيارات الواجب المنزلي

الاستعداد للوحدة 3 اطلب من الطلاب حل التمارين الموجود في الصفحة 521 كواجب منزلي لمعرفة ما إذا قد حققوا المهارات المطلوبة اللازمة للوحدة القادمة أم لا.

13. الإجابة الشكية المبلغ الذي يجنيه ناصر يتغير طردياً مع عدد الساعات التي يعمل فيها كما هو مبين في التمثيل البياني. فكم المبلغ الذي سيحفظه مقابل عمل 40 ساعة الأسبوع المقبل؟ أكتب الإجابة بالدولارات.



الإجابة الموسعة

أكتب إجاباتك على ورقة. أكتب الحل هنا.

14. الأجرة الثابتة لركوب السيارة الأجرة هي 3 AED راند 0.35 AED لكل كيلومتر. دفعت ميسون 10 AED مقابل توصيلها لمسافة m كيلومترات.

الجزء A أكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد m . أكتب الحل هنا.
الجزء B استخدم المعادلة المستمدة من الجزء A لاكتشاف عدد الكيلومترات التي ركبته من أجلها ميسون. أكتب الحل هنا.

الإجابة القصيرة/الإجابة الشكية

أكتب إجاباتك في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. الإجابة الشكية اشترى أ. عبد الله إجمالي 9 تذاكر إلى حديقة الحيوان. واشترى تذاكر أطفال بسعر 6.50 AED وتذاكر بالغين بسعر 9.25 AED لكل فرد. فإذا أنفق 69.50 AED إجمالاً، فكم عدد تذاكر البالغين التي اشتراها أ. عبد الله؟

8. ما مجال العلاقة التالية؟
{(2, -1), (4, 3), (7, 6)}

9. أضاف رشيد 15 شبيداً إضافياً إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص به. ليصبح إجمالي الأنشيد أكثر من 84 شبيداً. ارسم خط أعداد يمثل العدد الأصلي للأنشيد التي كانت على مشغل الوسائط الرقمي الخاص برشيد.

10. اشترى خليفة لوحة نادرة في عام 1995 مقابل 14,200 AED. وبحلول 2003، أصبحت قيمة اللوحة 17,120 AED. بافتراض وجود علاقة خطية، أكتب دالة في صيغة الميل والمقطع تمثل قيمة اللوحة V بعد t أعوام.

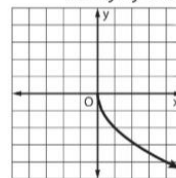
11. أنفق أحمد 24.50 AED على شراء الفول السوداني والجوز من أجل حفل عشاء. واشترى 1.5 كيلوجرام من الفول السوداني وزيادة عن الجوز. فكم عدد كيلوجرامات الفول السوداني والجوز التي اشتراها؟

السعر لكل كيلوجرام	ناتج الخرب
3.80 AED	فول سوداني p
6.90 AED	كاجو c
5.60 AED	جوز w

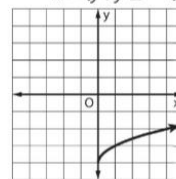
12. الإجابة الشكية اشترت موزة سيارة منذ عدة أعوام مضت بسعر 21,459 AED. وتعرضت السيارة للأهلاك بمعدل 15% سنوياً. فكم بلغت قيمة السيارة بعد 5 أعوام؟ قُرب إجابتك إلى أقرب درهم.

الدرس 3-1 (تبرين موجه)

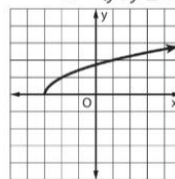
2A. ممتد رأسيًا

المحور x :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$ 

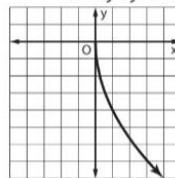
3A. أزيح للأسفل 4 وحدات:

 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq -4\}$ 

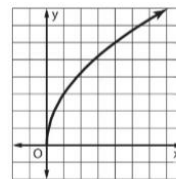
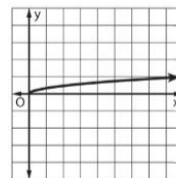
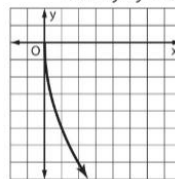
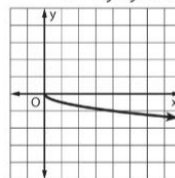
3B. أزيح لليسار 3 وحدات:

 $D = \{x \mid x \geq -3\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 

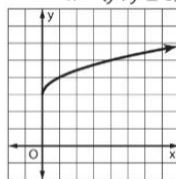
2B. ممتد رأسيًا

ومتعكس على المحور x :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$ 

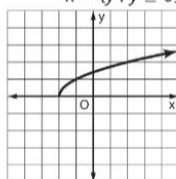
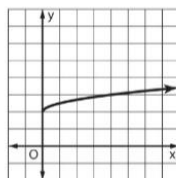
الدرس 3-1

1. تمّدد رأسيًا لـ $y = \sqrt{x}$: $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 3. منضغط رأسيًا لـ $y = \sqrt{x}$: $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 2. تمّدد رأسيًا لـ $y = \sqrt{x}$:وانعكاس على المحور x :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$ 4. منضغط رأسيًا لـ $y = \sqrt{x}$:وانعكاس على المحور x :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$ 

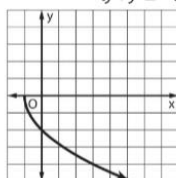
5. أزيح للأعلى ثلاث وحدات:

 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 3\}$ 

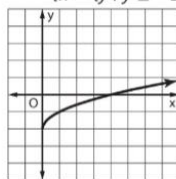
7. أزيح لليسار وحدتان:

 $D = \{x \mid x \geq -2\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 10. منضغط رأسيًا لـ \sqrt{x} :وإزاحته لأعلى وحدتين:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 2\}$ 

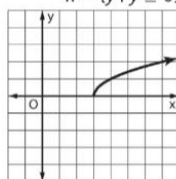
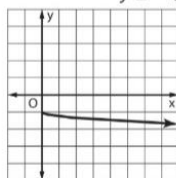
12. أزيح لليسار وحدة واحدة

رأسيًا، وانعكس على
المحور x :
 $D = \{x \mid x \geq -1\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$ 

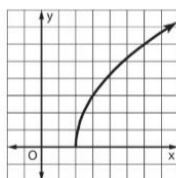
6. أزيح وحدتان للأسفل:

 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq -2\}$ 

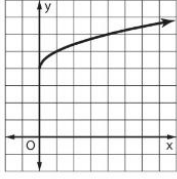
8. أزيح لليمين ثلاث وحدات:

 $D = \{x \mid x \geq 3\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 11. منضغط رأسيًا لـ \sqrt{x} :وانعكاسه على المحور x
وإزاحته
للأسفل وحدة واحدة:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq -1\}$ 

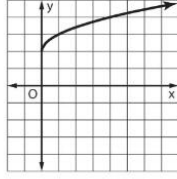
13. أزيح وحدتان لليسار وتمّدد

رأسيًا على \sqrt{x} :
 $D = \{x \mid x \geq 2\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$ 

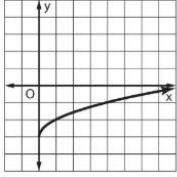
23. أزيح لأعلى أربع وحدات:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 4\}$



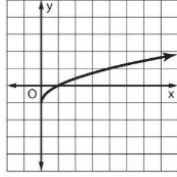
22. أزيح وحدتان لأعلى:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 2\}$



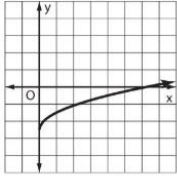
25. أزيح لأسفل 3 وحدات:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq -3\}$



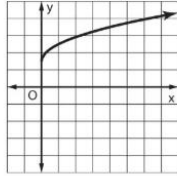
24. أزيح لأسفل وحدة واحدة:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq -1\}$



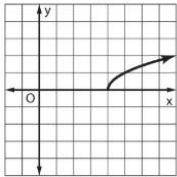
27. أزيح لأسفل وحدتان ونصف:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq -2.5\}$



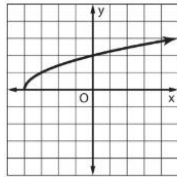
26. أزيح لأعلى وحدة ونصف:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 1.5\}$



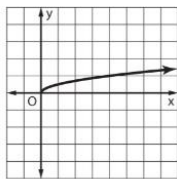
29. أزيح لليمين 4 وحدات:
 $D = \{x \mid x \geq 4\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



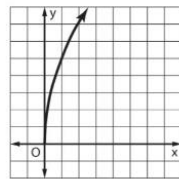
28. أزيح لليسار 4 وحدات:
 $D = \{x \mid x \geq -4\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



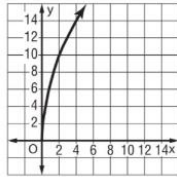
15. منضغط رأسي لـ \sqrt{x} :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



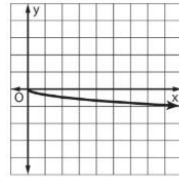
14. تضديد رأسي لـ \sqrt{x} :
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



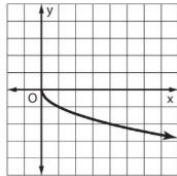
17. تضديد رأسي لـ \sqrt{x} وانعكاس على المحور x:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



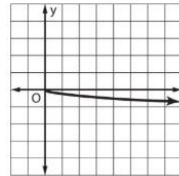
16. منضغط رأسي لـ \sqrt{x} على المحور x:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



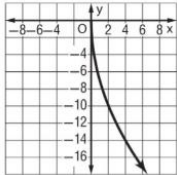
19. وانعكاس على المحور x:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



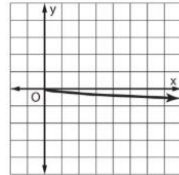
18. منضغط رأسي على \sqrt{x} وانعكاس على المحور x:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



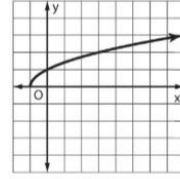
21. تضديد رأسي لـ \sqrt{x} و انعكاس:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



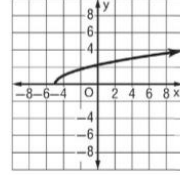
20. منضغط رأسي لـ \sqrt{x} على المحور x:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



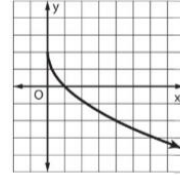
30. أزيح لليسار وحدة واحدة:
 $D = \{x \mid x \geq -1\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



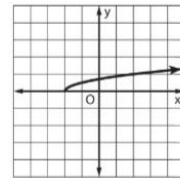
32. أزيح لليسار 5 وحدات:
 $D = \{x \mid x \geq -5\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



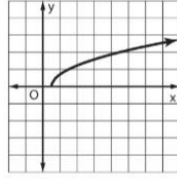
35. تمّدد رأسي لـ $y = \sqrt{x}$.
 منعكس على المحور x .
 وأزيح لأعلى وحدتان:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 2\}$



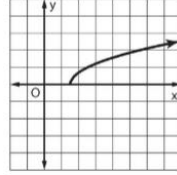
37. منضبط رأسي لـ $y = \sqrt{x}$.
 وأزيح لليسار وحدتان:
 $D = \{x \mid x \geq -2\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



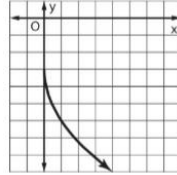
31. أزيح لليمين نصف وحدة:
 $D = \{x \mid x \geq 0.5\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



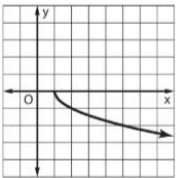
33. أزيح لليمين وحدة ونصف:
 $D = \{x \mid x \geq 1.5\}$,
 $R = \{y \mid y \geq 0\}$



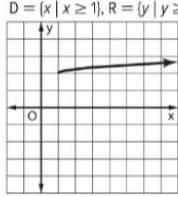
36. تمّدد رأسي لـ $y = \sqrt{x}$.
 منعكس على المحور x .
 وأزيح لأسفل وحدتان:
 $D = \{x \mid x \geq 0\}$,
 $R = \{y \mid y \leq -3\}$



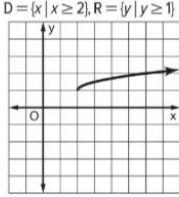
38. ومنعكس على المحور x .
 وأزيح وحدة واحدة لليمين:
 $D = \{x \mid x \geq 1\}$,
 $R = \{y \mid y \leq 0\}$



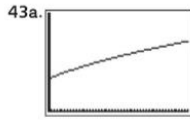
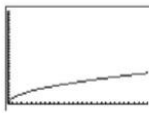
39. منضبط رأسي لـ $y = \sqrt{x}$.
 وحدتان ولليمين وحدة واحدة:
 $D = \{x \mid x \geq 1\}$, $R = \{y \mid y \geq 2\}$



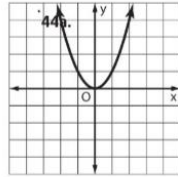
40. منضبط رأسي لـ $y = \sqrt{x}$.
 وحدة واحدة ولليمين وحدتان:
 $D = \{x \mid x \geq 2\}$, $R = \{y \mid y \geq 1\}$



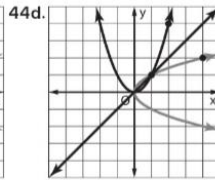
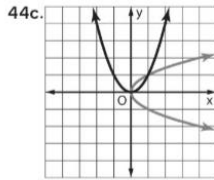
41. scl: 1 في $[0, 28]$ scl: 1 في $[0, 28]$



scl: 0.1 في $[0, 1000]$ scl: 20 في $[0, 1000]$



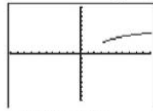
$$44b. y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



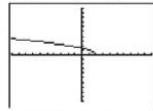
44e. التمثيلات البيانية المجمعة لدوال الجذر التربيعي تتميز بنفس حجم وشكل القطع المكافئ. فهو انعكاس للخط $y = x$

45. خطأ: الإجابة النموذجية: مجال $y = \sqrt{x+3}$ يشمل -1، -2، و -3.

7. $\{x | x \geq 2\}$, $\{y | y \geq 0\}$: تحرك لليمين وحدتين وانعكس على ولأعلى. على المحور y وحدتين



$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

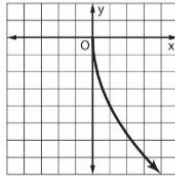


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

اختبار نصف الوحدة

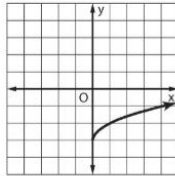
2. تمدد رأسي لـ $y = \sqrt{x}$

وانعكاس على المحور x
 $D = \{x | x \geq 0\}$,
 $R = \{y | y \leq 0\}$



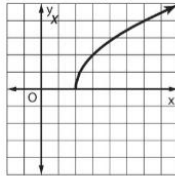
4. انزياح للأسفل 3 وحدات:

$D = \{x | x \geq 0\}$,
 $R = \{y | y \geq -3\}$



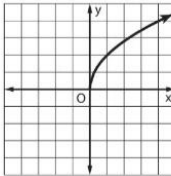
6. تمديد رأسي و.

انزياح لليمين وحدتين:
 $D = \{x | x \geq 2\}$,
 $R = \{y | y \geq 0\}$



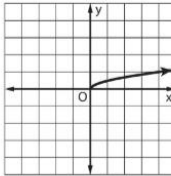
1. تمدد رأسي:

$D = \{x | x \geq 0\}$,
 $R = \{y | y \geq 0\}$



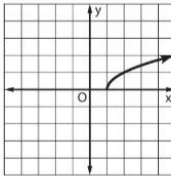
3. منضغط رأسي:

$D = \{x | x \geq 0\}$,
 $R = \{y | y \geq 0\}$



5. انزياح لليمين وحدة واحدة:

$D = \{x | x \geq 1\}$,
 $R = \{y | y \geq 0\}$



46. خطأ: الإجابة النموذجية: 6- و -5 في المجال $y = \sqrt{x} - 6$

47. الإجابة النموذجية: المجال محدود حيث إن الجذور التربيعية للأعداد السالبة متخيلة؛ وبالتالي، يجب أن يكون المجدور موجباً. ونظراً لأن الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب عدداً موجباً، فإن المجال سيكون موجباً.

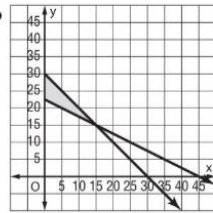
49. $y = \sqrt{x} + 3$: إنه انزياح لـ $y = \sqrt{x}$ تمثل المعادلات الأخرى تمّدداً رأسيّاً أو منضغطاً رأسيّاً.

51. قيمة a سالبة، نظراً لأن المعادلة بها قيم y سالبة، يجب أن تكون قيمة a سالبة.

52. كلتا المعادلتين انزياح لدالة الجذر التربيعي، لكن $f(x) = \sqrt{x} + 2$ هو انزياح لأعلى وحدتين و $g(x) = \sqrt{x} + 2$ انزياح وحدتين لليسار.

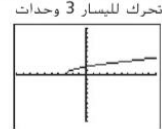
- 57b. الإجابة النموذجية:

السير: 15 دقيقة،
الركض ببطء: 10 دقيقة،
الركض السريع: 20 دقيقة،
الركض ببطء: 5 دقائق،
الركض ببطء: 25 دقيقة

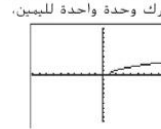


التوسع 3-1

1. $\{x | x \geq 1\}$, $\{y | y \geq 0\}$: تحرك وحدة واحدة لليمين.

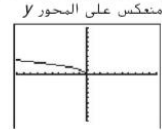


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

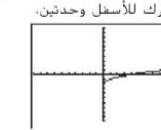


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

3. $\{x | x \geq 0\}$, $\{y | y \geq -2\}$: تحرك للأسفل وحدتين.

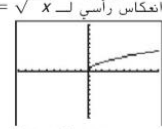


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

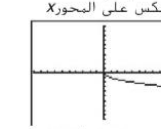


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

5. $\{x | x \geq 0\}$, $\{y | y \leq 0\}$: منعكس على المحور x .

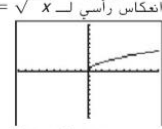


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

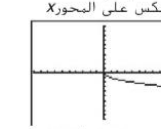


$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

6. $\{x | x \geq 0\}$, $\{y | y \geq 0\}$: انعكاس رأسي لـ $y = \sqrt{x}$



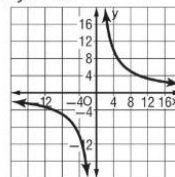
$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1



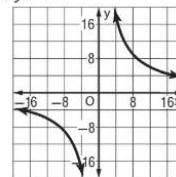
$[-10, 10]$ scl: 1 by
 $[-10, 10]$ scl: 1

الدرس 3-3

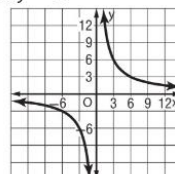
22. $xy = 40$



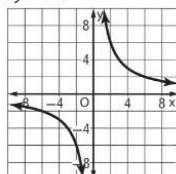
23. $xy = 72$



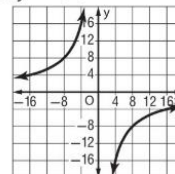
24. $xy = 18$



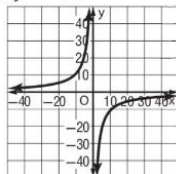
25. $xy = 12$



26. $xy = -64$



27. $xy = -108$

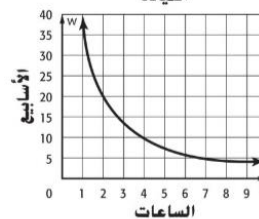


51a.

عدد الأسابيع w	ساعة في الأسبوع h
40	1
20	2
10	4
8	5
5	8
4	10

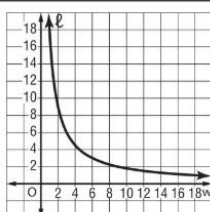
51c. $hw = 40$ أو $w = \frac{40}{h}$

القيادة



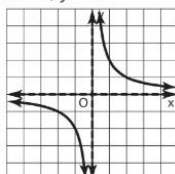
الدرس 3-4 (تكوين موجه)

2.

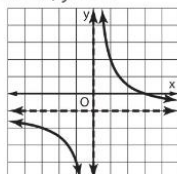


الدرس 3-4

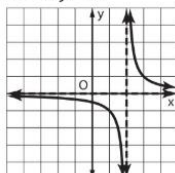
6. $x = 0; y = 0$



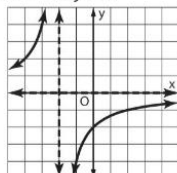
7. $x = 0; y = -1$



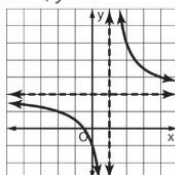
8. $x = 2; y = 0$



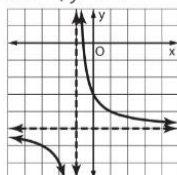
9. $x = -2; y = 0$



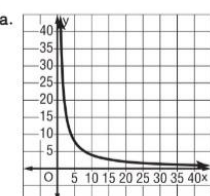
10. $x = 1; y = 2$



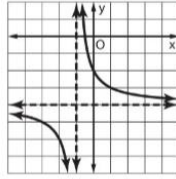
11. $x = -1; y = -5$



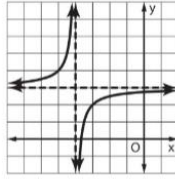
20a.



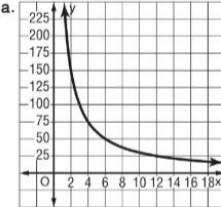
32. $x = -1; y = -4$



33. $x = -4; y = 3$

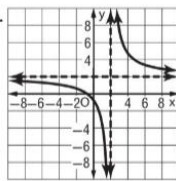


34a.



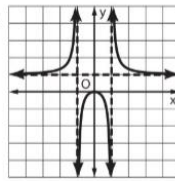
الإجابة النموذجية، يوضح السلوك الطرفي أنه كلما زاد عدد الأيام، قارب عدد الصفحات في اليوم 0. ونظرًا لأنه ليس هناك تقاطع محور x . فإن عدد الصفحات في اليوم لن تكون 0 مطلقًا.

38.



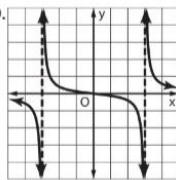
$x = 2; y = 2$

39.



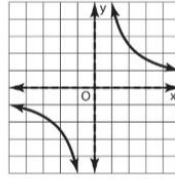
$x = -1, x = 1; y = 1$

40.

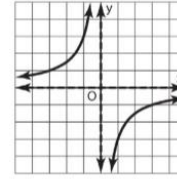


$x = 3, x = -3; y = 0$

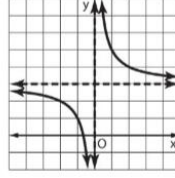
22. $x = 0; y = 0$



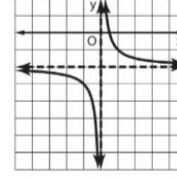
23. $x = 0; y = 0$



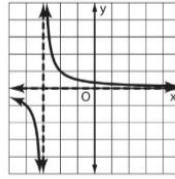
24. $x = 0; y = 3$



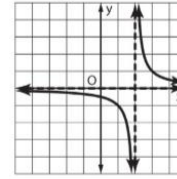
25. $x = 0; y = -2$



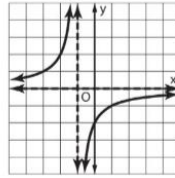
26. $x = -3; y = 0$



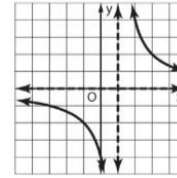
27. $x = 2; y = 0$



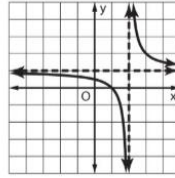
28. $x = -1; y = 0$



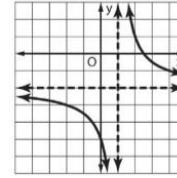
29. $x = 1; y = 0$



30. $x = 2; y = 1$



31. $x = 1; y = -2$



علاقات المثلثات

4

مشروع الوحدة

الهندسة المعمارية: التصميم المثلثي

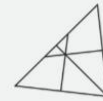
يستخدم الطلاب ما تعلموه عن القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة الوعي العالمي، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الواحد والعشرين.

المفردات الأساسية: قدم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام الطريقة التالية.

تعريف: نقطة تقاطع المنصفات في مثلث هي نقطة التقاء المنصفات المتعامدة.

مثال:



سؤال: هل ستقع نقطة تقاطع المنصفات دائمًا في المثلث من الداخل؟ لا. إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فستقع نقطة تقاطع المنصفات خارج المثلث. إذا كان المثلث قائم الزاوية، فستقع نقطة تقاطع المنصفات على أحد أضلاع المثلث.

جميع الحقوق محفوظة © جميع الحقوق محفوظة © جميع الحقوق محفوظة ©

لماذا؟

تصميم الديكور الداخلي يستخدم علاقات المثلث لإيجاد قياسات الزوايا والمسافات ومقارنتها. يستخدم تصميم الديكور الداخلي علاقات المثلثات لزيادة العناية إلى الحد الأقصى وأحداث تولد في تصاميمهم.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة، ستكون قادرًا على:

- التعرف على القطع المستقيمة الخاصة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- التعرف على العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.
- التعرف على طريقة كتابة البراهين غير المباشرة.

السابق

تمت من قبل كيفية تصنيف المثلثات.

أسئلة إضافية (الاستعداد ص. 321)

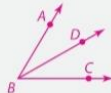
4. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.



5. $JK = KL = LM = MJ$



6. $\angle ABD \cong \angle DBC$



7. أحيانًا، يكون التخمين صحيحًا عندما تكون E بين D و F ، وإلا فهو خطأ.

الوحدة 4 مخطط الوحدة علاقات المثلثات

التقويم التشخيصي تدريب سريع			
الإستكشاف 4-1	الدرس 4-1	الإستكشاف 4-2	
45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.25 يوم	45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.25 يوم	
مختبر الهندسة: إنشاء المنصفات	منصفات المثلثات	مختبر الهندسة: إنشاء المتوسطات والارتفاعات	العنوان
■ إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.	■ تحديد المنصفات العمودية في المثلثات واستخدامها. ■ تحديد منصفات الزاوية في المثلثات واستخدامها.	■ إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.	الأهداف
	منصف عمودي perpendicular bisector نقطة الالتقاء point of concurrency نقطة تقاطع المنصفات circumcenter مركز الدائرة الداخلية incenter		المفردات الأساسية

Chapter Sourced from Integrated Math II Chapter 7 © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة الحقوق لمالك مؤسسة



الدرس 4-2 45 دقيقة، 15 يوم 90 دقيقة، 0.75 يوم	الدرس 4-3 45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم	الاستكشاف 4-4 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.25 يوم	الدرس 4-4 45 دقيقة، 1 يوم 90 دقيقة، 0.5 يوم
متوسطات المثلثات وارتفاعاتها	المتباينات في مثلث واحد	مختبر الهندسة: منطق المصفوفة	البرهان غير المباشر
<ul style="list-style-type: none">تحديد الوسيطات في المثلثات واستخدامها.تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.	<ul style="list-style-type: none">التعرف على خواص المتباينات وتطبيقها على مقاييس زوايا المثلث.التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.	<ul style="list-style-type: none">استخدام منطق المصفوفة.	<ul style="list-style-type: none">كتابة براهين جبرية غير مباشرة.كتابة براهين هندسية غير مباشرة.
الوسيط median النقطة المركزية centroid الارتفاع altitude ملتقى الارتفاعات orthocenter	التقويم التكويني اختبار نصف الوحدة		
منطق المصفوفة matrix logic			
استنتاج غير مباشر indirect reasoning برهان غير مباشر indirect proof برهان بالتناقض proof by contradiction			

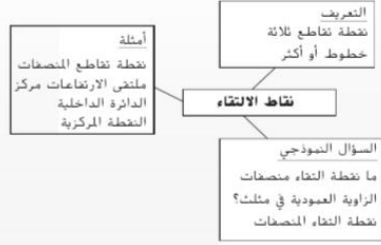
علاقات المثلثات

4

مخطط الوحدة

العنوان	الاستكشاف 4-5 45 دقيقة، 0.5 يوم 90 دقيقة، 0.25 يوم	الدرس 4-5 45 دقيقة، 15 يوم 90 دقيقة، 0.75 يوم	الدرس 4-6 45 دقيقة، يوم 90 دقيقة، يوم
مختبر تقنية التهليل البياني: متباينة المثلث	استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.	استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.	المتباينات في مثلثين
الأهداف	■ استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.	■ استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.	■ تطبيق نظرية المثلث أو عكسها لعمل مقارنة بين مثلثين.
المفردات الأساسية	■ إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.	■ إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المثلث أو عكسها.	■ إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المثلث أو عكسها.
التقويم الختامي			
دليل الدراسة والمراجعة			
تمرين على الاختبار			

مهارات دراسية



يمكن أن تساعد خريطة المفردات الطلاب على فهم معنى مصطلح ورد حديثًا. يصف نموذج خريطة المفردات على اليسار نقطة الالتقاء. اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات أو ثنائيات متعاونة لوضع خرائط للمصطلحات والمفاهيم الأخرى.

إنشاء الاستغلال من خلال إستراتيجيات يضعها الطلاب

ملاحظات

التشخيص	الحل
الاستعداد للوحدة 6 كتاب الطالب	بداية الوحدة 4
السابق، الحالي، لماذا؟ كتاب الطالب	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم
أثناء/ بعد كل درس	بداية كل درس
تمرين موجه كتاب الطالب، كل مثال التحقق من فهمك كتاب الطالب مسائل مهارات التفكير العليا كتاب الطالب مراجعة شاملة كتاب الطالب أمثلة إضافية كتاب المعلم انتبه! كتاب المعلم الخطوة 4، التقويم كتاب المعلم	الوحدة 0 كتاب الطالب
اختبار نصف الوحدة كتاب الطالب	نصف الوحدة
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة كتاب الطالب تمرين على الاختبار كتاب الطالب تمرين على الاختبار المعياري كتاب الطالب	اختبار ما قبل الوحدة

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اجعل الطلاب يستكشفوا المهن التي تتطلب معرفة قوية بالهندسة. يحتاج المهندسون المعماريون إلى القدرة على تقييم المخططات ورؤيتها بناء على المساحة باستخدام قوانين هندسية لضمان أن الهياكل صحيحة وتبعث على السرور بصرياً. يستخدم مصممو الأبنية من الداخل التثليث لوضع الأعمال الفنية والملحقات الأخرى في غرفة بحيث يتحول المنظر العادي إلى منظر جميل. يستطيع الطلاب اختيار إجراء لقاء مع شخص يعمل في المجال الذي يختارونه أو القراءة عن المجال أو إجراء مسح لأمثلة من أعمال شخص يعمل في المجال حالياً. ينبغي أن يعرضوا ما تعلموه على شكل ملصق أو في تقرير ويشاركوه مع الصف مع توضيح تطبيق من الحياة اليومية لعلاقات المثلث والمفاهيم الهندسية الأخرى.

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة AL OL BL

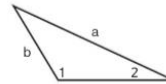
الطريقة البصرية قم بتجهيز لوح من الفلين مع دبابيس مكتب لاستخدامها كرؤوس مثلثات وخطوط ملونة بأطوال متنوعة لاستخدامها كأضلاع ومنصفات ووسيطات وارتفاعات للمثلثات. يستطيع الطلاب أن يتبادلوا الأدوار لاستخدام دبابيس المكتب والخيوط لتمثيل الأنواع المختلفة من المثلثات ولوضع منصفات زوايا ومنصفات قطع مستقيمة ووسيطات وارتفاعات المثلثات.

طريقة التواصل اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات صغيرة للبحث عن أصول الهندسة. بما في ذلك أعمال بوكليد. اجعلهم يستكشفوا طريقة ابتكار إنشاءات المثلثات لأول مرة. لم يستطع اليونان القدماء مثلاً حساب نقطة المنتصف لأن نظام الأعداد عندهم لم يكن يحتوي على أعداد صحيحة أو أعداد نسبية. كان يتألف من أعداد كلية فقط. ولهذا تعذر على اليونان أن يقيسوا مستقيماً اعتباطياً ويقسموه على 2 لإيجاد نقطة المنتصف. أدت هذه المشكلة إلى استخدام فرجار وحافة مستقيمة. اجعل الطلاب يعملوا معاً لإنشاء عرض بصري لتعليمهم ليعرضوه على المجموعات الأخرى.

الطريقة الحسية الحركية يتعامل الكثير من الطلاب مع الهندسة بافتراض أن أي ثلاثة أضلاع يمكن أن توضع معاً لعمل مثلث بينما تتعارض فكرة نظرية متباينة المثلث مع هذا الافتراض. يستطيع الطلاب استخدام قطع مستقيمة بأطوال مختلفة (مقسمة إلى أطوال مختلفة باستخدام الفرجار مثلاً) وإجراء تجارب لمعرفة الأطوال التي يمكن استخدامها لعمل مثلثات والتي لا يمكن استخدامها. انظر ما إذا كان الطلاب يستطيعون ابتكار "قاعدة" لتحديد ما إذا كان يمكن استخدام ثلاثة أضلاع بأطوال مختلفة لعمل مثلث قبل تقديم متباينة المثلث.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات صغيرة من مختلف القدرات لإثبات علاقات المثلثات ذات المتباينات. ارسم عدة مجموعات من المثلثات على اللوح إلى جانب العلاقات المحتملة بين زوايا المثلثات وأضلاعها. اجعل الطلاب يقرروا ما إذا كانت عبارات المتباينة صحيحة واجعلهم يكتبوا تفسيراً لاستنتاجهم.



4-1 منصفات المثلثات

يُعتبر *المنصف العمودي* لـ ضلع مثلث خطاً أو قطعة مستقيمة أو شعاعاً يمر عبر نقطة المنتصف لـ ضلع ومتعامداً على الضلع. المنصفات العمودية لها خواص خاصة. أي نقطة على المنصف العمودي لـ قطعة مستقيمة تقع على مسافة متساوية من نقاط نهاية القطعة المستقيمة. معكوس هذه العبارة صحيح أيضاً. تُسمى نقطة التقاء المنصفات العمودية في مثلث بنقطة التقاء المنصفات. تقع نقطة التقاء المنصفات في مثلث على مسافة متساوية من رؤوس المثلث.

منصفات الزوايا أيضاً لها خواص خاصة. تقع أي نقطة في منتصف الزاوية على مسافة متساوية من أضلاع الزاوية. وأي نقطة داخل زاوية على مسافة متساوية من ضلعي الزاوية تقع على منتصف الزاوية. يُسمى تقاطع منصفات الزوايا في مثلث مركز *الدائرة الداخلية*. يقع مركز الدائرة الداخلية لمثلث على مسافة متساوية من أضلاع المثلث.

4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

الوسيط قطعة مستقيمة بنقطتي نهاية تماثل رأساً في مثلث ونقطة المنتصف في الضلع المقابل للرأس. تُسمى نقطة التقاء الوسيطات في مثلث *النقطة المركزية*. تقع النقطة المركزية لمثلث على وسيط عند نقطة تقع على ثلثي المسافة من رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل للرأس.

ارتفاع المثلث قطعة متعامدة على ضلع في المثلث له رأس كنقطة نهاية ونقطة على المستقيم المحتوي على الضلع المقابل للرأس كنقطة النهاية الأخرى. يُسمى تقاطع الارتفاعات في مثلث *ملتقى الارتفاعات*.

الاسم	النوع	نقطة الالتقاء
منتصف عمودي	المستقيم أو القطعة المستقيمة أو الإشعاع	مركز الدائرة المحيطة
منتصف الزاوية	المستقيم أو القطعة المستقيمة أو الإشعاع	مركز الدائرة الداخلية
وسيط	القطعة المستقيمة	نقطة مركزية
ارتفاع	القطعة المستقيمة	ملتقى الارتفاعات

قبل الوحدة 4

موضوعات ذات صلة من الصف 8

- تحديد العلاقات الخطية.
- التمثيل البياني على مستوى إحداثي.
- موضوعات سابقة من الجبر 1
- تمثيل العلاقات باستخدام الجداول والتمثيل البياني.
- حل المعادلات الخطية.

الوحدة 4

موضوعات ذات صلة من الهندسة

- استخدام الميل ومعادلات المستقيمات لاستكشاف العلاقات الهندسية. بما في ذلك القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات.
- إدراك ومعرفة التطور التاريخي للنظم الهندسية ومعرفة أن الرياضيات تطورت لعدة أغراض.
- تحليل العلاقات الهندسية للتحقق من التخمينات.

بعد الوحدة 4

الإعداد لها قبل حساب التفاضل والتكامل

- حل مسائل من حالات فيزيائية باستخدام حساب المثلثات، بما في ذلك استخدام قانون الجيب وقانون جيب التمام وقوانين المساحة.

4-3 المتباينات في مثلث واحد

في الجبر، تعلم الطلاب مفهوم المتباينة، لأي عددين حقيقيين a و b ، $a > b$ فقط إذا كان هناك عدد موجب c بحيث تكون $a = b + c$. درس الطلاب أيضًا عدة خصائص للمتباينات في الأعداد الحقيقية. يطبق الطلاب في هذا الدرس هذه المفاهيم على الزوايا.

تنص نظرية متباينة الزاوية الخارجية على أنه إذا كانت الزاوية خارجية في مثلث، فإن قياسها أكبر من قياس أي من زاويتيها الداخليتين المتناظرتين غير المتجاورتين. تستند نظرية متباينة أخرى في الهندسة على العلاقة بين ضلع الرأس المقابل لذلك الضلع. إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر، فقياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر. والمعكوس صحيح أيضًا، إذا كان قياس زاوية في مثلث أكبر من زاوية أخرى، فالضلع المقابل للزاوية الأكبر أطول من الضلع المقابل للزاوية الأقل.

4-4 البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر، أو البرهان بالتناقض، أسلوب لإثبات صحة عبارة بافتراض أنها خاطئة أولاً. توضح الخطوات التالية للبرهان غير المباشر أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع فرضية أو مع حقيقة ثابتة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية أو لازمة. وفي النهاية يتم رفض الافتراض لأنه يؤدي إلى تناقض، ولهذا فالعبارة الأصلية مقبولة باعتبارها صحيحة. يمكن استخدام البرهان غير المباشر في كل من الجبر والهندسة.

4-5 متباينة المثلث

تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث يزيد على طول الضلع الثالث. يمكن استخدام هذه النظرية في تحديد ما إذا كانت القطع المستقيمة الثلاث بالأطوال المحددة تشكل مثلثًا.

القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستقيم هي القطعة المستقيمة الأقصر من تلك النقط إلى المستقيم. يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية وتؤدي إلى لازمة بأن القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستوى هي القطعة المستقيمة الأكثر من النقطة إلى المستوى.

4-6 المتباينات في مثلثين

يتوسع هذا الدرس في النظرية 6.11 ليطبقها على مثلثين. تنص تلك النظرية على أنه إذا كان ضلعان في مثلث مطابقين لضلعين في مثلث آخر وقياس الزاوية المحصورة في أحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الآخر، فالضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني. يُسمى هذا بنظرية المفصلة. معكوس نظرية المفصلة صحيح أيضًا. إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعين في مثلث آخر والضلع الثالث في أحد المثلثين أطول من الضلع الثالث في المثلث الآخر، فالزاوية بين الضلعين المتطابقين في المثلث الأول أكبر من الزاوية المقابلة في المثلث الثاني.

1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

مراجعة سرية

أوجد قياس كل مما يلي

1. BC 9



2. $m\angle RST$ 55



3. **الحدائق** بصمم خبيس حوض أزهار على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول ضلعين من أضلاع حوض الأزهار يساوي 7 أقدام، فما طول الضلع الثالث مع التقريب إلى أقرب قدم؟ **10 ft**

خون بالأسنان إلى لدغ ومات الجعقة.

4. $\angle 3$ و $\angle 4$ تشكلاّن زوجا خطيّا. 4-7. انظر الهامش.

5. \overrightarrow{JKLM} عبارة عن مربع.

6. \overrightarrow{BD} عبارة عن منصف للزاوية $\angle ABC$.

7. **الاستنتاج** حدد إذا ما كان الاستنتاج التالي صحيحاً دائماً، أم أحياناً، أم غير صحيح على الإطلاق استناداً إلى المعلومات المعطاة. علّل استنتاجك.

المعطيات: تقع النقاط D و E و F على مستقيم واحد
التخمين: $DE + EF = DF$

مثال 3

جول لئل متجلينة مماليقي.

8. $x + 13 < 41$ $x < 28$

9. $x - 6 > 2x - 6 > x$

10. $6x + 9 < 7x$ $x > 9$

11. $8x + 15 > 9x - 26$ $x < 41$

12. **الأناسيد** أضافت عادة 15 شبيداً إضافياً إلى مشغل MP3 الخاص بها. ليصل الإجمالي إلى أكثر من 120 شبيد. كم عدد الأناسيد التي كانت على المشغل في الأساس؟
الإجابة النموذجية: $x > 105$

أستخدم في الدرس 4-4)

K هو نقطة منتصف \overline{AC} ، \overline{BX} يوازي \overline{AC} إلى الجهتين
البعيدة A و C ، \overline{BX} يوازي \overline{AC} إلى الجهتين

المعطيات: K هو نقطة منتصف KL ، L هي نقاط على خط واحد، ويقع K على مسافة متساوية بين L و L .

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

التحقيق: ارسم π . وهذا يصور التخمين.



أستخدم في الدرسين 4-5 و 4-6)

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$.

$$3x + 5 > 2x$$

دعوت

$$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$$

20

$$S > -x$$

1

$$-5 < x$$

- ما الذي يجعل المثلث مثلثاً؟ الإجابة النموذجية: ثلاثة أضلاع. ثلاث زوايا. قياسات زوايا يبلغ مجموعها 180
- ما الارتباط بين الأضلاع والزوايا في مثلث؟ الإجابة النموذجية: الضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر والضلع الأصغر يقابل الزاوية الأصغر.

مطلوبات منظّم الدراسة

مطلوبات ديننا زايف®

التركيز يدون الطلاب الملاحظات ويضعون تعريفات المصطلحات ويسجلون المفاهيم ويكتبون البراهين المتعلقة بالعلاقات في المثلثات.

التدريس بعد أن يصنع الطلاب مطبوتهم، أجعلهم يضعوا تسميات التتويبات لتلاثم الدروس الستة في هذه الوحدة. ينبغي أن يكتب الطلاب فقرة وصفية حول المفاهيم والمفردات والنظريات في كل درس ويكتبوا ملاحظة خاصة عن أي رسوم يمكنها أن تحسن هذا الوصف.

متى تستخدمها استخدم التتويبات الثلاثية مع تغطية الطلاب لكل درس في هذه الوحدة. يمكن إضافة تويب المفردات لكل درس.

البدا في هذه الوحدة

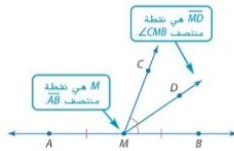
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 6. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

المفردات الجديدة

منصف عمودي (perpendicular bisector)
مستقيبات متلاقية (concurrent lines)
نقطة الالتقاء (point of concurrency)
مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
مركز الدائرة الداخلية (incenter)
متوسط (median)
نقطة مركزية (centroid)
ارتفاع (altitude)
ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
برهان غير مباشر (indirect reasoning)
برهان غير مباشر (indirect proof)
برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.
نقطة المنتصف هي النقطة الموجودة على قطعة مستقيمة ينصفها ثنائياً بين أطرافها.



المطلوبات منظّم الدراسة

علاقات المثلثات اصنع هذه البطاقة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على الوحدة 4 حول علاقات المثلثات. ابدأ باستخدام سبع ورقات من ورق الرسم البياض.



1 **اجمع** الورق فوق بعضه. اضع الزاوية العلوية الأيسر إلى الحادة السفلية لتشكيل مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية.



2 **اطو** الجزء المستطيل إلى نصفين.



3 **قم** بنشيط الورق بطول النية المستقيمة الشكل في أربعة أماكن.



4 **قم** بنسبة كل ورقة برقم أحد الدروس والتتويب مستطيل الشكل بعنوان الوحدة.



مختبر الهندسة

إنشاء المنصفات

4-1

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

1 التركيب

الهدف إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.

نصيحة للتدريس

يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأشكال حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأشكال حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب مع الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث نفسه.

الطريقة البديلة

يمكن أيضًا استكمال الإنشاءات المعروضة في هذا الدرس باستخدام أسلوب المسطرة العادية والفرجار.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. يستكمل كل طالب أحد هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. يتناوب الطلاب خطوات الإنشاء 1 و 2.

تمرين اجعل الطلاب يستكملوا التمرين 1 أثناء إجراء النشاطات.

الإنشاء منصف عمودي

أنش منصفًا عموديًا على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1



ارسم $\triangle MPO$. ولم تنسبته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث من منتصفه \overline{MQ} بحيث تلصق الرأس M الرأس Q .

الخطوة 3



استخدم مسطرة لرسم \overline{AB} بطول اثنين. \overline{AB} هو النصف العمودي على \overline{MQ} .

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث وينقسمها إلى زاويتين متساويتين.

الإنشاء منصف الزاوية

أنش منصف زاوية لأي مثلث.

الخطوة 1



ارسم $\triangle ABC$. ولم تنسبته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث إلى نصفين من الرأس A بحيث يكون الضلعان \overline{AB} و \overline{AC} متطابقين لبعضهما.

الخطوة 3



حدد النقطة L في الضلع \overline{BC} باستخدام مسطرة لرسم \overline{AL} بطول اثنين. \overline{AL} هو منصف زاوية في $\triangle ABC$.

النموذج والتحليل

1. أنش منصفين عموديين على الضلعين الآخرين في $\triangle MPO$. أنش منصفين للزوايا على الزاويتين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ بشأن تقاطعها؟ راجع عمل الطلاب. يتقاطعان عند نفس النقطة.

كرر طريقتي الإنشاء لكل نوع من المثلثات. 2-4. راجع عمل الطلاب.

2. حاد

3. منفرج

4. قائم

205

من العملي إلى النظري

امنح الطلاب الأنواع الثلاثة من المثلثات المذكورة في التمارين 2-4. أبلغهم بأنك تريد أن يجعلوا كل مثلث يتوازن على قلم. اجعلهم ينتقون طريقة إنشاء ويشرحون.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 2-4 لتقويم ما إذا كان الطلاب يدركون مفهوم المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا وإنشاءها.

منصفات المثلثات

لماذا؟

الحالي

السابق



- إن إنشاء مثلث عمل في المطبخ من شأنه تحسين كثافة عملية تحضير الطعام من خلال تقليل عدد الخطوات التي ينبغي اتخاذها لتحديد القطعة التي تقع على مسافة واحدة من الحوض ومن الفرن ومن التلاجة. يمكنك استخدام التثنيات العمودية للمثلث.

- 1 تحديد التثنيات العمودية في المثلثات واستخدامها.
- 2 تحديد تثنيات الزوايا في المثلثات واستخدامها.

- لقد استخدمت تثنيات القطع المستقيمة والزوايا.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-1 استخدام منصفات القطعة المستقيمة والزوايا.

الدرس 4-1 تحديد المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-1 الربط بين التمثيل الجبري والهندسي للوظائف.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

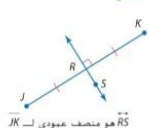
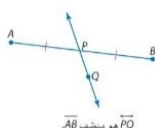
- لماذا يمكن لمثلث عمل أن يكون مفيدًا في تصميم مطبخ؟ إنه يقلل من عدد الخطوات المطلوبة.
- أين يمكن وضع جزيرة في هذا المثلث؟ نقطة على مسافة مساوية من التلاجة والموقد والحوض.
- هل تقع هذه النقطة دائمًا عند نقطة المنتصف لكل ضلع في المثلث؟ لماذا؟ الإجابة النموذجية: لا، فهي في الصورة ليست عند نقطة منتصف الضلع الواصل بين الموقد والحوض.

المفردات الجديدة

منصف عمودي (perpendicular bisector)
المنصفات المتقاطعة (concurrent lines)
نقطة التقاطع (point of concurrency)
مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
مركز الدائرة الداخلية (incenter)

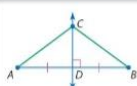
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل المتغيرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المنصفات العمودية لندخلت أن البستيم التثيف هو أي قطعة مستقيمة أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة بمنتصفها. إذا كان التثيف عمودي أيضًا على القطعة المستقيمة، فإنه يُسمى **منصف عمودي**.

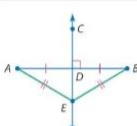


تذكر أن الحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا. كما أن التثيف العمودي للقطعة المستقيمة هو محل هندسي لنقاط في مستوى تقع على مسافة واحدة من أطراف القطعة المستقيمة. هذا ينطبق على النظريات التالية.

نظريات المنصفات العمودية



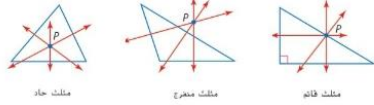
4.1 نظرية المنصفات العمودية
إذا وجدت نقطة على التثيف العمودي لقطعة مستقيمة ما، وإذا فهي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.
مثال: إذا كان CD هو منصف AB ، إذا $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية المنصفات العمودية
إذا وجدت نقطة تقع على مسافة واحدة من طرفي قطعة مستقيمة ما، إذا فهي على التثيف العمودي للقطعة المستقيمة.
مثال: إذا كان $AE = BE$ ، إذا E تقع على CD ، التثيف CD هو منصف AB .

سوف تقوم بإثبات نظريتي 4.1 و 4.2 من خلال التمرينين 39 و 37، على الترتيب.

قد تقع نقطة تقاطع التَنَشُّعات داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد

مثلث منفرج

مثلث قائم

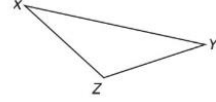
قراءة في الرياضيات

المحيط - كلمة المحيط تعني الشيء الذي يكون من جميع الجهات أو الإطار الخارجي. فمفردة تقاطع التَنَشُّعات هي مركز الدائرة التي تسمى رؤوس المثلث من الخارج.



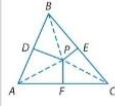
مثال إضافي

2 **الحديثة** تظهر حديثة على شكل مثلث. هل يمكن وضع نافورة في مركز الدائرة المحيطة



لا. يقع مركز الدائرة المحيطة بمثلث منفرج الزاوية خارج المثلث.

إثبات نظرية مركز الدائرة المحيطة



المعطيات: \overline{PD} و \overline{PF} و \overline{PE} هي تَنَشُّعات عمودية لـ \overline{BC} و \overline{AC} و \overline{AB} على الترتيب.

المطلوب: $AP = BP = CP$

الفكرة الإلهامية:

بما أن P يقع على التَنَشُّع العمودي لـ \overline{AC} فإنها تكون على مسافة واحدة من A و C . باستخدام تعريف المسافة الواحدة، $AP = CP$. تقع P على التَنَشُّع العمودي لـ \overline{BC} فإن $BP = CP$. باستخدام خاصية التعدي في المساواة، $AP = BP$. فإن $AP = CP = BP$.

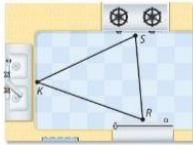
إرشاد للمعلمين الجدد

توضيح المفردات اشرح أن مركز الدائرة المحيطة لا يقع بالضرورة داخل المثلث. ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع منفرج الزاوية بزوايا تبلغ 10° و 10° و 160° لتوضيح مركز دائرة محيطة خارج مثلث.

التركيز على محتوى الرياضيات

فهم الكلمات يحتوي هذا الدرس على الكثير من المصطلحات التي لها سابقة أو لاحقة مرتبطة بجذر الكلمة. عليك أن تؤكد للطلاب أن كل سابقة أو لاحقة ستساعدهم في الفهم. على سبيل المثال، **circum** تعني "حول" أو "محيط". **circumcenter** (مركز الدائرة المحيطة) في مثلث هو مركز دائرة تحيط بالمثلث.

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة



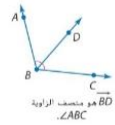
تصميم داخلي قرن K ، حوض K ، و تلاجع R موضوعة في محيط بالشكل الموضح. أوجد موقعًا متوسطًا لطاولة تحضير الطعام بحيث تكون على مسافة واحدة من هذه النقاط الثلاث.

باستخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة، يمكن إيجاد نقطة تقاطع التَنَشُّعات من ثلاث نقاط باستخدام التَنَشُّعات العمودية للمثلث الذي تشكل هذه النقاط الثلاث رؤوسه.

اصنع $\triangle SKR$ ، واستخدم مسطرة ومنقلة لرسم التَنَشُّعات العمودية. موقع المركز الذي ستوضع فيه الطاولة هو C . نقطة تقاطع تَنَشُّعات $\triangle SKR$.

تمرين موجه

2. يحتاج جاسم عند ري حديقة المثلث إلى وضع آلة رش على مسافة واحدة من كل رأس من رؤوس مثلث الحديثة. أين ينبغي على جاسم وضع آلة الرش؟ **انظر الهامش.**



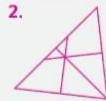
BD هو منصف الزاوية $\angle ABC$.

2 منصفات الزاوية

نذكر أن منصف الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين، قد يكون منصف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو شعاعًا.

يمكن وصف منصف الزاوية بأنه محل هندسي للنقاط الموجودة داخل الزاوية التي تقطع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية. ينشأ هذا الوصف إلى النظريات التالية.

إجابات إضافية (تمرين موجه)



2.

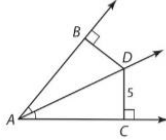
2 منصفات الزوايا

المثال 3 يوضح كيفية استخدام نظرية منتصف الزاوية. المثال 2 يوضح كيفية استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية.

مثال إضافي

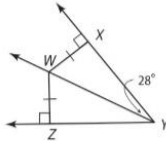
3 أوجد قياس كل مما يلي.

a. $\angle DB$



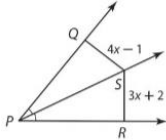
5

b. $m\angle WYZ$



28

c. $\angle QS$



11

انتبه!

التعويض في الجزء C من المثال 3. لا يكفي أن تصل إلى قيمة المتغير x . لإيجاد طول SP ، تحتاج إلى إيجاد قيمة $6x - 7$.

إرشاد للمعلمين الجدد

تعريفات اجعل الطلاب يبحثوا عن تعريفات المنصفات والوسيطات والارتفاعات. ينبغي أن يشارنوا بين تعريفات الرياضيات والتعريفات في الحياة اليومية ليصلوا إلى فهم شامل للمعاني.

نظريات مُنصفات الزاوية

4.4 نظرية مُنصفات الزاوية

إذا وجدت نقطة على مُنصف زاوية ما، فإنها تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية.
مثال: إذا كان \overrightarrow{BF} ينصف $\angle DBE$ ، $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، فإن $DF = FE$.



4.5 معكوس نظرية مُنصف الزاوية

إذا وجدت نقطة داخل الزاوية تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإنها تقع على مُنصف الزاوية.
مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، و $DF = FE$ ، فإن \overrightarrow{BF} ينصف $\angle DBE$.



سوف تقوم بإثبات النظريتين 4.4 و 4.5 من خلال التمرينين 43 و 40.

مثال 3 استخدام نظريات مُنصف الزاوية

أوجد قياس كل مما يلي.

a. $\angle XY$

$$XY = XW$$

$$XY = 7$$

نظرية مُنصف الزاوية بالتعويض



b. $m\angle JKL$



$$\angle JKL \cong \angle LKM$$

$$m\angle JKL = m\angle LKM$$

$$m\angle JKL = 37$$

تعريف مُنصف الزاوية

تعريف الزوايا المتطابقة

بالتعويض

c. $\angle SP$

$$SP = SM$$

$$6x - 7 = 3x + 5$$

$$3x - 7 = 5$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

نظرية مُنصف الزاوية

بالتعويض

طرح 7 من كل جانب.

اجمع 7 مع كل طرف.

اقسم كل طرف على 3.



$$\text{إذا: } 7 - 6(4) = SP = 17 \text{ أو تساوي}$$

تمرين في وجه



3A. إذا كان $BC = 5$ ، $DC = 5$ ، $m\angle BAC = 38$ ، فأوجد $m\angle DAC$.

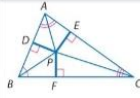
3B. إذا كان $DC = 10$ ، $m\angle BAC = 40$ ، $m\angle DAC = 40$ ، فأوجد BC .

3C. إذا كان \overrightarrow{AC} تنصف $\angle DAB$ ، $DC = 9x - 7$ ، $BC = 4x + 8$ ، فأوجد BC .

نصيحة دراسية
مُنصف الزاوية بالنسبة للجزء b. فإن عدم توفر أي معطيات سوى أن $LM = LM$ أن يكون كافياً لاستنتاج أن \overrightarrow{KL} تنصف $\angle JKM$.

ونفس الشيء ينطبق على المنصفات العمودية، فيما أن المثلث له ثلاث زوايا، فإن له أيضاً ثلاث منصفات زوايا، إن منصفات زاوية المثلث متقاطعة، ونقطة تقاطعها تسمى **مركز الدائرة الداخلية** للمثلث.

نظرية 4.6: نظرية مركز الدائرة الداخلية



تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة الداخلية بحيث تكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث. إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$ فإن $PD = PE = PF$.

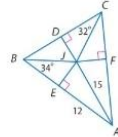
مثال

سوف تثبت النظرية 4.6 في تمرين 338

مثال 4: استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية

أوجد قياس كل مما يلي إذا علمت أن J هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a. JF



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$JE^2 + 12^2 = 15^2$$

$$JE^2 + 144 = 225$$

$$JE^2 = 81$$

$$JE = \pm 9$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

$$15^2 = 225 \text{ و } 12^2 = 144$$

ب طرح 144 من كل طرف

بحساب الجذر التربيعي من كل طرف

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً، استخدم الجذر التربيعي الموجب فقط وهو 9. بما أن $JE = 9$ ، $JF = 9$.

b. $m\angle JAC$

بما أن \overline{BJ} تنصف $\angle CBE$ ، $m\angle CBE = 2m\angle JBE$. إذا $m\angle CBE = 68$ ، $m\angle JBE = 34$. وبالمثل، $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$. إذا $m\angle DCF = 64$ ، $m\angle DCJ = 32$.

$$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180$$

$$68 + 64 + m\angle FAE = 180$$

$$132 + m\angle FAE = 180$$

$$m\angle FAE = 48$$

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle CBE = 68, m\angle DCF = 64$$

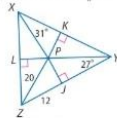
بسط

ب طرح 132 من كل طرف

بما أن \overline{AJ} تنصف $\angle FAE$ ، $m\angle JAC = m\angle JAE$. فهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$. إذا $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48) = 24$.

تعرين موجه

إذا كانت P هي المركز الداخلي لـ $\triangle XYZ$ ، أوجد قياس كل مما يلي.

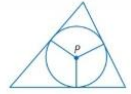


4A. PK 16

4B. $m\angle L郑$ 32

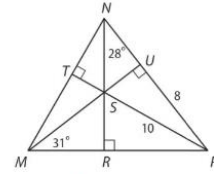
قراءة في الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية هو
مركز الدائرة التي تتقاطع مع كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. لهذا السبب، يقع مركز الدائرة الداخلية دائماً داخل المثلث.



مثال إضافي

4 أوجد قياس كل مما يلي إذا كان S هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle MNP$.



a. SU 6

b. $m\angle SPU$ 31

3 التمرين

التقويم التكويني

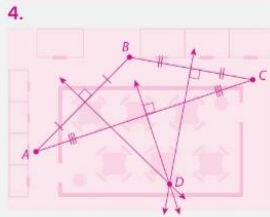
استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسازاً للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمرين 8، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

إجابة إضافية

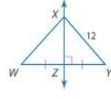


التحقق من فهمك

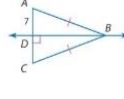
أوجد قياس كل مما يلي.

مثال 1

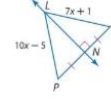
1. XW 12



2. AC 14



3. LP 15



مثال 2

4. إعلان أربع صديقات يتبادلن النشرات الإعلانية بساحة طعام بأحد المراكز التجارية. أخذت ثلاث منهن ما استطعن جمعه من النشرات الإعلانية وجلسن كما هو موضح. تحتفظ الصديقة الرابعة بخرنوا إضافي من النشرات الإعلانية. انسج مواضع النقاط A, B, C . ثم عتب موقع الصديقة الرابعة عند النقطة D حتى تكون على مسافة واحدة من الصديقات الثلاث الأخريات. **انظر الهامش.**



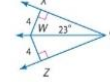
مثال 3

أوجد قياس كل من الآتي.

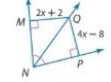
5. CP 8



6. $m\angle WYZ$ 23

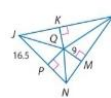


7. QM 12



مثال 4

8. **الاستنتاج المنطقي** أوجد JO إذا كانت O هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$.

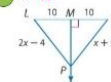


التمرين وحل المسائل

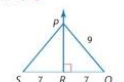
أوجد قياس كل مما يلي.

مثال 1

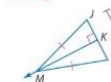
9. NP 14



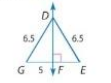
10. PS 9



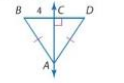
11. KL 6



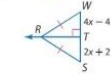
12. EG 10



13. CD 4



14. SW 16



211

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	9-30, 48-51, 54-69	10-30 زوجي, 48-51, 54, 59-69
OL أساسي	9-35 فردي, 36, 37-43, 44, 45, 47, 48-51, 54-69	31-51, 54, 59-69
BL متقدم	32-67, (اختياري, 68, 69)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسبقاً للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمارين من 27 إلى 30. شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

مثال 2

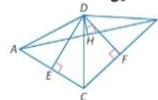
15. **المعرض الوطني** تم تحديد مواقع جناح الملاهي ومساحات الباشية وباتني المواد الغذائية في المعرض الوطني. قرر المخططون للمعرض وضع دورات المياه المتصلة على مسافة واحدة من كل موقع. انسخ مواقع النقاط L و M و F . ثم أوجد موقع دورات المياه وسماها النقطة R . **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**



16. **المدرسة** أنشأت إدارة مجمع مدارس منى للحلقة الأولى وآخر للحلقة الثانية وآخر للحلقة الثالثة كما هو موضح بالرسم التخطيطي. انسخ مواقع النقاط M و E و H . ثم أوجد موقع ساحة الحفلات B التي تستخدم هذه المدارس الثلاثة بحيث تكون الساحة على نفس المسافة من كل المدارس. **انظر الهامش.**



النقطة D هي مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$. اذكر أي القطع المستقيمة تتطابق مع القطع المستقيمة الأخرى.

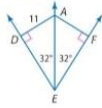


17. \overline{AD} \overline{CD} , \overline{BD}
19. \overline{AH} \overline{BH}

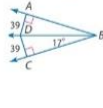
18. \overline{BF} \overline{CF}
20. \overline{DC} \overline{DA} , \overline{DB}

أوجد قياس كل مما يلي.

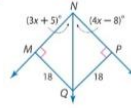
21. $\angle AFE$ 11



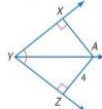
22. $m\angle DBA$ 17



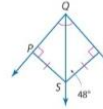
23. $m\angle PNM$ 88



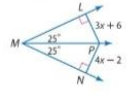
24. $\angle XA$ 4



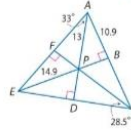
25. $m\angle PQS$ 42



26. $\angle PN$ 30



الاستنتاج المنطقي النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$. أوجد قياس كل مما يلي.



27. $\angle PBA$ 7.1

28. $\angle DE$ 13.1

29. $m\angle DAC$ 33

30. $m\angle DEP$ 28.5

مثال 4

ملاحظات لحل التمرين

الفرجار والحافة المستقيمة

تطلب التمارين 4 و 15 و 16 و 36 و 44 و 49 استخدام فرجار وحافة مستقيمة.

تدريس الممارسات في الرياضيات

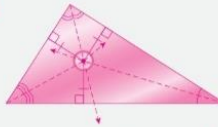
الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والناتج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمرينين 39 و 40، شجّع الطلاب على رسم كل شكل قبل البدء في وضع البرهان.

إجابات إضافية

16.



31.



أوجد نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث، مركز الدائرة الداخلية، تقع هذه النقطة على مسافة متساوية من كل ضلع في المثلث.

36a. ينبغي أن يقف حارس المرمى بطول منتصف زاوية ركلة الخصم بما أن المسافة لأي من ضلعي الزاوية واحدة بطول هذا الخط.

36b.



36c.

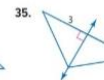
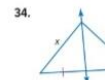
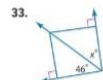
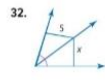


أقصر مسافة بين مستقيم ونقطة ليست على هذا المستقيم هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من هذه النقطة.



31. تصميم داخلي إذا أردت وضع مزمهرية على طاولة ركبية بحيث تكون على مسافة واحدة من جميع حواف الطاولة، اصنع رسماً تخطيطياً لتوضيح موقع المزمهرية. اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

حدد ما إذا كانت المعلومات المعطاة بكل رسم تخطيطي كافية لإيجاد قيمة x . اشرح استنتاجك. 32. لا؛ تريد معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة عمودية على الأشعة.



36. كرة قدم يتجه لاعب كرة القدم P إلى مرمى الفريق الخصم كما هو موضح بالرسم التخطيطي. لإحراز الهدف، ينبغي على اللاعب ركل الكرة بين عارضتي المرمى عند النقطتين L و R . يقف حارس المرمى أمام اللاعب ثم حاول الحارس الوقوف بطريقة تساعد على القفز بجسده لإيقاف الكرة. بحيث يبعد عن الضلع الأقصر لزاوية التسديد بنفس المسافة التي يبعد بها عن الضلع الأيمن لزاوية التسديد. $B=C$. انظر الهامش.



a. صف الموقع الذي ينبغي على الحارس الوقوف عنده. اشرح استنتاجك.
b. اصنع $\triangle PRL$. استخدم منقلة ومسطرة لتحديد النقطة G التي ينبغي على الحارس الوقوف عندها.
c. إذا تم ركل الكرة لتتبع المسار من P إلى R ، حدد أقصر مسار ينبغي على حارس المرمى اتباعه لصد الكرة. اشرح استنتاجك.

الإثبات اكتب إثباتاً من عمودين. 37-38. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

38. النظرية 4.6

المعطى: مُنصفات زوايا $\triangle ABC$.

AD, BE, CF

$AD \perp AB, BE \perp BC,$

$KP \perp AC$

الإثبات: $KP = KQ = KR$



37. النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CR}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

الإثبات: تقع النقطتان D و C على العمودي \overline{AB}



الفرضيات اكتب الفقرة الإثباتية لكل نظرية.

39. النظرية 4.1

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمُنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالأطراف المعطاة. علل إجابتك.

41. $A(-3, 1)$ و $B(4, 3)$ انظر الهامش. 42. $C(-4, 5)$ و $D(2, -2)$ انظر الهامش.

213

42. $y = \frac{6}{7}x + \frac{33}{14}$ ، يقطع النصف العمودي

القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف

القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي

$(-1, \frac{3}{2})$ ، ميل القطعة المستقيمة المحددة

هو $-\frac{7}{6}$ ، إذا ميل النصف العمودي هو $\frac{6}{7}$.

41. $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$ ، يقطع النصف العمودي

القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف

القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي

$(\frac{1}{2}, 2)$ ، ميل القطعة المستقيمة المذكورة

هو $\frac{2}{7}$ ، إذا ميل النصف العمودي هو $-\frac{7}{2}$.

213



43. الإثبات اكتب إثباتاً من عمودين للنظرية 4.4. انظر الهامش.

44. تصميم بياني تقوم خولة بتصميم علم مثلث لمدارسها. فهي تريد وضع صورة لشعار المدرسة داخل دائرة في العلم الرياضي. اتبع رسة العلم المثلث وحدد موقع النقطة التي ستكون مركز الدائرة لعمل أكبر دائرة ممكنة. علل رسك. انظر الهامش.

هندسة إحداثية حدد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة للمثلث ذي الرؤوس المعطاة. اشرح.

45. انظر الهامش. $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$ 46. $J(5, 0), K(5, -8), L(0, 0)$



47. محل هندسي ذكر في \overline{CD} صف مجموعة كل النقاط الموجودة في الفراغ الواقع على مسافة واحدة من D و C .

ثمة مستوى عمودي على مستوى آخر حيث \overline{CD} يقع على \overline{CD} وينصفها

48. أسماء، النقطة K تقع فقط على النصف العمودي لـ \overline{LM} إذا كان $\overline{LK} \cong \overline{MK}$ ولكن لا توجد هذه المعلومات في الرسم التخطيطي.

مهارات التفكير العليا مسائل



48. تحليل الخطأ يقول حليم إنه بعد اطلاعه على المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، يمكنه استنتاج أن K تقع على النصف العمودي لـ \overline{LM} . لا يوافق حمادة على هذا الرأي. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

49. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثلثاً به مركز دائرة داخلية تقع داخل المثلث ولكن مع وجود مركز الدائرة المحيطة خارج المثلث. برر رسك باستخدام مسطرة ومنقلة لإيجاد نقطتي التقاطع.

فرضيات حدد ما إن كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. أو غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك باستخدام مثال مضاد أو إثبات.

50. تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة تقع على مسافة واحدة من رؤوس المثلث. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

51. في المثلث المتساوي السابق، يكون النصف العمودي للقاعدة هو أيضاً منصف زاوية الرأس المقابل. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

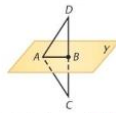
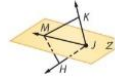
تحذّر اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ من التالي.

52. المعطيات: المستوي Y عمودي على

نصف \overline{DC} . انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

53. المعطيات: المستوي Z هو منصف زاوية $\angle KJH$. $\overline{KJ} \cong \overline{HJ}$ انظر ملحق

إثبات أن: $\overline{MH} \cong \overline{MK}$ إجابات الوحدة 4.



54. الكتابة في الرياضيات قارن بين النصف العمودي ونصف زوايا المثلث. ما أوجه الشبه بينهما؟ وما أوجه الاختلاف بينهما؟ تأكد من مقارنة نقاط تقاطعها. انظر الهامش.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 48.

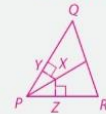
ينبغي أن يدرك الطلاب أنه لا توجد معلومات متاحة بخصوص الزاوية التي يشكلها النصف. ترى حليلة أن المستقيم ينصف القطعة المستقيمة إلى طولين متساويين. لكنها تعتقد أنه عمودي بمجرد أنه يبدو كذلك.

إجابات إضافية

43. المعطيات: \overline{PX} تنصف $\angle QPR$.

$\overline{XZ} \perp \overline{PR}$ و $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$

المطلوب إثباته: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$



البرهان:

العبارة (المبررات)

1. \overline{PX} تنصف $\angle QPR$.

و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$ (معطى).

2. $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية).

3. $\angle PYX$ و $\angle PZX$ زاويتان قائمتان.

(تعريف النصف العمودي)

4. $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزوايا القائمة متطابقة).

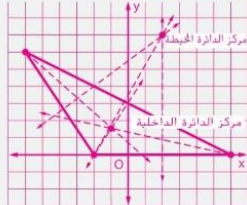
5. $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس).

6. $\triangle PYX \cong \triangle PZX$ (AAS).

7. $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (CPCTC).



49. الإجابة النموذجية:



45. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات

العمودية هي $y = 3$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند (5, 3). يقع مركز الدائرة المحيطة عند (5, 3).

46. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات

العمودية هي $y = -4$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 2.5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند (2.5, -4). يقع مركز الدائرة المحيطة عند (2.5, -4).

عندما تكون الدائرة كبيرة قدر الإمكان، ستلمس كل الأضلاع الثلاثة للعلم المثلث. نحتاج إلى إيجاد مركز الدائرة الداخلية للمثلث عن طريق إيجاد نقطة تقاطع منصفات الزوايا.

تدريس الممارسات في الرياضيات

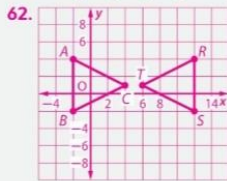
الترسيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحلوا المواقف عن طريق تصنيفها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرينين 50 و 51. شجّع الطلاب على رسم كل شكل أولاً.

4 التقييم

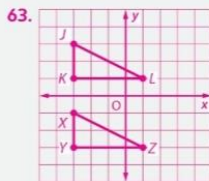
تعيين مصطلح الرياضيات اجعل الطلاب يرسموا شكلاً غير منتظم بخمسة أضلاع. اجعلهم يصفوا طريقة لإيجاد مركز جاذبيته.

إجابات إضافية

54. كل منتصف بنصف شيئاً. لكن المنصفات العمودية تنصف القطع المنتظمة بينما منصفات الزوايا تنصف الزوايا. سيتقاطعون عند نقطة التقاء، نقطة التقاء المنصفات العمودية هي مركز الدائرة المحيطة، نقطة التقاء منصفات الزوايا هي مركز الدائرة الداخلية. يقع مركز الدائرة الداخلية داخل المثلث، بينما مركز الدائرة المحيطة يمكن أن يكون داخل المثلث أو خارجه أو على ضلعه.



62. $\triangle RST$ هو انعكاس للمثلث $\triangle ABC$:
 $AB = 6, BC = \sqrt{45}, AC = \sqrt{45},$
 $TR = \sqrt{45}, RS = 6, TS = \sqrt{45}.$
 $\triangle ABC \cong \triangle RST$ بموجب SSS.



63. $\triangle JKL$ هو إزاحة للمثلث $\triangle XYZ$:
 $JK = 2, KL = 4, JL = \sqrt{20},$
 $XY = 2, YZ = 4, XZ = \sqrt{20}.$
 $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$ بموجب SSS.

تمرين على الاختبار المعياري

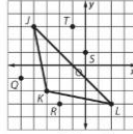
55. الجبر نو رمي جسم لأعلى بسرعة ابتدائية 4 متر في الثانية ومن ارتفاع ابتدائي 5 متر. يقدر الارتفاع h بالأمتار للجسم بعد t ثانية بالمعادلة $h = -16t^2 + 4t + 5$. تقف ربا على حافة شرفة ترتفع 54 متراً عن سطح الأرض ورمت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 12 متراً في الثانية. بعد كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض؟ **A**

- A 3 ثوانٍ
 B 4 ثوانٍ
 C 6 ثوانٍ
 D 9 ثوانٍ

56. SAT/ACT. حيث $x \neq -3, \frac{3x+9}{x+3} = K$

- F $x + 12$
 G $x + 9$
 H $x + 3$
 J x
 K 3

57. أي من النقاط التالية يمكن رسم مستقيم يمر بها بحيث يكون المستقيم مماساً عمودياً لـ $\triangle JKL$ ؟ **D**

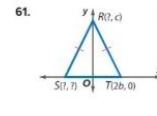
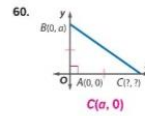
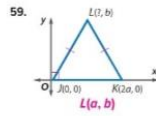


- A $T \neq K$
 B $L \neq Q$
 C $J \neq R$
 D $S \neq K$

58. إجابة مختصرة اكتب معادلة بصيغة الميل والقطع نصف المستقيم الذي تقع عليه النقطتين $(-1, 0)$ و $(2, 4)$.

مراجعة شاملة

عين الإحداثيات المقفولة لكل مثلث.



هندسة إحداثية ارسم كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق. 62-63. انظر الهامش.

62. $A(-2, 4), B(-2, -2), C(4, 1);$
 $R(12, 4), S(12, -2), T(6, 1)$

63. $J(-3, 3), K(-3, 1), L(1, 1);$
 $X(-3, -1), Y(-3, -3), Z(1, -3)$

أوجد المسافة من المستقيم إلى النقطة المعطاة.

64. $y = 5, (-2, 4)$ 1

65. $y = 2x + 2, (-1, -5)$ $\sqrt{5}$

66. $2x - 3y = -9, (2, 0)$ $\sqrt{13}$

67. الهندسة الصوتية يقوم مهندس الاستوديو بتحصيل رسوم ثابتة بمقدار AED 450 مقابل تأجير المعدات و 42 AED مقابل ساعة من التسجيل والتجهيز. اكتب المعادلة التي توضح تكلفة تأجير مهندس الاستوديو كدالة زمنية. كم قد تكلف تأجير مهندس الاستوديو لمدة 17 ساعة؟ **الدرس 3-4 AED 1164** $m = 42t + 450$

مراجعة البهارات

إثبات اكتب برهاناً من عمودين لكل مما يلي. 68-69. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.



69. المعطيات: $\triangle MLP$ متساوي الساقين.
 N هي نقطة منتصف MP .
 المطلوب: $EN \perp MP$



68. المعطيات: $\triangle XKF$ متساوي الأضلاع.
 J هي نقطة منتصف KF .
 المطلوب: $XJ \perp KF$

التدريس المتميز

التوسع اجعل الطلاب يناقشوا في مجموعات المصطلح الهندسي الذي يمثل مركز نجمة ويشرحوه. الإجابة النموذجية: يقع مركز الدائرة المحيطة لشكل على مسافة متساوية من رؤوس الشكل.



مختبر الهندسة 4-2 إنشاء المتوسطات والارتفاعات

المتوسط في المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفيها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكن إنشاء متوسط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة. لتد طرف خيط حول قلم رصاص، واستخدم دبوساً لتثبيت الخيط بالرأس.

الإنشاء 1 متوسط المثلث

<p>الخطوة 1</p> <p>ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس B لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل DE. اكتب على تقاطع S و R.</p>	<p>الخطوة 2</p> <p>استخدم مسطرة لإيجاد النقطة الناشئة من تقاطع RS مع DE اكتب على النقطة M. هذه هي نقطة المنتصف في DE.</p>	<p>الخطوة 3</p> <p>ارسم مستقيماً يمر عبر F و M. FM هو متوسط في $\triangle DEF$.</p>
---	--	--

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس المثلث إلى الضلع المقابل ويكون عمودياً على الضلع المقابل.

الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

<p>الخطوة 1</p> <p>ضع الدبوس على الرأس B وارسم قوسين يتقاطعان عند AC. اكتب على تقاطعي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.</p>	<p>الخطوة 2</p> <p>مقل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسبار على X وارسم قوساً فوق AC. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. اكتب على تقاطعي تقاطع القوسين H.</p>	<p>الخطوة 3</p> <p>استخدم مسطرة لرسم BH. اكتب على النقطة الناشئة من تقاطع BH مع AC اسم D. BD هو ارتفاع $\triangle ABC$ وعمودي على AC.</p>
--	--	---

استخدام النماذج والتحليل 1-2. انظر الهامش.

1. أنشئ متوسطين للضلعين الآخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بشأن متوسطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

1 التركيز

الهدف إنشاء وسبحات وارتفاعات المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- مسطرة عدلة
- خيل
- دبوس

نصيحة للتدريس

يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتثبيت مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب من الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين الوسيطات والارتفاعات في المثلث نفسه.

الطريقة البديلة

يمكن أيضاً استكمال الإنشاءات المعروضة في هذا الدرس باستخدام أسلوب المسطرة العادية والفرجار.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. ينتهي كل طالب إحدى هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. حدد يتناوب الطلاب خطوات الإنشاء 1 و 2.

تبرين اطلب من الطلاب إتقان التبرينين 1 و 2.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التبرينين 1 و 2 لتقييم ما إذا كان الطلاب يستوعبون إنشاء الوسيطات والارتفاعات.

إجابات إضافية

1. يتقاطعون عند النقطة نفسها.
2. يتقاطعون عند النقطة نفسها.

من العملي إلى النظري

اجعل الطلاب يشاركون تقاطعات الوسيطات والارتفاعات التي أنشأوها بمركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة الخارجية للمثلث.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-2 تحديد النصفين العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

الدرس 4-2 تحديد الوسيطات والارتفاعات واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-2 التعرف على خواص متباينات زوايا المثلث وأصلاعه وتطبيقها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما معنى حركي؟ **يتحرك**
- من أي نقطة ينبغي تعليق الهاتف المحمول لكي يوازي الأرض؟ **نقطة التوازن**
- هل تقع نقطة توازن الهاتف المحمول دائماً عند مركزه؟ لماذا؟ **الإجابة النموذجية: لا، فهي في الصورة ليست كذلك، وهذا بسبب اختلاف أوزان الأجسام.**

متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

4-2

لماذا؟

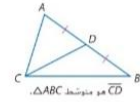
الحالي

السابق



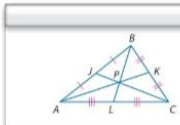
● تحديد المتوسطات في المثلثات واستخدامها.
● تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.

● لقد تعرفت على النصفين العمودية ومنصفات الزوايا في المثلثات واستخدامها.



1 المتوسطات **متوسط** المثلث هو قطعة مستقيمة يصل أحد طرفيها أحد رؤوس المثلث والآخر نقطة منتصف الضلع المقابل.

لكل مثلث ثلاثة متوسطات متلاقية وتسمى نقطة التقاء المتوسطات المثلث **النقطة المركزية للمثلث** وتقع دائماً داخل المثلث.



النظرية 4.7: نظرية النقطة المركزية للمثلث

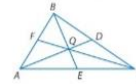
تتقاطع متوسطات المثلث في النقطة تسمى النقطة المركزية للمثلث، وهي تقع على بعد ثلثي المسافة من الرأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل.

مثال إذا كانت النقطة P هي نقطة المركزية لـ $\triangle ABC$ ، فإن $AP = \frac{2}{3}AL$ و $BP = \frac{2}{3}BK$ و $CP = \frac{2}{3}CM$.

سوف تقوم بتأجيل النظرية 4.7 في التمرين 36.

مثال 1 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle ABC$ إذا كان Q هي النقطة المركزية للمثلث و $BE = 9$ ، أوجد BQ و QE.



$$BQ = \frac{2}{3}BE$$

$$= \frac{2}{3}(9) \text{ or } 6$$

$$BQ + QE = 9$$

$$6 + QE = 9$$

$$QE = 3$$

نظرية النقطة المركزية

$$BE = 9$$

إضافة قطعة مستقيمة

$$BQ = 6$$

نخرج 6 من كل طرف.

تمرين هو وجه في $\triangle ABC$ أعلاه، $PC = 15$ ، أوجد قياس كل من ما يلي.

1A. FQ 5

1B. QC 10

المفردات الجديدة

متوسط المثلث

(median)

النقطة المركزية للمثلث

(centroid)

ارتفاع المثلث

(altitude)

مركز الارتفاعات

(orthocenter)

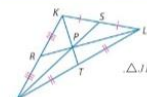
ممارسات في الرياضيات

مراجعة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

نصيحة دراسة

الاستنتاج في المثال 2.
يمكنك أيضا استخدام الحس
العدي لمعرفة K_P . بما أن
 $K_P = \frac{2}{3}K_T$, $P_T = \frac{1}{3}K_T$
و $K_P = 2P_T$ بالتالي، إذا كان
 $P_T = 2$ ، إذا $K_P = 2(2) = 4$.



في $\triangle JKL$ إذا كان $PT = 2$ فأوجد KP .

بما أن $\overline{JK} \cong \overline{RK}$ هي نقطة منتصف \overline{LR} و \overline{JK} مثلث متوسط $\triangle JKL$ وبالمثل S و T هما نقطتا منتصف \overline{KL} و \overline{LT} على التوالي. لذا $\overline{JS} \cong \overline{KT}$ بما أن $\triangle JKL$ و $\triangle KLT$ متطابقان. وعليه، فالنقطة P هي النقطة المركزية لـ $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$ نظرية النقطة المركزية

$$KP = \frac{2}{3}(KP + PT) \quad \text{بالتعويض}$$
$$KP = \frac{2}{3}(KP + 2) \quad PT = 2$$
$$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$$

خاصية التوزيع

ا طرح $\frac{2}{3}KP$ من کل طرف $\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$

الضرب كل طرف في 3

تھریں موحہ

في $\triangle JKL$ أعلاه، $RP = 3.5$ و $JP = 9$. أوجد قياس كل مما يلي

2A, PL 7

2B, PS 4.5

كل المضلعات لها نقطة توازن أو مركز متوسط. تعتبر النقطة المركزية أيضًا هي نقطة التوازن أو مركز الجاذبية للمنطقة المثلثة. مركز الجاذبية هو النقطة التي تستقر عندها المنطقة بفعل الجاذبية.

🌐 مثال من الحياة اليومية 3 إيجاد النقطة المركزية للمثلث في المستوى الإحداثي

الفنون الاستعراضية يخطط فنان استعراضى لموازنة قطع مثله معدنية خلال عرضه التالي. عند وضع هذا المثلث على المستوى الإحداثي، تقع رؤوس المثلث على النقاط (1, 1) و (5, 0) و (9, 5). ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟

الاستيعاب نحتاج إلى إيجاد النقطة المركزية للمثلث على الإحداثيات المعطاة. تلك هي النقطة التي سوف يتوازن المثلث عندها.

التخطيط مثل المثلث بيانًا مع تسمية رؤوسه كالتالي $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$ و $C(9, 5)$.
 بما أن النقطة المركزية هي نقطة التواء منوطات المثلث، استخدم نظرية النقطة المركزية لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث. تقع النقطة المركزية على بعد ثلثي المسافة من الرأس المقابل إلى نقطة المنتصف تلك.

1 الوسيطات

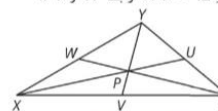
يوضح المثالان 1 و 2 كيفية استخدام نظرية النقطة المركزية لإيجاد أطوال القطع المستقيمة. يوضح المثال 3 كيفية إيجاد النقطة المركزية باستخدام المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين
الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد
استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافی

في $\triangle XYZ$ ، P هي النقطة المركزية
و $YV = 12$. أوجد YP و PV .

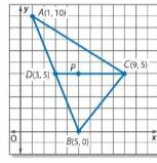
 $YP = 8; PV = 4$

تدريس المهارسات في الرياضيات

الاستنتاج يشهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات والعلاقة بينها في مواقف المسألة. شجع الطلاب على فهم السياق المجرد في المسألة.

الربط بتاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما
1601-1665
نشد مركز آخر
المثلث وهو ما يعرف بنقطة
فيرما. وهي النقطة التي تكون
المسافة الكلية بينها وبين
الرؤوس الثلاثة أقل ما يمكن.
فيرما هو أحد أشهر علماء
الرياضيات في تخصص البراهين
الكلاسيكية.



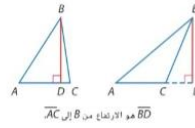
الحل مثل بيانياً $\triangle ABC$.
أوجد نقطة المنتصف D للضلع \overline{AB} بطريقه $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$.
 $D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$
لاحظ أن \overline{DC} يحد مستقيماً أقصياً المسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تبلغ $9 - 3 = 6$ أو 6 وحدات.
إذا كانت P هي النقطة المركزية لـ $\triangle ABC$ ، إذا شئت النقطة المركزية P هي $PC = \frac{2}{3}DC$ أو 4 وحدات على مسار C . وتكون إحداثيات النقطة $P(9 - 4, 5) = (5, 5)$.
ينبغي على الفنان الاستعراضي موازنة المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

التحقق استخدم متوسطاً آخر للتحقق من الإجابة. إن نقطة المنتصف F للضلع \overline{AC} هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right) = F(5, 7.5)$. \overline{BF} هو مستقيم عرضي. لذا فالمسافة من F إلى B تساوي $7.5 - 0 = 7.5$ أو $\frac{3}{2}(7.5) = 11.25$. لذا تكون P أعلى ببعد 5 وحدات عن B . تكون إحداثيات النقطة $P(5, 5)$ أو $P(5, 0 + 5)$. ✓

تمرين موجه

3. تقع رؤوس مثلث آخر على النقاط $(0, 4)$ و $(6, 11.5)$ و $(12, 1)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

2 الارتفاعات إن **ارتفاع** المثلث هو القطعة المستقيمة الممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يقع عليه الضلع المقابل وتتعامد على المستقيم الذي يقع عليه هذا الضلع. قد يكون ارتفاع المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على الضلع.



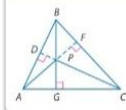
لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات. إذا امتدت ارتفاعات المثلث فسوف تتقاطع في نقطة مشتركة.

المفهوم الأساسي: مثلثي الارتفاعات

تتلاقى المستقيمتان التي تقع عليهما ارتفاعات المثلث وتتلاقى في نقطة تسمى

مثلثي الارتفاعات

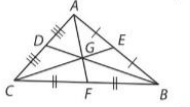
تتقاطع المستقيمتان التي تقع عليهما الارتفاعات \overline{AF} و \overline{CD} و \overline{BG} عند النقطة P . مثلثي ارتفاعات $\triangle ABC$.



قراءة في الرياضيات
ارتفاع المثلث يعرف بأنه المسافة بين قاعدة المثلث وقمة. يستخدم ارتفاع المثلث لحساب مساحته.

أمثلة إضافية

2 في $\triangle ABC$ ، $CG = 4$. أوجد GE .



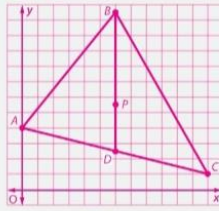
3 التفت يضع أحد الفنانين تصميمًا لـ **النحت** لـ **المنحوتة** توازن مثلثاً فوق عمود. في تصميم الفنان على المستوى الإحداثي، تقع الرؤوس عند $(1, 4)$ و $(3, 0)$ و $(3, 8)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان أن يضع عندها العمود تحت المثلث لكي يتوازن؟ $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$

افتيه!

مثلثي الارتفاعات قد لا يقع مثلثي الارتفاعات داخل المثلث.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

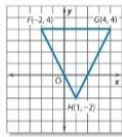
3. $(6, 5.5)$



نقطة منتصف الضلع \overline{AC} هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = D(6, 2.5)$.
 \overline{BD} مستقيم رأسي بحيث تكون المسافة من B إلى D هي $11.5 - 2.5 = 9$.
 $PB = \frac{2}{3}(9) = 6$ أو 6. إذا P تبلغ 6 وحدات نزولاً من B . إحداثيات P هي $(6, 5.5)$ أو $(6, 11.5 - 6)$.

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية تقع رؤوس $\triangle FGH$ على النقاط $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$ و $H(1, -2)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$.



مثلث $\triangle FGH$. لإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين أو ثلاثة ارتفاعات.

أوجد معادلة للارتفاع من F إلى \overline{GH} . ميل \overline{GH} يساوي $\frac{4 - (-2)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$. إذا فإن ميل الارتفاع، المتعامد على \overline{GH} يساوي $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{صيغة الميل والنقطة} \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - (-2)) && (x_1, y_1) = F(-2, 4) \text{ و } m = -\frac{1}{2} \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}(x + 2) && \text{بسط} \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}x - 1 && \text{خاصية التوزيع} \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 && \text{أضف 4 لكل طرف} \end{aligned}$$

أوجد معادلة للارتفاع من G إلى \overline{FH} . ميل \overline{FH} يساوي $\frac{-2 - 4}{1 - (-2)} = \frac{-6}{3} = -2$. لذا فإن ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{صيغة الميل والنقطة} \\ y - 4 &= \frac{1}{2}(x - 4) && (x_1, y_1) = G(4, 4) \text{ و } m = \frac{1}{2} \\ y - 4 &= \frac{1}{2}x - 2 && \text{خاصية التوزيع} \\ y &= \frac{1}{2}x + 2 && \text{أضف 4 لكل طرف} \end{aligned}$$

حل نظام المعادلات الناتج لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

إضافة المعادلتين لحذف x ينتج $5 = 2y$ أو $y = \frac{5}{2}$.

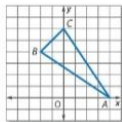
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 2 && \text{معادلة الارتفاع من } G \\ \frac{5}{2} &= \frac{1}{2}x + 2 && \text{عوض } y = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}x && \text{بطرح } \frac{5}{2} \text{ من كلا الطرفين} \\ 1 &= x && \text{بضرب كلا الطرفين في 2} \end{aligned}$$

إن إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle FGH$ تساوي $(1, \frac{5}{2})$ أو $(1, 2\frac{1}{2})$.

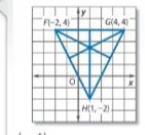
تكوين موجه

4. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ المرسوم.

بيانات على اليسار.



نصيحة دراسية
تحقق من مدى صحة الحل
استخدم مائتا من الورقة لرسم ارتفاعات كل ضلع بالمثلث.



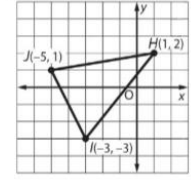
بلغ التقاطع تقريباً عند $(1, 2\frac{1}{2})$. إذا، فالإجابة معقولة.

2 الارتفاعات

المثال 4 يوضح كيفية العثور على ملتقى ارتفاعات مثلث على المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

4 هندسة الإحداثيات رؤوس $\triangle HIJ$ هي $H(1, 2)$ و $I(-3, -3)$ و $J(-5, 1)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle HIJ$.



$(-3\frac{6}{13}, -\frac{3}{13})$

التركيز على محتوى الرياضيات

النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات

في مثلث حاد الزاوية، قد يبدو أن النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات هما الشيء نفسه. لا يحدث هذا إلا عندما يكون كل وسيط في المثلث مشابهاً لكل منتصف عمودي.

التدريس المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب أن يطووا قطعة ورق إلى أربعة أقسام مكتوب عليها مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات. اجعل الطلاب يرسموا نسخة من المثلث نفسه في كل قسم من الورقة ويستخدموا مهاراتهم المساحية لتحديد الموضع التقريبي لمركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات في المثلث. ثم يستطيع الطلاب استخدام مسطرة قياس وفرجار ومنقلة لمعرفة مدى دقة تقديراتهم.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-4 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

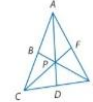
الاستنتاج المنطقي قد يكون من الصعب على الطلاب أن يميزوا بين نقاط الالتقاء الأربع في مثلث. اجعل الطلاب يرسموا رسماً تخطيطياً باستخدام منقلة ومسطرة لكل من النقاط. شجع الطلاب على تكوين رابط بين القطع المستقيمة التي يرسمونها ونقطة الالتقاء المقابلة.

ملخص المفهوم القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلثات				
الاسم	مثال	نقطة الالتقاء	خاصية خاصة	مثال
منتصف عمودي		مركز الدائرة المحيطة	مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل رأس.	
منتصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية	مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل أضلاع المثلث.	
متوسط المثلث		النقطة المركزية	النقطة المركزية R لـ $\triangle ABC$ تقع على بعد ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل لها.	
ارتفاع المثلث		ملتقى الارتفاعات	المستقيبات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ تتقاطع مع ملتقى الارتفاعات S .	

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 في $\triangle AOE$ إذا كان P هي النقطة المركزية، $PF = 6$ و $AD = 15$. أوجد قياس كل مما يلي.

1. PC 12
2. AP 10



3. **تصميم داخلي** يقوم مهندس ديكور بتصميم طاولة قهوة مخصصة لأحد زبائن. سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجي نجب موازته على دعامة واحدة. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث هي (3,6) و (5,2) و (7,10). فأي نقطة يجب وضع الدعامة؟ (5, 6)



4. **هندسة الإحداثيات** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle ABC$ مع رؤوس $A(-3, 3)$, $B(-1, 7)$ و $C(3, 3)$. (-1, 5)

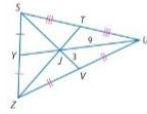
التبرين وحل المسائل

الأمتة 1-2

في $\triangle SZU$ إذا كان $UZ = 9$ و $UJ = 3$ و $VJ = 18$ و $ZT = 18$ ، أوجد طول كل مما يلي.

5. VJ 4.5
7. YU 13.5
9. JT 6

6. SJ 6
8. SV 9
10. ZJ 12

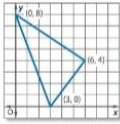


مثال 3

الهندسة الإحداثية حذد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث حسب الرؤوس المعطاة.

11. $A(-1, 11)$, $B(3, 1)$, $C(7, 6)$ (3, 6)

12. $X(5, 7)$, $Y(9, -3)$, $Z(13, 2)$ (9, 2)



13. تصميم داخلي صنعت حوزة ملصق عليه صور أصدقائها. تريد تعليق الملصق في غرفتها بحيث يكون موازاً للملصق. يتوفر الرسم التخطيطي للملصق بالتشيل البياني الموجود على اليسار. بأي نقطة ينبغي أن نعلق الخيط؟ (3, 4)

مثال 4

الهندسة الإحداثية حذد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لكل مثلث له رؤوس معلومة.

14. $J(3, -2)$, $K(5, 6)$, $L(9, -2)$ (5, -1)

15. $R(-4, 8)$, $S(-1, 5)$, $T(5, 5)$ (-4, -4)

حدد إذا ما كانت كل قطعة مستقيمة \overline{BD} عبارة عن ارتفاع أم متوسط أم منتصف عمودي.

16. الارتفاع



17. متوسط المثلث



18.



19.

متوسط المثلث

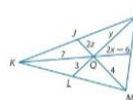
عمودي

منصف

ارتفاع المثلث

متوسط المثلث

مختار النشر والتأليف © محفوظة الحقوق مؤسسة جرينفيلد التعليمية



20. الاستنتاج المنطقي في الشكل الموجود على اليسار. إذا كانت P ، J ، و L هي نقاط منتصف \overline{KH} و \overline{HM} على الترتيب، أوجد x ، y ، و z :
 $x = 4.75$, $y = 6$, $z = 1$

222 | الدرس 4-2 | متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	5-15, 37, 38, 40, 42-56	37, زوجي 6-18 38, 40, 42, 43, 48-56
OL أساسي	5-25, 26, 27-37, 38, 40, 42-56	20-38, 40, 42, 43, 48-56
BL متقدم	20-55, (اختياري) 56	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط للتوصل إلى حل. يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. يخططون لمسار حل. في التبرين 20. شجع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

إجابات إضافية

31. المعطيات: $\triangle XYZ$ متساوي الساقين \overline{WY} تنصف $\angle Y$.

المطلوب إثباته: \overline{WY} وسيط.

البرهان: بما أن $\triangle XYZ$ متساوي الساقين $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$ بموجب تعريف

منتصف الزاوية، $\angle XYW \cong \angle ZYW$

$\angle ZYW \cong \angle YWV$ بموجب خاصية

الانعكاس. إذاً بموجب SAS.

$\triangle XYW \cong \triangle ZYW$ بموجب CPCTC.

$\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ بموجب تعريف نقطة

المنتصف. W هي نقطة منتصف \overline{XZ} بموجب تعريف الوسيط.

\overline{WY} وسيط.

32. المعطيات: $\triangle XYZ$ بالوسيطات \overline{XR} ، \overline{ZO} و \overline{YS}

المطلوب إثباته: $\frac{XP}{PR} = 2$

البرهان:

العبارة (المبررات)

1. $\triangle XYZ$ بالوسيطات \overline{XR} و \overline{YS} و \overline{ZO} (معطى)

2. $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية النقطة

المركزية)

3. $XR = XP + PR$ (مسلمة

إضافة القطعة المستقيمة)

4. $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (التعويض)

5. $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية

التوزيع)

6. $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

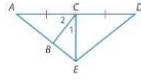
7. $XP = 2PR$ (خاصية الضرب)

8. $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمارين 27-30، شجّع الطلاب على رسم شكل لكل تمرين مع كتابة المعلومات المعطاة.

- انسخ وأكمل كل عبارة للمثلث $\triangle RST$ والمتوسطات \overline{RM} ، \overline{SL} و \overline{TK} والنقطة المركزية J .
21. $SL = x(JL)$ 3
22. $JT = x(TK)$ $\frac{2}{3}$
23. $JM = x(RJ)$ $\frac{1}{2}$



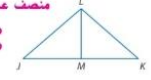
27. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ ارتفاع
29. $\overline{JM} \cong \overline{KM}$ متوسط

24. إذا كان \overline{EC} هو ارتفاع المثلث $\triangle AED$ ، $m\angle 1 = 2x + 7$ و $m\angle 2 = 3x + 13$ أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$ و $m\angle 2 = 55$ ، $m\angle 1 = 35$.
أوجد قيمة x إذا كان $AC = 4x - 3$ ، $DC = 2x + 9$ و $m\angle ECA = 15x + 2$ هو متوسط $\triangle AED$.
هل يعد \overline{EC} أيضًا ارتفاعًا للمثلث $\triangle AED$ ؟ اشرح. 16؛ لأن $m\angle ECA = 92$

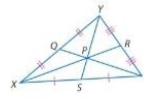
26. لوحة الألعاب الموضحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. فيها فجوات لقطع اللعب. هدف اللعبة هو التخلص من قطع اللعب من خلال الفرغ عليهم حتى لا يبقى إلا قطعة واحدة. اصنع رسيّة لوحة اللعب. وحدد أيًا من نقاط الانتهاء تمثلها القطعة الزرقاء. مركز الدائرة المحيطة، أو مركز الدائرة الداخلية، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات. اشرح استنتاجك.

فرضيات استخدم المعلومات المعطاة لتحديد ما إذا كان \overline{LM} منتصف متعامد أو متوسط و/أو ارتفاع للمثلث $\triangle JKL$.

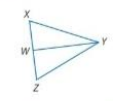
28. $\triangle JLM \cong \triangle KLM$ منتصف عمودي، ارتفاع
30. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{KL}$ منتصف عمودي، ارتفاع



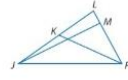
32. الإثبات اكتب إثبات جبري.
المعطيات: $\triangle XYZ$ ومتوسطاته \overline{XS} ، \overline{ZQ}
المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$ انظر الهامش.



31. الإثبات اكتب فترة إثباتية.
المعطيات: $\triangle XYZ$ متساوي الساقين.
 \overline{WY} نصف $\angle Y$.
المطلوب: \overline{WY} متوسط. انظر الهامش.



33. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة. سوف تستكشف مكان نقاط الانتهاء لأي مثلث متساوي الأضلاع. a-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.
a. عمليًا أُنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع على ورق شفاف وقصها. اطو كل مثلث لتحديد مكان مركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي ومركز المتوسطات وملتقى الارتفاعات.
b. لفظيًا عين العلاقات بين أربع نقاط النقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.
c. بيانيًا ضع مثلثًا متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي والمركز المتوسط وملتقى الارتفاعات على المستوى الإحداثي مستخدمًا إحداثيات مختلفة. وحدد إحداثيات كل نقطة النقاء.



- جبريًا في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = 3x - 6$ و $LK = 5y - 8$ و $JK = 3y - 2$.
34. إذا كان \overline{JM} هو ارتفاع في $\triangle JLP$ ، فأوجد x .
35. أوجد LK إذا كان \overline{PK} متوسطًا. 7

26. مركز الدائرة المحيطة. مركز الدائرة الداخلية. النقطة المركزية. ملتقى الارتفاعات؛ الإجابة النموذجية: يعمل منتصف الزاوية لكل زاوية كذلك على تنصيف الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل من المثلث. لذا فإنه يمثل أيضًا المنتصف العمودي والمتوسط والارتفاع. هذا يعني أن قطع اللعب الزرقاء تمثل جميع المراكز بما في ذلك مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

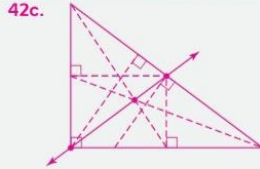
مركز الدائرة المحيطة، أو مركز الدائرة الداخلية، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات.

39. $(1, \frac{5}{3})$: الإجابة البؤسية؛ وجدت نقطة منتصف \overline{AC} واستخدمتها للوصول إلى معادلة المستقيم الذي يحتوي على النقطة B ونقطة منتصف \overline{AC} . $y = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$ وجدت أيضاً نقطة منتصف \overline{BC} ومعادلة المستقيم بين النقطة A ونقطة منتصف \overline{BC} . $y = -\frac{1}{3}x + 2$ وجدت حل نظام من معادلتين لقيمة x و y للوصول إلى إحداثيات النقطة المركزية. $(1, \frac{5}{3})$.

4 التقويم

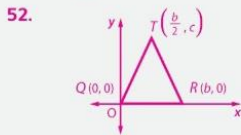
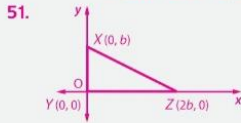
بطاقة التحقّق من استيعاب الطلاب
اجعل الطلاب يكتبوا وصفاً قصيراً يوضح الاختلافات بين الوسيط والارتفاع. وبين النقطة المركزية ملتقى ارتفاعات المثلث.

إجابات إضافية



42d. الإجابة النموذجية، مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات كلهم على خط واحد.

43. الإجابة النموذجية، كل وسيط يقسم المثلث إلى مثلثين أصغر متساويين في المساحة. إذا يكن موازنة المثلث بطول أي من تلك الخطوط، لموازنة المثلث على نقطة، نحتاج إلى إيجاد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط التوازن الثلاثة هذه. نقطة التوازن في مثلث هي تقاطع القطعتين المستقيمتين الموصلتين بين نقطتي منتصف الضلعين المتقابلين، بما أن كل قطعة مستقيمة توصل بين نقطتي المنتصف هاتين في ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين لهما المساحة نفسها.



تمرين على الاختبار المعياري

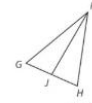
46. جرباً تطوع أربعة طالبات لهنّ كتيبات لصالح مجموعة عمل مجتمعي محلية. أي طالبة هي الأسرع؟ **H**

الطالب	سرعة الطي
أمانى	صفحة واحدة كل 3 ثوان
سهيلة	صفحتان كل 10 ثوان
مى	30 صفحة في الدقيقة
منال	45 صفحة كل دقيقتين

F منال
G أمانى
H مى
I سهيلة

47. SAT/ACT 80 بالأسئلة من 42. ما نسبتهما النسوية من 16 **B**
A 240 D 50
B 210 E 30
C 150

44. بالشكل أدناه، $\overline{GJ} \cong \overline{IH}$. أي مما يلي لا بد أن يكون صحيحاً؟ **C**



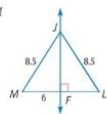
- A \overline{FJ} هو ارتفاع $\triangle FGH$.
B \overline{FJ} هو منتصف زاوية $\triangle FGH$.
C \overline{FJ} هو متوسط في $\triangle FGH$.
D \overline{FJ} هو النصف العمودي لـ $\triangle FGH$.

45. إجابة شبيهة ما نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للنمثيل البياني لـ $4x - 6y = 12$ ؟ **3**

مراجعة شاملة

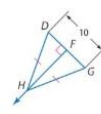
أوجد قياس كل منها.

48. LM



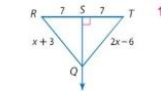
12

49. DF



5

50. TQ



12

ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سّجّها. **51-52. انظر الهامش.**

51. المثلث $\triangle XYZ$ قائم الزاوية وله وتر \overline{ZY} . وبلغ ضعف قياس \overline{XY} و \overline{XY} وبلغ طوله b وحدة **52.** $\triangle QRT$ مثلث متساوي الساقين وقاس قاعدته \overline{QR} بـ a وحدة طولاً

حدد ما إذا كان \overline{RS} و \overline{JK} متوازيين، أم متعامدين، أم خلاف ذلك. مثّل كل مستقيم بيانياً لتأكد من صحة إجابتك. **53-54. انظر الهامش.**

53. $R(5, -4)$, $S(10, 0)$, $J(9, -8)$, $K(5, -13)$

54. $R(1, 1)$, $S(9, 8)$, $J(-6, 1)$, $K(2, 8)$



55. طرق سريعة بالقرب من مدينة هوبويل بولاية فيرجينيا، ينع الطريق 10 عمودياً على الطريقين المحوريين 95 و 295. أثبت أن زوايا تقاطع الطريق 10 مع الطريق المحوري 95 والطريق المحوري 295 متطابقتان.

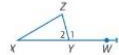
بما أن المستقيمتين عموديتين، فإن الزوايا المتكونة هي عبارة عن زوايا قائمة. جميع الزوايا القائمة متطابقة. لذلك، $\angle 1$ متطابقة مع $\angle 2$.

مراجعة المهارات

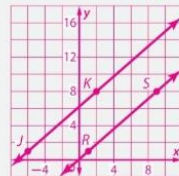
اكتب برهاناً تسلسلياً لإثبات نظرية الزاوية الخارجية.

56. المحيطيات: $\triangle XYZ$

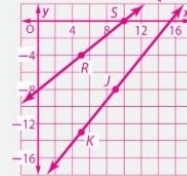
المطلوب: $m\angle X + m\angle Z = m\angle 1$ انظر ملحق إجابات الوحدة 4.



54. متوازيان



53. لا شيء منهما



التخطيط الرأسى

الدرس 3-4 استيعاب خصائص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلثات وبين الزوايا والأضلاع في مثلث.

ما بعد الدرس 3-4 استخدام
خواص التشابه والتوسع فيها من أجل
استكشاف التخمينات الخاصة بالأشكال
الهندسية وتعليلها.

الأسئلة الداعمة

اطرح السؤال التالي:

- ما أكبر زاوية في المثلث في الصورة.

الزاوية التي بالأعلى

■ ما العلاقة بين أكبر زاوية وأطول ضلع؟
الإجابة النموذجية: أطول ضلع يقابل أكبر زاوية.

نعرف على العلاقة
بين قياسات زاوية
المثلث.

1 التعرف على خواص
المتباينات وتطبيقاتها
على قياسات زوايا
المثلث.

● لإنشاء مظهر عميق في غرفة ما، استخدم مصباح الديكور الداخلي تقنية نئسي التثليث، من أهم أمثلة هذه التقنية هي وضع طاولة جانبية على طرفي الأريكة مع وجود لوحة فوق الأريكة.

1 متباينات الزاوية

متباينات الزاوية في علم الجبر، تعرفت على العلاقة المتباينة بين عددين حقيقيين. نستخدم هذه العلاقة غالباً بالبراهين.

المفهوم الأساسي تعريف المتباينة

الشرح

لأي عددين حقيقيين a و b ، $a > b$ فقط في حالة وجود عدد موجب c حيث إن $a = b + c$.

مثال

إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإن $5 > 2$ و $5 > 3$.

يُدرج الجدول أدناه بعض خواص المتباينات التي درستها بعلم الجبر.

المفهوم الأساسي خواص المتباينات للأعداد الحقيقية

الخصائص التالية صحيحة لأي أعداد حقيقية a و b و c .

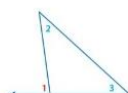
$a > b, a = b, a < b$	خاصية المقارنة في المتباينات
$a < c, b < c, a < b$ فإن $a < c, b < c, a > b$ فإن	خاصية التعمدي في المتباينات
$a + c > b + c, a > b$ فإن $a + c < b + c, a < b$ فإن	خاصية الجمع في المتباينات
$a - c > b - c, a > b$ فإن $a - c < b - c, a < b$ فإن	خاصية الطرح في المتباينات

يمكن تطبيق تعريف المتباينة وخواص المتباينات على قياسات الزوايا والقطع المستقيمة، وذلك لأنها أعداد حقيقية. نأمل 1، 2، و 3 الشكل الموضح.

باستخدام نظرية الزوايا الخارجية، فأنت تعرف أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

بما أن قياسات الروايات تمثل أعداداً موجبة، فإننا نستطيع القول أيضاً بأن

$m\angle 1 > m\angle 3$, $m\angle 1 > m\angle 2$
 باستخدام تعريف المتباينة. نقترح النتيجة النظرية التالية.



حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة
McGraw-Hill Education

226 | الدرس 3-4

1 متباينات الزاوية

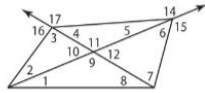
المثال 1 يوضح كيفية استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المتوافقة مع الشرط المذكور.



- a. قياسها أقل من $m\angle 14$
 $\angle 4, \angle 11, \angle 9, \angle 3, \angle 2, \angle 6, \angle 7$
- b. قياسها أكبر من $m\angle 5$
 $\angle 10, \angle 16, \angle 12, \angle 15, \angle 17$

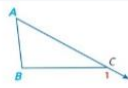
إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا الخارجية النظرية 6.8 صحيحة لأن $\angle 1$ مكمل للزاوية الداخلية المجاورة ومجموع قياسات الزوايا الداخلية يبلغ 180.

النظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية

قياس زاوية التثلاث الخارجية أكبر من قياس كلا الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
 $m\angle 1 > m\angle B$

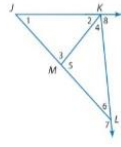


برهان نظرية 4.8 بالدرس 4-4.

مراجعة المفردات
الزاوية الداخلية غير المتجاورة
 تحتوي كل زاوية مثلث خارجية على زاويتين داخليتين غير مجاورتين. وأيضاً غير مجاورتين للزاوية الخارجية.

مثال 1 استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية

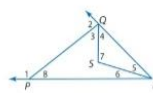
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



- a. قياسها أصغر من $m\angle 7$
 $\angle 7$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle KML$. حيث إن $\angle 4$ و $\angle 5$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 4 > m\angle 7$ و $m\angle 5 > m\angle 7$.
- $\angle 7$ هي أيضاً زاوية خارجية في $\triangle JKL$. حيث إن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. إذاً، $m\angle 1 > m\angle 7$ و $m\angle 2 > m\angle 7$.
 وبما أن $m\angle 7 > m\angle 4$ و $m\angle 7 > m\angle 5$ و $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle 2$ فإنه باستخدام التعويض $m\angle 7 > m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 1 + m\angle 2$.
 إذاً، فإن زوايا ذات القياس الأصغر من $m\angle 7$ هي $\angle 1$ ، و $\angle 2$ ، و $\angle 4$ ، و $\angle 5$.
- b. قياسها أكبر من $m\angle 6$
 $\angle 3$ هي زاوية خارجية في $\triangle KLM$. لذا فاستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 3 > m\angle 6$.
 نظراً لأن $\angle 8$ هي زاوية خارجية في $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$.
 قياسات $\angle 3$ و $\angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

تمرين موجه

- 1A. قياسها أصغر من $m\angle 1$ و $\angle 3$ و $\angle 4$ و $\angle 5$ و $\angle 6$
 1B. قياسها أكبر من $m\angle 8$ و $\angle 2$

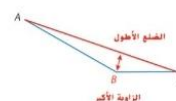
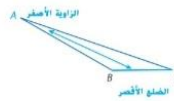


انتبه!

تحديد الضلع المقابل احرص على تحديد الضلع المقابل لزاوية ما بشكل صحيح. لا يمكن أن تكون الأضلاع المكونة للزاوية هي نفسها الأضلاع المقابل.

2 متباينات ضلع الزاوية

لقد تعلمت أنه إذا تطابق ضلعي مثلث، أو إذا كان التثلاث متساوي الساقين، فإن الزوايا المتباينة لتلك الأضلاع تكون متطابقة. ما العلاقة التي تتكون في حالة عدم تطابق الأضلاع؟ افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكثرها ليتلث منفرج مختلف الأضلاع.



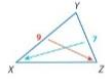
لاحظ أن أطول ضلع وأكبر زاوية في $\triangle ABC$ متقابلان. وبالمثل، فإن أقصر ضلع وأصغر زاوية متقابلان.

تنطبق علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات المتطابقة المختلفة الأضلاع على جميع المثلثات، وسيتم ذكر تلك العلاقات باستخدام المتباينات والنظريات أدناه.

انتبه!

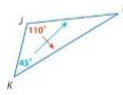
رموز الزوايا والمتباينات يبدو رمز الزاوية (\angle) مشابهاً لرمز أقل من ($<$)، خاصة عندما يكتب بخط اليد. احرص على كتابة الرمز بشكل صحيح عند استخدام كليهما في نفس الوقت.

نظريات علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات



4.9 إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر، فإن الزاوية المتقابلة للضلع الأطول ذات قياس أكبر من الزاوية المتقابلة للضلع الأقصر.

مثال: نظراً لأن $XY > YZ$ فإن $m\angle Z > m\angle X$.

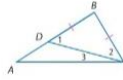


4.10 إذا كانت إحدى زوايا المثلث لها قياس أكبر من زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.

مثال: نظراً لأن $m\angle J > m\angle K$ فإن $JL > JK$.

برهان النظرية 4.9

المعطيات: $\triangle ABC$, $AB > BC$
المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$



البرهان:

بما أن $AB > BC$ بالمثلث المعطى $\triangle ABC$ ، فإن النقطة D تقع على \overline{AB} حيث إن $BD = BC$.
ارسم \overline{CD} لتعمل مثلث متساوي الساقين $\triangle BCD$. باستخدام نظرية المثلثات متساوية الساقين،
 $m\angle 1 = m\angle 2$ باستخدام تعريف الزوايا المتطابقة.

باستخدام مسلمة إضافة الزوايا، $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$. إذاً $m\angle BCA > m\angle 2$ باستخدام تعريف المتباينات. باستخدام التعويض، نجد أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 1 > m\angle A$ بالتالي، نظراً لأن $m\angle BCA > m\angle 1$ و $m\angle 1 > m\angle A$ ، فإنه باستخدام التعدي في المتباينات، نجد أن $m\angle BCA > m\angle A$.

سوف تُثبت النظرية 4.10 في الدرس 4-4، التمرين 31.

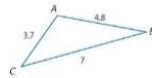
مثال 1 ترتيب قياسات زوايا المثلث



صنّف زوايا $\triangle PQR$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

الأضلاع من الأصغر إلى الأطول هي \overline{QR} , \overline{PQ} , \overline{PR} .
الزوايا المتقابلة لتلك الأضلاع هي $\angle Q$ ، و $\angle P$ ، و $\angle R$.
على التوالي، إذاً فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle Q$ ، و $\angle P$ ، و $\angle R$.

تمرين موجه



2. صنّف زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

\overline{AC} , \overline{AB} , \overline{CB} ; $\angle B$, $\angle C$, $\angle A$

التركيز على محتوى الرياضيات

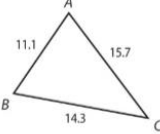
مقارنة النظريات يمكنك تلخيص النظريتين 5.9 و 5.10 بالقول بأن القطعة المستقيمة الأقصر تقابل الزاوية الأصغر والقطعة المستقيمة الأطول تقابل الزاوية الأكبر.

2 متباينات الزاوية-الضلع

توضح الأمثلة من 2 إلى 4 كيفية تحديد العلاقة بين قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة في مثلث. ينبغي أن يتمكن الطلاب من استخدام النظريتين 5.9 و 5.10 في تحديد العلاقة بين الزاوية والضلع.

مثال إضافي

2 صنّف زوايا $\triangle ABC$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



$\angle C$, $\angle A$, $\angle B$

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب أن يلخصوا في فقرة برهان النظرية 6.9 بكميات من صياغتهم. أبلغهم أنهم مضطرون للالتزام بالترتيب الدقيق للبرهان الرسمي، لكن ينبغي أن يكون لديهم تسلسل منطقي من بداية الفقرة إلى نهايتها. بدلاً من استخدام المبررات الرسمية، يستطيع الطلاب أن يشرحوا مفاهيم الخواص والتعريفات والمسلمات والنظريات المستخدمة في البرهان.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المتابعة

تعرف الطلاب على المتباينات في مثلث.

اطرح السؤال التالي:

ما الارتباط بين المتباينات وكل من الأضلاع والزوايا في المثلثات؟ الإجابة النموذجية: الزاوية المقابلة للضلع الأطول في مثلث لها قياس أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر، ويجب أن يكون مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

إجابات إضافية

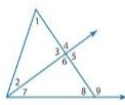
20. زائد: الإجابة النموذجية: باستخدام نظرية مجموع المثلث، يبلغ قياس الزاوية التي تشكلها الخطعة المستقيمة بين سالم وسلطان 70. بما أن $48 < 70$ ، سيكون المسار من سالم إلى زايد أقصر.

21. إذا كانت $m\angle X = 90$ ، فإن $m\angle Y = 90 + m\angle Z$. إذا $m\angle Y < 90$ ، فإن $m\angle X > m\angle Y$ وفقاً للنظرية. إذا كانت $m\angle X > m\angle Y$ ، فإن طول الضلع المقابل للزاوية $\angle X$ يجب أن يكون أكبر من طول الضلع المقابل للزاوية $\angle Y$. بما أن \overline{YZ} يقابل $\angle X$ ، و \overline{XZ} يقابل $\angle Y$ ، فإن $YZ > XZ$. إذا YZ ، التي تمثل طول السطح العلوي للمنحدر، يجب أن تكون أكبر من طول المنحدر.

التحقق من فهمك

مثال 1

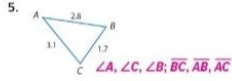
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



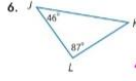
1. قياسا أصغر من $m\angle 4$ ، $\angle 2$.
2. قياسا أكبر من $m\angle 7$ ، $\angle 9$ ، $\angle 5$ ، $\angle 3$.
3. قياسا أكبر من $m\angle 2$ ، $\angle 4$ ، $\angle 6$ ، $\angle 9$.
4. قياسا أصغر من $m\angle 9$ ، $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 6$ ، $\angle 7$.

المثالان 2-3

صنف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



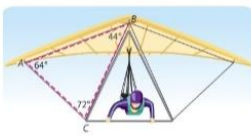
$\angle A$, $\angle C$, $\angle B$; \overline{BC} , \overline{AB} , \overline{AC}



$\angle J$, $\angle K$, $\angle L$; \overline{JK} , \overline{JL} , \overline{KL}

مثال 4

7. الطيران الشراعي تكون دعامات الطيران الشراعي مثلثات كما هو موضح. أي ميلا الأطول - الدعامة التي تشكلها AC أم الدعامة التي تشكلها BC اشرح استنتاجك.

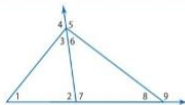


\overline{BC} ، الإجابة النموذجية: بما أن الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة BC أكبر من الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة AC ، فإن \overline{BC} أطول.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

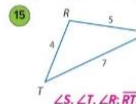
الاستنتاج المنطقي استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



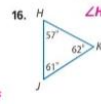
8. قياسا أكبر من $m\angle 2$ ، $\angle 4$.
9. قياسا أصغر من $m\angle 4$ ، $\angle 2$.
10. قياسا أصغر من $m\angle 5$ ، $\angle 8$ ، $\angle 7$.
11. قياسا أصغر من $m\angle 9$ ، $\angle 1$ ، $\angle 3$ ، $\angle 6$ ، $\angle 7$.
12. قياسا أكبر من $m\angle 8$ ، $\angle 5$ ، $\angle 2$.
13. قياسا أكبر من $m\angle 7$ ، $\angle 9$ ، $\angle 5$.

المثالان 2-3

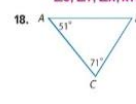
صنف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



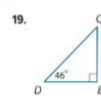
$\angle S$, $\angle T$, $\angle R$; \overline{RT} , \overline{RS} , \overline{ST}



$\angle H$, $\angle J$, $\angle K$; \overline{HK} , \overline{HJ} , \overline{JK}



$\angle C$, $\angle D$, $\angle E$; \overline{DE} , \overline{CE} , \overline{CD}



$\angle C$, $\angle D$, $\angle E$; \overline{DE} , \overline{CE} , \overline{CD}

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	8-21, 43, 45, 46, 48-61	43, 45, 46, 48, 49-52 خردى 9-21 زوجي 8-20, 53-61
OL أساسي	9-21, 22-43, 45, 46, 48-61	22-43, 45, 46, 48, 53-61
BL متقدم	22-58, (اختياري 59-61)	

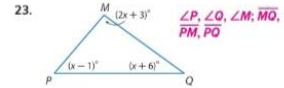
20. رياضة يلعب كل من زايد وسلطان وسالم لعبة شير الغرض. يحاول سالم أن يقرر ما إذا كان سيرمز الغرض لزايد أم لسلطان. أي من اللاعبين يجب أن يختار ليحصل على أقصر مسافة تمرير؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



21. منحدرات يمثل التحدّر الخشبي أدناه منحدر دراجات. أي منها الأطول. طول المنحدر XZ أم طول السطح العلوي للمنحدر YZ ؟ اشرح استنتاجك. مستخدمًا النظرية 7.9. **انظر الهامش.**



صنّف زوايا كل مثلث وأضلعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد الزاوية التي لها أكبر قياس.

24. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **1** 25. $\angle 2, \angle 4, \angle 6$ **2**
 26. $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ **7** 27. $\angle 3, \angle 11, \angle 12$ **3**
 28. $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ **3** 29. $\angle 8, \angle 10, \angle 11$ **8**

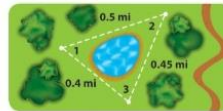
الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقات بين قياسات الزوايا المعلومة.

30. $\angle ABD, \angle BDA$ 31. $\angle BCE, \angle CFB$ $m\angle BCF > m\angle CFB$
 32. $\angle BFD, \angle BDF$ 33. $\angle DBF, \angle BFD$ $m\angle DBF < m\angle BFD$

استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقة بين الأطوال المعلومة.

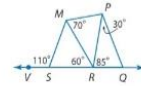
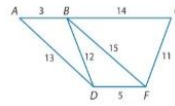
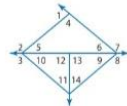
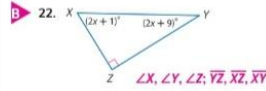
34. SM, MR 35. RP, MP $RP > MP$
 36. RQ, PQ $SM < MR$
 37. RM, RQ $RM > RQ$
 38. $RQ < PQ$

38. نزهة على الأقدام يستمتع جيدان وأسرته بالشبي على الأقدام حول بحيرة كما هو موضح بالرسم التخطيطي على اليسار. رتب زوايا المثلثات التي يكون لمسارهما من الأكبر إلى الأصغر.
 $m\angle 3 > m\angle 1 > m\angle 2$



تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء التوصل إلى حل. يحلون المعطيات والشهود والعلاقات والأهداف. في التبارين من 30 إلى 33. حلل العلاقة بين الزاوية والضلع في كل مثلث.



الهندسة الإحداثية صفّ زوايا كل مثلث بمعرفة الرؤوس المعطاة بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. على إجابته.

39. $\angle C, \angle A, \angle B$, فإن $AB = \sqrt{29} \approx 5.4$, $BC = \sqrt{74} \approx 8.6$, $AC \approx 9$ و $A(-4, 6), B(-2, 1), C(5, 6)$

40. $X(-3, -2), Y(3, 2), Z(-3, -6)$

41. صفّ أطوال أضلاع المثلثات بالشكل من الأقصر إلى الأطول. اشرح استنتاجك.

42. **النمذجة** **المتعددة** في هذه البسائط، ستتعرف على العلاقة بين أضلاع المثلث. **ا. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

الهندسة ارسم ثلاثة مثلثات. أحدهم حاد الزاوية والآخر منفرج الزاوية والثالث قائم الزاوية. اكتب أسماء رؤوس كل مثلث A و B و C .

جدول في طول كل ضلع من أضلاع المثلثات الثلاثة. ثم أضع الجدول وأكمل.

إجابات نموذجية موجودة بالجدول.

جدول كُن جدولين إضافيين كالمجدول أعلاه، وأوجد مجموع AB و BC في أحد الجدولين ومجموع AB و CA في الآخر. **انظر الهامش.**

جبر اكتب متباينة لكل من الجدولين التي صنعتها من خلال ربط قياس مجموع ضلعين بقياس الضلع الثالث للمثلث.

نظري ضع تخميناً حول العلاقة بين قياس مجموع ضلعين بالمثلث وقياس الضلع الثالث.

42e. الإجابة النموذجية: مجموع قياسات ضلعين بالمثلث أكبر من قياس الضلع الثالث بهذا المثلث.

مسائل مهارات التفكير العليا

43. **الكتابة في الرياضيات** حلّ المعلومات المعطاة بالرسم التخطيطي وشرح سبب عدم صحة العلامات. **انظر الهامش.**
44. **تحج** باستخدام مسطرة، ارسم $\triangle ABC$ بحيث يكون $m\angle A > m\angle B > m\angle C$. **انظر الهامش.**
45. **مسألة غير محددة الإجابة** قد يكون قياساً ممكناً لـ AB في $\triangle ABC$ الموضح. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
46. **فرضيات** هل قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون أطول ضلع بالمثلث دائماً، أم لا أحياناً، أم لا تكون أطول منه على الإطلاق؟ اشرح. **انظر الهامش.**
47. **تحج** استخدم أطوال الأضلاع في الشكل لترتيب الزوايا المرفقة من الأصغر إلى الأكبر مع العلم أن $m\angle 2 = m\angle 5$. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
48. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون الوتر دائماً أطول ضلع بالمثلث القائم؟ **انظر الهامش.**

محلّو الطبع والكتابة © سميرتة لكتاب مؤسسة

ملاحظات لحل التمرين
المسطرة يتطلب التمرينان 42 و 44 استخدام مسطرة.

التمثيلات المتعددة
يستخدم الطلاب في التمرين 42 رسومات وجدول وحسابات جبرية والوصف اللغوي لاستكشاف العلاقات القائمة بين أضلاع مثلث.

تدريس الممارسات في الرياضيات
الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحلّوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 46، يمكن استخدام برنامج الهندسة الديناميكية للتعامل مع مثلث متساوي الساقين.

إجابات إضافية

42c. الإجابة النموذجية:

مثلث	BC	CA	BC + CA	AB
حاد الزاوية	2.4	3.2	5.6	2
منفرج الزاوية	3.4	5.0	8.4	2.6
قائم الزاوية	2.8	3.8	6.6	2.7

مثلث	AB	CA	AB + CA	BC
حاد الزاوية	2	3.2	5.2	2.4
منفرج الزاوية	2.6	5.0	7.6	3.4
قائم الزاوية	2.7	3.8	6.5	2.8

43. **الإجابة النموذجية:** $\angle R$ زاوية خارجية للمثلث $\triangle PQR$. إذاً بموجب متباينة الزاوية الخارجية، يجب أن تكون $m\angle R$ أكبر من $m\angle Q$. نوضح العلامات أن $\angle R \cong \angle Q$. مما يوضح أن $m\angle R = m\angle Q$. هذا تناقض مع نظرية متباينة الزاوية الخارجية. إذاً العلامات غير صحيحة.

44. **الإجابة النموذجية:** بما أن $\angle A$ أكبر زاوية، فإن الضلع المقابل لها، \overline{CB} ، هو أطول ضلع. بما أن $\angle C$ أصغر زاوية، فإن \overline{AB} هو أقصر ضلع.



4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات حدد أمثلة من الدرس أو تمارين التدريب وأطلب من طلاب مختلفين أن يناقشوا متباينات المثلث وعلاقات الزاوية-الضلع باستخدام المصطلحات الهندسية. احرص على أن يحدد الطلاب أسماء الزوايا والأضلاع بشكل صحيح ويستخدموا مصطلحات مثل "القياس الأكبر من/ الأصغر من" مع الزوايا و"القياس الأطول/الأقصر" أو "الأكبر من/الأصغر من" مع الأضلاع.

إجابات إضافية

48. الإجابة النموذجية: بما أن الوتر يمتد من الزاوية القائمة وكلتا الزاويتين الأخريين في المثلث قائم الزاوية حادثان دائماً، فالوتر دائماً هو الضلع الأطول ويقابل دائماً الزاوية الأكبر في المثلث.
55. $y = -5x + 7$: النصف العمودي ينصف القطعة المستقيمة عند نقطة المنتصف في القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ ميل القطعة المستقيمة المعطاة هو $\frac{1}{5}$ إذاً ميل النصف العمودي هو -5 .
56. $y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{2}$: ينصف النصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $(0, -\frac{3}{2})$. ميل القطعة المستقيمة المعطاة هو $\frac{5}{4}$ إذاً ميل النصف العمودي هو $-\frac{4}{5}$.

تمرين على الاختبار الجياري

49. الإحصاء يوضح المخطط عدد أسطوانات DVD وأنواعها المبينة في ثلاثة متاجر. D

نوع أسطوانة DVD	المتجر 1	المتجر 2	المتجر 3
الكوميديا	75	80	92
الحركة	54	37	65
الترغيب	30	48	62
الخيال العلمي	21	81	36
الإجرائي	180	246	255

وفقاً للمعلومات المقدمة بالمخطط، أي هذه العبارات صحيحة؟

- A متوسط عدد أسطوانات DVD المباعة في كل متجر هو 56.
B باع المتجر 1 ضعف أفلام الحركة والترغيب مما باعه المتجر 3 من أفلام الخيال العلمي.
C باع المتجر 2 أفلام كوميدية وخيال علمي أقل مما باعه المتجر 3.
D متوسط عدد أسطوانات DVD لأفلام الخيال العلمي المباعة في كل متجر هو 46.

50. يبلغ قياس زاويتين في مثلث 45° و 92° ما نوع المثلث؟ F
F متفرج مختلف الأضلاع H حاد مختلف الأضلاع
G متفرج متساوي الساقين J حاد متساوي الساقين

51. إجابة موصلة في ملجم من فئة الخمسة نجوم، يجني النادل إجمالاً t من الدراهم مقابل العمل لعدد f ساعات حيث يحصل على 198 AED إكرامية ويجني 250 AED في الساعة.

- a. اكتب معادلة لتمثيل المجموع الكلي من النفود التي يجنيها النادل.
b. إن كان إجمالي ما يجنيه النادل 213 AED فكم ساعة يعمل؟
c. إن كان ما يجنيه النادل من إكرامية يبلغ 150 AED ووصل 12 ساعة، فما إجمالي ما يتكسبه من مال؟
AED 180

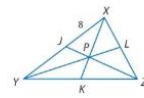
52. SAT/ACT أي تعبير يحمل القيمة الأقل؟ E

- A | -99 | D | -28 |
B | 45 | E | 15 |
C | -39 |

مراجعة شاملة

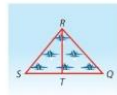
في $\triangle XYZ$ ، نجد أن P هي النقطة المركزية، و $KP = 3$ ، و $XJ = 8$.
أوجد طول كل مما يلي.

- 9 XK .53
8 YJ .54



الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصفية الميل والمقطع من أجل النصف العمودي للقطعة المستقيمة ذات تقاطع النهاية المعلومات. على إجابتك. 55-57. انظر الهامش.

55. $D(-2, 4)$ و $E(3, 5)$
56. $D(-2, -4)$ و $E(2, 1)$



57. المهارات الثالثة بطير سرب طيران استعراضي في تشكيل يمكن رؤيته يمثلان لهما خلفاً مشتركاً. اكتب برهاناً من عيودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ إذا كان T هي نقطة منتصف SR و SO و $SR \cong OR$.

58. حمامات سباحة تبلغ مساحة حمام سباحة مستطيل الشكل 20 قدماً في 30 قدماً. وبلغ عمق حمام السباحة 60 بوصة، ولكن يبلغ عمق الماء $\frac{3}{4}$ من عمق الحمام. أوجد كل قياس مترناً إلى أقرب جزء من عشرة.
a. مساحة سطح الحمام 1700 ft^2
b. كمية الماء في الحمام 2250 ft^3

مراجعة المهارات

إذا كان $x = 8$ و $y = 2$ و $z = 3$. حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة.

- صحيحة 61. $x + y > z + y$
خاطئة 60. $2x = 3yz$
خاطئة 59. $z(x - y) = 13$

233

3. $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (معلنى)
4. $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ (SSS)

57. المعطيات: T هي نقطة منتصف \overline{SQ} .

$$\overline{SR} \cong \overline{QR}$$

المطلوب إثباته: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. T هي نقطة منتصف \overline{SQ} . (معلنى)
2. $\overline{ST} \cong \overline{QT}$. (تعريف نقطة المنتصف)

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 4-1 إلى 4-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح للمسائل التي أجابوها بشكل غير صحيح.

مطويات

مطويات دينيا زاياك®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة المعلومات التي سجلوها للدروس من 4-1 إلى 4-3 في مطوياتهم.

إجابات إضافية

13. تشكل مداخل المدرسة الثلاثة مثلثًا. إذا تم تمديد كل من الارتفاعات الثلاثة للمثلث، فسوف يتقاطعوا عند ملتقى الارتفاعات.

14. $\angle T, \angle S, \angle R; \overline{RS}, \overline{RT}, \overline{ST}$

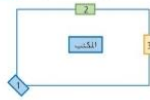
15. $\angle G, \angle H, \angle F; \overline{FH}, \overline{GF}, \overline{GH}$

17. $\angle 4, \angle 3$

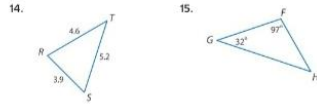
18. $\angle 8, \angle 9, \angle 10$

19. $\angle 6, \angle 2, \angle 4, \angle 3$

13. هندسة معمارية يصمم مهندس معماري مبنى مدرسة ثانوية. صف كيف يمكن وضع الكتب المركزي بحيث يكون عند تقاطع الأروقة المتصلة بالداخل الثلاثة للمدرسة. **انظر الهامش.**



أدرج زوايا أضلاع كل مثلث في ترتيب من الأصغر إلى الأكبر. 14-15. **انظر الهامش.**



16. إجازة يخطط عبد الله للطيران بالمسار المحدد على خريطة هاواي أدناه.



a. $m\angle A = 50$,
 $m\angle B = 48$,
 $m\angle C = 82$

a. إذا كان $m\angle C = 2(m\angle B) - 14$ و $m\angle A = 2 + m\angle B$ فما قياسات المثلثات الثلاثة؟
b. ما ترتيب المسافات التي سيقطعها عبد الله في رحلته من الأقل إلى الأكبر؟ **AC, BC, BA**
c. طول الرحلة بأكملها حوالي 68 ميلاً. تزيد مسافة الشوط الأوسط بمقدار 11 ميلاً عن نصف الشوط الأقصر. تزيد مسافة الشوط الأطول بمقدار 12 ميلاً عن ثلاثة أرباع الشوط الأقصر. ما مسافات أشواط الرحلة؟
20 mi, 21 mi, 27 mi

17-19. **انظر الهامش.**



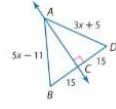
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشروط المذكور.

17. قياسها أصغر من $m\angle B$

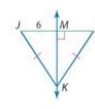
18. قياسها أكبر من $m\angle C$

19. قياسها أصغر من $m\angle 10$

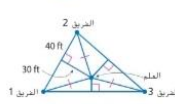
1. AB 29



2. JL 12

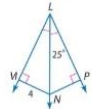


3. الممسك انتهي ممسك أوناواتشي بلعبة إمسك العلم. إذا كانت مواقع البدء للثلاثة فرق موضحة بالرسم التخطيطي أدناه، بحيث يقع العلم على مسافة واحدة من قاعدة كل فريق، فكم بعد العلم عن كل قاعدة بالأقدام؟ **50**

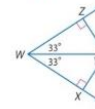


أوجد قياس كل مما يلي.

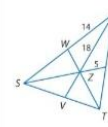
4. $\angle MNP$ 130



5. XY 21



في $\triangle RST$ هو النقطة المركزية و $RZ = 18$ أوجد طول كل مما يلي.



6. ZV 9

7. SZ 10

8. SR 28

الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات المركز لكل مثلث مع الرؤوس المعطاة.

- $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$ $(4, \frac{16}{3})$
- $X(-11, 0), Y(-1, -8), Z(-1, -4)$ $(-\frac{23}{3}, -4)$
- $R(-6, 4), S(-2, -2), T(2, 4)$ $(-2, 2)$
- $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$ $(-3, 2)$

4-4

مختبر الهندسة

منطق المصفوفة

يستخدم منطق المصفوفات مصفوفة مستطيلة لتسجيل المعلومات التي توصلت إليها من أجل حل مسألة منطق أو استنتاج. ويحدد ملء كل الصفوف والأعمدة، بشكل استنتاج النتيجة.

1 التركيز

الهدف

- استخدام منطق المصفوفة.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- ورق مربعات

نصائح للتدريس

- إذا كان الطلاب يحتاجون إلى تمرين إضافي، يمكنهم أن يحددوا الكثير من ألغاز المصفوفات التفاعلية المتطوعة عبر الإنترنت.
- شجّع الطلاب على مراجعة إجاباتهم النهائية على المفاتيح المعطاة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعانة

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية من الطلاب ذوي القدرات المختلفة. اجعل المجموعات الثنائية تساعد بعضها على استكمال التمارين.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 4.

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و 2 في الصفحة التالية لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية استخدام مصفوفة لحل مسألة منطقية.

من العملي إلى النظري

اسأل الطلاب عما ستبدو عليه المصفوفة لحل لغز منطقي يتضمن أربعة متغيرات (اسم الفتاة واسم الفتى واسم المطعم وعنوان الفيلم) إذا كان كل من هذه المتغيرات له أربعة اختيارات. انظر الشكل الذي على اليمين.

ثم اطلب منهم أن يحددوا بشكل عام عدد مربعات $n \times n$ المطلوبة لإنشاء مصفوفة لغز منطقي تتضمن m متغيرات لكل منها n .

الاختيارات، $\frac{m^2 - m}{2}$ مربعات $n \times n$.



الخطى المنفصل				
فهد	فالح	ماجد	صالح	طارق
✓	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×

الخطى المنفصل				
فهد	فالح	ماجد	صالح	طارق
✓	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×

الخطى المنفصل				
فهد	فالح	ماجد	صالح	طارق
✓	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×

الطعام يذهب كل من فهد وفالح وصالح وماجد وطارق إلى مطعم إيطالي. يطلب كل واحد منهم طبقه المفضل: رافيولي، أو بيتزا، أو لازانيا، أو مانيكوتي أو ساجيتي. يحب ماجد الرافيولي، ولكن فهد لا يحب أطباق البيتزا. فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي. طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي". ماذا طلب كل واحد منهم؟

الخطوة 1

(أنشئ مصفوفة مناسبة).

استخدم مصفوفة 5×5 التي تتضمن اسم كل شخص كمنوان لكل صف وأعمدة المصفوفة المحتملة كمنوان لكل عمود.

الخطوة 2

استخدم كل فكرة واستدلال منطقي لملء المصفوفة.

• نظراً لأن ماجد يحب الرافيولي، ضع علامة ✓ في صف ماجد الآن تحت "رافيولي". وعلامة × في كل خلية أخرى في هذا الصف. نظراً لأن كل طبق يحب شخص واحد فقط، يمكنك وضع علامة × في كل خلية أخرى في عمود "رافيولي".

• ونظراً لأن فهد لا يحب المعكرونة، فذلك تعرف أن فهد لا يمكن أن يحب المانيكوتي أو الرافيولي أو اللازانيا أو الساجيتي وكلها جميعاً أطباق معكرونة. لذا لا بد أن فهد يحب البيتزا. ضع علامة ✓ في صف فهد أسفل البيتزا. ضع علامة × في كل خلية أخرى في صف فهد وفي كل خلية أخرى في عمود البيتزا.

• نظراً لأن فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي، ضع علامة × في صف فالح أسفل اللازانيا والمانيكوتي. وهذا يترك الساجيتي فقط بدون علامة × في صف فالح. لذلك، يمكنك استنتاج أنه من المؤكد أن فالح يحب الساجيتي. ضع علامة ✓ في هذه الخلية وعلامة × في كل خلية أخرى في عمود الساجيتي.

• يمكنك من خلال المصفوفة رؤية أن طبق صالح المفضل لا بد أن يكون إما اللازانيا أو المانيكوتي. ونظراً لأن طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي"، يمكنك استنتاج أن صالح يحب اللازانيا. في صف صالح، ضع علامة ✓ أسفل اللازانيا وعلامة × أسفل المانيكوتي.

• وهذا يترك خلية واحدة فقط فارغة في صف طارق. لذا يمكنك استنتاج أن طبقه المفضل هو المانيكوتي.

الخطوة 3

استخدم مصفوفتك لتوضيح الإجابة على المسألة.

يمكنك من خلال المسألة معرفة أن فهد طلب البيتزا، وطلب فالح الساجيتي، وطلب ماجد الرافيولي، وطلب صالح اللازانيا وطلب طارق المانيكوتي.

235

	الفتاة	الفتى	المطعم
الفتى			
الفتاة			
المطعم			
الفتى			

إجابات إضافية

1.

الرياضة	كرة القدم الأمريكية			الاسم
	الركض	الركض	الركض	
محمود	X	✓	X	
عبد العزيز	✓	X	X	
عبد الرحمن	X	X	✓	
عبد الرحيم	X	✓	X	

2.

ترتيب الميلاد					الاسم
الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	
سها	X	✓	X	X	
لهيس	X	X	✓	X	
خلينة	X	X	X	✓	
سهيلة	X	✓	X	X	
خالد	X	X	✓	X	

3.

الحيوان		الحيوان		الاسم
الأليف	الأنثى	الأنثى	الأنثى	
دوسكو	✓	✓	✓	
زوزو	✓	✓	✓	
خلينة	✓	✓	✓	
شيماء	✓	✓	✓	
علياء	✓	✓	✓	
الطاووس	✓	✓	✓	
الحيوان	✓	✓	✓	
الأليف	✓	✓	✓	

4.

الزوايا		الأضلاع		الاسم
متفرج الزاوية	قائم الزاوية	متساوي الأضلاع	متساوي الساقين	
علي	✓	✓	✓	
عمر	✓	✓	✓	
عاصم	✓	✓	✓	
قائم الزاوية	✓	✓	✓	
قائم الزاوية	✓	✓	✓	
متفرج الزاوية	✓	✓	✓	

مختبر الهندسة

منطق المصفوفات

تبايرين

استخدم مصفوفة لحل كل مسألة. 4-1. انظر الهامش للاطلاع على المصفوفات.

1. الرياضات برناد محمود وعبد العزيز. وعبد الرحمن وعبد الرحيم نفس المدرسة. يشارك كل واحد منهم في رياضة مدرسية مختلفة، كرة السلة، أو كرة القدم، أو الركض. أو التنس. استخدم المعلومات التالية لتحديد الرياضة التي يشارك فيها كل طالب.

- لا يحب عبد العزيز الركض أو كرة السلة.
- لا يشارك محمود في كرة القدم أو التنس.
- يفضل عبد الرحمن رياضات الشتاء الداخلية.
- أحرز عبد الرحمن أربعة أهداف في المباراة النهائية في الموسم.

محمود: الركض؛ عبد العزيز: التنس؛ عبد الرحمن: كرة السلة؛ عبد الرحيم: كرة القدم

2. العائمة يوجد خمسة أطفال في عائلة راشد. استخدم المعلومات التالية لتحديد الترتيب الذي ولد به الأطفال.

- سها أكبر من لهيس.
- خليفة أصغر من سهيلة.
- لهيس أكبر من خليفة وعائلة.
- خالد أكبر من خليفة.
- سهيلة أكبر من سها.

سهيلة ثم سها ثم لهيس ثم خالد ثم خليفة

3. الحيوانات الأليفة ذهبت كل من خديجة وشيماء وعلياء إلى ملجأ للحيوانات الأليفة. اختارت كل فتاة حيواناً أليفاً مختلفاً ل تربيته، بغاء أو أرب أو قط. أطلقت كل فتاة اسمها على حيوانها الأليف باسم "الطاووس الجميل" أو "زوزو" أو "روسكو". استخدم المعلومات التالية والمصفوفة الموضحة لتحديد الحيوان الذي تربيته كل فتاة وما الاسم الذي أعطته إياه.

- الفتاة التي اعتمدت بالبقاء لم تسميه "الطاووس الجميل".
- حيوان شيماء الأليف الذي أسمته "زوزو" ليس من نوع الحيوانات التي تفضل.
- اعتمدت علياء بروسكو وهو ليس قطاً.
- لم تعثر خديجة بالأرب.

خديجة: القطه واسمها "الطاووس الجميل"، شيماء: الكلب واسمها زوزو، علياء: الأرب واسمها روسكو

4. الهندسة رسم كل من علي وعمر وعاصم مثلثاً. ولا يشارك اثنان منهم في نفس طول الضلع أو نوع الزاوية. استخدم المعلومات التالية لتحديد نوع المثلث الذي رسمه كل منهم.

- لم يرسم علي مثلثاً متساوي الأضلاع.
- يوجد في مثلث عمر زاوية قياسها 25 درجة وزاوية أخرى قياسها 65 درجة.
- رسم عاصم مثلثاً يحتوي على زوج من الأضلاع المتطابقة.
- يحتوي المثلث المنفرج على زاويتين متطابقتين.

علي: مثلث متساوي الساقين، منفرج الزاوية؛ عمر: مثلث مختلف الأضلاع، قائم الزاوية؛ عاصم: مثلث متساوي الأضلاع، حاد الزاوية

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-4 كتابة براهين على شكل فقرة وعمودين وبراهين تسلسلية.

الدرس 4-4 كتابة براهين جبرية وهندسية غير مباشرة.

بعد الدرس 4-4 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمتين والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما السؤال المستخدم لإثبات أن الخميس ليس يوم عمل للمعلمين؟
ما يوم اختبار الهندسة التالي لدينا؟
- من الذي يقدم السبب في أن الخميس ليس يوم عمل للمعلمين؟ **أسامة**
- ما الذي كان يمكن أن يثبت بشكل مباشر أن الخميس يوم عمل للمعلمين؟
الإجابة النموذجية: بنص المنهج الدراسي على أن الخميس يوم عمل للمعلمين.

البرهان غير المباشر



السابق

- قمت بكتابة فقرة إثباتية وبرهان من عمودين وبرهان تسلسلي.

الحالي

- كتابة براهين جبرية غير مباشرة.

لماذا؟

- أحمد: "لا بد أن يكون يوم السبت يوم عمل للمعلمين. في أي يوم سيكون اختبار الرياضيات القادم؟"
- يلا: "ننتظر أن يوم السبت هو يوم عمل للمعلمين. في أي يوم سيكون الاختبار الرياضي القادم؟"
- أسامة: "نعم. وفقًا للمنهج الدراسي، يكون يوم السبت القادم اختبارًا في اختبارات في أيام عمل المعلمين. نحن لسنا في المدرسة."
- جمال: "بالضبط—إذا هذا يثبت ذلك لا يمكن أن يكون يوم السبت القادم يوم عمل للمعلمين."

المفردات الجديدة

برهان غير مباشر (indirect reasoning)
برهان غير مباشر (indirect proof)
برهان بالتناقض (proof by contradiction)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عقلية وتعليل على طريقة استنتاج الآخرين. التفكير بطريقة تجريدية وثبتة.

المفهوم الأساسي كيف تكتب برهانًا غير مباشر

- الخطوة 1** حدّد الاستنتاج المطلوب إثباته. افترض أن هذا الاستنتاج خاطئ من خلال افتراض صحة العكس.
- الخطوة 2** استخدم التفكير المنطقي لإظهار أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع الافتراض أو مع بعض الحقائق الأخرى. مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية أو نتيجة ما.
- الخطوة 3** وضح أنه بما أن الافتراض يؤدي إلى تناقض، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي المطلوب إثباته صحيحًا.

مثال 1 ذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض اللازم لبدا البرهان غير المباشر لكل عبارة:

- a. إذا كان 6 من عوامل 11، فإن 2 من عوامل 11.
- b. استنتاج العبارة الشرطية عبارة عن 2 من عوامل 11، ويكون نفي الاستنتاج أن 2 ليس من عوامل 11.
- c. زاوية منفرجة.

إذا كان الافتراض أن 3 زاوية منفرجة خاطئة، إذا الافتراض أن 3 ليست زاوية منفرجة صحيحة.

تمرين 4 وجه

- 1a. $x > 5$ و $x \leq 5$
- 1b. $\triangle XYZ$ هو مثلث متساوي الأضلاع.

1 البرهان الجبري غير المباشر

الأمثلة من 1 إلى 4 تشرح خطوات كتابة برهان غير مباشر. ينبغي أن يتمكن الطلاب من تحديد الافتراض واستخدام البراهين غير المباشرة.

التقويم التكويني

استخدم التباين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. \overline{EF} ليس منتصفاً عمودياً.

\overline{EF} منتصف عمودي.

b. إذا كانت B هي نقطة منتصف \overline{LH} و $LH = 26$ ، فإن \overline{BH} تطابق \overline{LB} .

\overline{BH} لا تطابق \overline{LB} .

2 اكتب برهاناً غير مباشر يوضح أنه

إذا كانت $7 < 2x + 11$ ، فإن $x > 2$.

افترض أن $x < 2$ أو $x = 2$.

اصنع جدولاً.

x	$-2x + 11$
2	7
1	9
0	11
-1	13
-2	15

في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض. ولهذا لا بد أن تكون $x > 2$ صحيحة.

يمكن استخدام البراهين غير المباشرة في إثبات مفاهيم جبرية.

مثال 2 كتابة برهاناً جبرياً غير مباشر

اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: $x < -4$

الخطوة 1 البرهان غير المباشر:

نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$. إذا، افترض أن $x \geq -4$ أو $x = -4$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2 قم بعمل جدول باحتمالات متعددة لـ x بافتراض أن $x \geq -4$ أو $x = -4$.

x	-4	-3	-2	-1	0
$-3x + 4$	16	13	10	7	4

عندما يكون $x \geq -4$ ، فإن $-3x + 4 < 16$ ، وعندما يكون $x = -4$ ، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض في المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 > 16$. لذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $x \geq -4$ عبارة خاطئة. ويكون الاستنتاج الأصلي بأن $x < -4$ عبارة صحيحة.

تكوين هوية

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة. 2A-2B. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

2A. إذا كان $56 > 7x$ ، فإن $x > 8$. 2B. إذا كان $-c$ موجباً، فإن c رمز سالب.

يمكن استخدام الاستنتاج والبرهان غير المباشرين في المواقف اليومية.

مثال من الحياة اليومية 3 البرهان الجبري غير المباشر

تكاليف حفل التخرج طلب ماجد من صديقه محمد معرفة ثمن وجبته ووجبة محمد التي تناولاها عند خروجهما الأسبوع الماضي. لم يستطع محمد تذكر التكاليف الخاصة بكل وجبة، ولكنه تذكر إجمالي قيمة الفاتورة التي زادت عن AED 60. بدون الإكراهية، استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى الوجبتين على الأقل زادت تكلفتها عن AED 30.

افترض أن تكلفة إحدى الوجبتين هي x وتكلفة الوجبة الأخرى هي y .

الخطوة 1 المعطيات: $x + y = 60$

المطلوب: $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

افترض أن $x \leq 30$ و $y \leq 30$.

الخطوة 2 إذا كان $x \leq 30$ و $y \leq 30$ ، فإن $x + y \leq 30 + 30 = 60$ أو $x + y \leq 60$. يُعد هذا تناقضاً لأننا نعلم أن $x + y > 60$.

الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فلا بد أن يكون الافتراض خاطئاً. لذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 30$ أو $y > 30$ صحيحاً. لهذا، لا بد أن تكون تكلفة إحدى الوجبتين زادت عن AED 30.

تكوين هوية

3. السفر قطع إسماعيل ما يزيد عن 360 كيلو متراً خلال رحلته، وتوقف في استراحتين. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أنه سافر أكثر من 120 كيلو متراً في رحلة الذهاب فقط. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

التركيز على محتوى الرياضيات

القراءة يعتمد حل المسائل الكلامية على فهم الطلاب للكلمات المفتاحية التي توضح نوع الرياضيات المطلوبة. حلل الصياغة لتحديد الموقف الفعلي في كل برهان غير مباشر.

اقتبه!

التناقضات لا يمكن أن ينجح البرهان بالتناقض إلا إذا كان هناك افتراض من المفترض أنه صحيح.

أمثلة إضافية

3 التعليم اشتركت مها في ثلاثة فصول في الكلية المجتمعية مقابل مبلغ يقل قليلاً عن AED 156. كانت هناك رسوم إدارية تبلغ AED 15. وتتساوى تكلفة الفصول. كيف يمكنك أن تبين أن تكلفة كل فصل أقل من AED 47؟ المخطبات، أنضت مها ما يقل عن AED 156 المطلوب إثباته: تقل تكلفة أحد الفصول x على الأقل عن AED 47 أي أنه إذا كانت $15 < 3x$ فإن $15 < 47$ $x < 156$ الخطوة 1: افترض أن $x \geq 47$ الخطوة 2: $47 + 47 + 47 \geq 156$ الخطوة 3: يتناقض هذا مع النص على أن التكلفة الإجمالية كانت أقل من AED 156 إذاً فالافتراض بأن $x \geq 47$ لا بد أن يكون خطأ. ولهذا، لا بد أن تكلفة فصل واحد تقل عن 47.

4 اكتب برهاناً غير مباشر يوضح أنه إذا كانت x عدداً أولياً لا يساوي 3، فإن $\frac{x}{3}$ ليس عدداً صحيحاً. الخطوة 1: افترض أن $\frac{x}{3}$ عدد صحيح. الخطوة 2: $\frac{x}{3} = n$ (تعبير الافتراض) $x = 3n$ (خاصية الضرب) الخطوة 3: يتناقض هذا مع أن x عدد أولي لأن n تقبل القسمة على 3 و $n \neq 1$ بما أن $x \neq 3$. لهذا $\frac{x}{3}$ ليس عدداً صحيحاً.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اصنع مقطع فيديو يوضح كيفية إنشاء برهان بالتناقض. ثم اشره على موقع إلكتروني لمشاركة مقاطع الفيديو. قد يكون هذا مفهوماً صعباً بالنسبة لبعض الطلاب. ولذلك قد يكون من المفيد لهم تشغيل شريك الدقيق لكيفية كتابة هذا النوع من البراهين.

تدريس المهارات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يدركوا الأمثلة المضادة ويستخدمونها. شجّع الطلاب على تدوين الأساليب المختلفة للبرهان (البرهان بالتناقض والبرهان بعمودين والبرهان التسلسلي وما إلى ذلك) في دفاترهم للرجوع إليها سريعاً أثناء أداء الواجب المنزلي.

تستخدم البراهين غير المباشرة غالباً لإثبات التعاليم في نظرية الأعداد. في هذه البراهين، يساعد تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي بالتعبير $2k$ وتمثيل العدد الفردي بالتعبير $2k + 1$ أي عدد صحيح k .

مثال 4: البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عدداً زوجياً صحيحاً، فإن x عدد زوجي صحيح.

الخطوة 1 المخطبات: $x + 2$ هو عدد زوجي صحيح. المطلوب: x هو عدد زوجي صحيح.

برهان غير مباشر: افترض أن x هو عدد صحيح فردي. هذا يعني أن $x = 2k + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة k .
الخطوة 2 تبويض الافتراض $x + 2 = (2k + 1) + 2$
خاصية التبديل $= (2k + 2) + 1$
خاصية التوزيع $= 2(k + 1) + 1$

حدّد الآن ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عدداً صحيحاً زوجياً أم فردياً. بما أن k عدد صحيح و $k + 1$ أيضاً عدد صحيح. افترض أن m تمثل العدد الصحيح $k + 1$.

التبويض $2(k + 1) + 1 = 2m + 1$
إذا، يمكن تمثيل $x + 2$ باستخدام $2m + 1$ حيث m عدد صحيح. لكن هذا التمثيل يعني أن $x + 2$ هو عدد صحيح فردي. وهو ما يتعارض مع العبارة المخطبة بأن $x + 2$ عدد صحيح زوجي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x هو عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع العبارة المخطبة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي. وهو أن x عدد زوجي صحيح. استنتاجاً صحيحاً.

تبرير موجّه

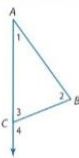
4. اكتب برهاناً غير مباشر لإظهار أنه إذا كان مربع العدد الصحيح فردياً، فإن هذا العدد الصحيح يكون فردياً. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

2 البراهين غير المباشرة في الهندسة

يمكن استخدام الاستنتاج غير المباشر لإثبات عبارات في الهندسة. مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

إذا كانت إحدى الزوايا زاوية خارجية لمثلث، فأثبت أن قياسها أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المجاورتين.



الخطوة 1 صمم رسماً تخطيطياً لهذا الموقف. ثم حدّد المخطبات والمطلوب إثباته.

المخطبات: $\angle 4$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.
المطلوب: $m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 4 > m\angle 1$

برهان غير مباشر: افترض أن $m\angle 4 \leq m\angle 2$ أو $m\angle 4 \leq m\angle 1$.
عبارة أخرى: $m\angle 4 \leq m\angle 2$ أو $m\angle 4 \leq m\angle 1$

(تابع في الصفحة التالية)

التدريس المتميز

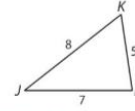
المتعلمون أصحاب النهج المنطقي اشرح أن الطلاب معادون على العمل للأمام لحل المعادلات والمتباينات وأنهم قد يميلوا إلى حل المسائل الجبرية كخطوة في كتابة البراهين غير المباشرة. أبلغ الطلاب أنه على الرغم من أن هذا الأسلوب ينتج، فإنه لا يمثل البرهان غير المباشر وأنهم ينبغي أن يتجنبوا حل المسائل الجبرية في هذا الدرس. بل ينبغي أن يستخدموا أساليب مشابهة للخطوات الموضحة في المثال 2.

2 البرهان غير المباشر في الهندسة

يوضح المثال 5 كيفية استخدام الاستنتاج غير المباشر في مسألة هندسية.

مثال إضافي

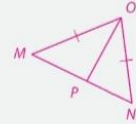
5 المعطيات: $\triangle JKL$ تبلغ أطوال أضلاعه 5 و 7 و 8
المطلوب إثباته: $m\angle K < m\angle L$



الخطوة 1: افترض أن $m\angle K \geq m\angle L$.
الخطوة 2: بموجب علاقات الزاوية والضلع، $JL \geq JK$.
الخطوة 3: يتناقض هذا مع أطوال الأضلاع في المعطيات. إذا لا بد أن يكون الافتراض $m\angle K \geq m\angle L$ خطأ. ولهذا، $m\angle K < m\angle L$.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5. المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$
المطلوب إثباته: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $\angle MOP \cong \angle NOP$.
الخطوة 2: نعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ وبموجب خاصية الانعكاس، إذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$ فإن $\triangle MOP \cong \triangle NOP$ بموجب SAS. إذا $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ بموجب CPCTC.

الخطوة 3: يتناقض الاستنتاج بأن $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ مع معلومات المعطيات. ولهذا، الافتراض خطأ. ولذلك، $\angle MOP \not\cong \angle NOP$.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن افتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقض. تتبع فرضية $m\angle 4 \leq m\angle 2$ نفس الاستنتاج.

$m\angle 4 < m\angle 1$ أو $m\angle 4 = m\angle 1$ تعني أنه إما $m\angle 4 < m\angle 1$ أو $m\angle 4 = m\angle 1$

الحالة رقم 1

$$m\angle 4 = m\angle 1$$

$$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$$

تعويض

$$0 = m\angle 2$$

اطرح $m\angle 4$ من كل طرف

هذا يتناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0. إذا $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة رقم 2

$$m\angle 4 < m\angle 1$$

بتطبيق نظرية الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$. بما أن قياس الزاوية موجب، فإن تعريف المتباينة يشير ضمناً إلى أن $m\angle 4 > m\angle 1$. يتناقض هذا مع افتراض أن $m\angle 4 < m\angle 1$.

الخطوة 3

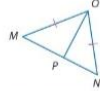
في كلتا المسألتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض مع نظرية أو تعريف. ولذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $m\angle 4 > m\angle 2$ صحيحاً.

تمرين موجه

5. اكتب برهاناً غير مباشر. انظر الهامش.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



التحقق من فهمك

مثال 1

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

$$1. \overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \overline{AB} \not\cong \overline{CD}$$

$$3. x \geq 6 \quad x < 6 \quad x < 24 \quad 4. x < 24 \quad 4. x < 24$$

مثال 2

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة. 5-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

$$5. \text{ إذا كان } 7 < 3 + x \text{، فإن } x < 2. \quad 6. \text{ إذا كان } 8 > 3x - 4 \text{، فإن } x > 4.$$

مثال 3

7. لاكروس أحرزت هيام 13 نقطة لحساب فريق مدرستها الثانوية في لعبة اللاكروس خلال المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط إحصائياتها للخطوط في كل مباراة أقل من 3 نقاط. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

مثال 4

8. اكتب برهاناً غير مباشر لإظهار أنه إذا كان $5x - 2$ عدداً صحيحاً فردياً، فإن x يجب أن يكون عدداً صحيحاً فردياً. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

مثال 5

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة. 9-10. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

9. وفر التثلث قائم الزاوية هو الضلع الأكبر في هذا التثلث.

10. إذا كانت هناك زاويتان متتامتين، فلا يمكن أن تكونا زاويتين منفرجتين.

التبرين وحل المسائل

مثال 1

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

11. إذا كان $2x > 16$ ، فإن $x > 8$ $x \leq 8$
12. $\angle 1$ و $\angle 2$ ليستا زاويتين متكاملتين. $\angle 1$ و $\angle 2$ عبارة عن زاويتين متكاملتين.
13. إذا كان المستقيمان لهما نفس الميل، فإنهما متوازيان. المستقيمان غير متوازيين.
14. إذا كانت الزاويتان الداخليتان المتقابلتان للزاويتان المتقابلتين متساويتين، فإن الزاويتين متكاملتين. هذين المستقيمين يكونان متوازيين. المستقيمان غير متوازيين.
15. إذا كان المثلث غير متساوي الأضلاع، فإنه يكون مثلثاً غير متساوي الزوايا. المثلث متساوي الزوايا.
16. العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2. العدد الفردي يقبل القسمة على 2.

مثال 2

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة. 17-20. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

17. إذا كان $x > -11$ ، فإن $2x - 7 > -2$ $x > -2$
18. إذا كان $-33 < 5x + 12$ ، فإن $x > -9$ $x < -9$
19. إذا كان $3x + 4 < 7$ ، فإن $-3x > -1$ $x > -1$
20. إذا كان $12 > 2x - 6$ ، فإن $x < -9$ $x < -9$

مثال 3

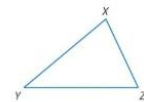
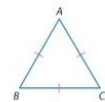
21. ألعاب الكمبيوتر اشترى إبراهيم لعبتين من ألعاب الكمبيوتر بتكلفة AED 80. بعد مرور بضعة أسابيع، سألته صديقه عن ثمن كل لعبة. لم يتذكر إبراهيم أسعار كل لعبة على حدة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى اللعبتين على الأقل تزيد تكلفتها عن AED 40. انظر الهامش.

22. جميع التبرعات. تحتفل مدرسة أمال بهرجان الخريف لجميع التبرعات للأعمال الخيرية المحلية. تصل تكلفة تذكرة الفرد البالغ لدخول المهرجان AED 6 وتذكرة الطفل AED 2.50. إذا كان إجمالي ما تم بيعه من التذاكر 375 تذكرة، و زاد الربح عن AED 1460، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل من تذاكر البالغين. انظر الهامش.

المثالان 4-5

الفرضيات اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة. 23-32. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

23. المعطيات: XY هو عدد فردي صحيح. المطلوب: x و y هما عددان صحيحان فرديان
24. المعطيات: n^2 هو عدد زوجي. المطلوب: n^2 يقبل القسمة على 4.
25. المعطيات: x هو عدد فردي. المطلوب: x لا يقبل القسمة على 4.
26. المعطيات: XY هو عدد صحيح زوجي. المطلوب: x أو y هو عدد صحيح زوجي.
27. المعطيات: $XZ > YZ$ $\angle X \neq \angle Y$
28. المعطيات: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع. المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الزوايا.



29. في المثلث متساوي الساقين لا يمكن أن تكون إحدى زوايا القاعدة زاوية قائمة.

30. توجد زاوية قائمة واحدة في المثلث.

31. اكتب برهاناً غير مباشر للنظرية 4.10.

32. اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ فإن b يكون سالياً.

241

3 التبرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-10 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والتناقض المثبتة سابقاً المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمارين من 23 إلى 32، شجّع الطلاب على التخطيط لبراهينهم قبل البدء.

إجابات إضافية

21. افترض أن تكلفة لعبة هي x وتكلفة اللعبة الأخرى هي y .

الخطوة 1 المعطيات: $x + y > 80$

المطلوب إثباته: $x > 40$ أو $y > 40$

برهان غير مباشر:

افترض أن $x \leq 40$ و $y \leq 40$

الخطوة 2 إثباته: إذا كانت $x \leq 40$ و $y \leq 40$ ، فإن $x + y \leq 40 + 40 = 80$ أو $x + y \leq 80$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 80$.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن $x \leq 40$ و $y \leq 40$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معروفة، لا بد أن يكون الافتراض خاطئاً. ولهذا، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 40$ أو $y > 40$ صحيحاً.

ولهذا، لا بد أن إحدى الألعاب على الأقل قد تكلفت أكثر من AED 40.

الخطوة 1 افترض أنه تم بيع أقل من 150 تذكرة للبالغين.

الخطوة 2 إذا تم بيع 149 تذكرة للبالغين، ففد تم بيع $375 - 149 = 226$ تذكرة للأطفال.

إجمالي الربح من 149 تذكرة للبالغين و 226 تذكرة للأطفال يبلغ (AED 2.50)(226) + (AED 6)(149) = AED 1459.

الخطوة 3 الاستنتاج خطأ. إذاً لا بد أن الافتراض خطأ. ولهذا، عدد تذاكر البالغين المبعة أكبر من أو يساوي 150.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	11-30, 40, 41, 43-59	11-29, 40, 41, 43, 49-59
OL أساسي	11-29, 31-41, 43-59	11-30, 45-48
BL متقدم	31-56, (اختياري) 57-59	31-41, 43, 49-59

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يدرك الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقات بينها في مواقف المسائل. في التمرين 36. أوضح للطلاب أنه في البرهان غير المباشر سيخترضون إن إحدى العبارات غير صحيحة.

33. **كرة السلة** في رياضة كرة السلة، توجد ثلاث طرق ممكنة لتسجيل ثلاث نقاط دفعة واحدة، يمكن للاعب التسجيل في السلة من خلف خط الثلاث نقاط، أو قد تتم عرقلة اللاعب أثناء تسجيله رمية التخططين وتحسب له رمية حرة، أو قد تتم عرقلة اللاعب خلف خط الثلاث نقاط وتحسب له ثلاث رميات حرة. عندما دخلت حصة في أحد صفوف الانتظار، كانت النتيجة 28 نقطة للفريق الضيف و 26 نقطة للفريق الزائر. وعند عودتها، كانت النتيجة 28 للفريق الضيف و 29 للفريق الزائر. استنتجت حصة أن أحد لاعبي الفريق الزائر قام بتسجيل رمية ثلاثية. أثبت أو ادحض افتراضها باستخدام البرهان غير المباشر. **انظر الهامش.**

34. **الألعاب** تدور لعبة حاسوب حول فارس في مهمة للبحث عن الكنز. وفي نهاية الرحلة، يقترّب الفارس من البابين الظاهرين بالأسفل.



يخير أحد الخدم الفارس أن إحدى العلامتين خاطئة والأخرى صحيحة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد الباب الذي يجب أن يختاره الفارس. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



35. **تطلعات الرأي** أجرت مكتبة بلدية المحلية استطلاعات من خلال الإنترنت للمراهقين لمعرفة الأنشطة التي يشاركون فيها المراهقون للحفاظ على البيئة. جاءت نتائج الاستطلاع كما هو موضح في الرسم البياني.

- المطلوب: أكثر من نصف المراهقين المشاركين قالوا إنهم يقومون بإعادة التصنيع للحفاظ على البيئة.
- a-b. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.** إذا تم أخذ رأي 400 مراهق في استطلاع الرأي، فأثبت أن 92 مراهقًا قالوا إنهم شاركوا في يوم الحفاظ على الأرض.

36. **الاستنتاج** يمتلك كل من ناصر ومنصور ومحمود سيارات ذات ألوان مختلفة. توجد عبارة واحدة صحيحة بين العبارات التالية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد العبارة الصحيحة. اشرح.

- (1) ناصر لديه سيارة حمراء.
 - (2) منصور ليس لديه سيارة حمراء.
 - (3) محمود ليس لديه سيارة زرقاء.
- العبارة 2:** الإجابة النموذجية: إذا افترضت أن العبارة 2 غير صحيحة، أو "منصور لديه سيارة حمراء"، فهذا يناقض العبارة 1 "ناصر لديه سيارة حمراء"، إذا العبارة 2 صحيحة. إذا افترضت أن العبارتين 1 و 3 غير صحيحتين، فلن تتناقض أي من العبارتين المتبقيتين مع الافتراض.

حدد إذا ما كان من الممكن إثبات صحة كل عبارة حول المسافة الأقصر بين نقطة ومستقيم أو مستوى باستخدام البرهان المباشر أو غير المباشر. ثم اكتب برهاناً لكل عبارة. 37-38. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

37. المعطيات: $\overline{AB} \perp$ المستقيم p
المطلوب: \overline{AB} هي القطعة المستقيمة الأقصر من A إلى المستقيم p .
38. المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ المستوى M
المطلوب: \overline{PQ} هي القطعة المستقيمة الأقصر من P إلى المستوى M .



39. نظرية الأعداد في هذه المسألة، ستضع تخميناً وتثبتته حول علاقة نظرية الأعداد.

- a. اكتب تعبيراً حول مجموع مكعب أحد الأعداد والعدد ثلاثة. $n^3 + 3$
b. أنشئ جدولاً يمثّل على قيمة التعبير لـ 10 قيم مختلفة لـ n . أضف فيها زوجية وفردية لـ n . انظر ملحق إجابات الوحدة 4.
c. اكتب تخميناً حول n عندما تكون قيمة التعبير زوجية.
d. اكتب برهاناً غير مباشر لتخمينك. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

39c. الإجابة النموذجية: إذا كانت القيمة $n^3 + 3$ زوجية، فإن القيمة n تكون فردية.

مساكن مهارات التفكير العليا

40. الكتابة في الرياضيات اشرح الإجراء لكتابة برهان غير مباشر. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

41. مسألة غير محددة الإجابة اكتب عبارة يمكن إثباتها باستخدام البرهان غير المباشر. أضف برهاناً غير مباشر لمباركك. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

42. تحدي إذا كان x عدداً نسبياً، فيمكن تشييده بناتج النسبة $\frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين a و b . إذا كان $b \neq 0$ لا يمكن تشييد العدد غير النسبي بناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهاناً غير مباشر لإظهار أن ناتج ضرب عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عدداً غير نسبي. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

43. النقطة نحاول كل من أسماء وإيمان إثبات العبارة التالية باستخدام البرهان غير المباشر. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إذا كان مجموع العددين زوجياً، فإن الأعداد زوجية.

أسماء	إيمان
العبارة صحيحة. إذا كان أحد الأعداد زوجياً والعدد الآخر فردياً، فإن المجموع يكون زوجياً. بما أن الافتراض يكون صحيحاً حتى عندما يكون الاستنتاج خاطئاً، فإن العبارة صحيحة.	العبارة صحيحة. إذا كان العددين فرديين، فإن المجموع يكون زوجياً. بما أن الافتراض يكون صحيحاً عندما يكون الاستنتاج خاطئاً، فإن العبارة صحيحة.

44. الكتابة في الرياضيات راجع التمرين 8. اكتب النعكس الإيجابي للعبارة ثم اكتب البرهان المباشر للنعكس الإيجابي. كيف يتصل كل من البرهان المباشر للنعكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة؟

تدريس الممارسات

في الرياضيات

التفكير النقدي يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات التمييز بين المنطق السليم والاستنتاج الخاطئ. في التمرين 43، ينبغي على الطلاب أن يدركوا أنه يكفي لرفض عبارة مثال مضاد واحد، كما تفعل إيمان. لم تكن أسماء محقة في قول إنه إذا صح الافتراض وأخطأ الاستنتاج، تكون العبارة صحيحة.

إجابات إضافية

33. نعلم أن الفريق الآخر سجّل 3 نقاط، وتعتمد حصة أنهم أحرزوا ضربة بثلاث نقاط. نعلم أيضاً أن اللاعب يستطيع تسجيل 3 نقاط عن طريق إحراز تسجيل في السلة والحصول على رمية بسبب خطأ ضده.

الخطوة 1 افترض أن لاعباً في الفريق الآخر أحرز رمية في السلة بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضده.

الخطوة 2 كانت نقاط الفريق الآخر قبل مفادرة حصة تبلغ 26. إذا فقاطهم بعد إحراز رمية بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضدهم تبلغ $26 + 3$ أو 29.

الخطوة 3 التناظر صحيحة عندما نفترض أن الفريق الآخر أحرز رمية بنقطتين ورمية من خطأ ضده. إذا فقد لا يكون افتراض حصة صحيحاً. ربما يكون الفريق الآخر قد أحرز رمية بثلاث نقاط أو رمية بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضدهم.

34. الباب الذي على اليسار. إذا كانت لافتة الباب الذي على اليمين صحيحة، فكلتا اللافتتين صحيحتان. لكن إحدى اللافتتين خطأ. إذا لافتة الباب الذي على اليمين لا يد أن تكون خطأ.

التدريس المتمايز

التوسع اكتب برهاناً غير مباشر للعبارة التالية.

المعادلة $x^2 - y^2 = 1$ ليس لها حلول تحتوي على عدد صحيح موجب.

الخطوة 1 افترض أن هناك حل (x, y) للمعادلة $x^2 - y^2 = 1$. حيث x و y عددين صحيحان موجبان.
الخطوة 2 التعبير $x^2 - y^2$ يتحول إلى العوامل $(x - y)(x + y)$. إذا كان x و y عددين صحيحان، فإن أيًا من $x - y = 1$ و $x + y = 1$ أو $x - y = -1$ و $x + y = -1$ ، يحل نظام المعادلات في الحالة الأولى. نجد أن $x = 1$ و $y = 0$. بما أن صفر ليس عدداً موجباً، يتعارض هذا مع افتراضنا. في الحالة الثانية، نجد أن $x = -1$ و $y = 0$. وهو ما يتعارض أيضاً مع افتراضنا.
الخطوة 3 لهذا، فالعبارة الأصلية الغائلة بأن $x^2 - y^2 = 1$ ليس لها حلول تحتوي على عدد صحيح موجب لا بد أن تكون صحيحة.

4 التقييم

بطاقة التحق من استيعاب الطلاب
قبيل انتهاء الصف، اجعل الطلاب يشرحوا السبب في أن ارتفاع ضلع في مثلث لا يمكن أن يزيد الضلعين الآخرين في المثلث.

إجابة إضافية

49. المعطيات: \overline{RO} ينصف $\angle SRT$.

المطلوب إثباته:

$$m\angle SQR > m\angle SRQ$$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. \overline{RO} زاوية $\angle SRT$. (معطى)

$$SRQ \cong \angle QRT$$

2. (تعريف منتصف الزاوية)

$$m\angle QRS = m\angle QRT$$

$$m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$$

3. (ظلمة الزاوية الخارجية)

$$m\angle SQR > m\angle QRT$$

4. (التعويض)

$$m\angle SQR > m\angle SRQ$$

تمرين على الاختبار المعيارى

47. صف زوايا $\triangle MNO$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر إذا كان $MN = 9$ و $NO = 7.5$ و $OM = 12$.

F $\angle N, \angle O, \angle M$

G $\angle O, \angle M, \angle N$

H $\angle O, \angle N, \angle M$

J $\angle M, \angle O, \angle N$

48. SAT/ACT إذا كان $a > b$ ، فأي مما يلي لا بد أن يكون صحيحاً؟

A $-a > -b$

B $3a > b$

C $a^2 < b^2$

D $a^2 < ab$

E $-b > -a$

45. إجابة مختصرة اكتب معادلة في صيغة الميل والمقطع لوصف المستقيم الذي يمر بالنقطة (5, 3) ويوازي المستقيم الذي تمثله المعادلة $-2x + y = -4$.

46. عبارة: إذا كانت $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A$ مكمل لـ $\angle C$ ، فإن $\angle B$ مكمل لـ $\angle C$.

ثبت بنية العبارة السابقة من خلال التناقض. فعد بدأت بافتراض أن $\angle B$ غير مكمل لـ $\angle C$ ، أي من التعريفات التالية ستستخدمه بنية للوصول إلى التناقض؟

A تعريف التناظر

B تعريف الزوج الخفي

C تعريف الزاوية القائمة

D تعريف الزوايا المتكاملة

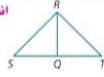
مراجعة شاملة

49. البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: \overline{RQ} ينصف $\angle SRT$.

المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

انظر الهامش.



الهندسة الإحداثية حدد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة لكل مثلث له رؤوس معلومة.

50. $D(-3, 3), E(3, 2), F(1, -4)$

51. $A(4, 0), B(-2, 4), C(0, 6)$

52. $m\angle 1$ 26

53. $m\angle 4$ 64

54. $x + 3y = 6$

55. $y = 2x + 2$

56. $x + 3y = -14$

57. $\sqrt{40} \approx 6.3$

58. $y = 2x - 3$

59. $\sqrt{5} \approx 2.2$

60. $\sqrt{40} \approx 6.3$

61. $y = 2x - 3$

62. $\sqrt{5} \approx 2.2$

63. $\sqrt{40} \approx 6.3$

64. $y = 2x - 3$

65. $\sqrt{5} \approx 2.2$

66. $\sqrt{40} \approx 6.3$

67. $y = 2x - 3$

68. $\sqrt{5} \approx 2.2$

69. $\sqrt{40} \approx 6.3$

70. $y = 2x - 3$

71. $\sqrt{5} \approx 2.2$

72. $\sqrt{40} \approx 6.3$

73. $y = 2x - 3$

74. $\sqrt{5} \approx 2.2$

75. $\sqrt{40} \approx 6.3$

76. $y = 2x - 3$

77. $\sqrt{5} \approx 2.2$

78. $\sqrt{40} \approx 6.3$

79. $y = 2x - 3$

80. $\sqrt{5} \approx 2.2$

81. $\sqrt{40} \approx 6.3$

82. $y = 2x - 3$

83. $\sqrt{5} \approx 2.2$

84. $\sqrt{40} \approx 6.3$

85. $y = 2x - 3$

86. $\sqrt{5} \approx 2.2$

87. $\sqrt{40} \approx 6.3$

88. $y = 2x - 3$

89. $\sqrt{5} \approx 2.2$

90. $\sqrt{40} \approx 6.3$

91. $y = 2x - 3$

92. $\sqrt{5} \approx 2.2$

93. $\sqrt{40} \approx 6.3$

94. $y = 2x - 3$

95. $\sqrt{5} \approx 2.2$

96. $\sqrt{40} \approx 6.3$

97. $y = 2x - 3$

98. $\sqrt{5} \approx 2.2$

99. $\sqrt{40} \approx 6.3$

100. $y = 2x - 3$

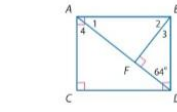
101. $\sqrt{5} \approx 2.2$

102. $\sqrt{40} \approx 6.3$

103. $y = 2x - 3$

104. $\sqrt{5} \approx 2.2$

105. $\sqrt{40} \approx 6.3$



مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل متباينة صحيحة أم خاطئة.

57. $23 - 11 > 9$ صحيحة

58. $41 - 19 < 21$ خاطئة

59. $57 + 68 < 115$ خاطئة



مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث

4-5

مختبر تقنية التمثيل البياني

1 التركيز

الهدف استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.

2 التدريس

العمل بصورة مستقلة

يستطيع الطلاب العمل بمفردهم أو في مجموعات ثنائية من الطلاب مختلفي الخبرات. اطلب من الطلاب أن يتخذوا النشاط أثناء الإجابة على التمارين من 1 إلى 6.

اسأل الطلاب عن الرابط بين تخمينهم في التمرين 4 وما لاحظوه. اجعل الطلاب يحددوا كيفية النظر على الرأس A وسحبه بحيث يقع على أقصر مسافة من الرأس B.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرين 7 بمفردهم.

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون العلاقات بين أطوال أضلاع المثلثات.

من العملي إلى النظري

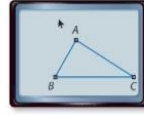
اجعل الطلاب يرسمون مثلثًا على ورقة تمثيلات بيانية. اطلب منهم أن يتبادلوا مثلثاتهم مع زملائهم. اجعل الطلاب يتوصلوا إلى أطوال الأضلاع ويكتبوا المتباينات للتعبير عن العلاقات بين الأطوال.

يتمكّن استخدام تطبيق خاص على بعض حاسبات التمثيل البياني لاكتشاف خصائص المثلثات.

نشاط 1

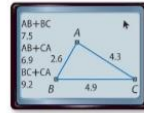
صمم مثلثًا. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.

الخطوة 1: ارسم مثلثًا باستخدام أداة المثلث الموجودة في قائمة F2. ثم استخدم الأداة Alpha-Num الموجودة في قائمة F5 لتسمية الرؤوس بالأحرف A، B، و C.



الخطوة 1

الخطوة 2: ثم بالوصول إلى أداة distance & length (المسافة والطول) الموضحة باسم D. & Length Measure (قياس) في القائمة F5. استخدم الأداة لقياس كل ضلع من أضلاع المثلث.



الخطوات 2 و 3

الخطوة 3: اعرض $AB + BC$ و $AB + CA$ و $BC + CA$ باستخدام أداة Calculate (احسب) في القائمة F5. أطلق أسماء على القياسات.

الخطوة 4: انظر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.

تحليل النتائج

1. استبدل كل \otimes بأحد الرموز $>$ ، $<$ ، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.
 $AB + BC \otimes CA$ $AB + BC > CA$ $AB + CA \otimes BC$ $AB + CA > BC$ $BC + CA \otimes AB$ $BC + CA > AB$
2. انظر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث. ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ماذا تلاحظ؟ **بقيت المتباينات كما هي.**
3. انظر على النقطة A واسحبها لكي تقع على المستقيم BC. ماذا تلاحظ حول AB و BC و CA؟ هل الرموز A، B، و C تمثل رؤوس المثلث؟ اشرح.
4. **الإجابة النموذجية:** $AB + BC = CA$ ، لا. التقاط ليست رؤوس للمثلث لأنها على مستقيم واحد.
5. **مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.** هل القياسات والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمرين 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قُنت به في التمرين 4؟ اشرح. **انظر الهامش.**
6. استبدل كل \otimes بأحد الرموز $>$ ، $<$ ، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.
 $|AB - BC| \otimes CA$ $|AB - CA| \otimes BC$ $|BC - CA| \otimes AB$
7. ثم انظر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث ومراجعة إجاباتك. ماذا تلاحظ؟ $|AB - BC| < CA$ ؛ $|AB - CA| < BC$ ؛ $|BC - CA| < AB$ ؛ **تظل جميع المتباينات كما هي.**

مختبر تقنية التمثيل البياني © حاسوبية لسان طلبة Education 188 Microsoft

إجابات إضافية

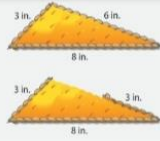
5. لا؛ ثم التوصل إلى التخمين في التمرين 4 باستخدام الاستنتاج الاستقرائي، وهو ليس طريقة صالحة لإثبات التخمين.
7. سيظل طول الضلع الثالث عن مجموع طولي الضلعين الآخرين ويزيد على القيمة المطلقة للفرق بين طولي الضلعين الآخرين.

متباينة المثلث 4-5

لماذا

الحالي

السابق



في عرض لتحسين المنازل. أرادت مصممة استخدام قطع مخصصة من أحبال من مشروع حيالة آخر لتزيين الوسائد المثلثية الشكل التي صنعتها هي وصاحب المنزل. ولتقليل التكاليف، أرادت المصممة استخدام الخصائص دون قطعها. واختارت ثلاث خصائص بشكل عشوائي وحاولت تكوين مثلث. ثم توضيح محاولتين من ذلك.

1 استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.
2 أدوات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.

لقد تعرفت على خواص متباينات العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث وقت تطبيقها.

1 الهدف

التخطيط الرئيسي

قبل الدرس 4-5 التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلثات وأضلاعها وتطبيقها.

الدرس 4-5 استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة وإثبات علاقات المثلث.

بعد الدرس 4-5 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمت والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

ممارسات في

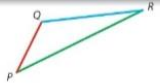
الرياضيات
قوم بطيعة المسائل والتفكير في حلها
التفكير بطريقة تجريبية وكتبته

متباينة المثلث في حين أن المثلث يتم تعيينه باستخدام هذه القطع المستقيمة الثلاث، يجب أن نشأ علاقة خاصة بين أطوال القطع المستقيمة حتى تشكل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

$$\begin{aligned} PO + OR &> PR \\ OR + PR &> PO \\ PR + PO &> OR \end{aligned}$$



سوف تثبت النظرية 4.11 في تمرين 23.

لتوضيح أنه ليس من الصعب تكوين مثلث باستخدام ثلاثة أطوال أضلاع، يجب عليك فقط توضيح أن إحدى متباينات المثلث الثلاث ليست صحيحة.

مثال 1 تحديد أطوال الأضلاع المعطاة المحتملة للمثلثات

هل يمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا، فافسر السبب.

a. 8 in., 15 in., 17 in.

تحقق من كل متباينة.

$$\begin{aligned} 8 + 15 &\stackrel{?}{>} 17 & 8 + 17 &\stackrel{?}{>} 15 & 15 + 17 &\stackrel{?}{>} 8 \\ 23 &> 17 \checkmark & 25 &> 15 \checkmark & 32 &> 8 \checkmark \end{aligned}$$

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 8 و 15 و 17 بوصة ستكون مثلثًا.

b. 6 m, 8 m, 14 m

$$\begin{aligned} 6 + 8 &\stackrel{?}{>} 14 \\ 14 &\nless 14 \times \end{aligned}$$

بما أن مجموع زوج واحد من أطوال الأضلاع ليس أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 6 و 8 و 14 مترًا لن تكون مثلثًا.

تمرين موجه 1A. نعم؛ $15 + 16 > 30$; $15 + 30 > 16$; $16 + 30 > 15$

1A. 15 yd, 16 yd, 30 yd

1B. 2 ft, 8 ft, 11 ft

لا؛ $2 + 8 \nless 11$

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ ما أطوال التوصلات الثلاث في كل محاولة؟

الأولى، 3 in., 6 in., 8 in.

الثانية، 3 in., 3 in., 8 in.

■ ما مجموع الضلعين الأقصر في كل محاولة؟ الأول، 9 in.، الثاني، 6 in.

(تتبع في الصفحة التالية)

- ما وجه المقارنة بين المجموع والتوصيلة الثالثة في كل محاولة؟ في المحاولة الأولى، المجموع أكبر من الضلع الثالث، وفي المحاولة الثانية، المجموع أصغر.
- استخدم هذه المعلومات لتحسين العلاقات بين الضلعين الأقصر والضلع الثالث في مثلث. الإجابة النموذجية: يجب أن يزيد مجموع الضلعين الأقصر على الضلع الثالث.

1 متباينة المثلث

يوضح المثالان 1 و 2 كيفية التوصل إلى أطوال الأضلاع في مثلث وتحديد ما سيستخدم الطلاب المتباينات لتحديد أطوال الأضلاع.

التقويم التكويني

استخدم التمارين البوجيه الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

- هل يمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا لم يكن ذلك ممكناً، فاشرح السبب.
 - $6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}$ لا، $6\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} < 14\frac{1}{2}$
 - 6.8, 7.2, 5.1 نعم
- مثال على الاختبار المعياري في $\triangle PQR$ ، $PQ = 5.2$ و $QR = 7.2$ ما القياس الذي لا يمكن أن يبلغه PR ؟

A 7 B 9 C 11 D 13

عندما يكون طولاً ضلعين في مثلث معلومين، قد يكون الضلع الثالث أي طول في مدى معين من القيم. يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث.



مثال على الاختبار المعياري 2 إيجاد الأطوال المحتملة للضلع

إذا كان قياسا ضلعين في مثلث 3cm و 7cm، فما أقل عدد صحيح ممكن لقياس الضلع الثالث؟

- A 3 cm B 4 cm C 5 cm D 10 cm

قراءة فترة الاختبار

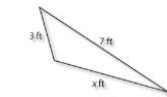
يجب أن تحدد أي قيمة تمثل أقل قياس محتمل للضلع الثالث من المثلث الذي يبلغ طولاً ضلعيه 3 أقدام و 7 أقدام.

حل فترة الاختبار

لتحديد أقل قياس محتمل من الخيارات المعطاة، حدد أولاً مدى القياس المحتمل للضلع الثالث.

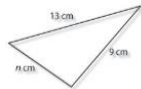
صم رسماً تخطيطياً وافرض أن x يمثل طول الضلع الثالث.

أولاً، أتمن كل متباينات المثلثات الثلاثة وحليها.



$$\begin{aligned} 3 + 7 &> x & 3 + x &> 7 & x + 7 &> 3 \\ 10 &> x \text{ أو } x < 10 & x &> 4 & x &> -4 \end{aligned}$$

لاحظ أن $x > -4$ صحيح دائماً لأي قياس عدد صحيح لـ x .
جميع المتباينات المتبقية: فإن مدى القيم التي تملك كلا المتباينتين هو $x < 10$ و $x > 4$ والذي يمكن كتابته بالصيغة $4 < x < 10$.
أقل قيمة لعدد صحيح بين 4 و 10 هي 5 إذا الإجابة الصحيحة هي الخيار C.



تبرير موجّه

- أي مما يلي قد لا يمكن أن يمثل قيمة n ؟

13	H	7	F
22	J	10	G

نصيحة عند حل الاختبار اختيار الخيارات إذا لم يكن لديك متسع من الوقت. فيمكنك اختبار كل خيار لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد الخيارات المتبقية.

قراءة في الرياضيات
رموز المتباينات المتعددة
المتباينة المركبة $4 < x < 10$ تقرأ x بين 4 و 10.

2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث

يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث للاستنتاج في البراهين.

التدريس المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط الطبيعي اشرح أنه حتى المثلثات الموجودة في الطبيعة يجب أن تتبع المبادئ الواردة في هذا الدرس. اطلب من الطلاب أن يجدوا أمثلة لاستكشاف متباينة المثلث واختبارها، مثل منافير الطيور وأوراق الشجر ومجموعات النجوم ومسارات الحيوانات وما إلى ذلك. تشكل نجوم النسر الواقع وذنب الدجاجة والنسر الطائر مثلثاً قائم الزاوية يُسمى "مثلث الصيف". يستطيع الطلاب البحث للوصول إلى المسافات المقطرة بين النجوم والتحقق من أن النظرية صحيحة حتى في الطبيعة.

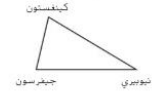
2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث

المثال 3 يوضح طريقة استخدام نظرية متباينة المثلث لكتابة برهان حول المسافات.

مثال إضافي

3 السفر تظهر على الخريطة

أدناه مدن جيفرسون وكينغستون ونيويورك. أثبت أن مسافة القيادة من جيفرسون إلى كينغستون ثم من كينغستون إلى نيويورك أطول من مسافة القيادة من جيفرسون إلى نيويورك.



الرموز المختصرة للرؤوس هي J و K و N . و $JN + KN > JK$.

إرشاد للمعلمين الجدد

متباينة المثلث بموجب مسلسلة جمع القطعة المستقيمة، إذا كان مجموع أي قطعتين مستقيمتين يساوي طول قطعة مستقيمة ثالثة، فنقاط النهاية الثلاث تقع على خط واحد. ولهذا، لا تستطيع القطع المستقيمة الثلاث تشكيل مثلث.

إجابات إضافية (نبرين موجه)

3. الجمل (المبررات)

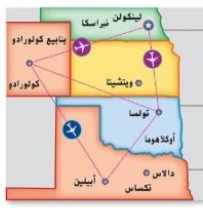
1. $GL = LK$ (معطى)
2. $JH + GH > GJ$ (نظرية متباينة المثلث)
3. $GJ = GL + LJ$ (مسلسلة إضافة القطعة المستقيمة)
4. $JH + GH > GL + LJ$ (التعويض)
5. $JH + GH > LK + LJ$ (التعويض)
6. $LK + LJ > JK$ (نظرية متباينة المثلث)
7. $JH + GH > JK$ (خاصية التعدي)



الربط بالحياة اليومية

لا تقطع رحلة الطيران المباشرة نفس المسافة التي تقطعها رحلة الطيران التي تطلق من توقف، بالنسبة إلى رحلة الطيران المباشرة لا يغير المسارون الطائرات، ولكن قد يهبط الطائرة في محطة واحدة أو اثنين قبل المتابعة إلى وجهتها النهائية.

مثال من الحياة اليومية 3 البرهان باستخدام نظرية متباينة المثلث



السفر المسافة من بنابغ كولورادو، في منطقة البنابغ، بكولورادو، إلى ألبين في تكساس هي نفسها المسافة من بنابغ كولورادو إلى تولسا في أوكلاهوما. أثبت أن رحلة الطيران مباشرة من بنابغ كولورادو إلى تولسا عبر لوكولون، في تكساس، تتخطى مسافة أكبر من رحلة الطيران التي تطلق دون توقف من بنابغ كولورادو إلى ألبين.

صمم رسماً تخطيطياً بسيط لهذه الحالة وحدد أسماً له. أرسم الضلع CT لتكوين $\triangle CTL$.
المعطيات: $CA = CT$
المطلوب: $CL + LT > CA$



البرهان:

البرهان:	العبارة:
1. المعطيات	1. $CA = CT$
2. نظرية متباينة المثلث	2. $CL + LT > CT$
3. التعويض	3. $CL + LT > CA$

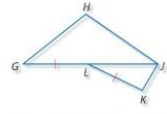
نبرين موجه

3. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$

انظر الهامش.



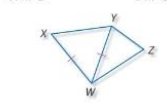
التحقق من فهمك

هل يمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يمكن ذلك، فاشرح السبب.

1. 5 cm, 7 cm, 10 cm
2. 3 in., 4 in., 8 in.
3. 6 m, 14 m, 10 m

4. الاختيار من متعدد إذا كان قياس ضلعي مثلث 5 أمتار و 9 أمتار، فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث إذا كان القياس عدداً صحيحاً؟ B

1. نعم: $5 + 7 > 10$
2. لا: $5 + 7 < 10$
3. نعم: $6 + 14 > 10$
4. لا: $6 + 14 < 10$



5. البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $XW \cong YW$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$ انظر الهامش.

التدريس المتمايز

التوسع يخطط أحد مصممي المئتمنزهات لمتنزه جديد سيكون على شكل مثلث، أبلغ النصمم أعضاء مجلس المدينة بأن قياسات حدود المثلث تبلغ 180 قدماً و 150 قدماً و 340 قدماً. طلب أحد أعضاء مجلس المدينة من المصمم أن يعود إلى الموقع ويقيسه مرة أخرى. اشرح السبب بالتفصيل. تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث. بما أن $180 + 150 = 330$. وهو أقل من الضلع الثالث، فلا يمكن أن تشكل القياسات مثلثاً.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-5 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء الحل. ويخططون لمسار الحل بدلاً من الفوز لمحاولة الحل مباشرة بكل بساطة. في التمرينين 20 و 21، أوضح للطلاب أنهم ينبغي أن يستخدموا نظرية متباينة المثلث.

إجابات إضافية

5. المعطيات: $XW \cong YW$

المطلوب إثباته: $YZ + ZW > XW$



الجميل (المبررات)

1. $XW \cong YW$ (معطى)
2. $XW = YW$ (تعريف القطع المستقيمة)
3. $YZ + ZW > YW$ (نظرية متباينة Δ)
4. $YZ + ZW > XW$ (التمويض)
6. لا، $4 + 9 \not> 15$
7. نعم: $11 + 21 > 16$ و $11 + 16 > 21$ و $16 + 21 > 11$
8. لا، $1.1 + 8.2 \not> 9.9$
9. لا، $2.1 + 4.2 \not> 7.9$
10. لا، $2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} \not> 5\frac{1}{8}$
11. نعم: $1\frac{1}{5} + 4\frac{1}{2} > 3\frac{3}{4}$ و $4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} > 1\frac{1}{5}$ و $1\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4} > 4\frac{1}{2}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.

6. 4 ft, 9 ft, 15 ft
7. 11 mm, 21 mm, 16 mm
8. 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm
9. 2.1 in., 4.2 in., 7.9 in.
10. $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m
11. $1\frac{1}{5}$ km, $4\frac{1}{2}$ km, $3\frac{3}{4}$ km

مثال 2

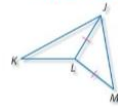
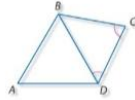
احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الآخرين.

12. 4 ft, 8 ft $4 \text{ ft} < n < 12 \text{ ft}$
13. 5 m, 11 m $6 \text{ m} < n < 16 \text{ m}$
14. 2.7 cm, 4.2 cm $1.5 \text{ cm} < n < 6.9 \text{ cm}$
15. 3.8 in., 9.2 in. $5.4 \text{ in.} < n < 13 \text{ in.}$
16. $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km $2\frac{3}{4} \text{ km} < n < 3\frac{3}{4} \text{ km}$
17. $2\frac{1}{3}$ yd, $7\frac{2}{3}$ yd $5\frac{1}{3} \text{ yd} < n < 10 \text{ yd}$

مثال 3

البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

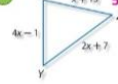
18. المعطيات: $\angle BCD \cong \angle CDB$ انظر ملحق 4. المطلوب: $AB + AD > BC$
19. المعطيات: $\overline{KL} \cong \overline{LM}$ انظر ملحق 4. المطلوب: $KJ + KL > LM$



20. $6 < x < 17$



21. $\frac{7}{5} < x < 21$



22. القيادة يريد حارب اتخاذ أقصر طريق من منزله إلى مزاراة كرة قدم في استاد نادي الاتحاد. يمكنه أن يتخذ طريق أو طقس الرئيسي أو الطريق السريع 4. ثم شارع 6 للوصول إلى نادي الاتحاد.
 - a. أي طريق من المسارين المحتملين يعطي أقصر مسافة؟ اشرح استنتاجك.
 - b. افترض أن حارب يتود دائماً يأخذ من حد السرعة. إذا كان أقصى سرعة في طريق أو طقس الرئيسي هو 30 ميلاً في الساعة وفي كل من الطريق السريع 4 وشارع 6 هو 55 ميلاً في الساعة. فما الطريق الأسرع؟ اشرح.

23. البرهان اكتب برهاناً من عمودين.

- المعطيات: $\triangle ABC$
- المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)
- (إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة إضافية \overline{CD} بحيث يكون C بين D و B. $\overline{CD} \cong \overline{AC}$)

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومي
AL مبتدئ	6-19, 44, 45, 47-64	44, 45, 47, 48, 53-64 زوجي 6-18 فردي 19-7
OL أساسي	7-19, 21-42, 44, 45, 47-64	6-19, 49-52 فردي 7-19 زوجي 20-42, 44, 45, 47, 48, 53-64
BL متقدم	20-60, (اختياري 61-64)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء الحل. ويخططون لمسار الحل بدلاً من القفز لمحاولة الحل مباشرة بكل بساطة. في التمرين 20، أوضح للطلاب أنهم ينبغي أن يستخدموا نظرية متباينة المثلث.



24. **المبرسة** عندما نذهب زحام من صف العلوم إلى صف الرياضيات، فإننا نتوقف عند حزامها.

المسافة بين صف العلوم وحزامها هي 90 متراً، والمسافة من حزامها إلى صف الرياضيات هي 110 أمتار. ما المسافة المباشرة من صف العلوم إلى صف الرياضيات إذا كانت نيتي في الطريق الذي يمر مباشرة بين الفصلين الدراسي.

المسافة أكبر من 20 ft وأقل من 200 ft.

أوجد مدى القياسات الممكنة لـ x إذا كانت كل مجموعة من التعابير تمثل قياسات أضلاع المثلث.

25. $x, 4, 6, 2 < x < 10$

26. $8, x, 12, 4 < x < 20$

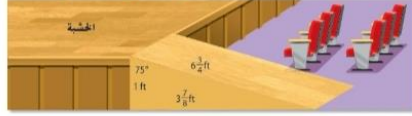
27. $x + 1, 5, 7, 1 < x < 11$

28. $x - 2, 10, 12, 4 < x < 24$

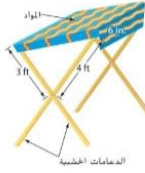
29. $x + 2, x + 4, x + 6, x > 0$

30. $x, 2x + 1, x + 4, x > \frac{3}{2}$

31. **نادي الدراما** يعمل حميد وحسن على إنشاء منحدر للسيرج من أجل الإنتاج القادم لنادي الدراما. نموذج حميد للانحدار موضح أدناه، ويتم حسن بالقياسات ويعتقد أنه يجب أن يتحقق من القياسات قبل بدء تقطيع الخشب. هل اهتمام حسن في محله؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**



32. **الاستنتاج المنطقي** تتركب عاتشة دراجتها إلى المترو ويكتفي أن تتخذ أحد طريقيين. الطريق الأكثر اختصاراً من منزلها هو اتخاذ الشارع الرئيسي، ولكن سيزداد الأمان باتخاذ الطريق رقم 3 كم التحول يمينا إلى طريق الشيخ زايد كما هو موضح. ما المسافة الإضافية التي ستشيها بالنيل إذا اتخذت الطريق رقم 3 إلى طريق الشيخ زايد؟ **0 و 12**



33. **صميم** صممت سالي مظلة بيكتها هي وصديقاتها أخذها إلى الشاطئ. وفرت سالي تغطية الجزء العلوي من المظلة بمواد ستيند بعداد 6 بوصات فوق المقدمة. ما طول المواد التي يجب عليها شراؤها لاستخدامها في تصميمها بحيث تغطي الجزء العلوي من المظلة بما في ذلك الشدة. عندما تكون الدعامات مفتوحة بالترتيب قدر ممكن؟ لفترض أن عرض المادة يكفي لتغطية المظلة. **يجب عليها ألا تشتري ما يزيد عن 7.5 ft.**

التقدير. دون استخدام الحاسبة، حدد هل من الممكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة للأضلاع أم لا. اشرح. **34-37. انظر الهامش.**

34. $\sqrt{8} \text{ ft}, \sqrt{2} \text{ ft}, \sqrt{35} \text{ ft}$

35. $\sqrt{99} \text{ yd}, \sqrt{48} \text{ yd}, \sqrt{65} \text{ yd}$

36. $\sqrt{3} \text{ m}, \sqrt{15} \text{ m}, \sqrt{24} \text{ m}$

37. $\sqrt{122} \text{ in.}, \sqrt{5} \text{ in.}, \sqrt{26} \text{ in.}$

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقة بينها في مواقف المسألة. في التمارين من 38 و 41. شجع الطلاب على عمل تمثيل بياني لكل زوج مرتب.

التثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التبرين 42 رسومات هندسية وجدولاً إضافة إلى الوصف اللفظي لاستكشاف العلاقة بين ضلعين وزاويتين في مثلث.

إجابات إضافية

34. لا، $2.9 \approx \sqrt{8}$ بما أن $\sqrt{9} = 3$ ، فإن $\sqrt{1} = 1$ و $\sqrt{4} = 2$ بما أن $\sqrt{2} \approx 1.41$ ، و $\sqrt{35} \approx 5.9$ بما أن $\sqrt{36} = 6$ ، إذاً، $2.9 + 1.5 \approx 5.9$.
35. نعم، $9.9 \approx \sqrt{99}$ بما أن $\sqrt{100} = 10$ ، فإن $6.9 \approx \sqrt{48}$ بما أن $\sqrt{49} = 7$ ، و $8.1 \approx \sqrt{65}$ بما أن $\sqrt{64} = 8$ ، و $9.9 > 8.1 + 6.9$ إذاً هذا ممكن.
36. نعم، $1.9 \approx \sqrt{3}$ بما أن $\sqrt{4} = 2$ ، فإن $3.9 \approx \sqrt{15}$ بما أن $\sqrt{16} = 4$ ، و $4.9 \approx \sqrt{24}$ بما أن $\sqrt{25} = 5$ ، و $9 > 3.9 + 1.9$ إذاً هذا ممكن.
37. لا، $11.1 \approx \sqrt{122}$ بما أن $\sqrt{121} = 11$ ، فإن $2.1 \approx \sqrt{5}$ بما أن $\sqrt{4} = 2$ ، و $5.1 \approx \sqrt{26}$ بما أن $\sqrt{25} = 5$ ، إذاً $11.1 \approx 2.1 + 5.1$.
43. المحيط أكبر من 36 وأقل من 64. الإجابة النموذجية: نعلم من الرسم التخطيطي أن $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ ، لأن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة. إذاً $\triangle ACB \cong \triangle ECD$. باستخدام نظرية متباينة المثلث، أدنى قيمة لكل من AB و ED هي 2 وأقصى قيمة هي 16. ولذلك تزيد أدنى قيمة للمحيط على $2(2 + 7 + 9)$ أو 36. وتقل أقصى قيمة للمحيط عن $2(16 + 7 + 9)$ أو 64.

التبرير حدد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة هي رؤوس المثلث أم لا. اشرح.

38. $X(1, -3)$, $Y(6, 1)$, $Z(2, 2)$ نعم، $FG + GH > FH$ و $FG + FH > GH$ و $GH + FH > FG$ نعم، $QR + QS > RS$ و $QR + RS > QS$ و $QS + RS > QR$
39. $F(-4, 3)$, $G(3, -3)$, $H(4, 6)$ نعم، $XY + YZ > XZ$ و $XY + XZ > YZ$ و $XZ + YZ > XY$
40. $A(-7, -1)$, $X(9, -5)$, $L(21, -8)$ نعم، $JK + KL = JL$
41. $Q(2, 6)$, $R(6, 5)$, $S(1, 2)$ نعم، $QR + RS > QS$ و $QR + RS > QS$ و $QS + RS > QR$

42. التثيلات المتعددة

- أ. هندسياً ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات التي يوجد بها زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج واحد من الأضلاع غير المتطابقة. حدد كل زوج من الأضلاع المتطابقة. اكتب على كل زوج مثلثات الرموز ABC و DEF . حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.
- ب. جدولاً اصنع الجدول أدناه. فس وسجل قيم BC و $m\angle A$ و EF و $m\angle D$ لكل زوج من المثلثات.

زوج من المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1	0.75	26	2	105
2	0.3	15	1	97
3	0.8	44	1.4	101

- ج. لاحظاً صغ تحسباً حول العلاقة بين الزوايا المتقابلة للأضلاع غير المتطابقة لزوج المثلثات التي بها ضلعان متطابقان. الإجابة النموذجية: الزاوية المتقابلة للضلع الأكبر من الأضلاع غير المتطابقة أكبر من الزاوية المتقابلة للضلع الأصغر من الأضلاع غير المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

43. التحدي ما البدي للبيانات المحيطة بالشكل $ABCDE$ إذا كان $AC = 9$ و $EDC = 9$ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.
44. الاستدلال ما البدي لأطوال كل ضلع في مثلث متساوي الساقين إذا كان قياس القاعدة 6 بوصات؟ اشرح. انظر الهامش.
45. الكتابة في الرياضيات ما الذي يربطك التوصل إليه حول مثلث بيرفزة أطوال أضلاعه الثلاثة؟ قم بتضمين عنصرين على الأقل. انظر الهامش.
46. تحدي أضلاع مثلث متساوي الساقين هي أعداد صحيحة ومحيطه يساوي 30 وحدة. ما احتمال أن يكون المثلث متساوي الأضلاع؟ $\frac{1}{2}$
47. مسألة غير محددة الإجابة طول أحد أضلاع مثلث متزان. ارسم مثلثاً يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أقصر ضلع. وارسم مثلثاً آخر يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أطول ضلع. قم بتضمين قياسات الأضلاع والزوايا في رسبك. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.
48. الكتابة في الرياضيات لتعرض أن منترك بعد $\frac{3}{4}$ كيلو متر عن أحد المتنزعات، وبعد المتنزعة كيلو مترا ونصف عن مركز التسوق. $a-b$. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.
- أ. إذا لم يكن منترك والمتنزعة ومركز التسوق على خط واحد. فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منترك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.
- ب. إذا كانت المواقع الثلاثة على خط واحد. فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منترك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

44. يجب أن يزيد قياس كل ساق على 3 بوصات. الإجابة النموذجية: عندما تستخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد أدنى طول للساق. يزيد الحل على 3 بوصات. عندما تستخدمها لإيجاد أقصى طول للساق، تكون المتباينة $0 < 6$. وهذا صحيح دائماً. ولهذا، لا يوجد حد أقصى للطول.
45. الإجابة النموذجية: ما إذا كانت أطوال الأضلاع تشكل مثلثاً، فما أصغر الزوايا وأكبرها. ما إذا كان المثلث متساوي الأضلاع أم متساوي الساقين أم مختلف الأضلاع

4 التقويم

الكرة البلورية لتحسين استيعاب مفاهيم الدرس. اطلب من الطلاب أن يعيدوا كتابة النظريات واللازمات في هذا الدرس بعباراتهم الخاصة ويتوقعوا كيف ستساعدكم في الدرس 4-6.

إجابات إضافية

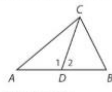
61. $x = 2$; $JK = KL = JL = 14$
 62. $x = 9$; $AB = BC = 23$
 63. $x = 7$; $SR = RT = 24$, $ST = 19$

تمرين على الاختبار المعياري

51. أي مما يلي يمثل خاتمة منطقية وفقاً للعبارة وعكسها أدناه؟
عبارة: إذا كان المضلع عبارة عن مستطيل، فإن له أربعة أضلاع.
العكس: إذا كان المضلع به أربعة أضلاع، إذا فهو مستطيل.
 F العبارة وعكسها صحيحان.
 G العبارة خاطئة، والعكس خطأ.
 H العبارة صحيحة، والعكس خطأ.
 J العبارة خاطئة، والعكس صحيح.

52. SAT/ACT عند طرح 7 من $14w$ تكون النتيجة z . أي من المعادلات التالية تمثل هذه العبارة؟
 A $7 - 14w = z$
 B $z = 14w + 7$
 C $7 - z = 14w$
 D $z = 14w - 7$
 E $7 + 14w = 7z$

49. إذا كان \overline{DC} متوسطاً في $\triangle ABC$ و $m\angle 1 > m\angle 2$ أي العبارات التالية ليست صحيحة؟
 B



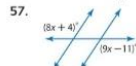
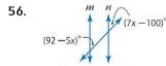
- A $AD = BD$
 C $AC > BC$
 D $m\angle 1 > m\angle B$
 50. **إجابة مختصرة** يرغب فريق كرة قدم في مدرسة ثانوية في الفوز بنسبة 75% بعد خوض 15 مباراة هذا الموسم. في الأسابيع الثلاثة الأولى، فاز الفريق في 5 مباريات. كم عدد المباريات الإضافية التي يجب على الفريق الفوز فيها لتحقيق هدفه؟
 7

مراجعة شاملة

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

53. إذا كان $4y + 17 = 41$ ، $y = 6$ أو $y < 6$
 54. إذا كان المستقيمان مخطوعين بقاطع وكان زوج من الزوايا الداخلية البديلة متطابقين، فإن الخطان متوازيين. **المستقيمان غير متوازيين.**
 55. **الجغرافيا** تبلغ المسافة بين مدينة العين في إمارة أبو ظبي ومدينة دبا الحصن في إمارة الشارقة حوالي 375 كيلو متراً. المسافة من دبا الحصن إلى مدينة زايد في إمارة العين حوالي 243 كيلو متراً. استخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد المسافة المحتملة بين مدينة العين ومدينة زايد.
 $132 \text{ mi} \leq d \leq 618 \text{ mi}$

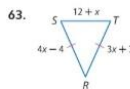
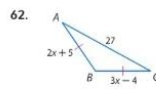
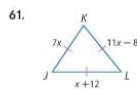
أوجد قيمة x حيث إن $m \parallel n$. حدد المسئلة أو النظرية التي استخدمتها.



56. **16؛ متبادلة، مسئلة**
 57. **15؛ متبادلة خارجية، نظرية**
 58. **13؛ متبادلة خارجية، نظرية**
 الجبر أوجد قيمة x و JK إذا كان J بين K و L .
 59. $KJ = 3x$ و $JL = 6x$ و $KL = 12$
 $x = \frac{4}{3} \approx 1.3$; $JK = 4$
 60. $KJ = 3x - 6$ و $JL = x + 6$ و $KL = 24$
 $x = 6$; $JK = 12$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث. انظر الهامش.



1 الهدف

التخطيط الرئيسي

قبل الدرس 4-6 استخدام المتباينات لإجراء مقارنات في مثلث واحد.

الدرس 4-6 تطبيق نظرية المفصلة أو معكوسها لإجراء مقارنات في مثلثين وإثبات علاقات المثلثات.

بعد الدرس 4-6 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمتين والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- هل $\angle A$ أكبر عندما تكون السيارة أعلى أم عندما تكون أكثر انخفاضاً؟ **أكثر انخفاضاً**
- هل \overline{BC} أطول عندما تكون السيارة أعلى أم عندما تكون أكثر انخفاضاً؟ **أكثر انخفاضاً**
- ساقا المثلثات متطابقتان دائماً، لكن كيف تتغير $m\angle ACB$ و $m\angle ABC$ ؟ **نصبح أصغر.**

4-6 المتباينات في مثلثين

لماذا؟

الحالي

السابق



1 نظرية المفصلة تعد الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من أنواع المثلثات. وهي تصور النظريات التالية.

النظريات المتباينات في مثلثين

4.13 نظرية المفصلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان $m\angle A > m\angle F$ و $\overline{AB} \cong \overline{FG}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ ، فإن $\overline{BC} > \overline{GH}$.

4.14 عكس نظرية المفصلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول تكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

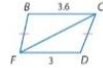
مثال: إذا كان $\overline{PQ} > \overline{JK}$ و $\overline{PL} \cong \overline{JK}$ ، $\overline{KL} \cong \overline{OR}$ ، فإن $m\angle R > m\angle L$.

سوف تثبت النظرية 4.14 في تمرين 28.

مثال 1 استخدام نظرية المفصلة ومعكوسها

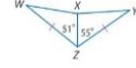
قارن بين القياسات المعطاة.

a. WX و XY



وفي $\triangle BCF$ و $\triangle DCF$ ، يكون $\overline{BF} \cong \overline{DC}$ و $\overline{BC} > \overline{FD}$ و $\overline{FC} \cong \overline{CF}$.
المفصلة ومعكوسها: $\angle BFC > \angle DCF$.

b. $m\angle RCD$ و $m\angle BFC$



في $\triangle WXC$ و $\triangle XYZ$ ، يكون $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ و $\angle WZX > \angle YZX$ و $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$.
بتطبيق نظرية: $m\angle WZX < m\angle YZX$.

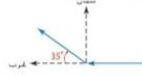
ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

يمكنك استخدام نظرية المثلثة لحل مسائل من واقع الحياة.

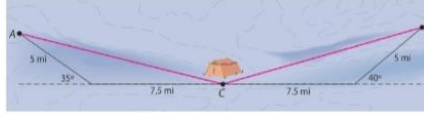
مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية المثلثة

الترجل على الجليد غادرت مجموعتان من متزلجي الجليد من المعسكر الأساسي نفسه. قطعت المجموعة A مسافة 7.5 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 35° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 5 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 7.5 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 40° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 5 أميال. عند هذه النقطة، أي من المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي؟ اشرح استنتاجك.

لاستخدام مجموعة الاتجاهات المعطاة في هذه المسألة، ستحتاج إلى تحديد أي من مجموعتي التزلج على الجليد قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ثم تفسر التحول بـ 35° باتجاه الشمال الغربي بشكل صحيح كما هو موضح.



التخطيط صمم رسماً تخطيطياً لهذه الحالة.



تشكل المسارات التي سلكتها المجموعتان وخط العودة المستقيم مثلثين. قطعت كل مجموعة 7.5 أميال ثم حولت اتجاهها وقطعت 5 أميال.

استخدم الأضلاع المخطئة لحساب قياس الزاويتين المحصورتين. ثم طبق نظرية المثلثة لمقارنة المسافة التي قطعها كل مجموعة بعيداً عن المعسكر الرئيسي.

الحل قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي $180 - 35 = 145^\circ$. قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة B يساوي $180 - 40 = 140^\circ$. بما أن $145 > 140$ ، فإن $AC > BC$ بتطبيق نظرية المثلثة. إذاً قطعت المجموعة A مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي.

التحقق تحولت المجموعة B بـ 5° أكثر من المجموعة A عند عودتها إلى المعسكر الرئيسي. لذا يجب أن تكون المجموعة B أقرب إلى المعسكر من المجموعة A. وبذلك يجب أن تكون المجموعة A على مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ✓

تمرين موجه

2A. التزلج غادرت مجموعتان من التزلجين المنتجع نفسه. وقطعت المجموعة A مسافة 4 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 70° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 3 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 4 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 75° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 3 أميال. عند هذه النقطة، أي المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المنتجع؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

2B. التزلج في المسألة 2A افترض أنه بدلاً مما سبق قطعت المجموعة A مسافة 4 أميال غرباً ثم تحولت 45° في الاتجاه الشمالي الغربي وسارت 3 أميال. أي المجموعتين ستكون أقرب إلى المنتجع؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

إذا كانت الزاوية المحصورة لأحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة للمثلث الآخر، فإننا نستخدم عكس نظرية المثلثة.

255



الربط بالحياة اليومية
يوجد أكثر من 225,000 ميلًا من مسارات الجليد المبهدة والمحددة في أمريكا الشمالية. **المصدر:** الجمعية الدولية لتسقي مركبات التزلج على الجليد

نصيحة في حل المسائل
تصميم رسمة تخطيطية صمم رسماً تخطيطياً لمساعدتك في رؤية المسألة الموصوفة بالكلمات وتفسيرها بشكل صحيح.

صور: جيمس ويليامز © مجموعة أبحاث جيمس ويليامز Education McGraw-Hill

التركيز على محتوى الرياضيات

التنظيم ضع علامات المطابقة والرموز البعيدة الأخرى على الأشكال قبل كتابة برهان للمساعدة في تنظيم كل معلومات المعطيات وتفسير عملية كتابة البرهان. كما تساعد مراحل التخطيط هذه على توضيح العلاقات القائمة بالفعل وتلك التي سيتم إثباتها.

اقتبه!

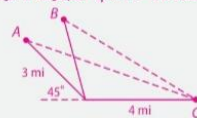
نظرية المثلثة لاستخدام نظرية المثلثة أو عكسها، يجب أن تكون الزاوية بين الضلعين المتطابقين.

مثال إضافي

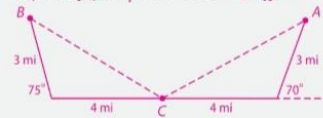
2 الصحة يستخدم الأطباء اختبار رفع ساق مستقيمة لتحديد مقدار الألم الذي يشعر به الشخص في ظهره. يستلقي المريض مستوياً على طاولة الفحص ويرفع الطبيب كل ساق إلى أن يشعر المريض بالألم في ظهره. يستطيع تادر أن يتحمل رفع الطبيب لمسافة اليمنى بزاوية 35° وساقه اليسرى بزاوية 65° من الطاولة، ما الساق التي يستطيع تادر أن يرفعها بمستوى أعلى فوق الطاولة؟ **ساقه اليسرى**

إجابات إضافية (تمرين موجه)

2B. المجموعة B، يبلغ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعتته المجموعة A $45 - 180 = 135^\circ$. يبلغ الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعتته المجموعة B $75 - 180 = 105^\circ$. بما أن $135 > 105$ ، بموجب نظرية المثلثة $AC > BC$. إذاً المجموعة B أقرب إلى المنتجع.



2A. المجموعة A، يبلغ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعتته المجموعة A $70 - 180 = 110^\circ$. يبلغ الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعتته المجموعة B $75 - 180 = 105^\circ$. بما أن $110 > 105$ ، بموجب نظرية المثلثة $AC > BC$. إذاً المجموعة A أبعد.



255

مثال 3 تطبيق الجبر على العلاقات بين المثلثات

الجبر احسب القيم المحتملة لـ x .

الملاحظة 1 من خلال الرسم التخطيطي، نعلم أن $\overline{JH} \cong \overline{GH}$, $\overline{EH} \cong \overline{EH}$ و $\angle E > \angle G$.

عكس نظرية المثلثات: $m\angle JHE > m\angle EHG$

التعويض: $6x + 15 > 65$

الحل لإيجاد قيمة x : $x > 8\frac{1}{3}$

الملاحظة 2 استخدم حقيقة أن قياس أي زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة ثانية.

التعويض: $m\angle JHE < 180$

الحل لإيجاد قيمة x : $6x + 15 < 180$

الحل: $x < 27.5$

الملاحظة 3 اكتب $8\frac{1}{3} < x < 27.5$ في صورة المتباينة المركبة $8\frac{1}{3} < x < 27.5$.

تقريب موجه

3. احسب القيم المحتملة للمتغير x .

$-0.4 < x < 9$

نصيحة دراسية

استخدام حقائق إضافية عند حساب المدى للقيم المحتملة لـ x . قد تحتاج إلى استخدام إحدى الحقائق التالية:

- قياس أي زاوية يكون دائماً أكبر من 0 وأصغر من 180
- قياس أي قطعة مستقيمة يكون دائماً أكبر من 0.

مثال إضافي

3 الجبر احسب مدى القيم المحتملة لـ a .

$-\frac{5}{3} < a < 14$

2 إثبات العلاقات في مثلثين

يوضح المثالان 4 و 5 كيفية استخدام نظرية المثلثات وعكسها لإثبات علاقات المثلث.

مثال إضافي

4 المعطيات: $JK = HL$

$m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$

المطلوب إثباته: $JH < KL$

البرهان:

العبارة (الهيروا):

1. $JK = HL$ (معطى)

2. $HK = HK$ (خاصية الانعكاس)

3. $m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$ (معطى)

4. $m\angle HKL = m\angle JHK$ (الزوايا الداخلية المتبادلة \cong)

5. $m\angle JKH + m\angle JHK < m\angle JHK + m\angle KHL$ (التعويض)

6. $m\angle JKH < m\angle KHL$ (خاصية الطرح في المتباينة)

7. $JH < KL$ (نظرية المثلثات)

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المثلثات

اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارة	التبرير
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1. المعطيات
2. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2. خاصية الانعكاس
3. $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3. مسملة جمع الزوايا
4. $m\angle EAB > m\angle EAD$	4. تعريف المتباينة
5. $EB > ED$	5. نظرية المثلثات

تقريب موجه

4. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

4. **المعطيات:** $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

البرهان:

العبارة (الهيروا):

1. $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ (المعطيات)

2. $\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (خاصية الانعكاس)

3. $\angle 1$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle QST$.

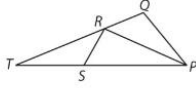
4. $m\angle 1 > m\angle 2$ (إذا $m\angle 1 > m\angle 2$ ، كانت \angle عبارة عن \angle خارجية لـ \triangle ، فيكون إذا قياسها أكبر من قياس كلا الزاويتين غير المجاورتين المتقابلتين لها.)

5. $RS > TQ$ (متباينة SAS)

مثال إضافي

5. المعطيات: $ST = PQ$
 $SR = QR$
 $SP > ST$

المطلوب إثباته:
 $m\angle SRP > m\angle PRQ$



البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $SR = QR$ (معطى)

2. $PR = PR$ (انعكاس)

3. $ST = PQ$ (معطى)

4. $SP > ST$ (معطى)

5. $SP > PQ$ (التمويض)

6. $m\angle SRP > m\angle PRQ$

(معكوس نظرية المفضلة)

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج اشرح للطلاب أنهم يستطيعون تحديد شكل مكون من مثلثين أو أكثر وتضمين رسم تخطيطي لتوضيح قياسات الضلع والزوايا المتطابقة في المثلثات.

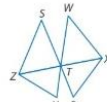
3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-9 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

مثال 5 إثبات العلاقات باستخدام عكس نظرية المفضلة



اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: T هي نقطة منتصف ZX .

$ST \cong WT$

$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:

T is the midpoint of ZX .

معطى

$ST \cong WT$

معطى

$SZ > WX$

معطى

$m\angle STZ > m\angle WTX$

معكوس نظرية المفضلة

$m\angle XTR > m\angle ZTY$

التمويض

$\angle STZ \cong \angle XTR$

$\angle WTX \cong \angle ZTY$

زوايا Δ هي Δ

$m\angle STZ = m\angle XTR$

$m\angle WTX = m\angle ZTY$

تعريف

تبرير موجز

5. اكتب برهاناً من عمودين.

المعطيات: NK هو أحد متوسطات ΔJMN .

$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

5. المعطيات: NK هو أحد

متوسطات ΔJMN .

$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

البرهان:

البيانات (المبررات)

1. NK هو أحد

متوسطات ΔJMN .

2. NK هي نقطة منتصف

3. $JN > NM$ (نظرية

4. $NK \cong NM$ (خاصية

5. $JN > NM$ (انعكاس)

المعطيات)

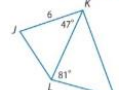
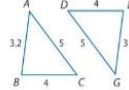
6. $m\angle 1 > m\angle 2$ (المتباينة

(SSS))

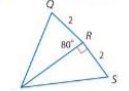
التحقق من فهمك

مثال 1. قارن بين القياسات المعطاة.

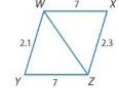
1. $m\angle ACB$ و $m\angle GDE$ $m\angle ACB > m\angle GDE$ 2. JL و KM $JL < KM$



3. QT و ST $QT < ST$



4. $m\angle XWZ$ و $m\angle YZW$ $m\angle XWZ > m\angle YZW$



257

المتابعة

تعرف الطلاب على المتباينات في مثلث ومثلثين.

اطرح السؤال التالي:

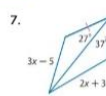
ما الارتباط بين زوايا مثلثين و/أو أضلاعهما؟ الإجابة النموذجية: إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.



5. الأراجيح يتغير وضع الأرجوحة وقتاً لمدى قوة دفعها.
 a. أي من أزواج القطع المستقيمة التالية يكون متطابقاً؟
 b. هل قياس $\angle A$ أكثر أم قياس $\angle D$ ؟ اشرح. **انظر الهامش.**

مثال 2
 5a. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
 $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

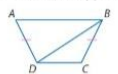
6. $\frac{7}{2} < x < 24$



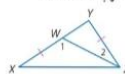
مثال 3
 احسب مدى التيم المحتملة للمتغير x .
 $\frac{5}{3} < x < 8$

المثالان 4-5: الفرضيات اكتب برهاناً من عمودين: 8-9. **انظر الهامش.**

8. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$,
 $DC < AB$
 المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



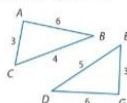
9. $\triangle YZX$, $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$
 $ZX > YW$
 المطلوب: $\angle Y > \angle X$



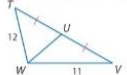
التحريين وحل المسائل

مثال 1 قارن بين القياسات المعطاة.

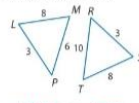
10. $m\angle BAC$ و $m\angle DGE$



المطلوب: $m\angle BAC < m\angle DGE$
 13. $m\angle TUV$ و $m\angle VUV$
 المطلوب: $m\angle TUV < m\angle VUV$

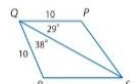


11. $m\angle MLP$ و $m\angle TSR$

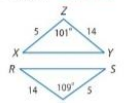


المطلوب: $m\angle MLP < m\angle TSR$

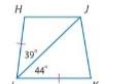
14. PS و SR $PS < SR$



12. SR و XY $SR > XY$



15. JK و HJ $JK > HJ$



16. **التخييم** أقام حسن ومارن معسكراً في حديقة وطنية في الصباح. قرر حسن السير إلى الشلال. لذا غادر المعسكر وسار 5 أميال باتجاه الشرق ثم تحول 15° إلى الجنوب الشرقي وسار ميلين آخرين. وغادر مارن المعسكر وسار 5 أميال إلى الغرب، ثم تحول 35° باتجاه الشمال الغربي وسار ميلين إلى البحيرة للسياحة.
 a. عند وصولهما إلى وجهتهما، من منهما أقرب إلى المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسماً تخطيطياً.
 b. افترض أنه بدلاً من تحول مارن 35° باتجاه الشمال الغربي، تحول 10° باتجاه الجنوب الغربي. من سيكون على مسافة أبعد عن المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسماً تخطيطياً.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	9-26, 39, 41-58	39, 41, 42, 47-58 زوجي 10-26
OL أساسي	9-29 30, 31-39 41-58 خريدي	27-37, 41, 42, 47-58
BL متقدم	27-55, (56-58 اختياري)	

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتوقفون في الرياضيات الافتراضات المذكورة والتعريفات والنتائج المثبتة سابقاً ويستخدمونها في وضع فرضيات. في التمارين من 8 إلى 9 ومن 23 إلى 26، شجّع الطلاب على مراجعة النظريات المعروضة في هذه الوحدة أثناء التخطيط لبراهينهم.

إجابات إضافية

5b. $\angle D$ ، الإجابة النموذجية: بما أن $EF > BC$ ، فوفقاً لمعكوس نظرية المثلث، $m\angle D > m\angle A$.

8. **المعطيات:** $\triangle YZX$, $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب إثباته: $ZX > YW$



العبارة (المبررات)

- $\triangle YZX$, $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$ (معطى)
- $\overline{ZW} \cong \overline{ZW}$ (خاصية الانعكاس)
- $\angle 1$ زاوية خارجية للمثلث $\triangle YZW$ (تعريف \angle الخارجية)
- $m\angle 1 > m\angle 2$ (نظرية متباينة الزاوية الخارجية)
- $ZX > YW$ (متباينة SAS)

9. **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $DC < AB$

المطلوب إثباته: $m\angle CBD < m\angle ADB$



العبارة (المبررات)

- $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (معطى)
- $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (خاصية الانعكاس)
- $DC < AB$ (معطى)
- $m\angle CBD < m\angle ADB$ (متباينة SSS)

- مثال 3 احسب مدى القيمة المحتملة للمتغير x .
17. $x < 6 > 2$
18. $x < 33 > -4.5$

19. $x < 21 > -20$
20. $x > 7$

21. الإجابة: \overline{RS}
 النموذجية:
 نظرًا لأن ارتفاع
 الارتفاع هو
 نفسه وطول
 ذراع الارتفاع
 ثابت، إذا وقتًا
 لنظرية المثلثات،
 فالضلع المقابل
 للزاوية الأصغر
 هو الضلع
 الأصغر، بما أن
 $29^\circ < 52^\circ$ ، إذا
 $\overline{RS} < \overline{MN}$

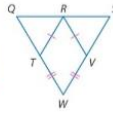
22. الخزائن تركت كل من سمية وسندية خزانتهما مفتوحتين كما هو موضح في الرسم التخطيطي. من صاحبة الخزنة التي تشكل زاوية أكبر؟ اشرح استنتاجك.



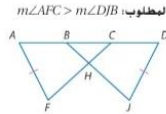
المثالان 4-5: الفرضيات اكتب برهانًا من عمودين. 23-26. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

22. سمية، الإجابة النموذجية: بما أن طول فتحتي الخزائتين وطول بابهما متساويين، استخدم عكس نظرية المثلثات لتحديد أنه، بما أن $17 \text{ in.} > 12 \text{ in.}$ فإن زاوية فتح خزنة سمية أكبر من زاوية فتح خزنة سندية.

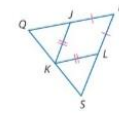
23. المثلثات: $\overline{VR} \cong \overline{RT}$, $\overline{VV} \cong \overline{WT}$, $m\angle SRV > m\angle QRT$. المطلوب: $WS > WO$



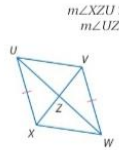
24. المثلثات: $\overline{AT} \cong \overline{DJ}$, $\overline{TC} \cong \overline{JB}$, $AB > DC$. المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



23. المثلثات: $\overline{LK} \cong \overline{RL} \cong \overline{RJ}$. K هي نقطة منتصف \overline{QS} . $m\angle SKL > m\angle QKJ$. المطلوب: $RS > QR$



25. المثلثات: $\overline{XU} \cong \overline{VW}$, $VW > XW$, $\overline{XU} \parallel \overline{VW}$. المطلوب: $m\angle XZU > m\angle UZV$



27 **تمرين رياضي** يقوم خلف بتدريبات تكوير عضلة الذراع الأمامية بالارتكاز على الركبة كجزء من تدريبات التهيئة.



- a. هل المسافة بين نقطة خلف وكنته أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2 ؟ برر إجابتك باستخدام القياسات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
- b. هل قياس الزاوية التي يشكلها مرفق خلف أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2 ؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

28. البرهان استخدم برهاناً غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS (النظرية 6.14).

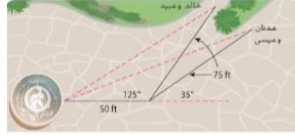


المطلوب: $m\angle S > m\angle W$. **انظر الهامش.**

29. البرهان إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ و $SR > SQ$ ، فاكذب برهاناً من عمودين لإثبات أن $m\angle 1 < m\angle 2$. **انظر الهامش.**

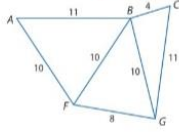


30. **البحث عن الكثر:** شارك كل من عبيد وعدنان وعيسى وخالد في لعبة البحث عن الكثر كجزء من درس الجغرافيا. تظهر هذه الخريطة أن المسار التالي لحل اللغز بعد 50 قدماً في اتجاه الشرق ثم 75 قدماً براوية 35° باتجاه الشمال الشرقي من نقطة البداية، وهي النافورة الموجودة في فناء المدرسة. عندما استعدوا للدوران والسير 75 قدماً براوية 35° في اتجاه الشرق الشمالي، اختلصوا حول اختيار الطريق. لذا افترضوا وسلكوا الطريقين الموضحين في الرسم التخطيطي أدناه.



- a. أي ثنائي منها اختار الطريق الصحيح؟ وضح استنتاجك.
- b. أي ثنائي منها هو الأقرب إلى النافورة عندما يتوقف؟ اشرح استنتاجك.

انظر الهامش.



الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوايا المعطاة أو قياسات القطعة المستقيمة.

31. $CB < AB$, $CB \neq AB$.
32. $m\angle FBG < m\angle BFA$, $m\angle FBG \neq m\angle BFA$.
33. $m\angle BGC < m\angle BFA$, $m\angle FBG \neq m\angle BFA$.

260 | الدرس 4-6 | المتباينات في مثلثين

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مساراً للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمارين من 31 إلى 33، شجّع الطلاب على استخدام علاقات الضلع-الزاوية في تحليل الشكل المعروض.

إجابات إضافية

28. البرهان غير المباشر

الخطوة 1: افترض أن $m\angle S \leq m\angle W$.

الخطوة 2: إذا كانت $m\angle S \leq m\angle W$ ، فإما أن $m\angle S = m\angle W$ أو $m\angle S < m\angle W$.

الحالة 1: إذا كانت $m\angle S = m\angle W$ ، فإن $RT < UV$ بموجب متباينة SAS.

الحالة 2: إذا كانت $m\angle S < m\angle W$ ، فإن $RT < UV$ بموجب SAS. $\triangle RST \cong \triangle UVW$ بموجب CPCTC. لهذا $RT = UV$.

الخطوة 3: كلتا الحالتين تتعارضان مع المعطى $RT > UV$. لهذا، لا بد أن يكون الافتراض خطأً. والاستنتاج، $m\angle S > m\angle W$ لا بد أن يكون صحيحاً.

29. **الجميل (المبررات)**

- $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ (معطى)
- $\angle PRQ \cong \angle PQR$ (نظرية \triangle متساوي الساقين)
- $m\angle PRQ = m\angle 1 + m\angle 4$, $m\angle PQR = m\angle 2 + m\angle 3$ (مسألة جمع الضلع)
- $m\angle PRQ = m\angle PQR$ (تعريف \cong)
- $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle 2 + m\angle 3$ (التعويض)
- $SQ > SR$ (معطى)
- $m\angle 4 > m\angle 3$ (نظرية العلاقة بين الزاوية والضلع)
- $m\angle 4 = m\angle 3 + x$ (تعريف المتباينة)
- $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle 2 + m\angle 3 + x$
- $m\angle 1 = m\angle 2 - x$ (الطرح)
- $m\angle 1 + x = m\angle 2$ (خاصية الجمع)
- $m\angle 1 < m\angle 2$ (تعريف المتباينة)

260 | الدرس 4-6 | المتباينات في مثلثين

التوسع قسّم الطلاب إلى مجموعات من 2. اجعل كل طالب يضع تصميمًا للعبة يتسبّل له 4 أضلاع ولكل ضلع طول مختلف. ينبغي تحديد اسم نصف الأطوال والزوايا فقط. اجعل الطلاب يتبادلوا تصميماتهم ويحددوا ما إذا كانت الأطوال التي ليس عليها اسم أكبر من الأطوال المعطاة أم أقل.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة خلال مناقشاتهم مع الآخرين وفي استنتاجاتهم الخاصة. في التمرين 41. شجّع الطلاب على مراجعة البصطلحات المستخدمة في هذا التمرين.

إجابات إضافية

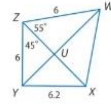
30b. خالد وعبيد: الإجابة النموذجية: شكل خالد وعبيد مسارا يصنع زاوية قياسها 125° بينما شكل عدنان وعيسى زاوية قياسها 145° .

38. في $\triangle JNL$ و $\triangle JKL$ ، المبعطى أن $m\angle JLN > m\angle KJL$ و $KJ \cong JN$ و $JL \cong JL$ ، إذا، وفقا لمعكوس نظرية المفضلة، $LN > LK$ في $\triangle LKN$ ، المفضلة، $LN > LK$ مما يعني أن $m\angle LKN > m\angle LNK$.

39. الباب: عند فتح الباب، تزداد فتحة الباب مع زيادة الزاوية التي تشكلها المفصلة. عند غلق الباب، تقل فتحة الباب مع انخفاض الزاوية التي تشكلها المفصلة. يتشابه هذا مع الضلع المقابل لزاوية في مثلث، لأنه مع زيادة الضلع المقابل لزاوية، يزيد قياس الزاوية أيضا. مع انخفاض الضلع، تنخفض الزاوية أيضا.



40. قائمة أو متفرجة: الإجابة النموذجية: إذا كانت $RT = RS$ ، فالمثلث متساوي الساقين، والوسيط أيضا عمودي على \overline{TS} . يعني ذلك أن كلا المثلثين المتشكّلين من الوسيط $\triangle RQS$ و $\triangle RQT$ ، فأنها الزاوية. إذا كانت $RT > RS$ ، فهذا يعني أن $m\angle RQT > m\angle RQS$. بما أنه زوج خطي وقياس مجموع الزوايا يجب أن يكون 180 على الأقل، يجب أن تكون $m\angle RQT$ أكبر من 90 و $\triangle RQT$ منفرج الزاوية.



استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوايا المعطاة أو قياسات القطعة.

$$34. \angle ZUY > \angle ZUW \quad m\angle ZUY > m\angle ZUW$$

$$35. WU > YU \quad WU > YU$$

$$36. WX > XY \quad WX > XY$$

37. التمثيلات المتعددة في هذه البسطة، ستكتشف خواص المثلثات.

a. هندسياً ارسم مضلعاً ثلاثي الأضلاع ورباعي الأضلاع وخماسي الأضلاع. اجعل اسم المضلع ثلاثي الأضلاع ABC. والمضلع رباعي الأضلاع FGHI. والمضلع خماسي الأضلاع PQRS. استخدم المنقلة لقياس كل زاوية وتسميتها.

b. جدولياً املح الجدول التالي وأكمله.

عدد الأضلاع	قياسات الزاوية	مجموع الزوايا
3	$m\angle A = 59$ $m\angle B = 76$	180
4	$m\angle F = 90$ $m\angle G = 90$	360
5	$m\angle P = 105$ $m\angle Q = 100$ $m\angle R = 96$	540

37c. الإجابة النموذجية:

مجموع زوايا المضلع يساوي 180 مضروباً في أقل من عدد أضلاع المضلع بمقدار اثنين.

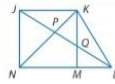
c. لتفطياً اكتب تخطيطاً حول العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زوايا المضلع.

d. منطقياً ما نوع الاستنتاج الذي استخدمته في الجزء c؟ اشرح.

e. جبرياً اكتب تعبيراً جبرياً لمجموع قياسات زوايا مضلع له عدد n من الأضلاع: $(n - 2)180$

f. الاستدلال الاستقرائي: الإجابة النموذجية: بما أنني استخدمت نمطاً لتحديد العلاقة، فيكون الاستدلال الذي استخدمته استقرائياً.

مسائل مهارات التفكير العليا



38. التحدي إذا كان $\overline{JN} \perp \overline{KL}$ ، فما الأكبر، $m\angle JLN > m\angle KJL$ أم $m\angle LKN$ ؟ وضح استنتاجك.

38-42. انظر الهامش.

39. مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثلاً من الحياة اليومية لأداة تستخدم مفضلة. صمم رسمين تكون فيهما المفصلة المثبتة في الأداة في موضعين مختلفين. استخدم الرسومات لشرح سبب تسمية نظرية 7.13 بنظرية المفصلة.

40. التحدي المعطيات $\triangle RST$ مع المتوسط \overline{RQ} . إذا كان RT أكبر من أو يساوي RS ، فما التصنيفات المتاحة لـ $\triangle RQT$ ؟ اشرح استنتاجك.



41. الدقة إذا كان \overline{BD} متوسطاً و $AB < BC$ ، إذا $\angle BDC$ تكون دائماً أو أحياناً أو لا تكون أبداً زاوية حادة، اشرح.

42. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين نظرية المفضلة ومسلمة SAS في نطاق المثلثات.

SAS لتطابق المثلث. إذا كانت الزوايا المحصورة المتناظرة متطابقة، فالمثلثان متطابقان. باستخدام نظرية المفصلة، إذا كانت إحدى الزوايا المحصورة أكبر من الزاوية المتناظرة في المثلث الآخر، فالضلع المقابل للزاوية الأكبر أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر في المثلث الآخر.

41. أبداً، بناء على معكوس نظرية المفصلة، $\angle ADB < \angle BDC$ و $\angle ADB < \angle BDC$ شكلان زوجاً خطياً. إذا، $m\angle ADB + m\angle BDC = 180$. بما أن $m\angle BDC$ أكبر من 90 و $m\angle ADB >$ ، يجب أن تكون $m\angle BDC$ أكبر من 90. إذا بموجب تعريف الزوايا المنفرجة والحادة، $m\angle BDC$ منفرجة دائماً و $m\angle ADB$ حادة دائماً.

42. تتطلب كل من مسلمة SAS لتطابق المثلث ونظرية المفصلة أن يكون لديك زوجان من الأضلاع المتناظرة المتطابقة وتضع الزاوية المحصورة في اعتبارك، باستخدام مسلمة

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اختر أو ابتكر أمثلة لبراهين باستخدام نظرية المفضلة ومعموسها. في كل مثال، اسبح للطلاب بأن يقدموا عبارات ومبررات بالترتيب الضروري لاستكمال البرهان.

إجابات إضافية

50. افترض أن تكلفة رحلة ميساء

البحرية هي x وتكلفة الرحلة الأخرى هي y .

الخطوة 1 المعطيات:

$$x + y > 500$$

المطلوب إثباته:

$$y > 2500 \text{ أو } x > 25$$

برهان غير مباشر:

افترض أن $x \leq 250$ و $y \leq 250$.

الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 250$

و $y \leq 250$. إذا $x + y \leq 250 + 250$

هذا $x + y \leq 500$ و $x + y > 500$ تناقض لأننا نعلم أن

الخطوة 3 بما أن افترض أن

$x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع

حقيقة معروفة، لا بد أن يكون الافتراض

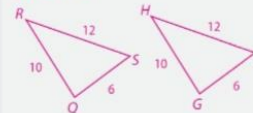
خطأً. ولهذا، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن

$x > 30$ أو $y > 30$ صحيحاً. ولهذا، لا

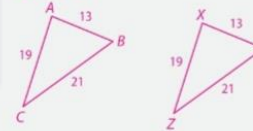
بد أن رحلة واحدة على الأقل قد تكلفت

أكثر من 250 AED.

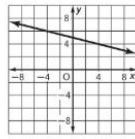
$$51. x = 8$$



$$52. x = 2$$



تمرين على الاختبار المعياري



45. الجبر ما الدالة الخطية التي نصف التمثيل البياني F؟

$$y = -\frac{1}{4}x + 5 \text{ F}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - 5 \text{ G}$$

$$y = \frac{1}{4}x + 5 \text{ H}$$

$$y = \frac{1}{4}x - 5 \text{ J}$$

SAT/ACT 46. إذا كان ضلع المربع يساوي $x + 3$

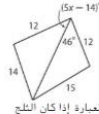
$$\text{A } x^2 + 1$$

$$\text{B } x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$\text{C } 2x + 6$$

$$\text{D } x^2\sqrt{2} + 6$$

$$\text{E } x^2 + 9$$



43. إجابة مختصرة اكتب متباينة لوصف مدى القيم المحتملة للتغير x .

$$2.8 < x < 12$$

44. أي من العبارات التالية معكوس العبارة إذا كان الثلج يتساقط، فإن خليفة برندي حذاء الثلج؟

A إذا ارتدى خليفة حذاء الثلج، فإن الثلج يتساقط.

B إذا لم يتساقط الثلج، فإن خليفة لا يرتدي حذاءه الشتوي.

C إذا لم يتساقط الثلج، فإن خليفة يرتدي حذاءه الشتوي.

D إذا لم يتساقط الثلج أبداً، فإن خليفة لا يرتدي حذاءه الشتوي.

مراجعة شاملة

احسب مدى قياس الضلع الثالث ليثبت تم إعطاء قياسي ضلعيه الآخرين.

$$47. 3.2 \text{ cm}, 4.4 \text{ cm}$$

$$12 \text{ cm} < n < 7.6 \text{ cm}$$

$$48. 5 \text{ ft}, 10 \text{ ft}$$

$$5 \text{ ft} < n < 15 \text{ ft}$$

$$49. 3 \text{ m}, 9 \text{ m}$$

$$6 \text{ m} < n < 12 \text{ m}$$

50. الجولات البحرية سألت ميا صديقتها ميساء عن تكلفة الرحلة البحرية التي قامت بها هي وأقرب صديقاتها بعد التخرج. لم تذكر ميساء تكلفة الفرد، ولكنها ذكرت إجمالي التكلفة التي تجاوزت AED 500. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن تكلفة الفرد كانت أكبر من AED 250. **انظر الهامش.**

ارسم شكلاً واذكر اسمه لتمثيل المثلثات المتطابقة. أوجد قيمة x . **51-52. انظر الهامش.**

$$51. \triangle ORS \cong \triangle GHJ, RS = 12, \text{ و } QR = 10, \text{ و } OS = 6, \text{ و } HJ = 2x - 4.$$

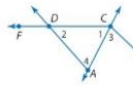
$$52. \triangle ABC \cong \triangle XYZ, AB = 13, \text{ و } AC = 19, \text{ و } BC = 21, \text{ و } XY = 3x + 7.$$

استخدم الشكل على اليسار.

53. ما اسم رأس $\angle A$ ؟

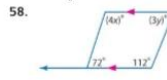
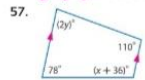
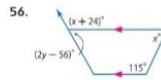
54. ما الاسم الآخر لـ $\angle C$ ؟

55. ما الاسم الآخر لـ $\angle BCA$ ؟



مراجعة المهارات

أوجد قيمة المتغير (المتغيرات) في كل شكل. اشرح استنتاجك. **56-58. انظر الهامش.**



262 | الدرس 4-6 | المتباينات في مثلثين

56. $x = 65$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية، $y = 73.5$ بموجب نظرية التكمال

57. $x = 66$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية، $y = 35$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية

58. $x = 27$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية، $y = 22 \frac{2}{3}$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية

262 | الدرس 4-6 | المتباينات في مثلثين

4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات

- القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات هي المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا والنواسط والارتفاعات.
- تُسمى نقاط تقاطع كل من القطع المستقيمة الخاصة في المثلث بنقاط الالتقاء.
- نقاط الالتقاء في المثلث هي مراكز الدائرة المحيطة ومراكز الدائرة الداخلية والنقاط المركزية وملئى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر

- كتابة برهان غير مباشر.
- 1. افترض أن الاستنتاج خاطئ.
- 2. وضح أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
- 3. بما أن الاستنتاج خاطئ يؤدي إلى عبارة غير صحيحة. فوجب أن يكون الاستنتاج الأصلي صحيحاً.

متباينات المثلث

- تقابل الزاوية الأكبر في المثلث الضلع الأكبر. وتقابل الزاوية الأصغر الضلع الأصغر.
- مجموع طولي أي ضلعين من أضلاع المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- **متباينة SAS (نظرية المتصلة)**. في أي مثلثين. إذا تطابق ضلعان. فقياس الزاوية المحصورة يحدد أي من المثلثين لديه الضلع الثالث الأكبر.
- **متباينة SSS**. في أي مثلثين. إذا تطابق ضلعان متناظران في كل من المثلثين. فطول الضلع الثالث يحدد أي من المثلثين يحتوي على الزاوية المحصورة ذات القياس الأكبر.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

- ارتفاع (altitude)
- نقطة مركزية (centroid)
- مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
- مستقيمتان متلاقيتان (concurrent lines)
- مركز الدائرة الداخلية (incenter)
- برهان غير مباشر (indirect proof)
- تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
- متوسط (median)
- ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
- منصف عمودي (perpendicular bisector)
- نقطة الالتقاء (point of concurrency)
- برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

- حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة. فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لعمل عبارة صحيحة.
1. تتقاطع ارتفاعات المثلث عند النقطة المركزية. **خطأ. ملتقى ارتفاعات المثلث**
2. تُسمى نقطة التواء متوسطات المثلث بمركز الدائرة الداخلية. **خطأ. منتصفات الزاوية**
3. نقطة الالتقاء هي نقطة تقاطع ثلاثة خطوط أو أكثر. **صحيحة**
4. مركز الدائرة المحيطة للمثلث يساوي البعد عن رؤوس المثلث. **صحيحة**
5. لإيجاد النقطة المركزية للمثلث. يتم أولاً إنشاء منصفات الزاوية. **خطأ. المتوسط**
6. المنصفات العمودية لمثلث هي مستقيمتان متلاقيتان. **صحيحة**
7. لعمل برهان بالتناقض. تفترض أولاً أن ما تحاول إثباته صحيح. **خطأ. خاطئ**
8. يستخدم البرهان بالتناقض الاستنتاج غير المباشر. **صحيحة**
9. يربط متوسط المثلث نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث بنقطة منتصف ضلع آخر في المثلث. **خطأ. الرأس المقابل لهذا الضلع**
10. مركز الدائرة الداخلية هو نقطة تتقاطع فيها منصفات زاوية المثلث. **صحيحة**

التقويم التكويني

المفردات الوظيفية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في استكمال التمارين من 1 إلى 10. فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن مفردات المصطلحات.

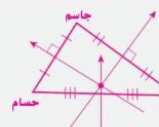
مطويات منظّم الدراسة

مطويات ديننا زايفك®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا المفاهيم الأساسية إلى علامة تبويب الدرس البلائم في مطوياتهم. اقترح على الطلاب الاحتفاظ بمطوياتهم بجانبهم أثناء إنجاز صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أن المطويات تمثل أداة مراجعة سريعة للمذاكرة لاختبار الوحدة.

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدكم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

14. جاسم



17. $\angle S, \angle R, \angle T; \overline{RT}, \overline{TS}, \overline{SR}$
 18. $\angle N, \angle L, \angle M; \overline{ML}, \overline{MN}, \overline{LN}$
 21. $\triangle MNO$ لا يطابق $\triangle FGH$.
 22. $\triangle KLM$ ليس قائم الزاوية.

24. افترض أن قياس زاوية هو x وقياس الزاوية الأخرى هو y . حسب تعريف الزوايا المتتامه، $x + y = 90$.

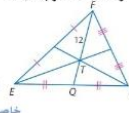
الخطوة 1 افترض أن الزاوية ذات القياس x زاوية قائمة. إذا $x = 90$.

الخطوة 2 بما أن $x = 90$ ، فإن $x + y > 90$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y = 90$.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن إحدى الزوايا زاوية مستقيمة يؤدي إلى تناقض، فلا بد أن الافتراض خطأ. ولهذا، لا بد أن الافتراض بأن $\angle A$ من الزوايا ليست زاوية قائمة افتراض صحيح.

مثال 2

في $\triangle EDF$ ، T هي النقطة المركزية و $FT = 12$. أوجد TQ .



$$\begin{aligned} FT &= \frac{2}{3} FQ \\ FT &= \frac{2}{3} (FT + TQ) \\ 12 &= \frac{2}{3} (12 + TQ) \\ 12 &= 8 + \frac{2}{3} TQ \\ 4 &= \frac{2}{3} TQ \\ 6 &= TQ \end{aligned}$$

خاصية التوزيع
الطرح
الضرب

15. رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$ و $E(0, 7)$ و $F(6, 3)$.
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$. **(2, 3)**

16. **حفل التخرج** لبلبي هي إحدى أعضاء لجنة حفل التخرج. وترغب في تعليق 12 مثلًا متطابقًا في السقف بحيث تكون موازية للأرض. لذا رست مثلًا واحدًا على مستوى إحداثي بالإحداثيات (0, 4)، و (3, 8)، و (6, 0). إذا كان كل مثلث سيتم تعليقه سلسلة واحدة، ما الإحداثيات التي يجب أن تصل عليها بعدها بلت؟ (4, 3)

إجابة إضافية

25. افترض أن تكلفة قرص DVD واحد

هي x وتكلفة القرص الآخر هي y .

المعطيات: $x + y > 50$

المطلوب إثباته:

$x > 25$ أو $y > 25$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1 افترض أن

$x \leq 25$ و $y \leq 25$.

الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 25$

و $y \leq 25$ فإن $x + y \leq 25 + 25$

أو $x + y \leq 50$. هذا

تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 50$.

الخطوة 3 بما أن افترض

$x \leq 25$ و $y \leq 25$ يؤدي إلى

تناقض مع حقيقة معروفة. لا بد أن

يكون الافتراض خاطئاً. ولهذا، لا بد

أن يكون الاستنتاج بأن $x > 25$

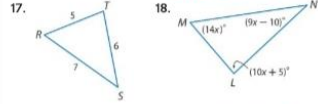
أو $y > 25$ صحيحاً. ولهذا، لا بد أن

قرص DVD واحداً على الأقل قد

تكلف أكثر من AED 25.

4-3 المتباينات في مثلث واحد

صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. **17-18. انظر الهامش.**



19. **الأحياء المجاورة** تعيش كل من ياسمين وسهيلة ووفاء عند تقاطعات ثلاثة طرق وهذا يشكل المثلث الموضح. إذا أرادت الفتيات قضاء فترة ما بعد الظهر معاً، هل الطريق الأقصر لياسمين هو الذهاب إلى سهيلة وأخذها إلى بيت وفاء، أم الطريق الأقصر لسهيلة هو الذهاب إلى وفاء ثم الذهاب إلى بيت ياسمين؟ **الطريق الأقصر هو ذهاب سهيلة إلى وفاء ثم ذهابهما إلى بيت ياسمين.**



4-4 البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

20. $m\angle A < m\angle B$ $m\angle A \geq m\angle B$

21. **انظر الهامش.** $\triangle FGH \cong \triangle MNO$

22. **انظر الهامش.** هو مثلث قائم الزاوية $\triangle KLM$

23. إذا كان $3y < 12$ فإن $y < 4$ $y \geq 4$

24. اكتب برهاناً غير مباشر يثبت أن الزاويتين المتتامتين لا تكون أي منهما زاوية قائمة. **24-25. انظر الهامش.**

25. **الأفلام** اشترى سالم أسطوانات DVD بتكلفة تجاوزت AED 50

استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أن تكلفة إحدى أسطوانات (DVD) التي اشترتها تجاوزت AED 25.

مثال 4

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. $\overline{XY} \not\cong \overline{JK}$

b. إذا كان $3x < 18$ فإن $x < 6$

c. $\angle 2$ هي زاوية حادة.

استنتاج العبارة الشرطية هو $x < 6$.

بني الاستنتاج هو $x \geq 6$.

إذا كان افترض أن $\angle 2$ زاوية حادة خاطئة، فلماذا أن يكون

افتراض أن $\angle 2$ زاوية غير حادة صحيحاً هذا يعني أن افتراض

$\angle 2$ زاوية منفرجة أو زاوية قائمة يجب أن يكون صحيحاً.

إجابات إضافية

28. افترض أن x هي طول الضلع الثالث. $2 \text{ ft} < x < 12 \text{ ft}$.
29. افترض أن x هي طول الضلع الثالث. $6.5 \text{ cm} < x < 14.5 \text{ cm}$.
30. المسافة أكبر من ميل وأقل من 5 أميال.

إجابة إضافية (تمرين على الاختبار)

5. المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

المطلوب إثباته: $x \geq 9$

البرهان:

الخطوة 1: افترض أن $x < 9$.

الخطوة 2: اصنع جدولاً لعدة احتمالات لقيمة x .

x	8	7	0	-2
$5x + 7$	47	42	7	-3

عندما تكون $x < 9$, $5x + 7 < 52$.

الخطوة 3: يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $5x + 7 \geq 52$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x < 9$ لا بد أن يكون خاطئاً والاستنتاج الأصلي أن $x \geq 9$ صحيحاً.

4-5 متباينة المثلث

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

26. 5, 6, 9 نعم 27. 3, 4, 8 لا 28. 5 ft, 7 ft 29. 10.5 cm, 4 cm

انظر الهامش. انظر الهامش. انظر الهامش.

30. الدراجات يتود يوسف دراجته لزيارة سعيد. ونظراً لإغلاق الطريق السريع، فلا بد أن يسير ميلين في الطريق الرئيسي والدوران لسير 3 أميال إضافية في الطريق رقم 5. إذا رسمنا مثلثاً يحتوي على رأسين إحدهما ليوسف والأخرى لبنت سعيد، احسب مدى المسافة المحتملة بين يوسف وبنت سعيد عند السير مباشرة في الطريق السريع. انظر الهامش.

المثال 5

هل يُمكن تكوين مثلث بالأطوال 7 و 10 و 9 أقدام؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

تحقق من كل متباينة.

$$7 + 10 > 9 \quad 7 + 9 > 10 \quad 10 + 9 > 7$$

$$17 > 9 \quad 16 > 10 \quad 19 > 7$$

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 7 و 10 و 9 أقدام ستكون مثلثاً.

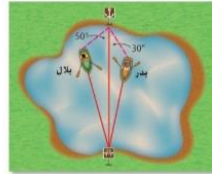
4-6 المتباينات في مثلثين

قارن بين القياسات المعطاة.

31. $m\angle ABC$, $m\angle DEF$ 32. QT و RS

$m\angle ABC > m\angle DEF$

33. الزوايا يقوم كل من بدر وبلال بالتجديف حول بركة ويتجهان إلى نفس النقطة. هذه أول تجربة لهما في التجديف، لذا خرجوا عن المسار كما هو موضح في الرسم التخطيطي. بعد دقيقتين، قاموا بالتجديف لمسافة 50 ياردة. من منهم الأقرب إلى وجهته؟ يدر



المثال 6

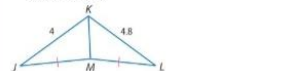
قارن بين القياسات المعطاة.

RQ و ST

In $\triangle QRS$ و $\triangle STO$, $RS \cong TO$, $QS \cong OS$, و $\angle SOT > \angle RSQ$.
بحسب نظرية الضلع، $m\angle SOT < m\angle RSQ$.
إذ $RO < ST$.

b. $m\angle JKM$ و $m\angle LKM$

In $\triangle JKM$ و $\triangle LKM$, $JM \cong LM$, $KM \cong KM$, و $LK > JK$.
بحسب نظرية الضلع، $\angle LKM > \angle JKM$.



إجابة إضافية (تمرين على الاختبار)

23. المعطيات: \overline{RO} تنصف $\angle SRT$.

المطلوب إثباته: $m\angle SQR > m\angle SRQ$



البرهان:

العبارة (المبررات)

1. \overline{RO} ينصف $\angle SRT$. (معطى)

2. $\angle SRQ \cong \angle QRT$. (تعريف النصف)

3. $m\angle QRS = m\angle QRT$. (تعريف \cong)

4. $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$. (نظرية الزاوية الخارجية)

5. $m\angle SQR > m\angle QRT$. (تعريف المتباينة)

6. $m\angle SQR > m\angle SRQ$. (التعويض)

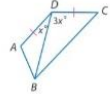
تدريب على الاختبار

4



14. الاختيار من متعدد إذا كان طول ضلعين في مثلث 5 أقدام و 11 قدماً، فما مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث؟
 H $6 < x < 10$
 F $6 < x < 10$
 G $5 < x < 11$
 J $x < 5$ أو $x > 11$

15. AB و BC $AB < BC$



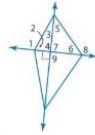
اذكر الافتراض اللازم لبداية البرهان غير المباشر لكل عبارة. 17. 4. ليس عاملاً لـ n .

17. إذا كان 8 هو عامل n ، إذا 4 هو عامل n .

18. $m\angle M \leq m\angle N$ $m\angle M > m\angle N$

19. إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، إذا $a \leq 7$ ، $a > 7$

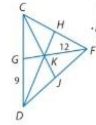
استخدم الشكل لتحديد أكبر الزوايا قياساً.



احسب طول الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الآخرين.

24. 10 ft, 16 ft $6 \text{ ft} < x < 26 \text{ ft}$
 25. 23 m, 39 m $16 \text{ m} < x < 62 \text{ m}$

1. الجداول تريد شجرة زراعة حوض للزهور داخل منطقة مثلثة محددة بثلاثة ممرات، ما نقطة الالتقاء المرتبطة بالمثلثات التي ستستخدمها لمركز الدائرة الأكبر الذي سيتناسب وضعه داخل المثلث؟ مركز الدائرة الداخلية (incenter)



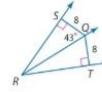
في $\triangle CDF$ ، K هو النقطة المركزية و $DK = 16$. أوجد طول كل مما يلي.

2. KH 8
 3. CD 18
 4. FG 18

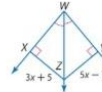
5. الإثبات اكتب إثباتاً غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$ انظر الهامش.
 المطلوب: $x \geq 9$

6. $m\angle TQR$ 43



7. XZ 23



8. الجغرافيا تبعد تونوا من راوند ماوتن نفس المسافة التي تبعد عنها من وورم سيرينغز. والمسافة التي تفصل تونوا عن مدينة هونور هي نفس المسافة التي تبعد عنها عن مدينة بيتي. حدد المسافة الأكبر، راوند ماوتن إلى هونور أم من وورم سيرينغز إلى بيتي. من وورم سيرينغز إلى بيتي



9. الاختيار من متعدد إذا كان قياس ضلعين في مثلث هو 3.1 أقدام و 4.6 أقدام، فما قياس أطول عدد كلي محتمل للضلع الثالث؟

- A 1.6 أقدام
 B 7.5 أقدام
 C 8 أقدام
 D 16 أقدام

4 التحضير للاختبارات المعيارية

1 التركيز

الهدف تعلم إستراتيجية استبعاد الإجابات غير المنطقية للمساعدة في حل أسئلة الاختيار من متعدد.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطرح السؤال التالي:
■ اشرح كيف يمكن أن يساعد استبعاد الإجابات غير المنطقية في حل أسئلة الاختيار من متعدد. **الإجابة النموذجية:** يساعد استبعاد الإجابات غير المنطقية في تضيق اختيارات الإجابة.

■ ما بعض الأسئلة الأخرى التي يمكنك أن تطرحها عن المعلومات التي يتطلبها السؤال؟ **الإجابة النموذجية:** يمكنك أثناء قراءة السؤال أن تحدد المطلوب منك حله، سواء كانت الإجابة الصحيحة عددًا كليًا أو كسرًا أو عددًا عشريًا، وما الوحدات التي ينبغي أن يحتوي عليها الحل (إذا كان ينبغي ذلك).

■ ما بعض الأمثلة في هذه الوحدة التي يمكنك فيها استبعاد الإجابات العددية الكبيرة أو الصغيرة بشدة؟ **الإجابة النموذجية:** عند حل مسألة، إذا كانت الإجابة التي تسعى لإيجادها هي قياس زاوية مثلث أكبر من أو تساوي 180° أو تجعل مجموع قياسات زاوية المثلث أكبر من 180°، ينبغي أن تستبعد ذلك الاختيار من الإجابة.

استبعاد الإجابات غير المنطقية

يمكنك استبعاد الإجابات غير المنطقية لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل بنود اختبار الاختيار من متعدد.

إستراتيجيات استبعاد الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية لتحديد ما المطلوب منك إيجاده بدقة.

- ما المطلوب حله؟
- هل الإجابة الصحيحة عدد صحيح، أم كسر أم رقم عشري؟
- هل يجب عليّ استخدام رسمًا بيانيًا أم جدولًا؟
- ما الوحدات (إن وجدت) التي تتطلبها الإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

امعن النظر في كل اختبار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته.

- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- حدد أي خيارات إجابة تكون غير صحيحة بشكل واضح واستبعدا.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون بتنسيق سليم.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تشمل وحدات صحيحة.

الخطوة 3

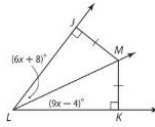
حل المسألة واختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المتبقية. تحقق من إجابتك.



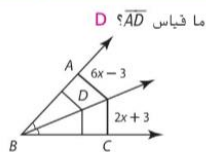
مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لتحلها.

ما قياس $\angle KLM$ ؟



- A 32
B 44
C 78
D 94



- A -8
B -2
C 2
D 7

3 التقويم

استخدم التمارين من 1 إلى 5 لتقويم استيعاب الطلاب.

حل المسألة. وفقاً لعكس نظرية منتصف الزاوية، إذا كانت هناك نقطة داخل زاوية معينة وتقع على مسافة واحدة من جانبي الزاوية، فإن النقطة تقع على منتصف الزاوية. النقطة M تقع على مسافة واحدة من الشعاعين LK ، لذا فهي تقع على منتصف JK . لذا، يجب أن تكون JLM مطابقة لـ KLM ، كونهما معادلة وحلها x .

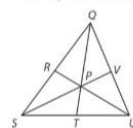
$$\begin{aligned} 6x + 8 &= 9x - 4 \\ -3x &= -12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

لذا فإن قياس $\angle KLM$ هو $[9(4) - 4]^\circ$ ، أو 32° . الإجابة الصحيحة هي A.

تھارین

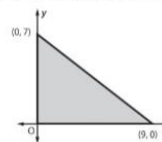
اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. النقطة P هي النقطة المركزية للمثلث QUS . إذا كان $QP = 14$ سنتيمترا، فما طول \overline{QT} ؟ **D**



- A 7 cm
B 12 cm
C 18 cm
D 21 cm

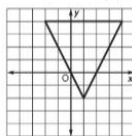
2. ما المساحة بالوحدات المربعة للمثلث الموضح أدناه؟ **H**



- | | |
|--------|--------|
| F 8 | H 31.5 |
| G 27.4 | J 63 |

McGraw-Hill Education Knowledge & Skills Standards

3. ما أحداثيات منتظم الارتفاعات للثلاث أدناه؟ **C**



- A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$ C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$
B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4. إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين و $m\angle A = 94$. فأب ما يلي ينبغي أن يكون صحيحاً؟ **J**

- F $m\angle B = 94$
G $m\angle B = 47$
H $AB = BC$
J $AB = AC$

5. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل أبعاد مثلث؟ **B**

- A 19, 32, 4
B 16, 3, 46
C 3, 72, 75
D 26, 45, 6

4 تدريب على الاختبار المعياري

تشخيص أخطاء الطلاب
قم بإجراء مسح لإجابات الطلاب على كل عنصر. قد تشير الاتجاهات السائدة في الصف إلى أخطاء شائعة ومناهيم خاطئة.

1. A خطأ حسابي
- B خطأ حسابي
- C خطأ حسابي
- D إجابة صحيحة

- f. 2. تخمين
- G تخمين
- H تخمين
- J إجابة صحيحة

3. A يتوصل إلى النتيجة
- B يتوصل إلى النتيجة
- C يتوصل إلى النتيجة
- D إجابة صحيحة

4. F إجابة صحيحة
- G تخمين
- H تخمين
- J تخمين

5. A قانون خطأ
- B إجابة صحيحة
- C ميل خاطئ
- D ميل خاطئ

6. F إجابة صحيحة
- G تخمين
- H تخمين
- J ترتيب معكوس

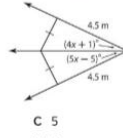
7. A نسي حالة الزاوية الحادة
- B إجابة صحيحة
- C نسي حالة الزاوية القائمة
- D تخمين

8. F مصنفة حسب الزوايا المعطاة فقط
- G تعريف خاطئ
- H إجابة صحيحة
- J تخمين من الشكل

اختبار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

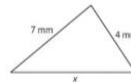
1. أوجد حل x .



- A 3
- B 4

- C 5
- D 6

2. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل قيمة x ؟



- F 8 mm
- G 9 mm

- H 10 mm
- J 11 mm

3. يزعم أيوب أنك إذا كنت تعيش في أبو ظبي، فإنك تعيش بمدينة العين. أي افتراض قد تحتاجه للوصول إلى برهان غير مباشر لهذا الزعم؟

- A لنفرض أن شخصاً ما يعيش في مدينة العين ولكن ليس في إمارة أبو ظبي.
- B لنفرض أن شخصاً ما يعيش في مدينة العين وإمارة أبو ظبي.
- C لنفرض أن شخصاً ما يعيش في إمارة أبو ظبي وفي مدينة العين.
- D لنفرض أن شخصاً ما يعيش في إمارة أبو ظبي، ولكن ليس في مدينة العين.

4. أي مما يلي يصف أقصر مسافة من إحدى رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل؟

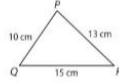
- F الارتفاع
- G قطر الدائرة
- H المتوسط
- J قطعة مستقيمة

5. بدأ رشيد جز الأشجار لتفرض أن x يمثل عدد الأسابيع بعد بدء رشيد جز الأشجار. و y يمثل عدد العمال. استخدم التخططين (3, 4) و (6, 9) لإيجاد معادلة مستقيم يمكن أن يتم استخدامها للتنبؤ بعدد العمال الموجودين لدى رشيد بحلول نهاية أسبوع معين.

- A $y = \frac{1}{3}x$
- C $y = \frac{2}{3}x + 2$
- B $y = \frac{1}{3}x + 3$
- D $y = \frac{2}{3}x$

6. ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟

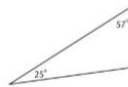
- F $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$
- G $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$
- H $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$
- J $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$



7. أي الافتراض قد تحتاجه من أجل بدء برهان غير مباشر للعبارة؟

- A الزاوية S ليست منفرجة.
- B $\angle S$ هي زاوية قائمة.
- C $\angle S$ هي زاوية منفرجة.
- D $\angle S$ هي زاوية حادة.

8. صنف المثلث أدناه وفقاً لقياسات زواياه.



- F حاد
- G متساوي الزوايا
- H منفرج
- J قائم الزاوية

نصيحة عند حل الاختبار

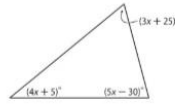
السؤال 2 يجب أن يكون مجموع أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث.

ورقة إجابات التمارين

اطلب من الطلاب محاكاة الاختبار المعياري بتسجيل إجاباتهم في ورقة تسجيل التمارين.

13. عمر وعلى يأخذان مجموعة من الخبسين للتمزق في الغابات. غادرت مجموعة عمر المعسكر وسارت ميلين باتجاه الشرق. ثم تحولت بـ 20° إلى الجنوب الشرقي وسارت 4 أميال أخرى. غادرت مجموعة على المعسكر وسارت ميلين باتجاه الغرب. ثم تحولت 30° إلى الشمال الغربي وسارت 4 أميال أخرى. كم عدد الدرجات إلى الجنوب الشرقي التي احتاج عمر أن يتحولها لكي تكون مجموعته ومجموعة على على نفس البسافة من المعسكر بعد جولتين من التمر؟ **30°**

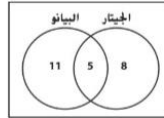
14. إجابة شكية أوجد قيمة x في المثلث أدناه. **15**



الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

15. ارجع إلى الشكل للإجابة على كل سؤال.



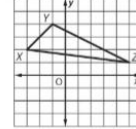
- a. كم عدد الطلاب الذين يعرفون على الجيتار؟ **13**
 b. كم عدد الطلاب الذين يعرفون على البيانو؟ **16**
 c. كم عدد الطلاب الذين يعرفون على كل من البيانو والجيتار؟ **5**

الإجابة المختصرة/الإجابة الشكية

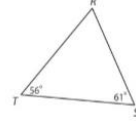
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. إجابة شكية إذا كان قياس ضلعين من مثلث 9 سنتيمترات و 15 سنتيمترا. فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث بالسنتيمترات إذا كان القياس عددا صحيحا؟ **7**

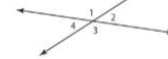
10. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟ **$(-\frac{2}{3}, \frac{6}{5})$**



11. صنف أضلاع المثلث أدناه بالترتيب من الأقصر إلى الأطول. **RS, RT, ST**

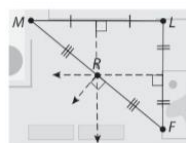


12. لتفرض أن مستقيمين يتقاطعان في مستوى إحداثي معين لتكوين أربع زوايا.



ما الذي تعرفه حول أزواج الزوايا المجاورة التي تكونت؟ اشرح. **يكونان زاويتان متكاملتين. يكون كل زوج من الزوايا المجاورة زوجا خطيا.**

15.



37. البرهان:

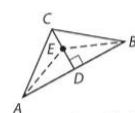
البيانات (المبررات)

1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)
2. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (نطاق القطع المستقيمة انعكاسي)
3. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS)
4. $\angle ACD \cong \angle BCD$ (CPCTC)
5. $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (نطاق القطع المستقيمة انعكاسي)
6. $\triangle CEA \cong \triangle CEB$ (SAS)
7. $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (CPCTC)
8. E نقطة منتصف \overline{AB} (تعريف نقطة المنتصف)
9. $\angle CEA \cong \angle CEB$ (CPCTC)
10. $\angle CEB$ و $\angle CEA$ تشكلان زوجاً خطياً. (تعريف الزوج الخطي)
11. $\angle CEB$ و $\angle CEA$ متكاملتان. (نظرية التكامل)
12. $m\angle CEA + m\angle CEB = 180$ (تعريف التكامل)
13. $m\angle CEA + m\angle CEA = 180$ (خاصية التعويض)
14. $2m\angle CEA = 180$ (خاصية التعويض)
15. $m\angle CEA = 90$ (خاصية القسمة)
16. $\angle CEB$ و $\angle CEA$ زاويتان قائمتان. (تعريف الزاوية القائمة)
17. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف \perp)
18. \overline{CD} منتصف \perp لـ \overline{AB} . (تعريف المنتصف \perp)
19. C و D تقعان على منتصف \perp لـ \overline{AB} . (تعريف نقطة على مستقيم)

38. البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ ، منتصفات الزوايا \overline{AD} و \overline{BE} و \overline{CF} ، $\overline{AB} \perp \overline{KQ}$ ، $\overline{BC} \perp \overline{KR}$ (معطى)
2. $KP = KQ$ ، $KQ = KR$ ، $KP = KR$ (أي نقطة على منتصف \angle تقع على مسافة متساوية من ضلعي الزاوية)
3. $KP = KQ = KR$ (خاصية الانتقال)



39. المعطيات: \overline{CD} هو منتصف \perp لـ \overline{AB} .

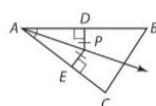
E نقطة على \overline{CD} .

المطلوب إثباته: $EA = EB$

البرهان: \overline{CD} منتصف \perp لـ \overline{AB} . حسب تعريف المنتصف، D نقطة منتصف \overline{AB} . ولهذا $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. حسب نظرية نقطة المنتصف، $\angle CDA$ و $\angle CDB$ زاويتان قائمتان حسب تعريف التعامد. بما أن كل الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle CDA \cong \angle CDB$. بما أن E نقطة على \overline{CD} ، فإن $\angle EDA$ و $\angle EDB$ زاويتان قائمتان ومتطابقتان. حسب خاصية الانعكاس، فإن $\overline{ED} \cong \overline{ED}$. ولهذا $\triangle EDA \cong \triangle EDB$ SAS. بموجب CPCTC، وحسب تعريف التطابق، فإن $EA = EB$.

40. المعطيات: $\angle BAC$

P تقع داخل $\angle BAC$;
 $PD = PE$



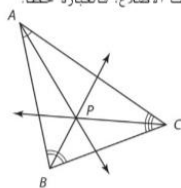
المطلوب إثباته: \overline{AP} هو منتصف $\angle BAC$.

البرهان: تقع النقطة P داخل $\angle BAC$

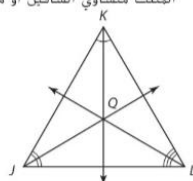
في $\triangle BAC$ و $PD = PE$. حسب تعريف التطابق،

مستقيم نقاس بطول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة على المستقيم $\angle ADP$ و $\angle AEP$ زاويتان قائمتان حسب تعريف المستقيبات العمودية و $\triangle ADP$ و $\triangle AEP$ مثلثان قائماً الزاوية حسب تعريف الزوايا القائمة. بموجب خاصية الانعكاس، $\overline{AP} \cong \overline{AP}$. لهذا $\triangle ADP \cong \triangle AEP$ حسب $\angle DAP \cong \angle EAP$ LH. بسبب CPCTC، و \overline{AP} هو منتصف الزاوية $\angle BAC$ حسب تعريف منتصف الزاوية.

50. أحياناً، إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، فهذا صحيح، لكن إذا كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع، فالعبارة خطأ.



$AP \neq BP \neq CP$.



$JQ = KQ = LQ$

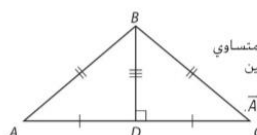
دائماً 51.

المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي

الساقين بالساقين

\overline{BD} و \overline{BC} و \overline{AB}

منتصف \perp لـ \overline{AC}



المطلوب إثباته: \overline{BD} منتصف

الزاوية $\angle ABC$.

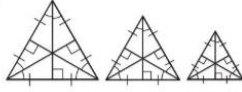
البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ متساوي الساقين بالساقين \overline{AB} و \overline{BC} . (معطى)
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (تعريف \triangle متساوي الساقين)
3. \overline{BD} منتصف \perp لـ \overline{AC} . (معطى)
4. D نقطة منتصف \overline{AC} . (تعريف منتصف القطعة المستقيمة)
5. $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ (تعريف نقطة المنتصف)
6. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
7. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)
8. $\angle ABD \cong \angle CBD$ (CPCTC)
9. \overline{BD} منتصف الزاوية $\angle ABC$. (تعريف منتصف \angle)

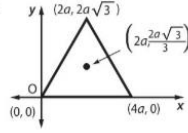
الدرس 4-2

33a.



33b. الإجابة النموذجية: نقاط التلاقي الأربع في مثلث متساوي الأضلاع جميعها نقطة واحدة.

33c.



36. البرهان: ميل $\overline{AR} = \frac{3c}{3b+3a} = \frac{c}{b+a}$ ميل $\overline{BS} = \frac{6c}{6b-3a} = \frac{2c}{2b-a}$ ميل $\overline{CQ} = \frac{3c}{3b-6a} = \frac{c}{b-2a}$ ميل \overline{AR} يحتويه المستقيم $y = \left(\frac{c}{b+a}\right)x$ ميل \overline{BS} يحتويه المستقيم $y = \frac{2c}{2b-a}(x-3a)$ ميل \overline{CQ} يحتويه المستقيم $y = \frac{c}{b-2a}(x-6a)$ لإيجاد إحداثيات P ، أوجد نقطة تقاطع الوسيطين \overline{BS} و \overline{CQ} .

$$\begin{aligned} y &= \frac{2c}{2b-a}(x-3a) \quad \text{و} \quad y = \frac{c}{b-2a}(x-6a) \\ \frac{2c}{2b-a}(x-3a) &= \frac{c}{b-2a}(x-6a) \\ 2c(x-3a)(b-2a) &= c(x-6a)(2b-a) \\ 2c(bx-2ax-3ab+6a^2) &= c(2bx-ax-12ab+6a^2) \\ 2bcx-4acx-6abc+12a^2c &= 2bcx-ax-12abc+6a^2c \\ -3acx &= -6abc-6a^2c \\ x &= 2b+2a \end{aligned}$$

أوجد قيمة y .

$$\begin{aligned} y &= \frac{2c}{2b-a}(x-3a) = \frac{2c}{2b-a}(2b+2a-3a) = \frac{2c(2b-a)}{2b-a} = 2c \\ \text{إذا إحداثيات } P \text{ هي } (2b+2a, 2c) \text{، وآلآن أوضح أن } P \text{ تقع على } \overline{AR} \\ y &= \left(\frac{c}{b+a}\right)(2b+2a) = \frac{2c(b+a)}{b+a} = 2c. \end{aligned}$$

وبهذا تتقاطع الوسيطات الثلاث عند النقطة نفسها.

أوجد أطوال \overline{CP} و \overline{CQ} و \overline{BP} و \overline{BS} و \overline{AP} و \overline{AR} باستخدام قانون المسافة.

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{((3b+3a)-0)^2 + (3c-0)^2} \\ &= \sqrt{(3(b+a))^2 + (3c)^2} \\ &= \sqrt{9(b+a)^2 + c^2} \\ &= 3\sqrt{(b+a)^2 + c^2} \end{aligned}$$

52. البرهان:

العبارة (البيرويات)

1. المستوى Y منتصف عمودي \overline{DC} . (معطى)
2. $\angle DBA \cong \angle CBA$ زاويتان قائمتان \hat{C} . $\overline{DB} \cong \overline{CB}$ (تعريف النصف \perp)
3. $\angle DBA \cong \angle CBA$ (الزوايا القائمة متطابقة).
4. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle DBA \cong \triangle CBA$ (SAS)
6. $\angle ADB \cong \angle ACB$ (CPCTC)

53. البرهان:

العبارة (البيرويات)

1. المستوى Z منتصف الزاوية $\angle KJH$. (معطى)
2. $\angle KJM \cong \angle HJM$ (تعريف منتصف الزاوية)
3. $\overline{JM} \cong \overline{JM}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle KJM \cong \triangle HJM$ (SAS)
5. $\overline{MH} \cong \overline{MK}$ (CPCTC)

68. البرهان:

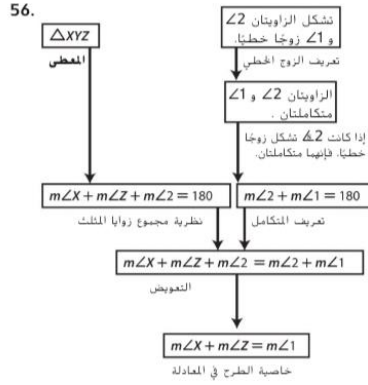
العبارة (البيرويات)

1. $\triangle XKF$ مثلث متساوي الأضلاع. (معطى)
2. $\angle 1 \cong \angle 2$ (\triangle متساوي الأضلاع يكون متساوي الزوايا).
3. $\overline{KX} \cong \overline{FX}$ (تعريف \triangle متساوي الأضلاع)
4. \overline{XJ} ينصف $\angle X$. (معطى)
5. $\angle KXJ \cong \angle FXJ$ (تعريف منتصف \angle)
6. $\triangle KXJ \cong \triangle FXJ$ (ASA)
7. $\overline{KJ} \cong \overline{FJ}$ (CPCTC)
8. J نقطة منتصف \overline{KF} . (تعريف نقطة المنتصف)

69. البرهان:

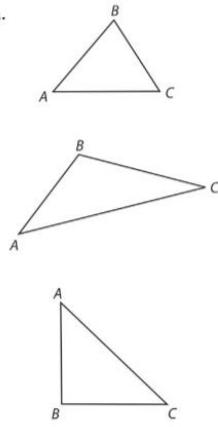
العبارة (البيرويات)

1. $\triangle MLP$ مثلث متساوي الساقين. (معطى)
2. $\overline{ML} \cong \overline{PL}$ (تعريف \triangle متساوي الساقين)
3. $\angle M \cong \angle P$ (نظرية \triangle متساوي الساقين)
4. N نقطة منتصف \overline{MP} . (معطى)
5. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$ (تعريف نقطة المنتصف)
6. $\triangle MNL \cong \triangle PNL$ (SAS)
7. $\angle LNM \cong \angle LNP$ (CPCTC)
8. $m\angle LNM = m\angle LNP$ (تعريف \cong)
9. $\angle LNP$ و $\angle LNM$ زوج خطي. (تعريف الزوج الخطي)
10. $m\angle LNM + m\angle LNP = 180$ (مجموع قياسات الزوج الخطي $= 180$)
11. $2m\angle LNM = 180$ (التعويض)
12. $m\angle LNM = 90$ (القسمة)
13. $\angle LNM$ زاوية قائمة. (تعريف \angle القائمة)
14. $\overline{LN} \perp \overline{MP}$ (تعريف \perp)



الدرس 3-4

42a.



الدرس 4-4 (تبرير موجّه)

2A. المعطيات: $7x > 56$

المطلوب إثباته: $x > 8$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x < 8$ أو $x = 8$.

الخطوة 2

x	4	5	6	7	8
7x	28	35	42	49	56

عندما تكون $x < 8$. فإن $7x < 56$ وعندما تكون $x = 8$. فإن $7x = 56$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $7x > 56$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \leq 8$ يجب أن يكون خاطئاً والاستنتاج الأصلي أن $x > 8$ يجب أن يكون صحيحاً.

$$AP = \sqrt{((2b+2a)-0)^2 + (2c-0)^2}$$

$$= \sqrt{(2(b+a))^2 + (2c)^2}$$

$$= \sqrt{4(b+a)^2 + 4c^2}$$

$$= 2\sqrt{(b+a)^2 + c^2}$$

$$BS = \sqrt{(6b-3a)^2 + (6c-0)^2}$$

$$= \sqrt{(3(2b-a))^2 + (3(2c))^2}$$

$$= \sqrt{9(2b-a)^2 + 9(2c)^2}$$

$$= 3\sqrt{(2b-a)^2 + 4c^2}$$

$$BP = \sqrt{(6b-(2b+2a))^2 + (6c-2c)^2}$$

$$= \sqrt{(4b-2a)^2 + (4c)^2}$$

$$= \sqrt{2(2b-a)^2 + 2(2c)^2}$$

$$= 2\sqrt{(2b-a)^2 + 4c^2}$$

$$CQ = \sqrt{(6a-3b)^2 + (0-3c)^2}$$

$$= \sqrt{(3(2a-b))^2 + (-3c)^2}$$

$$= \sqrt{9(2a-b)^2 + 9c^2}$$

$$= 3\sqrt{(2a-b)^2 + c^2}$$

$$CP = \sqrt{(6a-(2b+2a))^2 + (0-2c)^2}$$

$$= \sqrt{(4a-2b)^2 + (-2c)^2}$$

$$= \sqrt{2(2a-b)^2 + 4c^2}$$

$$= \sqrt{4(2a-b)^2 + 4c^2}$$

$$= 2\sqrt{(2a-b)^2 + c^2}$$

أوضح أن P تقع على ثلثي المسافة من الرأس إلى نقاط المنتصف.

$$\frac{2}{3}AR = \frac{2}{3}(3\sqrt{(b+a)^2 + c^2})$$

$$= 2\sqrt{(b+a)^2 + c^2} \text{ و } AP$$

$$\frac{2}{3}BS = \frac{2}{3}(3\sqrt{(2b-a)^2 + 4c^2})$$

$$= 2\sqrt{(2b-a)^2 + 4c^2} \text{ و } BP$$

$$\frac{2}{3}CQ = \frac{2}{3}(3\sqrt{(2a-b)^2 + c^2})$$

$$= 2\sqrt{(2a-b)^2 + c^2} \text{ و } CP$$

40. الإجابة النموذجية: المنتصف العمودي والوسيط يمران عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث، لكن الوسيط فقط يمر دائماً عبر الرأس المقابل للضلع. المنتصف العمودي والارتفاع كلاهما عموديان على الضلع، لكنهما لا يمران بالضرورة عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث، يمر كل من الوسيط والارتفاع عبر الرأس، لكنهما لا يمران بالضرورة عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث.

2B. الممطننات: $-c > 0$

الممطنن إنبانه: $c < 0$

البرهان غير المباشرن: الممطنونة 1 افترض أن $c > 0$ أو $c = 0$.

الممطنونة 2

c	0	1	2	3	4
$-c$	0	-1	-2	-3	-4

إذا كانت $c > 0$ ، فإن $c < 0$ ، إذا كانت $c = 0$ ، فإن $-c = 0$.
الممطنونة 3 في كلنا الممطننن، يؤنن الافتراض إلى تناقض مع الممطننات الممطنونة بأن $c > 0$. ولهنا، لا ىن أن يكون الافتراض بأن $c > 0$ خاطئاً ولا ىن أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $c < 0$ صحيحاً. بما أن $c < 0$ صحيح، فلا ىن أن يكون c عؤنأ سالباً.

3. افترض أن $x =$ المسافة الممطنونة في الممرلة الأولى من رملته، و $y =$ المسافة الممطنونة في الممرلة الثانية من رملته و $z =$ المسافة الممطنونة في الممرلة الثالثة من رملته.

الممطننات: $x + y + z > 360$

الممطنن إنبانه: $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$

البرهان غير المباشرن: **الممطنونة 1** افترض أنه لم تكن هناك أي ممرلة في رملته تزنن على 120 مملأ. أي أن $x \leq 120$ و $y \leq 120$ و $z \leq 120$.

الممطنونة 2 إذا كانت $x \leq 120$ و $y \leq 120$ و $z \leq 120$ ، فإن $x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$.

الممطنونة 3 هذا تناقض مع العبارة الممطنونة، ولهنا، الافتراض خطأ و $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$. أي أنه فمطع أكثر من 120 مملأ في ممرلة واحدة من رملته.

4. **الممطننات:** x^2 عؤن فرنن صحيح.

الممطنن إنبانه: x عؤن فرنن صحيح.

البرهان غير المباشرن: **الممطنونة 1** افترض أن x عؤن زوجن صحيح. نمنن هذا أن $x = 2k$ بالنسبة للعؤن الصحيح k .

الممطنونة 2 $x^2 = (2k)^2$ نعوض الافتراض

$4k^2 =$ ءول لأسوط صورة.

$(2 \cdot 2)k^2 =$ خاصفة الضرب

$2(2k^2) =$ خاصفة التجمنن في الضرب

بما أن k عؤن صحيح، $2k^2$ عؤن صحيح أيضاً. افترض أن m نمئل العؤن الصحيح $2k^2$. إذا x^2 نممكن أن نمئلها $2m$. ءنن m عؤن صحيح. نمنن هذا أن x^2 عؤن زوجن صحيح، لكن هذا ىتناقض مع العبارة الممطنونة أن x^2 عؤن فرنن صحيح.

الممطنونة 3 بما أن افتراض أن x عؤن زوجن يؤنن إلى تناقض مع العبارة الممطنونة، نمجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عؤن فرنن، استنتاجاً صحيحاً.

المرنن 4-4

5. **الممطننات:** $2x + 3 < 7$

الممطنن إنبانه: $x < 2$

البرهان غير المباشرن: **الممطنونة 1** افترض أن $x > 2$ أو $x = 2$ عبارة صحيعة.

الممطنونة 2

x	2	3	4	5	6
$2x + 3$	7	9	11	13	15

عؤنما تكون $x > 2$ فإن $2x + 3 > 7$ وعؤنما تكون $x = 2$ فإن $2x + 3 = 7$.

الممطنونة 3 في كلنا الممطننن، يؤنن الافتراض إلى تناقض مع الممطننات الممطنونة بأن $2x + 3 < 7$. ولهنا، فإن الافتراض بأن $x \geq 2$ نمجب أن يكون خاطئاً والاستنتاج الأصلي أن $x < 2$ نمجب أن يكون صحيحاً.

6. **الممطننات:** $3x - 4 > 8$

الممطنن إنبانه: $x > 4$

البرهان غير المباشرن: **الممطنونة 1** افترض أن $x < 4$ أو $x = 4$ عبارة صحيعة.

الممطنونة 2

x	0	1	2	3	4
$3x - 4$	-4	-1	2	5	8

عؤنما تكون $x < 4$ فإن $3x - 4 < 8$ وعؤنما تكون $x = 4$ فإن $3x - 4 = 8$.

الممطنونة 3 في كلنا الممطننن، يؤنن الافتراض إلى تناقض مع الممطننات الممطنونة بأن $3x - 4 > 8$. ولهنا، فإن الافتراض بأن $x \leq 4$ نمجب أن يكون خاطئاً والاستنتاج الأصلي أن $x > 4$ نمجب أن يكون صحيحاً.

7. استخدم $a =$ المتوسط أو عؤن النفاط المسجلة عؤن الممطننات التي نمث.

برهان غير مباشرن:

الممطنونة 1 افترض أن متوسط نفاط همام في الممارة كان أكبر من أو يساوي 3.3، $a \geq 3.3$.

الممطنونة 2

الممطنونة 1 الحالة

$a = 3$

$3 \leq \frac{13}{6}$

$3 \neq 2.2$

الممطنونة 3 الاستنتاجات خاطئة. إذا لا ىن أن يكون الافتراض خاطئاً. ولهنا، فمتوسط نفاط همام في الممارة كان أقل من 3.

8. **المعطيات:** $5x - 2$ عدد فردي صحيح.

المطلوب إثباته: x عدد فردي صحيح.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x ليست عددًا فرديًا صحيحًا. بمعنى أن نفترض أن x عدد زوجي صحيح.

الخطوة 2 افترض أن $x = 2k$ بالنسبة للعدد الصحيح k .

نعويض الافتراض $5x - 2 = 5(2k) - 2$

$$= 10k - 2$$

$$= 2(5k - 1)$$

خاصية التوزيع

بما أن k عدد صحيح، فإن $5k - 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن

p تمثل العدد الصحيح $5k - 1$. إذا $5x - 2$ يمكن أن تمثلها

$2p$. حيث p عدد صحيح، يعني هذا أن $5x - 2$ عدد زوجي

صحيح، لكن هذا يناقض المعطى بأن $5x - 2$ عدد فردي صحيح.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى

تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو

أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

9. **المعطى:** $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية؛

$\angle C$ مثلث قائم الزاوية.

المطلوب إثباته: $AB > AC$ و $AB > BC$



البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن وتر المثلث قائم

الزاوية ليس الضلع الأطول. أي أن $AB < AC$ و $AB < BC$.

الخطوة 2 إذا كانت $AB < BC$ ، فإن $m\angle A < m\angle C$. بما أن

$m\angle C = 90$ ، فإن $m\angle A < 90$. إذا $m\angle A > 90$ و $m\angle C > 90$

فيكون مجموع $m\angle A + m\angle C > 180$ ، وهذا يناقض حقيقة أن مجموع

الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180 . ولهذا يجب أن يكون الوتر هو

الضلع الأول في المثلث قائم الزاوية.

الخطوة 3 كلتا العلاقات تناقضان مع حقيقة أن مجموع

الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180 . ولهذا يجب أن يكون الوتر هو

الضلع الأول في المثلث قائم الزاوية.

الخطوة 4 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى

تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو

أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

الخطوة 5 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى

تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو

أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

الخطوة 6 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى

تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو

أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

الخطوة 7 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى

تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو

أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

x	-6	-5	-4	-3	-2
$2x - 7$	-19	-17	-15	-13	-11

عندما تكون $x < -2$ فإن $2x - 7 < -11$ وعندما تكون

$x = -2$ فإن $2x - 7 = -11$

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع

المعلومات المعطاة بأن $2x - 7 > -11$. ولهذا، فإن الافتراض

بأن $x \leq -2$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن

$x > -2$ يجب أن يكون صحيحًا.

18. **المعطيات:** $5x + 12 < -33$

المطلوب إثباته: $x < -9$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \geq -9$ عبارة

صحيحة.

الخطوة 2

x	-9	-8	-7	-6	-5
$5x + 12$	-33	-28	-23	-18	-13

عندما تكون $x > -9$ فإن $5x + 12 > -33$ وعندما تكون

$x = -9$ فإن $5x + 12 = -33$

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع

المعلومات المعطاة بأن $5x + 12 < -33$. ولهذا، فإن الافتراض

بأن $x \geq -9$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x < -9$

يجب أن يكون صحيحًا.

19. **المعطيات:** $3x + 4 < 7$

المطلوب إثباته: $x > -1$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \leq -1$ عبارة

صحيحة.

الخطوة 2

x	-5	-4	-3	-2	-1
$-3x + 4$	19	16	13	10	7

عندما تكون $x < -1$ فإن $-3x + 4 > 7$ وعندما تكون $x = -1$

فإن $-3x + 4 = 7$

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع

المعلومات المعطاة بأن $-3x + 4 < 7$. ولهذا، فإن الافتراض بأن

$x \leq -1$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x > -1$

يجب أن يكون صحيحًا.

20. **المعطيات:** $2x - 6 > 12$

المطلوب إثباته: $x < 9$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \geq 9$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2

x	-9	-8	-7	-6	-5
$-2x - 6$	12	10	8	6	4

عندما تكون $x > -9$ فإن $-2x - 6 < 12$ وعندما تكون

$x = -9$ فإن $-2x - 6 = 12$

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع

المعلومات المعطاة بأن $-2x - 6 > 12$. ولهذا، فإن الافتراض

بأن $x \geq -9$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن

$x < -9$ يجب أن يكون صحيحًا.

23. المعطيات: xy عدد فردي صحيح.

المطلوب إثباته: x و y عدداً فرديين صحيحين.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x و y ليسا عددين فرديين صحيحين. أي افترض أن x أو y عدد زوجي صحيح.

الخطوة 2 نحتاج فقط إلى توضيح أن الافتراض بأن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى تناقض بما أن فرضية أن y عدد زوجي صحيح يستتبع الاستنتاج نفسه. إذا افترض أن x عدد زوجي صحيح و y عدد فردي صحيح. يعني هذا أن $x = 2k$ بالنسبة للعدد الصحيح k و $y = 2m + 1$ بالنسبة للعدد الصحيح m .

$$\begin{aligned} xy &= (2k)(2m + 1) \\ &= 4km + 2k \\ &= 2(2km + k) \end{aligned}$$

بما أن k و m عدداً صحيحين، فإن $2km + k$ عدد صحيح أيضاً. افترض أن p تمثل العدد الصحيح $2km + k$. إذاً xy يمكن أن نكتبها $2p$ حيث p عدد صحيح. يعني هذا أن xy عدد زوجي صحيح. لكن هذا يناقض المعطى بأن xy عدد فردي صحيح.

الخطوة 3 بما أن الافتراض أن x عدد زوجي صحيح و y عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع المعطى، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي أن x و y كليهما عدداً فرديين صحيحين استنتاج صحيح.

24. المعطيات: n^2 عدد زوجي.

المطلوب إثباته: n^2 يقبل القسمة على 4.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن n^2 لا يقبل القسمة على 4. بمعنى آخر، 4 ليست من عوامل n^2 .

الخطوة 2 إذا كان مربع العدد زوجياً، فالعدد أيضاً زوجي. إذاً، إذا كان n^2 عدد زوجي، فلا بد أن n عدد زوجي. افترض أن $n = 2a$.

$$\begin{aligned} n &= 2a \\ n^2 &= (2a)^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

4 من عوامل n^2 ، وهو ما يناقض الافتراض.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن n^2 لا يقبل القسمة على 4 يؤدي إلى تناقض مع الافتراض، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن n^2 يقبل القسمة على 4 استنتاجاً حقيقياً.

25. المعطيات: x عدد فردي.

المطلوب إثباته: x لا يقبل القسمة على 4.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x تقبل القسمة على 4. بمعنى آخر، 4 من عوامل x .

الخطوة 2 افترض أن $x = 4n$ ، بالنسبة للعدد الصحيح n .

إذاً، 2 من عوامل x مما يعني أن x عدد زوجي. لكن هذا يناقض معلومات المعطيات.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن x تقبل القسمة على 4 يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن x لا تقبل القسمة على 4 استنتاجاً حقيقياً.

26. المعطيات: xy عدد زوجي صحيح.

المطلوب إثباته: x أو y عدد زوجي صحيح.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x و y عدداً فرديين صحيحين.

الخطوة 2 افترض أن $x = 2n + 1$ و $y = 2k + 1$ بالنسبة للعددين الصحيحين n و k .

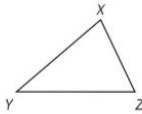
$$\begin{aligned} xy &= (2n + 1)(2k + 1) \\ &= 4nk + 2n + 2k + 1 \\ &= 2(2nk + n + k) + 1 \end{aligned}$$

بما أن k و n عدداً صحيحين، فإن $2nk + n + k$ عدد صحيح أيضاً. افترض أن p تمثل العدد الصحيح $2nk + n + k$. إذاً xy يمكن أن نكتبها $2p + 1$ حيث p عدد صحيح. يعني هذا أن xy عدد فردي صحيح لكن هذا يناقض المعطيات بأن xy عدد زوجي صحيح.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن x و y عدداً فرديين صحيحين يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن x أو y عدد زوجي صحيح استنتاج حقيقي.

27. المعطيات: $XZ > YZ$

المطلوب إثباته: $\angle X \neq \angle Y$



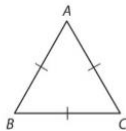
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\angle X \cong \angle Y$.

الخطوة 2 $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ بموجب معكوس نظرية \triangle متساوي الساقين.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $XZ > YZ$. ولهذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $\angle X \cong \angle Y$ خطأً. إذاً، الاستنتاج الأصلي بأن $\angle X \neq \angle Y$ يجب أن يكون صحيحاً.

28. المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع.

المطلوب إثباته: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا.



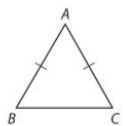
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ ليس متساوي الزوايا.

الخطوة 2 إذاً $m\angle C > m\angle B$. إذاً $AB > AC$ بموجب علاقات الزاوية-الضلع في نظرية المثلثات.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع. ولهذا، فإن الافتراض بأن $\triangle ABC$ ليس متساوي الزوايا لا بد أن يكون خطأً. إذاً، الاستنتاج الأصلي بأن $\triangle ABC$ متساوي الزوايا لا بد أن يكون صحيحاً.

29. المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين.

المطلوب إثباته: لا زاوية من زاويتي الأساس زاوية قائمة.

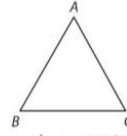


البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\angle B$ زاوية قائمة.

الخطوة 2 بموجب نظرية \triangle متساوي الساقين، فإن $\angle C$ زاوية قائمة أيضاً.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع حقيقة أن المثلث لا يمكن أن يكون له أكثر من زاوية قائمة. ولهذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $\angle B$ زاوية قائمة خطأً. إذاً، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن أيًا من زاويتي القاعدة ليست زاوية قائمة استنتاجاً صحيحاً.

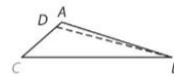
30. المعطيات: $\triangle ABC$
البرهان: $\triangle ABC$ لا يحتوي على أكثر من زاوية قائمة.



البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة 2 إذا كانت $\angle C$ و $\angle B$ زاويتين قائمتين، فإن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$. $m\angle B + m\angle C = 180$ لأن مجموع زوايا المثلث يبلغ 180. بالتعويض، $m\angle A + 180 = 180$ $m\angle A = 0$ إذاً.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات، $\triangle ABC$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة لا بد أن يكون خطأ. إذاً فالاستنتاج الأصلي بأن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة لا بد أن يكون حقيقياً.



31. المعطيات: $m\angle A > m\angle AC$
المطلوب إثباته: $BC > AC$

البرهان:
افترض أن $BC \leq AC$. بموجب خاصية المقارنة، $BC = AC$ أو $BC < AC$.

الحالة 1: إذا كانت $BC = AC$ ، فإن $\angle ABC \cong \angle A$ بموجب نظرية المثلث متساوي الساقين. (إذا كان ضلعان في المثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان). لكن الافتراض بأن $\angle A \cong \angle ABC$ يتناقض مع عبارة المعطيات بأن $m\angle A > m\angle ABC$. إذاً، $BC \neq AC$.

الحالة 2: إذا كانت $BC < AC$ ، فلا بد أن تكون هناك نقطة D بين A و C بحيث تكون $DC \cong BC$. ارسم القطعة المستقيمة المساعدة BD . بما أن $DC = BC$ ، بموجب نظرية المثلث متساوي الساقين $\angle BDC \cong \angle DBC$. الآن $\angle BDC$ زاوية خارجية في $\triangle BAD$ وبموجب نظرية متباينة الزوايا الخارجية (يزيد قياس الزاوية الخارجية لمثلث على قياس أي من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المتجاورتين) $m\angle BDC > m\angle A$. $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. بموجب مسلمة مجموع الزوايا، $m\angle ABC > m\angle DBC$. ثم حسب تعريف المتباينة، $m\angle ABC > m\angle A$. لكن هذا يتناقض مع عبارة المعطيات بأن $m\angle A > m\angle ABC$. في كلتا الحالتين، يوجد تناقض وبذلك لا بد أن افتراضنا كان خطأ. ولهذا، $BC > AC$.

32. المعطيات: $\frac{1}{b} < 0$

المطلوب إثباته: b سالب.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $b > 0$. $b \neq 0$ بما أن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير محددة.

الخطوة 2 $b > 0$

$\frac{1}{b} > 0$ العدد الموجب المقسوم على عدد موجب يكون موجباً.

الخطوة 3 الافتراض بأن $\frac{1}{b} > 0$ يتناقض مع المعطيات. إذاً، لا

بد أن يكون الافتراض خطأ. وبهذا، b يجب أن يكون عدداً سالباً.

35a. البرهان غير المباشر: الخطوة 1 نسبة 50% هي النصف. والعبارة تقول إن أكثر من نصف المراهقين المشاركين في الافتراع قالوا إنهم يعيدون التدوير. إذاً افترض أن 50% يعيدون التدوير.

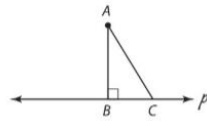
الخطوة 2 توضح البيانات أن 51% من المراهقين قالوا إنهم يعيدون التدوير و $50\% > 51\%$. إذاً فعدد المراهقين الذين يعيدون التدوير لا يقل عن النصف.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع بيانات المعطيات. ولهذا، الافتراض خطأ. ولا بد أن يكون الاستنتاج بأن أكثر من نصف المراهقين المشاركين في الافتراع قالوا إنهم يعيدون التدوير استنتاجاً صحيحاً.

$$35b. 400 \cdot 23\% \pm 92$$

$$400 \cdot 0.23 \pm 92$$

$$92 = 92$$



37. البرهان غير المباشر

المعطيات: $\overline{AB} \perp p$

المطلوب إثباته: \overline{AB} هي أقصر

قطعة مستقيمة من

A إلى p .

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن \overline{AB} ليست أقصر

قطعة مستقيمة من A إلى p .

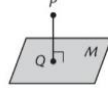
الخطوة 2 بما أن \overline{AB} ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى p ، فهناك النقطة C بحيث أن \overline{AC} هي أقصر مسافة. $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية بالوتر \overline{AC} وهو أطول ضلع في $\triangle ABC$ بما أنه مقابل لأكثر زاوية في $\triangle ABC$ بموجب علاقات الزاوية-الضلع في نظرية المثلثات.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع حقيقة أن \overline{AC} هو أقصر ضلع. ولهذا، الافتراض خطأ والاستنتاج بأن \overline{AB} هو أقصر ضلع لا بد أن يكون صحيحاً.

38. البرهان المباشر

المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ على المستوى M

المطلوب إثباته: \overline{PQ} هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى M .



البرهان:

بموجب التعريف، \overline{PQ} عمودي على المستوى M إذاً كان عموداً على كل مستقيم في M يتقاطع معه. لكن بما أن القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستقيم هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة إلى المستقيم، فإن تلك القطعة المستقيمة العمودية هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة إلى كل من هذه المستقيمتين. ولهذا، \overline{PQ} هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى M .

39b. الإجابة النموذجية:

n	$n^3 + 3$
2	11
3	30
10	1003
11	1334
24	13,827
25	15,628
100	1,000,003
101	1,030,304
526	145,531,579
527	146,363,186

39d. البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن عدد زوجي. افترض أن $n = 2k$ ، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2

$$\begin{aligned} n^3 + 3 &= (2k)^3 + 3 \\ &= 8k^3 + 3 \\ &= (8k^3 + 2) + 1 \\ &= 2(4k^3 + 1) + 1 \end{aligned}$$

افترض التعويض $n^3 + 3 = 2k^3 + 3$ بما أن k عدد صحيح، فإن $4k^3 + 1$ عدد صحيح أيضاً. ولهذا، $n^3 + 3$ عدد فردي.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $n^3 + 3$ عدد زوجي. ولهذا الافتراض خطأ. إذا الاستنتاج بأن n عدد فردي لا بد أن يكون صحيحاً.

40. الإجابة النموذجية: حدد أولاً العبارة التي تحتاج إلى إثباتها وافترض مؤقّتاً أن هذه العبارة خطأ بافتراض أن عكس العبارة صحيح. ثم فكر منطقياً إلى أن تصل إلى تناقض. وأخيراً، أوضح أن العبارة التي أردت أن تثبتها لا بد أن تكون صحيحة لأن التناقض يثبت أن الافتراض المؤقت الذي وضعته كان خطأ.

41. الإجابة النموذجية: $\triangle ABC$ مثلث مختلف الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ABC$ ، $AB \neq BC$.

$BC \neq AC$ ، $AB \neq AC$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

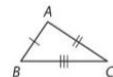
الحالة 1: $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

الخطوة 2 إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين، فإن $AB = BC$ أو $BC = AC$ أو $AB = AC$.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات، إذا $\triangle ABC$ ليس متساوي الساقين.

الحالة 2: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

لكي يكون المثلث متساوي الأضلاع، يجب أن يكون أيضاً متساوي الساقين. وقد أثبتت الحالة 1 أن $\triangle ABC$ ليس متساوي الساقين. ولهذا، $\triangle ABC$ ليس متساوي الأضلاع. ولهذا، $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.



42. المعطيات: X عدد نسبي غير الصفر و Y عدد غير نسبي.

المطلوب إثباته: XY عدد غير نسبي.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 بما أن المعطيات لدينا أن X

عدد نسبي غير الصفر، $X = \frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين

a و b ، $b \neq 0$. بالتعويض، $XY = \frac{a}{b} \cdot Y$ أو $\frac{aY}{b}$

افترض أن XY عدد نسبي. ثم $XY = \frac{c}{d}$ بالنسبة للعددين الصحيحين

c و d ، $d \neq 0$.

الخطوة 2 $XY = \frac{aY}{b}$ عدد نسبي.

تعويض الافتراض $\frac{aY}{b} = \frac{c}{d}$

اضرب كل طرف في db . هذا ممكن لأن $d \neq 0$ و $b \neq 0$.

$ayd = cb$

$\frac{cb}{ad} = y$

أوجد حل y بقسمة كل طرف على ad .

بما أن a و b و c و d أعداد صحيحة و $d \neq 0$ ، $\frac{cb}{ad}$ هو ناتج قسمة

عددين صحيحين. لهذا، y عدد نسبي. يتناقض هذا مع عبارة

المعطيات بأن Y عدد غير نسبي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن XY عدد نسبي يؤدي إلى تناقض

مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن

XY عدد غير نسبي، استنتاجاً صحيحاً.

44. إذا كانت X ليست عدداً فردياً صحيحاً، فإن $5x - 2$ ليست

عدداً فردياً صحيحاً. الإجابة النموذجية: إذا كانت X ليست

عدداً زوجياً صحيحاً، فهي عدد زوجي صحيح. إذا كانت X

عدداً زوجياً صحيحاً، فإن $5x$ عدد زوجي أيضاً لأن ناتج ضرب

أي عدد في عدد زوجي يكون زوجياً. $5x - 2$ زوجي أيضاً

لأن ناتج طرح 2 من عدد زوجي يكون زوجياً. ولهذا، تصح

عبارة أنه إذا كانت X ليست عدداً فردياً صحيحاً، فإن $5x - 2$

ليست عدداً فردياً صحيحاً. يقوم البرهان المباشر لمعكوس

العبارة والبرهان غير المباشر للعبارة على الافتراضات نفسها

ويصل إلى الاستنتاجات نفسها.

الدرس 4-5

18. البرهان:

العبارات (المبررات)

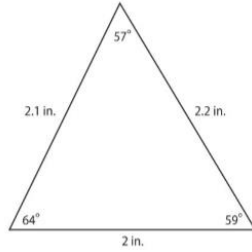
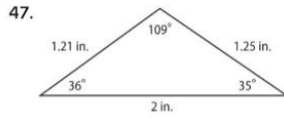
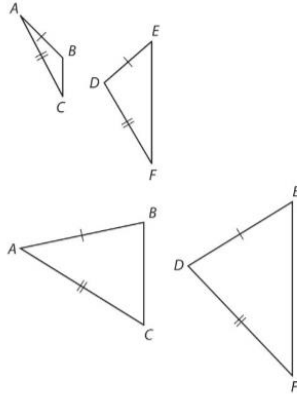
1. $\angle BCD \cong \angle CDB$ (معطى)

2. $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ (معكوس نظرية \triangle متساوي الساقين)

3. $BC = BD$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)

4. $AB + AD > BD$ (نظرية متباينة \triangle)

5. $AB + AD > BC$ (التعويض)



48a. الإجابة النموذجية: بموجب نظرية متباينة المثلث، المسافة من منزلي إلى مركز التسوق أكبر من $\frac{3}{4}$ ميل وأقل من $2\frac{1}{4}$ ميل.

48b. الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون المتنزه بين منزلي ومركز التسوق مما يعني أن المسافة من منزلي إلى مركز التسوق تبلغ $2\frac{1}{4}$ ميل أو يمكن أن يكون منزلي بين الحديقة ومركز التسوق. مما يعني أن المسافة من منزلي إلى مركز التسوق تبلغ $\frac{3}{4}$ ميل.

19. البرهان: البيانات (المبررات)

1. $\overline{JL} \cong \overline{LM}$ (مطلبي)
2. $JL = LM$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
3. $KJ + KL > JL$ (نظرية متباينة \triangle)
4. $KJ + KL > LM$ (التعويض)

22a. طريق المقاطعة المستقيم: الإجابة النموذجية: في المثلث، يزيد مجموع ضلعين دائماً على الضلع الثالث. إذاً مجموع مسافة الطريق السريع 4 والمسافة على الطريق 6 أكبر من المسافة على طريق المقاطعة المستقيم.

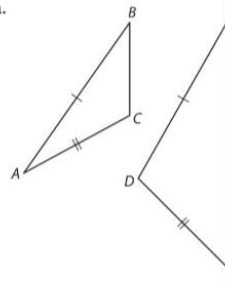
22b. الطريق السريع 4 إلى الطريق 6، الإجابة النموذجية: بما أن حارب يستطيع القيادة بسرعة 30 ميلاً في الساعة على طريق المقاطعة المستقيم والمسافة 30 ميلاً، فسيتغرق الطريق منه ساعة. عليه أن يتوقد لمسافة 47 ميلاً على الطريق السريع 4 والطريق 6 وحد السرعة هو 55 ميلاً في الساعة، إذاً سيتغرق منه الأمر 0.85 ساعة أو حوالي 51 دقيقة. سيتغرق السير على الطريق السريع 4 والطريق 6 وقتاً أقل من السير على طريق المقاطعة المستقيم.

23. البرهان: البيانات (المبررات)

1. أنشئ \overline{CD} بحيث تكون C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$ (مسلمة المسطرة)
2. $CD = AC$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
3. $\angle CAD \cong \angle ADC$ (نظرية \triangle متساوي الساقين)
4. $m\angle CAD = m\angle ADC$ (تعريف $\angle \cong$)
5. $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$ (مسلمة الجمع)
6. $m\angle BAC + m\angle ADC = m\angle BAD$ (التعويض)
7. $m\angle ADC < m\angle BAD$ (تعريف المتباينة)
8. $AB < BD$ (النظرية 7.10)
9. $BD = BC + CD$ (مسلمة جمع القطعة المستقيمة)
10. $AB < BC + CD$ (التعويض (الخطوات 8, 9))
11. $AB < BC + AC$ (التعويض (الخطوات 2, 10))

31. نعم؛ الإجابة النموذجية: لا تشكل القياسات على الرسم مثلثاً. وفقاً لنظرية متباينة المثلث، يزيد مجموع طولي أي ضلعين في مثلث على طول الضلع الثالث. تبلغ الأطوال في الرسم 1 ft و $3\frac{7}{8}\text{ ft}$ و $6\frac{3}{4}\text{ ft}$. بما أن $6\frac{3}{4} \not> 1 + 3\frac{7}{8}$ ، فلا يمكن أن يوجد المثلث. ينبغي عليهم إعادة قياساتهم قبل أن يقطعوا الخشب.

42a.



25. البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $\overline{XU} \cong \overline{VW}, \overline{XU} \parallel \overline{VW}$ (المعطى)
2. $\angle UXV \cong \angle XVW, \angle XUW \cong \angle UVW$ (نظرية \angle الداخلية المتبادلة)
3. $\triangle XZU \cong \triangle VZW$ (ASA)
4. $\overline{XZ} \cong \overline{VZ}$ (CPCTC)
5. $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ (خاصية الانعكاس)
6. $\overline{VW} > \overline{XW}$ (معطى)
7. $m\angle VZW > m\angle XZW$ (معكوس نظرية المفصلة)
8. $\angle VZW \cong \angle XZU, \angle XZW \cong \angle VZU$ (\angle الرأسية تكون \cong)
9. $m\angle VZW = m\angle XZU, m\angle XZW = m\angle VZU$ (تعريف \angle \cong)
10. $m\angle XZU > m\angle UZV$ (التعويض)

26. البرهان:

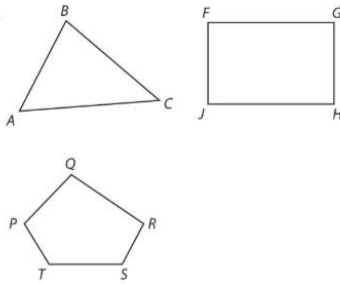
البيانات (المبررات)

1. $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}, \overline{AB} > \overline{DC}$ (معطى)
2. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\overline{BC} = \overline{BC}$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
4. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB}$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
5. $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{DC} + \overline{CB}$ (خاصية الجمع)
6. $\overline{AC} > \overline{DB}$ (التعويض)
7. $m\angle AFC > m\angle DJB$ (معكوس نظرية المفصلة)

27a. الموضع 2: الإجابة النموذجية: إذا قسمت المسافة من كنفها إلى قبضتها في كل موضع، فإنها تبلغ 1.6 cm في الموضع 1 و 2 cm في الموضع 2. ولهذا، تزيد المسافة من كنفها إلى قبضتها في الموضع 2.

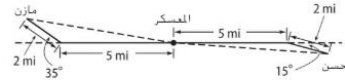
27b. الموضع 2: الإجابة النموذجية: باستخدام القياسات في الجزء a ومعكوس نظرية المفصلة، فأنت تعلم أن قياس الزاوية المتبادلة للضلع الأكبر يكون أكبر. إذا فالزاوية التي يشكلها كوع خلف أكبر في الموضع 2.

37a.

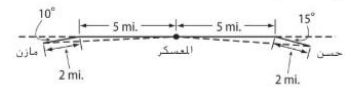


الدرس 4-6

16a. مازن: الإجابة النموذجية: استدار حسن 15° جنوباً. إذا فقياس الزاوية المتبادلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ $15 - 180$ أو 165 . استدار مازن 35° شمالاً. إذا فقياس الزاوية المتبادلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ $35 - 180$ أو 145 . بموجب نظرية المفصلة، بما أن $165 < 145$ ، فمازن أقرب إلى المعسكر.



16b. مازن: الإجابة النموذجية: استدار حسن 15° جنوباً. إذا فقياس الزاوية المتبادلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ $15 - 180$ أو 165 . استدار مازن 35° جنوباً. إذا فقياس الزاوية المتبادلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ $10 - 180$ أو 145 . بموجب نظرية المفصلة، بما أن $170 > 165$ ، فمازن أبعد عن المعسكر.



23. البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $\overline{LK} \cong \overline{JK}, \overline{RL} \cong \overline{RJ}$. \overline{OS} هي نقطة منتصف \overline{SKL} (معطى)
2. $\overline{SK} = \overline{JK}$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{SL} > \overline{QJ}$ (نظرية المفصلة)
4. $\overline{RL} = \overline{RJ}$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
5. $\overline{SL} + \overline{RL} > \overline{RJ} + \overline{RJ}$ (خاصية الجمع)
6. $\overline{SL} + \overline{RL} > \overline{QJ} + \overline{RJ}$ (التعويض)
7. $\overline{RS} = \overline{SL} + \overline{RL}, \overline{QR} = \overline{QJ} + \overline{RJ}$ (مسلمة جمع القطعة المستقيمة)
8. $\overline{RS} > \overline{QR}$ (التعويض)

24. البرهان:

البيانات (المبررات)

1. $\overline{VR} \cong \overline{RT}$: \overline{SQ} هي نقطة منتصف \overline{SR} (معطى)
2. $\overline{SR} = \overline{QR}$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
4. $m\angle SRV > m\angle QRT$ (معطى)
5. $\overline{VS} > \overline{TQ}$ (متباينة SAS)
6. $\overline{WV} \cong \overline{WT}$ (معطى)
7. $\overline{WV} = \overline{WT}$ (تعريف القطع المستقيمة \cong)
8. $\overline{WV} + \overline{VS} > \overline{WT} + \overline{TQ}$ (خاصية الجمع)
9. $\overline{WV} + \overline{VS} > \overline{WT} + \overline{TQ}$ (التعويض)
10. $\overline{WV} + \overline{VS} = \overline{WS}, \overline{WT} + \overline{TQ} = \overline{WQ}$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
11. $\overline{WS} > \overline{WQ}$ (التعويض)

Glossary / القاموس

English

العربية

A

absolute value function A function written as $f(x) = |x|$, in which $f(x) \geq 0$ for all values of x .

دالة القيمة المطلقة دالة تكتب بالصيغة $f(x) = |x|$ وفيها $f(x) \geq 0$ بالنسبة لجميع قيم x .

adjacent arcs Arcs in a circle that have exactly one point in common.

أقواس متجاورة هي أقواس داخل دائرة تشترك جميعها في نقطة واحدة بالضبط.

algebraic proof A proof that is made up of a series of algebraic statements. The properties of equality provide justification for many statements in algebraic proofs.

برهان جبري هو برهان مكوّن من مجموعة عبارات جبرية. توفر خواص المساواة تفسيراً للعديد من العبارات في البراهين الجبرية.

altitude 1. In a triangle, a segment from a vertex of the triangle to the line containing the opposite side and perpendicular to that side. 2. In a prism or cylinder, a segment perpendicular to the bases with an endpoint in each plane. 3. In a pyramid or cone, the segment that has the vertex as one endpoint and is perpendicular to the base.

ارتفاع 1. في المثلث، قطعة مستقيمة ممتدة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل، وعمودية على ذلك الضلع. 2. في المنشور أو الأسطوانة، قطعة مستقيمة عمودية على التاعدتين ولها نقطة نهاية في كل مستوى. 3. في الشكل الهرمي أو المخروط، قطعة مستقيمة لها رأس هو إحدى نقطتي نهايتها، وهي عمودية على القاعدة.

ambiguous case of the Law of Sines Given the measures of two sides and a nonincluded angle, there exist two possible triangles.

حالة مبهمّة لقانون الجيب بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما، هناك احتمال بوجود مثلثين.

angle of depression The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks downward.

زاوية الانخفاض هي الزاوية بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أسفل.

angle of elevation The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks upward.

زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أعلى.

arc A part of a circle that is defined by two endpoints.

قوس هو جزء من الدائرة يتم تحديده بنقطتي نهاية.

absolute value function A function written as $f(x) = |x|$, in which $f(x) \geq 0$ for all values of x .

adjacent arcs Arcs in a circle that have exactly one point in common.

algebraic proof A proof that is made up of a series of algebraic statements. The properties of equality provide justification for many statements in algebraic proofs.

altitude 1. In a triangle, a segment from a vertex of the triangle to the line containing the opposite side and perpendicular to that side. 2. In a prism or cylinder, a segment perpendicular to the bases with an endpoint in each plane. 3. In a pyramid or cone, the segment that has the vertex as one endpoint and is perpendicular to the base.

ambiguous case of the Law of Sines Given the measures of two sides and a nonincluded angle, there exist two possible triangles.

angle of depression The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks downward.

angle of elevation The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks upward.

arc A part of a circle that is defined by two endpoints.

asymptote A line that a graph approaches.

auxiliary line An extra line or segment drawn in a figure to help complete a proof.

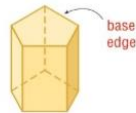
axiom A statement that is accepted as true.

axis In a cylinder, the segment with endpoints that are the centers of the bases.

axis of symmetry The vertical line containing the vertex of a parabola.

base angle of an isosceles triangle See *isosceles triangle* and *isosceles trapezoid*.

base edges The intersection of the lateral faces and bases in a solid figure.



binomial The sum of two monomials.

دالة القيمة المطلقة دالة تُكتب بالصيغة $f(x) = |x|$ ، وفيها $f(x) \geq 0$ بالنسبة لجميع قيم x .

أقواس متجاورة هي أقواس داخل دائرة تشترك جميعها في نقطة واحدة بالضبط.

برهان جبري هو برهان مكوّن من مجموعة عبارات جبرية. توفر خواص المساواة تفسيراً للعديد من العبارات في البراهين الجبرية.

ارتفاع 1. في المثلث، قطعة مستقيمة ممتدة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل، وعمودية على ذلك الضلع. 2. في المنشور أو الأسطوانة، قطعة مستقيمة عمودية على القاعدتين ولها نقطة نهاية في كل مستوى. 3. في الشكل الهرمي أو المخروط، قطعة مستقيمة لها رأس هو إحدى نقطتي نهايتها، وهي عمودية على القاعدة.

حالة مبهمّة لقانون Sines بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما، هناك احتمال بوجود مثلثين.

زاوية الانخفاض هي الزاوية بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أسفل.

زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أعلى.

قوس هو جزء من الدائرة يتم تحديده بنقطتي نهاية.

خط تقارب هو خط يقترب منه الرسم البياني.

خط مساعد هو قطعة مستقيمة أو خط إضافي يتم رسمه في الشكل للمساعدة على استكمال البرهان.

مسألة "القاعدة البديهية" هي عبارة يُفترض صحتها دون برهان.

محور في الأسطوانة، هو القطعة المستقيمة التي تكون نقطتي نهايتها مركزي القاعدة.

محور التماثل هو الخط الرأسي الذي يحوي رأس القطع المكافئ.

زاوية القاعدة في مثلث متساوي الساقين انظر مثلث متساوي الساقين وشبه منحرف متساوي الساقين.

حواف القاعدة هي تقاطع القواعد والأوجه الجانبية في مجسم ما.



ثنائي الحد حاصل جمع اثنين من أحادي الحد.

C

center of circle The central point where radii form a locus of points called a circle.

center of dilation The center point from which dilations are performed.

central angle An angle that intersects a circle in two points and has its vertex at the center of the circle.

centroid The point of concurrency of the medians of a triangle.

chord 1. For a given circle, a segment with endpoints that are on the circle. 2. For a given sphere, a segment with endpoints that are on the sphere.

chord segments Segments that form when two chords intersect inside a circle.

circle The locus of all points in a plane equidistant from a given point called the **center** of the circle.



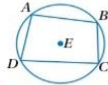
P is the center of the circle.

circular permutation A permutation of objects that are arranged in a circle or loop.

circumcenter The point of concurrency of the perpendicular bisectors of a triangle.

circumference The distance around a circle.

circumscribed A circle is circumscribed about a polygon if the circle contains all the vertices of the polygon.



$\odot E$ is circumscribed about quadrilateral $ABCD$.

closed A set is closed under an operation if for any numbers in the set, the result of the operation is also in the set.

combination An arrangement or listing in which order is not important.

common tangent A line or segment that is tangent to two circles in the same plane.

complement The complement of an event A consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event A .

مركز الدائرة النقطة المركزية حيث تشكل أنصاف الأقطار محلاً هندسياً للنقاط يطلق عليه دائرة.

مركز تغيير الأبعاد هو نقطة المركز التي يتم إجراء التوسعات منها.

زاوية مركزية هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ويكون رأسها في مركز الدائرة.

نقطة المركز هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث.

وتر 1. بالنسبة إلى دائرة معينة، يكون الوتر هو القطعة التي توجد نقطتا نهايتها على الدائرة. 2. بالنسبة إلى كرة معينة، يكون الوتر هو القطعة التي توجد نقطتا نهايتها على الكرة.

قطاعات وترية هي القطاعات التي تتكون عندما يتقاطع وتران داخل الدائرة.

دائرة المحل الهندسي لجميع النقاط في مستوى متساوي الأبعاد يُطلق عليه **مركز** الدائرة.



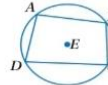
P هو مركز الدائرة

تبديل دائري تبديل الكائنات المرتبة في دائرة أو حلقة.

مركز الدائرة المحيطة هو نقطة التقاء المنصفات العمودية للمثلث.

محيط الدائرة هو المسافة التي تحيط بالدائرة.

مُحاط بدائرة تكون الدائرة محيطة بمضلع إذا كانت الدائرة تحتوي على كل رؤوس المضلع.



$\odot E$ هو جزء محاط بالدائرة التي تحتوي على $ABCD$.

مغلقة تكون أي مجموعة مغلقة في عملية ما إذا كانت نتيجة العملية، بالنسبة لأي أرقام في المجموعة، عنصراً ينتمي لنفس المجموعة.

توافقية هي تنسيق أو قائمة ليس للترتيب أهمية فيها.

مماس مشترك هو قطعة مستقيمة أو خط مستقيم يلامس دائرتين في نفس المستوى.

متبكم يتكون متبكم الحدث A من جميع النواتج في فراغ العينة، والتي لا تندرج على أنها من نواتج الحدث A .

completing the square To add a constant term to a binomial of the form $x^2 + bx$ so that the resulting trinomial is a perfect square.

complex conjugates Two complex numbers of the form $a + bi$ and $a - bi$.

complex number Any number that can be written in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.

component form A vector expressed as an ordered pair, (change in x , change in y).

composite solid A three-dimensional figure that is composed of simpler figures.

compound event An event that consists of two or more simple events.

compound interest Interest paid on the principal of an investment and any previously earned interest.

concentric circles Coplanar circles with the same center.

concurrent lines Three or more lines that intersect at a common point.

conditional probability The probability of an event under the condition that some preceding event has occurred.

congruent Having the same measure.

congruent arcs Arcs in the same circle or in congruent circles that have the same measure.

congruent polygons Polygons in which all matching parts are congruent.

congruent solids Two solids with the same shape, size and scale factor of 1:1.

conic section Any figure that can be obtained by slicing a cone.

conjugates Binomials of the form $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ and $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$.

coordinate proofs Proofs that use figures in the coordinate plane and algebra to prove geometric concepts.

corner view The view from a corner of a three-dimensional figure, also called the *isometric view*.

corollary A statement that can be easily proved using a theorem is called a corollary of that theorem.

corresponding parts Matching parts of congruent polygons.

cosecant The reciprocal of the sine of an angle in a right triangle.

إكمال المربع هو إضافة حد ثابت إلى ثنائي الحد بالصيغة $x^2 + bx$ بحيث يكون ثلاثي الحدود الناتج مربعاً كاملاً.

مترافقان مركبان هما رقمان مركبان بالصيغة $a + bi$ و $a - bi$.

عدد مركب أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$ حيث a و b عدداً حقيقيين و i وحدة تخيلية.

صيغة مركبة هي متجه يعبر عنه بزوج مرتب، (كلما تغير x ، تغير y).

مجسم مركب هو شكل ثلاثي الأبعاد يتكون من أشكال أبسط.

حدث مركب هو حدث مكون من حدثين بسيطين أو أكثر.

فائدة مركبة فائدة تُدفع على رأس المال الاستثماري وأي فائدة مكتسبة في السابق.

دوائر متحدة المركز هي دوائر متحدة المستوى لها نفس المركز.

خطوط مستقيمة متقاطعة هي ثلاثة خطوط مستقيمة أو أكثر تتقاطع في نقطة مشتركة.

احتمال مشروط هو احتمال وقوع حدث بشروط وقوع حدث سابق.

متطابق ما لديه نفس القياس.

أقواس متطابقة هي أقواس توجد في الدائرة نفسها أو دوائر متطابقة ولها نفس القياس.

مضلعات متطابقة المضلعات التي تتطابق فيها كل الأجزاء المماثلة.

مجسمات متطابقة مجسمان لهما الشكل والحجم أنفسهما ومعامل المقياس لهما 1:1.

قطع مخروطي هو أي شكل يمكن الحصول عليه عن طريق قطع أي مخروط.

مترافقات ثنائيو الحد في الصيغة $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$.

براهين إحداثية هي براهين تستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسية.

عرض الزاوية العرض من إحدى زوايا شكل ثلاثي الأبعاد، ويسمى أيضاً **العرض متساوي القياس**.

نتيجة هي عبارة يمكن إثباتها بسهولة باستخدام نظرية، وتسمى "اللزعة تلك النظرية".

أجزاء متناظرة هي الأجزاء المماثلة من المضلعات المتطابقة.

الـ CSC هي معكوس Sine أي زاوية في مثلث قائم الزاوية.

cosine For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg adjacent to the acute angle to the measure of the hypotenuse.

cotangent The ratio of the adjacent to the opposite side of a right triangle.

cross products In the proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, where $b \neq 0$ and $d \neq 0$, the cross products are ad and bc . The proportion is true if and only if the cross products are equal.

cross section The intersection of a solid and a plane.

الـ Cosine بالنسبة لأي زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، هو نسبة قياس الساق المجاور للزاوية الحادة إلى قياس الوتر.

الـ Tan هو نسبة الضلع المجاور إلى الضلع المقابل في المثلث القائم.

ضرب تقاطعي (وفي المتجهات الضرب الاتجاهي) في التناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$. يكون الضرب التقاطعي ad و bc ، يكون التناسب صحيحاً فقط في حالة تساوي الضرب التقاطعي.

مقطع عرضي هو تقاطع مجسم مع مستوى.

D

decay factor In exponential decay, the base of the exponential expression, $1 - r$.

deductive argument A proof formed by a group of algebraic steps used to solve a problem.

degree of a monomial The sum of the exponents of all its variables.

degree of a polynomial The greatest degree of any term in the polynomial.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

diagonal In a polygon, a segment that connects nonconsecutive vertices of the polygon.



diameter 1. In a circle, a chord that passes through the center of the circle. 2. In a sphere, a segment that contains the center of the sphere, and has endpoints that are on the sphere.

difference of two squares Two perfect squares separated by a subtraction sign.
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ or
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

عامل تنازّل في التفاضل الأسّي هو قاعدة التعبير الأسّي $1 - r$.

برهان استدلالّي هو البرهان المكوّن من مجموعة من الخطوات الجبرية المستخدمة لحل مسألة.

درجة أحادي الحد هي حاصل جمع أسس جميع متغيراته.

درجة كثير الحدود هي أكبر درجة لأي حد في كثير الحدود.

أحداث مستقلة هي حدثان أو أكثر تؤثر نتيجة إحداها على نتيجة الأحداث الأخرى.

قطر في المضلع، قطعة مستقيمة تربط الرؤوس غير المتتالية في المضلع.



قطر 1. في الدائرة، هو الوتر الذي يمر عبر مركز الدائرة. 2. في الكرة، هو القطعة المستقيمة التي تتضمن مركز الكرة وتكون نقطتا نهايتها على الكرة.

الفرق بين مربعين مربعان كاملاً تفصلهما عن بعضهما إشارة طرح:
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

dilation 1. A transformation that alters the size of a figure but not its shape. 2. (pp. 593, 694) A transformation that enlarges or reduces the original figure proportionally. A dilation with center C and positive scale factor k , $k \neq 1$, is a function that maps a point P in a figure to its image such that

- if point P and C coincide, then the image and preimage are the same point, or
- if point P is not the center of dilation, then P' lies on CP and $CP' = k(CP)$.

If $k < 0$, P' is the point on the ray opposite CP such that $CP' = |k|(CP)$.

direction The measure of the angle that a vector forms with the positive x -axis or any other horizontal line.

directrix The fixed line in a parabola that is equidistant from the locus of all points in a plane.

discriminant In the Quadratic Formula, the expression $b^2 - 4ac$.

double root The roots of a quadratic function that are the same number.

تغيير الأبعاد بمقياس 1. تحويل بغير من حجم الشكل دون تغيير شكله. 2. تحويل يكبر الشكل الأصلي أو يصغره بشكل متناسب. تغيير الأبعاد بمقياس عند المركز C ومعامل المقياس الإيجابي k ، و $k \neq 1$ ، هو الدالة التي ترسم النقطة P في شكل مقابل صورتها بحيث

- إذا تطابقت النقطتان P و C ، تكون كل من الصورة والصورة الأصلية نفس النقطة

- أو إذا لم تكن النقطة P هي مركز تغيير الأبعاد، تقع P' حينها على CP و $CP' = k(CP)$

إذا كانت $k < 0$ ، P' هي النقطة التي توجد على الشعاع المقابل CP بحيث $CP' = |k|(CP)$

اتجاه هو قياس الزاوية التي يشكلها أي متجه مع المحور الأفقي x الموجب أو أي خط أفقي آخر.

دليل الخط المستقيم الثابت في القطع المكافئ الذي يقع على أبعاد متساوية من المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى.

مميز في الصيغة التربيعية، التعبير $b^2 - 4ac$.

جذر مكرر هو جذور الدالة التربيعية التي تتكون من الأرقام نفسها.

E

edge A line that connects two nodes in a network.

efficient route The path in a network with the least weight.

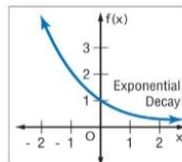
enlargement An image that is larger than the original figure.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

euclidean geometry A geometrical system in which a plane is a flat surface made up of points that extend infinitely in all directions.

expected value Also **mathematical expectation**, is the average value of a random variable that one expects after repeating an experiment or simulation an infinite number of times.

exponential decay Exponential decay occurs when a quantity decreases exponentially over time.



exponential equation An equation in which the variables occur as exponents.

حافة خط مستقيم يربط عقدتين في شبكة.

مسار فعال هو المسار الأقل وزناً في أي شبكة.

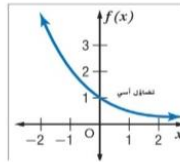
تكبير هو صورة أكبر من الشكل الأصلي.

متجهات متكافئة هي متجهات لها نفس المقدار والاتجاه.

هندسة إقليدية هي نظام هندسي يكون المستوى فيه عبارة عن سطح مستو مكون من نقاط تمتد في جميع الاتجاهات بصورة لا نهائية.

قيمة متوقعة تسمى أيضاً التوقع الحسابي. هي متوسط القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي عقب تكرار تجربة أو محاكاة لعدد غير متناه من المرات.

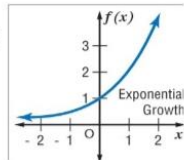
تضاؤل أسّي يحدث التضاؤل الأسّي عندما تنخفض الكمية من حيث الأس على مدار الوقت.



معادلة أسية هي معادلة تظهر فيها المتغيرات كأسس.

exponential function (pp. 227, 543) A function of the form $y = ab^x$, where $a \neq 0$, $b > 0$, and $b \neq 1$.

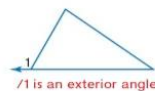
exponential growth Exponential growth occurs when a quantity increases exponentially over time.



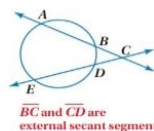
exponential inequality An inequality involving exponential functions.

extended ratios Ratios that are used to compare three or more quantities.

exterior angle An angle formed by one side of a triangle and the extension of another side.



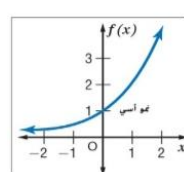
external secant segment A secant segment that lies in the exterior of the circle.



extraneous solutions Results that are not solutions to the original equation.

extremes In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ the numbers a and d .

دالة أسية هي دالة تأخذ الصيغة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$, $b > 0$, و $b \neq 1$.



نمو أسي يحدث النمو الأسي عندما تزيد الكمية من حيث الأس على مدار الوقت.

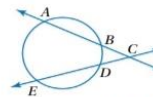
متباينة أسية هي متباينة تحتوي على دوال أسية.

نسب ممتدة هي النسب المستخدمة لمقارنة ثلاث كميات أو أكثر.

زاوية خارجية هي الزاوية التي تتكون من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع آخر.



قطعة قاطع خارجية هي قطعة قاطع موجودة خارج الدائرة.



حلول دخيلة هي نتائج لا تمثل حلولاً للمعادلة الأصلية.

طرفا التناسب في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ هما العددين a و d .

F

factored form The form of a polynomial showing all of its factors. $y = a(x - p)(x - q)$ is the factored form of a quadratic equation.

factorial The product of the integers less than or equal to a positive integer n , written as $n!$

factoring To express a polynomial as the product of monomials and polynomials.

factoring by grouping The use of the Distributive Property to factor some polynomials having four or more terms.

صيغة محللة هي صيغة لكثير الحدود توضح جميع عوامله. $y = a(x - p)(x - q)$ الصيغة المحللة للمعادلة التربيعية.

مضروب أن يكون حاصل ضرب الأعداد الصحيحة أقل من أو يساوي العدد الصحيح الموجب n . ويكتب بالصيغة $n!$

التحليل إلى العوامل هو التعبير عن كثير الحدود بصفته حاصل ضرب عدد من أحادي الحد وكثير الحدود.

التحليل إلى العوامل بالتجميع هو استخدام خاصية التوزيع لتحليل عدد من كثيري الحدود المكونة من أربعة حدود فأكثر إلى عوامل.

flow proof A proof that organizes statements in logical order, starting with the given statements. Each statement is written in a box with the reason verifying the statement written below the box. Arrows are used to indicate the order of the statements.

focus The fixed point in a parabola that is equidistant from the locus of all points in a plane.

FOIL method To multiply two binomials, find the sum of the products of the First terms, the Outer terms, the Inner terms, and the Last terms.

formal proof A two-column proof containing statements and reasons.

fractal A figure generated by repeating a special sequence of steps infinitely often. Fractals often exhibit self-similarity.

frustum The part of a solid that remains after the top portion has been cut by a plane parallel to the base.

fundamental counting principle A method used to determine the number of possible outcomes in a sample space by multiplying the number of possible outcomes from each stage or event.

برهان متسلسل هو البرهان الذي ينظم العبارات بترتيب منطقي، بدءاً بعبارات المعطيات، تكتب كل عبارة في مربع مع كتابة السبب المبرر للعبارة أسفل المربع. تُستخدم الأسهم لتوضيح ترتيب العبارات.

بؤرة هي النقطة الثابتة في القطع المكافئ وتقع على أبعاد متساوية من المحل الهندسي لكل النفاط في أي مستوى.

طريقة فويل لضرب اثنين من أحادي الحد، اجمع حاصل ضرب الحددين الأولين والحددين الخارجيين والحددين الداخليين والحددين الأخيرين.

برهان شكلي هو البرهان المكون من عمودين يحتويان على عبارات واستدلالات.

كسيري هو شكل يتولد من تكرار تسلسل خاص للخطوات بشكل غير متناه في أغلب الأحيان. غالباً ما تظهر الكسيرييات التشابه الذاتي.

مخروط ناقص هو جزء من الجسم الذي يبقى بعد قطع الجزء العلوي بواسطة مستوى مواز للقاعدة.

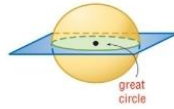
مبدأ العد الأساسي هو طريقة تستخدم لتحديد عدد النتائج المحتملة في فراغ العينة من خلال ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

G

geometric mean For any positive numbers a and b , the positive number x such that $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

geometric probability Using the principles of length and area to find the probability of an event.

great circle A circle formed when a plane intersects a sphere with its center at the center of the sphere.



greatest integer function A step function, written as $f(x) = \lfloor x \rfloor$, where $f(x)$ is the greatest integer less than or equal to x .

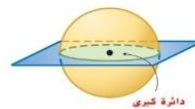
growth factor In exponential growth, the base of the exponential expression, $1 + r$.

متوسط هندسي لأي أعداد موجبة

a و b ، العدد الموجب x بحيث $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

احتمال هندسي هو استخدام مبادئ الطول والمساحة لإيجاد احتمالية وقوع الحدث.

دائرة كبرى هي دائرة تتكون عندما يقطع المستوى الكرة مع وضع مركزه عند مركز الكرة.



دالة أكبر عدد صحيح هي دالة درجة تكتب بالصيغة $f(x) = \lfloor x \rfloor$ حيث $f(x)$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

عامل نمو في النمو الأسّي، تكون قاعدة التعبير الأسّي $1 + r$.

H

hemisphere One of the two congruent parts into which a great circle separates a sphere.

نصف كرة أحد الجزأين المتطابقتين الناتجتين عندما تقسم دائرة كبرى الكرة.

I

imaginary unit i , or the principal square root of -1 .

وحدة تخيلية i ، أو الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 .

incenter The point of concurrency of the angle bisectors of a triangle.

included angle In a triangle, the angle formed by two sides is the included angle for those two sides.

included side The side of a polygon that is a side of each of two angles.

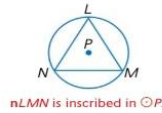
independent events Two or more events in which the outcome of one event does not affect the outcome of the other events.

indirect proof In an indirect proof, one assumes that the statement to be proved is false. One then uses logical reasoning to deduce that a statement contradicts a postulate, theorem, or one of the assumptions. Once a contradiction is obtained, one concludes that the statement assumed false must in fact be true.

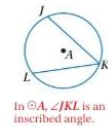
indirect reasoning Reasoning that assumes that the conclusion is false and then shows that this assumption leads to a contradiction of the hypothesis like a postulate, theorem, or corollary. Then, since the assumption has been proved false, the conclusion must be true.

informal proof A paragraph proof.

inscribed A polygon is inscribed in a circle if each of its vertices lie on the circle.



inscribed angle An angle that has a vertex on a circle and sides that contain chords of the circle.



intercepted arc An angle intercepts an arc if and only if each of the following conditions are met.
1. The endpoints of the arc lie on the angle.
2. All points of the arc except the endpoints are in the interior of the circle.
3. Each side of the angle has an endpoint of the arc.

inverse cosine The inverse function of cosine, or \cos^{-1} . If the cosine of an acute $\angle A$ is equal to x , then $\cos^{-1} x$ is equal to the measure of $\angle A$.

inverse sine The inverse function of sine, or \sin^{-1} . If the sine of an acute $\angle A$ is equal to x , then $\sin^{-1} x$ is equal to the measure of $\angle A$.

نقطة تمرکز نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث.

زاوية محصورة في المثلث، تكون الزاوية المكونة من التقاء ضلعي المثلث هي الزاوية المحصورة لهذين الضلعين.

ضلع محصور هو أحد أضلاع المضلع الذي يمثل ضلعًا لكلتا الزاويتين.

أحداث مستقلة هي حدثان أو أكثر لا تؤثر نتيجة أحدهما على نتيجة الأحداث الأخرى.

برهان غير مباشر في البرهان غير المباشر، يفترض أن العبارة الجارية إثباتها عبارة خاطئة، ثم يُستخدم التفكير المنطقي لاستنتاج أن العبارة تتعارض مع مسلمة أو نظرية أو إحدى الفرضيات، وبمجرد إثبات خلاف ذلك، نستنتج أن العبارة التي تم افتراض أنها خاطئة هي عبارة صحيحة.

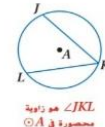
استدلال غير مباشر هو الاستدلال الذي يفترض أن الاستنتاج خاطئ ثم يوضح أن هذا الافتراض ينتج عنه تناقض مع الفرضية مثل المسلمة أو النظرية أو اللازمة. وبعد ذلك، بما أنه قد ثبت خطأ الافتراض، يجب أن يكون الاستنتاج صحيحًا.

برهان غير شكلي هو برهان الفقره.

محيطي يكون المضلع محيطيًا داخل دائرة، إذا كانت كل رأس من رؤوسه تقع على الدائرة.



زاوية محيطية الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة ويمثل ضلعاهما وترين في الدائرة.



قوس محصور هو زاوية تحصر قوسًا في حالة استبعاد جميع الشروط التالية.
1. وقوع نقطتي نهاية القوس على الزاوية.
2. وقوع جميع نقاط القوس داخل الدائرة فيما عدا نقطتي النهاية.
3. احتواء كل ضلع من أضلاع الزاوية على نقطة نهاية القوس.

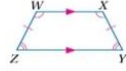
معكوس جيب التمام دالة معكوس جيب التمام أو \cos^{-1} . بما أن جيب تمام الزاوية الحادة $\angle A$ يساوي x ، فبالتالي $\cos^{-1} x$ يساوي قياس $\angle A$.

معكوس جيب الزاوية دالة معكوس جيب الزاوية أو \sin^{-1} . بما أن جيب الزاوية الحادة $\angle A$ يساوي x ، فبالتالي $\sin^{-1} x$ يساوي قياس $\angle A$.

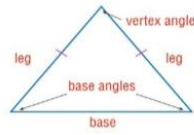
inverse tangent The inverse function of tangent, or \tan^{-1} . If the tangent of an acute $\angle A$ is equal to x , then $\tan^{-1} x$ is equal to the measure of $\angle A$.

isometric view Corner views of three-dimensional objects on two-dimensional paper.

isosceles trapezoid A trapezoid in which the legs are congruent, both pairs of base angles are congruent, and the diagonals are congruent.



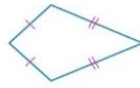
isosceles triangle A triangle with at least two sides congruent. The congruent sides are called **legs**. The angles opposite the legs are **base angles**. The angle formed by the two legs is the **vertex angle**. The side opposite the vertex angle is the **base**.



iteration A process of repeating the same procedure over and over again.

joint frequencies In a two-way frequency table, the frequencies reported in the cells in the interior of the table.

kite A quadrilateral with exactly two distinct pairs of adjacent congruent sides.



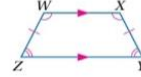
lateral area For prisms, pyramids, cylinders, and cones, the area of the faces of the figure not including the bases.

lateral edges 1. In a prism, the intersection of two adjacent lateral faces.

معكوس ظل الزاوية دالة معكوس ظل الزاوية أو \tan^{-1} . بما أن ظل الزاوية الحادة $\angle A$ يساوي x ، فبالتالي $\tan^{-1} x$ يساوي قياس $\angle A$.

عرض متساوي القياس هو عرض الأجسام ثلاثية الأبعاد من الزوايا على ورقة ثنائية الأبعاد.

شبه منحرف متساوي الساقين هو شبه منحرف يتطابق فيه الساقان ويتطابق زوجا زوايا القاعدة والأقطار.



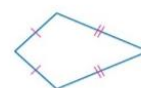
مثلث متساوي الساقين هو مثلث يتطابق ضلعان على الأقل من أضلاعه. يُطلق على الأضلاع المتطابقة اسم **الساقين**. يُطلق على الزوايا المخالفة للأضلاع اسم **زوايا القاعدة**. يُطلق على الزاوية المكونة من التقاء ضلعي المثلث اسم **الزاوية الرأسية**. يُطلق على الضلع المخالف للزاوية الرأسية اسم **القاعدة**.



تكرار هو عملية تكرار نفس الإجراء مرارا.

تكرارات متصلة في جدول تردد بدخلين. هي التكرارات الواردة في الخلايا داخل الجدول.

شكل محدب رباعي الأضلاع هو شكل رباعي مكون من زوجين مختلفين من الأضلاع المتطابقة المتجاورة.



مساحة جانبية في المنشورات والأهرامات والأسطوانات والمخروطات. هي مساحة أوجه الشكل باستثناء القواعد.

حواف جانبية 1. في المنشور. هي تقاطع وجهين جانبيين متجاورين.

lateral faces 1. In a prism, the faces that are not bases.

latitude A measure of distance north or south of the equator.

law of cosines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a , b , and c representing the measures of sides opposite the angles with measures A , B , and C respectively. Then the following equations are true.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

law of large numbers Law that states that as the number of trials of a random process increases, the average value will approach the expected value.

law of sines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a , b , and c representing the measures of sides opposite the angles with measures A , B , and C respectively.

$$\text{Then, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

leading coefficient The coefficient of the term with the highest degree in a polynomial.

legs of a trapezoid The nonparallel sides of a trapezoid.

legs of an isosceles triangle The two congruent sides of an isosceles triangle.

longitude A measure of distance east or west of the Prime Meridian.

أوجه جانبية 1. في المنشور، هي الأوجه التي لا تمثل القاعدتين.

خط العرض هو قياس المسافة شمال خط الاستواء أو جنوبه.

قانون الـ Cosine بافتراض أن $\triangle ABC$ يمثل أي مثلث به a و b و c تمثل قياسات الأضلاع المقابلة للزوايا A و B و C على التوالي، فبالتالي، المعادلات التالية صحيحة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

قانون الأعداد الكبيرة هو القانون الذي ينص على أنه كلما زادت عدد محاولات تجريب عملية عشوائية، زاد اقتراب قيمة المتوسط من القيمة المتوقعة.

قانون الـ Sines بافتراض أن $\triangle ABC$ يمثل أي مثلث به a و b و c تمثل قياسات الأضلاع المقابلة للزوايا A و B و C على التوالي.

معامل رئيسي هو معامل الحد صاحب أعلى درجة في كثير الحدود.

ساقا شبه المنحرف هما الضلعان غير المتوازيين في شبه المنحرف.

ساقا المثلث متساوي الساقين هما الضلعان المتطابقان في المثلث متساوي الساقين.

خط الطول هو قياس المسافة شرق خط الطول الرئيسي أو غربه.

M

magnitude The length of a vector.

major arc An arc with a measure greater than 180. \widehat{ACB} is a major arc.



marginal frequencies In a two-way frequency table, the accumulated frequencies reported in the Totals row and Totals column.

matrix logic A rectangular array in which learned clues are recorded in order to solve a logic or reasoning problem.

means In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, the numbers b and d .

median In a triangle, a line segment with endpoints that are a vertex of a triangle and the midpoint of the side opposite the vertex.

meridians Imaginary vertical lines drawn around the Earth through the North and South Poles.

مقدار هو طول المتجه.

قوس أكبر هو قوس قياسه أكبر من 180. \widehat{ACB} هو قوس أكبر.



تكرارات هامشية في جدول تكرار بمدخلين، هي التكرارات المجمعة المنصوص عليها في صف الإجمالي وعموده.

منطق المصفوفة هي مصفوفة مستطيلة الشكل يُسجل فيها مفاتيح الحل التي تم التوصل إليها لحل المسائل المتعلقة بالمنطق أو الاستنتاج.

وسطا التناسب في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، العددين b و d .

وسيط في المثلث، هو القطعة المستقيمة التي لها نقطتا نهاية إحداهما رأس المثلث والأخرى نقطة منتصف الضلع المقابل للرأس.

خطوط الطول هي خطوط وهمية رأسية مرسومة حول الأرض عبر القطبين الشمالي والجنوبي.

midsegment of trapezoid A segment that connects the midpoints of the legs of a trapezoid.

midsegment of triangle A segment with endpoints that are the midpoints of two sides of a triangle.

minor arc An arc with a measure less than 180.

\overline{AB} is a minor arc.



multi-stage experiments Experiments with more than two stages.

mutually exclusive Two events that have no outcomes in common.

منتصف ساقى شبه المنحرف هو القطعة التي تصل نقطتي نهاية ساقى شبه المنحرف.

منتصف ساقى المثلث هو القطعة التي لها نقطتا نهاية تمثلان نقطتي منتصف لضعلي المثلث.

قوس أصغر هو قوس قياسه أقل من 180.

\overline{AB} هو قوس أصغر.



تجارب عديدة المراحل هي تجارب تتضمن أكثر من مرحلتين.

أحداث متصلة هي حدثان ليس لهما نتائج مشتركة.

N

n th root If $a^n = b$ for a positive integer n , then a is an n th root of b .

net A two-dimensional figure that when folded forms the surfaces of a three-dimensional object.

network A graph of interconnected vertices.

node A collection of vertices.

non-Euclidean geometry The study of geometrical systems that are not in accordance with the Parallel Postulate of Euclidean geometry.

الجذر n بما أن $a^n = b$ لعدد صحيح موجب n ، فالتالي a هو الجذر n لـ b .

شبكة هي شكل ثنائي الأبعاد يشكل عند طيه أسطحًا لجسم ثلاثي الأبعاد.

شبكة مترابطة هي التمثيل البياني لرؤوس مترابطة.

عقدة هي مجموعة من الرؤوس.

هندسة غير إقليدية هي دراسة النظم الهندسية التي لا تتوافق مع مسلمة المتوازيات في الهندسة الإقليدية.

O

oblique cone A cone that is not a right cone.



oblique cylinder A cylinder that is not a right cylinder.



oblique prism A prism in which the lateral edges are not perpendicular to the bases.



مخروط مائل هو مخروط لا يكون قائمًا.



أسطوانة مائلة هي أسطوانة لا تكون قائمة.



منشور مائل هو منشور لا تكون حوافه الجانبية عمودية على قاعدته.



oblique solid A solid with base(s) that are not perpendicular to the edges connecting the two bases or vertex.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

ordered triple Three numbers given in a specific order used to locate points in space.

orthocenter The point of concurrency of the altitudes of a triangle.

orthographic drawing The two-dimensional top view, left view, front view, and right view of a three-dimensional object.

مجسم مائل هو مجسم لا تكون قاعدته (قواعده) عمودية على الحواف التي تصل القاعدتين أو الرأس.

متجهات معاكسة هي متجهات لها نفس المقدار لكنها متضادة الاتجاهات.

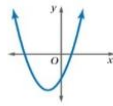
ثلاثي منتظم هو ثلاثة أرقام في ترتيب محدد تُستخدم لوضع النقاط في الفراغ.

نقطة ملتقي الارتفاعات هي نقطة التقاء ارتفاعات المثلث.

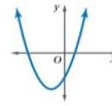
رسم متعامد هو عرض ثنائي الأبعاد من الأعلى ومن اليسار ومن الأمام ومن اليمين لجسم ثلاثي الأبعاد.

P

parabola 1. The graph of a quadratic function. parabola 2. The graph of a quadratic function. The set of all points in a plane that are the same distance from a given point, called the focus, and a given line, called the directrix.



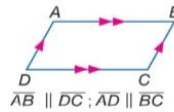
قطع مكافئ 1. هو التمثيل البياني للدالة التربيعية. قطع مكافئ 2. هو التمثيل البياني للدالة التربيعية. مجموع كل النقاط في مستو ما، تقع على مسافة واحدة من نقطة معينة، تسمى البؤرة، وخط معين، يسمى الدليل.



paragraph proof An informal proof written in the form of a paragraph that explains why a conjecture for a given situation is true.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction.

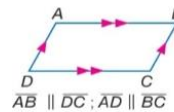
parallelogram A quadrilateral with parallel opposite sides. Any side of a parallelogram may be called a **base**.



برهان الفقرة هو برهان غير شكلي مكتوب بصيغة فقرة توضح سبب صحة فرضية لموقف معين.

متجهات متوازية هي متجهات لها نفس الاتجاهات أو متضادة الاتجاهات.

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي الأضلاع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. يمكن تسمية أي ضلع من متوازي الأضلاع قاعدة.



parallelogram method A method used to find the resultant of two vectors in which you place the vectors at the same initial point, complete a parallelogram, and draw the diagonal.

parallels Imaginary horizontal lines parallel to the equator.

perfect square trinomial A trinomial that is the square of a binomial.
 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ or
 $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

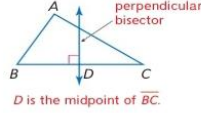
طريقة متوازي الأضلاع هي طريقة تُستخدم لإيجاد محصلة متجهين تضع فيها المتجهين عند نفس نقطة البدء، وتكمل متوازي الأضلاع وترسم القطر.

متوازيات هي خطوط أفقية تخيلية موازية لخط الاستواء.

مربع كامل ثلاثي الحدود هو ثلاثي حدود يُعد مربعاً لثنائي الحدود.
 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ أو
 $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

permutation An arrangement of objects in which order is important.

perpendicular bisector In a triangle, a line, segment, or ray that passes through the midpoint of a side and is perpendicular to that side.



π (pi) An irrational number represented by the ratio of the circumference of a circle to the diameter of the circle.

piecewise-defined function A function that is written using two or more expressions.

piecewise-linear function A function written using two or more linear expressions.

plane Euclidean geometry Geometry based on Euclid's axioms dealing with a system of points, lines, and planes.

point of concurrency The point of intersection of concurrent lines.

point of tangency For a line that intersects a circle in only one point, the point at which they intersect.

poles The endpoints of the diameter of a great circle.

polynomial A monomial or sum of monomials.

postulate A statement that describes a fundamental relationship between the basic terms of geometry. Postulates are accepted as true without proof.

prime polynomial A polynomial that cannot be written as a product of two polynomials with integral coefficients.

probability model A mathematical model used to match a random phenomenon.

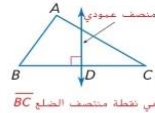
probability tree An organized table of line segments (branches) that shows the probability of each outcome.

proof A logical argument in which each statement you make is supported by a statement that is accepted as true.

proof by contradiction An indirect proof in which one assumes that the statement to be proved is false. One then uses logical reasoning to deduce a statement that contradicts a postulate, theorem, or one of the assumptions. Once a contradiction is obtained, one concludes that the statement assumed false must in fact be true.

تبدیل هو ترتيب الأجسام التي يكون الترتيب فيها مهماً.

منتصف عمودي في المثلث، هو خط مستقيم أو قطعة أو شعاع يمر بنقطة منتصف الضلع ويكون عمودياً على ذلك الضلع.



باي (π) هو عدد غير نسبي يمثل نسبة محيط الدائرة إلى قطر الدائرة.

دالة متعددة التعريف هي دالة تُكتب باستخدام تعبيرين أو أكثر.

دالة خطية متعددة التعريف هي دالة تُكتب باستخدام تعبيرين خطيين أو أكثر.

هندسة إقليدية مستوية هي هندسة مبنية على مسلّمات إقليدس التي تتناول بالدراسة أي نظام من النقاط والخطوط والمستويات.

نقطة التقاء هي نقطة تقاطع الخطوط المتلاقية.

نقطة تماس هي نقطة تقاطع الخط المستقيم مع الدائرة.

قطبان هما نقطتي نهاية قطر الدائرة الكبيرة.

كثير الحدود هو أحد أحادي الحد أو حاصل جمع أحادي الحد.

مسلمة هي عبارة نصف علاقة أساسية بين الحدود الأساسية في الهندسة، تعتبر المسلمات صحيحة بدون برهان.

كثير الحدود الأولي هو كثير حدود لا يمكن كتابتها كحاصل ضرب اثنين من كثيري الحدود ذي المعاملات الصحيحة.

نموذج الاحتمال هو نموذج حسابي يستخدم في مطابقة ظاهرة عشوائية.

شجرة الاحتمال هي جدول منظم من قطع مستقيمة (الأغصان) توضح احتمالية كل نتيجة.

برهان هو حجة منطقية يتم دعم كل عبارة فيها بعبارة مسلمة بأنها صحيحة.

برهان بالتناقض هو برهان غير مباشر يُفترض فيه أن العبارة الجارية إثباتها عبارة خاطئة، ثم يُستخدم التفكير المنطقي لاستنتاج عبارة تتعارض مع مسلمة أو نظرية أو إحدى الفرضيات، وبمجرد إثبات خلاف ذلك، نستنتج أن العبارة التي تم افتراض أنها خاطئة هي عبارة صحيحة.

proportion An equation of the form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ that states that two ratios are equal.

pure imaginary number (pp. 178, 335) The square roots of negative real numbers. For any positive real number b ,

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}, \text{ or } bi.$$

pythagorean triple A group of three whole numbers that satisfies the equation $a^2 + b^2 = c^2$, where c is the greatest number.

تناسب هو معادلة بصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تنص على وجود نسبتين متساويتين.

عدد تخيلي بحت هو جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. بالنسبة إلى أي عدد حقيقي موجب b .

$$bi \text{ أو } \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$$

ثلاثية فيثاغورس هي مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة $a^2 + b^2 = c^2$ ، حيث يكون c هو العدد الأكبر.

Q

quadratic equation An equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$.

quadratic expression An expression in one variable with a degree of 2 written in the form $ax^2 + bx + c$.

quadratic Formula (pp. 133, 264) The solutions of a quadratic equation in the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, are given by the formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

quadratic function An equation of the form $y = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

quadratic inequality An inequality of the form $y > ax^2 + bx + c$, $y \geq ax^2 + bx + c$, $y < ax^2 + bx + c$, or $y \leq ax^2 + bx + c$.

معادلة تربيعية هي معادلة بصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$.

تعبير تربيعي هو تعبير في متغير واحد من الدرجة الثانية يُكتب بالصيغة $ax^2 + bx + c$.

صيغة تربيعية هي حل المعادلات التربيعية بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$. تُقدم من خلال الصيغة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

دالة تربيعية هي معادلة بالصيغة

$$y = ax^2 + bx + c \text{ حيث } a \neq 0.$$

متباينة تربيعية هي متباينة بالصيغة $y > ax^2 + bx + c$, $y \geq ax^2 + bx + c$, $y < ax^2 + bx + c$ أو $y \leq ax^2 + bx + c$.

R

radical equations Equations that contain radicals with variables in the radicand.

radical expression An expression that contains a square root.

radius 1. In a circle, any segment with endpoints that are the center of the circle and a point on the circle. 2. In a sphere, any segment with endpoints that are the center and a point on the sphere.

random variable A variable that can assume a set of values, each with fixed probabilities.

ratio A comparison of two quantities using division.

rationalizing the denominator A method used to eliminate radicals from the denominator of a fraction.

معادلات جذرية هي معادلات تحتوي على جذور بمتغيرات في المجدور.

تعبير جذري هو تعبير يحتوي على جذر تربيعي.

نصف القطر 1. في الدائرة، هو أي قطعة دائرية لها نقطتا نهاية إحداها مركز الدائرة والأخرى نقطة على الدائرة. 2. في الكرة، هو أي قطعة دائرية لها نقطتا نهاية إحداها مركز الكرة والأخرى نقطة على الكرة.

متغير عشوائي هو متغير يمكنه افتراض مجموعة من القيم. وتكون كل قيمة ذات احتمالات ثابتة.

نسبة هي مقارنة كميتين باستخدام القسمة.

إنطاق المقام هي طريقة تُستخدم لحذف الجذور من مقام الكسر.

rectangle A quadrilateral with four right angles.



reduction An image that is smaller than the original figure.

reflection A transformation where a figure, line, or curve, is flipped across a line.

regular pyramid A pyramid with a base that is a regular polygon.

relative frequency In a frequency table, the ratio of the number of observations in a category to the total number of observations.

remote interior angles The angles of a triangle that are not adjacent to a given exterior angle.

resultant The sum of two vectors.

rhombus A quadrilateral with all four sides congruent.



right cone A cone with an axis that is also an altitude.

right cylinder A cylinder with an axis that is also an altitude.

right prism A prism with lateral edges that are also altitudes.

right solid A solid with base(s) that are perpendicular to the edges connecting them or connecting the base and the vertex of the solid.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

scalar A constant multiplied by a vector.

scalar multiplication Multiplication of a vector by a scalar.

scale factor The ratio of the lengths of two corresponding sides of two similar polygons or two similar solids.

مستطيل هو شكل رباعي مكون من أربع زوايا قائمة.



اختزال هو صورة أصغر من الشكل الأصلي.

انعكاس هو تحويل يتم فيه قلب الشكل أو الخط أو المنحنى حول خط مستقيم.

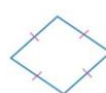
هرم منتظم هو هرم تكون قاعدته على شكل مضلع منتظم.

تكرار نسبي في جدول التكرار، هو نسبة عدد الملاحظات في فئة ما إلى العدد الكلي للملاحظات.

زوايا داخلية غير متجاورة هي زوايا المثلث التي تكون غير متجاورة لزوايا خارجية مقدمة.

محصلة هي حاصل جمع متجهين.

معين هو شكل رباعي يتكون من أربعة أضلاع متطابقة.



مخروط قائم هو مخروط له محور يمثل الارتفاع أيضًا.

أسطوانة قائمة هي أسطوانة لها محور يمثل الارتفاع أيضًا.

منشور قائم هو منشور له حواف جانبية هي ارتفاعات أيضًا.

مجسم قائم هو مجسم له قاعدة (قواعد) عمودية على الحواف المتصلة بها أو التي تصل بين القاعدة ورأس الجسم.

S

فراغ العينة هو مجموعة النتائج المحتملة لأي تجربة.

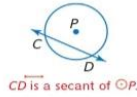
كمية قياسية هي ثابت مضروب في متجه.

ضرب قياسي هو ضرب متجه في كمية قياسية.

عامل المقياس هو نسبة طولي ضلعين متناظرين لمضلعين أو مجسمين متشابهين.

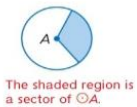
scale factor of dilation The ratio of a length on an image to a corresponding length on the preimage.

secant Any line that intersects a circle in exactly two points.

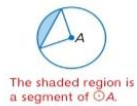


secant segment A segment of a secant line that has exactly one endpoint on the circle.

sector of a circle A region of a circle bounded by a central angle and its intercepted arc.



segment of a circle The region of a circle bounded by an arc and a chord.



self-similar If any parts of a fractal image are replicas of the entire image, the image is self-similar.

semicircle An arc that measures 180.

sierpinski triangle A self-similar fractal described by Waclaw Sierpinski. The figure was named for him.



similar solids Solids that have exactly the same shape, but not necessarily the same size.

similarity ratio The scale factor between two similar polygons

معامل مقياس تغيير الأبعاد هو نسبة الطول في صورة إلى الطول المتناظر في الصورة الأصلية.

قاطع هو أي خط يقطع دائرة في نقطتين بالضبط.



قطعة دائرية قاطعة هي قطعة من خط قاطع يكون له نقطة نهاية واحدة على الدائرة.

قطاع دائرة هي منطقة من الدائرة محددة بين زاوية مركزية وقوسها المحصور.



قطعة دائرة هي منطقة من الدائرة محددة بقرس ووتر.



تشابه ذاتي إذا كانت أي أجزاء من صورة كسورية تمثل نسخًا مطابقة للصورة بأكملها. تكون الصورة متشابهة ذاتيًا.

نصف دائرة هي قوس قياسه 180.

مثالث سيربنسكي هو كسيري متشابه ذاتيًا وصفه واكلاو سيربنسكي. سُمي الشكل باسمه.



مجسمات متشابهة هي مجسمات لها نفس الشكل بالضبط ، لكن لا يتحتم أن تكون بالحجم ذاته.

نسبة التشابه هي معامل المقياس بين مضعين مشابهين

similarity transformation When a figure and its transformation image are similar.

تحويل تشابهي عندما يتشابه الشكل مع صورة تحويله.

simulation A probability model used to recreate a situation again and again so the likelihood of various outcomes can be estimated.

محاكاة هو نموذج احتمال مستخدم لإيجاد حالة مراراً وتكراراً بحيث يمكن تقدير احتمالية النتائج المختلفة.

sine For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg opposite the acute angle to the measure of the hypotenuse.

Sine بالنسبة إلى أي زاوية حادة يمثل قائم الزاوية، هو نسبة قياس ضلع الغائبة المقابل للزاوية الحادة إلى قياس الوتر.

slant height The height of the lateral side of a pyramid or cone.

ارتفاع جانبي هو ارتفاع الضلع الجانبي لهرم أو مخروط.

solving a triangle Finding the measures of all of the angles and sides of a triangle.

حل المثلث هو إيجاد مقاييس جميع زوايا المثلث وأضلاعه.

spherical geometry The branch of geometry that deals with a system of points, great circles (lines), and spheres (planes).

هندسة فراغية هي فرع من فروع الهندسة يتعامل مع نظام من النقاط والدوائر الكبرى (الخطوط) والكرات (المستويات).

square A quadrilateral with four right angles and four congruent sides.

مربع هو شكل رباعي مكون من أربع زوايا قائمة وأربع أضلاع متطابقة.



square root property For any real number n , if $x^2 = n$, then $x = \pm\sqrt{n}$.

خاصية الجذر التربيعي لأي عدد حقيقي n . if $x^2 = n$ ، وبالتالي $x = \pm\sqrt{n}$.

standard form of a polynomial A polynomial that is written with the terms in order from greatest degree to least degree.

صيغة قياسية لكثير الحدود هي كتابة كثير الحدود بمصطلحات مرتبة من أكبر درجة إلى أصغر درجة.

standard position When the initial point of a vector is at the origin.

موقع قياسي عندما تكون نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل.

step function A function with a graph that is a series of horizontal line segments.

دالة درجية هي دالة تحتوي على رسم بياني يمثل سلسلة من قطع مستقيمة أفقية.

T

tangent 1. For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg opposite the acute angle to the measure of the leg adjacent to the acute angle. 2. A line in the plane of a circle that intersects the circle in exactly one point. The point of intersection is called the **point of tangency**. 3. A line that intersects a sphere in exactly one point.

تماس 1. بالنسبة إلى أي زاوية حادة يمثل قائم الزاوية، هو نسبة قياس ضلع الغائبة المماثلة للزاوية الحادة إلى قياس ضلع الغائبة المجاورة إلى الزاوية الحادة. 2. هو خط في مستوى دائرة يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط. ويطلق على نقطة التقاطع **نقطة التماس**. 3. هو خط يتقاطع مع كرة في نقطة واحدة بالضبط.

tangent segment A segment of a tangent with one endpoint on a circle that is both the exterior and whole segment.

theorem A statement or conjecture that can be proven true by undefined terms, definitions, and postulates.

topographic map A representation of a three-dimensional surface on a flat piece of paper.

traceable network A network in which all of the nodes are connected and each edge is used once when the network is used.

transformation 1. A movement of a geometric figure. 2. In a plane, a mapping for which each point has exactly one image point and each image point has exactly one preimage point.

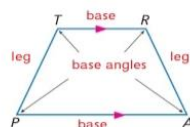
translation A transformation where a figure is slid from one position to another without being turned.

trigonometry The study of the properties of triangles and trigonometric functions and their applications.

two-column proof A formal proof that contains statements and reasons organized in two columns. Each step is called a **statement**, and the properties that justify each step are called **reasons**.

two-stage experiment An experiment with two stages or events.

trapezoid A quadrilateral with exactly one pair of parallel sides. The parallel sides of a trapezoid are called **bases**. The nonparallel sides are called **legs**. The pairs of angles with their vertices at the endpoints of the same base are called **base angles**.



tree diagram An organized table of line segments (branches) which shows possible experiment outcomes.

triangle method A method used to find the resultant of two vectors in which the second vector is connected to the terminal point of the first and the resultant is drawn from the initial point of the first vector to the terminal point of the second vector.

trigonometric ratio A ratio of the lengths of sides of a right triangle.

قطعة تماس هي قطعة من التماس بها نقطة نهاية واحدة على دائرة تمثل كل من القطعة الخارجية والكلية.

نظرية هي عبارة أو فرضية يمكن إثبات صحتها عن طريق مصطلحات وتعريفات ومسلمات غير محددة.

خريطة طبوغرافية هي تمثيل لسطح ثلاثي الأبعاد على قطعة ورقية مستوية.

شبكة مرتبطة قابلة للشيف هي شبكة تكون جميع العقد فيها مرتبطة وتستخدم كل حافة بمجرد استخدام الشبكة.

تحويل 1. هو حركة الشكل الهندسي. 2. يشير التحويل في أحد المستويات إلى التخطيط الذي يحتوي فيه كل نقطة على نقطة صورة واحدة بالضبط. وتحتوي كل نقطة صورة على نقطة صورة أصلية واحدة بالضبط.

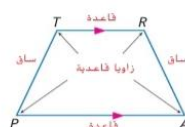
انسحاب هو تحويل ينزلق فيه شكل ما من موقع إلى آخر دون دورانه.

حساب المثلثات هو دراسة خصائص المثلثات والدوال المثلثية وتطبيقاتها.

برهان ذو عمودين هو برهان شكلي يحتوي على عبارات ومبررات مرتبة في عمودين. يُطلق على كل خطوة "عبارة" ويُطلق على الخصائص التي تبرر كل خطوة "مبررات".

تجربة ثنائية المرحلة هي تجربة مكونة من مرحلتين أو حدثين.

شبه منحرف هو شكل رباعي مكون من زوج واحد من الأضلاع الموازية تمامًا. يُطلق على الأضلاع الموازية لشبه المنحرف **القواعد**. ويُطلق على الأضلاع غير الموازية **الساكنات**. ويُطلق على أزواج الزوايا مع رؤوسها عند نقاط نهاية نفس القاعدة **زوايا القاعدة**.



مخطط الشجرة هو جدول منظم يتكون من القطع (الفروع) المستقيمة التي تعرض النتائج المحتملة للتجربة.

طريقة المثلث هي طريقة تستخدم لإيجاد محصلة متجهين يكون المتجه الثاني فيهما متصل بنقطة نهاية المتجه الأول. ويتم رسم قيمة المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني.

نسبة مثلثية هي نسبة طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية.

trinomials The sum of three monomials.

ثلاثيات الحدود هي حاصل جمع ثلاثة من أحادي الحد.

two-way frequency table A table used to show the frequencies or relative frequencies of data from a survey or experiment classified according to two variables, with the rows indicating one variable and the columns indicating the other.

جدول تكراري بمتغيرين هو جدول يُستخدم لعرض التكرارات أو التكرارات النسبية للبيانات من دراسة مسحية أو تجربة مصنفة وفقاً للمتغيرين، وتشير الصفوف إلى أحد المتغيرين بينما تشير الأعمدة إلى المتغير الآخر.

V

vector A directed segment representing a quantity that has both magnitude, or length, and direction.

متجه هو قطعة موجهة تمثل كمية لها مقدار أو طول واتجاه.

vertex The maximum or minimum point of a parabola.

رأس هو أقصى نقطة للقطع المكافئ أو أدنى نقطة له.

vertex angle of an isosceles triangle See *isosceles triangle*.

زاوية رأس مثلث متساوي الساقين انظر **مثلث متساوي الساقين**.

vertex form A quadratic function in the form $y = a(x - h)^2 + k$, where (h, k) is the vertex of the parabola and $x = h$ is its axis of symmetry.

صيغة الرأس هي دالة تربيعية بصيغة $y = a(x - h)^2 + k$ حيث (h, k) هي رأس القطع المكافئ و $x = h$ هي محور تماثله.

vertex-edge graphs A collection of nodes connected by edges.

رسوم بيانية لحواف الرأس 2 مجموعة من العقد مرتبطة بالحواف.

W

weight The value assigned to an edge in a vertex-edge graph.

وزن هو القيمة المحددة لحافة ما في الرسم البياني لحافة الرأس.

weight of a path The sum of the weights of the edges along a path.

وزن المسار هو إجمالي أوزان الحواف على المسار.

weighted vertex-edge graphs A collection of nodes connected by edges in which each edge has an assigned value.

رسوم بيانية مرجحة لحواف الرأس مجموعة من العقد مرتبطة بالحواف، تمتلك كل حافة فيها قيمة محددة.

الرموز

\neq	لا يساوي	AB	قياس \overline{AB}
\approx	تقريبًا يساوي	\angle	زاوية
\sim	يشابه	\triangle	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$ a $	القيمة المطلقة لـ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
\sqrt{a}	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f لـ x ، قيمة f لـ x	$P(n, n)$	تباديل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
\overline{AB}	القطعة المستقيمة AB	$C(n, n)$	توافيق n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة

الخواص الجبرية والمفاهيم الأساسية

الحياد	لأي عدد a ، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$ ، فإنه يمكن التعويض عن a باستخدام b .
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b ، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c ، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c ، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a ، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$ ، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، يوجد فقط عدد واحد $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a ، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c ، إذا كان $a = b$ ، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c ، إذا كان $a = b$ ، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والتقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c ، حيث $c \neq 0$ ، إذا كان $a = b$ ، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)	لأي أعداد a و b و c ، إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)	لأي أعداد a و b و c ، إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والتقسمة (>)	لأي أعداد a و b و c ، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$ ، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$ ، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b ، إذا كان $ab = 0$ ، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مجموع مربعين	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
فرق بين مربعين	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و \geq و \leq .

الصيغ

المصنف

الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

المسافة على مستوى إحداثي

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطة المنتصف على مستوى إحداثي

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

نظرية فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

محيط المستطيل

$$P = 2\ell + 2w \text{ و } P = 2(\ell + w)$$

محيط الدائرة

$$C = 2\pi r \text{ و } C = \pi d$$

المساحة

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

شبه منحرف

$$A = \ell w$$

مستطيل

$$A = \pi r^2$$

دائرة

$$A = bh$$

متوازي أضلاع

$$A = \frac{1}{2}bh$$

مثلث

مساحة السطح

$$S = \frac{1}{2}P\ell + B$$

هرم منظم

$$S = 6s^2$$

مكعب

$$S = \pi r\ell + \pi r^2$$

مخروط

$$S = Ph + 2B$$

منشور

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

إسطوانة

الحجم

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

هرم منظم

$$V = s^3$$

مكعب

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مخروط

$$V = Bh$$

منشور

$$V = \pi r^2 h$$

إسطوانة

القياسات

عرفي	متر
الطول	
1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)	1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)
1 ميل = 5280 قدمًا (ft)	1 متر = 100 سنتيمتر (cm)
1 ياردة = 3 أقدام	1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)
1 قدم = 12 بوصة (in.)	
1 ياردة = 36 بوصة	
الحجم والسعة	
1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)	1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)
1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)	1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر
1 ربع = 2 باينت (pt)	
1 باينت = 2 كوب (c)	
1 كوب = 8 أونصات سائلة	
الوزن والكتلة	
1 طن (T) = 2000 رطل (lb)	1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)
1 رطل = 16 أونصة (oz)	1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)
	1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام

الهندسة الإحداثية

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الميل

$$d = |a - b|$$

المسافة على خط الأعداد:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

المسافة على مستوى إحداثي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

المسافة في الفضاء:

$$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$$

طول قوس المسافة:

$$M = \frac{a + b}{2}$$

نقطة المنتصف على خط الأعداد:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

نقطة المنتصف على مستوى إحداثي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

نقطة المنتصف في الفضاء:

المحيط ومحيط الدائرة

$$C = 2\pi r \text{ أو } C = \pi d$$

دائرة

$$P = 2\ell + 2w$$

مستطيل

$$P = 4s$$

مربع

المساحة

$$A = \frac{1}{2}bh$$

مثلث

$$A = s^2$$

مربع

$$A = \frac{1}{2}Pa$$

مضلع منتظم

$$A = \ell w \text{ أو } A = bh$$

مستطيل

$$A = \pi r^2$$

دائرة

$$A = bh$$

متوازي أضلاع

$$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$$

قطاع من دائرة

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

شبه منحرف

$$A = \frac{1}{2}d_1 d_2 \text{ أو } A = bh$$

معين

مساحة السطح الجانبية

$$L = \frac{1}{2}P\ell$$

هرم

$$L = Ph$$

منشور

$$L = \pi r\ell$$

مخروط

$$L = 2\pi rh$$

إسطوانة

مساحة السطح الكلية

$$S = \pi r\ell + \pi r^2$$

مخروط

$$S = Ph + 2B$$

منشور

$$S = 4\pi r^2$$

كرة

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

إسطوانة

$$S = \frac{1}{2}P\ell + B$$

هرم

الحجم

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

هرم

$$V = s^3$$

مكعب

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مخروط

$$V = \ell wh$$

منشور مستطيل

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

كرة

$$V = Bh$$

منشور

$$V = \pi r^2 h$$

إسطوانة

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

دائرة

$$y = mx + b$$

صيغة الميل والمقطع لمستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة النقطة والميل لمستقيم

حساب المثلثات

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

قانون جيب التمام

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون الجيب

$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظرية فيثاغورس

الرموز

\neq	لا يساوي	\parallel	يوازي	$ \overline{AB} $	مقدار متجه من A إلى B
\approx	تقريبًا يساوي	\nparallel	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
\equiv	يطابق	\perp	متعامد على	\rightarrow	موقع على
\sim	يشابه	\triangle	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
\angle, \sphericalangle	زاوية، زوايا	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	\widehat{AB}	قوس أصغر نقطته الطرفيتان A و B
$^\circ$	درجة	\square	متوازي أضلاع	\widehat{ABC}	قوس أكبر نقطته الطرفيتان A و C
\overleftrightarrow{AB}	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	$n\text{-gon}$	مضلع عدد أضلاعه n	$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB
\overline{AB}	مستقيم نقطته الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	قيمة f لـ x
\vec{AB}	شعاع يحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتب	$!$	مضروب
AB	قياس \overline{AB} ، المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر	nPr	تبادل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$\sim p$	نفي p، ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	nCr	توافق n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p و q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q	\vec{a}	متجه a		
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، إذا وفقط إذا كان q	\overline{AB}	المتجه من A إلى B		

القياسات

مترى	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 ياردة = 36 بوصة
	1 قدم = 12 بوصة (in)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

الهندسة الإحداثية		
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	
المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$	
المصفوفات		
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب
		$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$
كثيرات الحدود		
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	فرق بين مربعين
مجموع مربعين	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$	مجموع وفرق
		$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
		$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
اللوغاريتمات		
خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس
		$\log_a m^p = p \log_a m$
		$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
القطع المخروطية		
قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$ أو $x = a(y-k)^2 + h$	قطع ناقص
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	قطع زائد
		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
المتتاليات والمتسلسلات		
الحد النوني، لهتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني، لهتالية هندسية
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ أو $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية
		$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$
		$a_n = a_1 r^{n-1}$
حساب المثلثات		
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$	
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	
النسب المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	
	$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	
متطابقات فيثاغورس	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	

الرموز

دالة متعددة التعريف	$f(x) = \{$	سيفيا. المجموع	\sum
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = x $	متوسط عينة	\bar{x}
دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a	$f(x) = \lfloor x \rfloor$	متوسط مجتمع إحصائي	μ
$f(x, y)$		الانحراف المعياري لعينة	s
المتجه AB	\vec{AB}	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي	σ
الوحدة التخيلية	i	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل	$P(B A)$
$[f \circ g](x)$		تبادل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة	nPr
معكوس $f(x)$	$f^{-1}(x)$	توافق عدد n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة	nCr
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$		$\text{Arcsin } x$	$\sin^{-1} x$
الجذر النوني لـ b		$\text{Arccos } x$	$\cos^{-1} x$
لوغاريتم x للأساس b	$\log_b x$	$\text{Arctan } x$	$\tan^{-1} x$
اللوغاريتم العادي x	$\log x$		
اللوغاريتم الطبيعي x	$\ln x$		

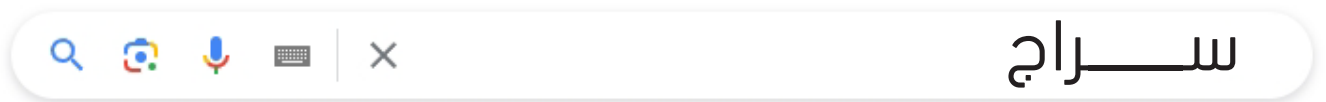
الدوال الأصلية

الدوال التربيعية	دوال القيمة المطلقة	الدوال الخطية
الدوال العكسية والنسبية	دوال الجذر التربيعي	الدوال الأسية واللوغاريتمية

تم تحميل الملف من
موقع **سراج التعليمي**



للمزيد اكتب
في جوجل



حمل تطبيق **سراج التعليمي**

