## الدرس الأول : المساحة المحصورة بين منحنيين (1-6)

**مساحة منطقة بين منحنيين**

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (1.1)$$

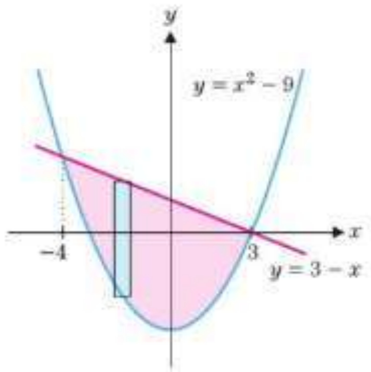
**خطوات المقترحة لايجاد المساحة :**

**1) الرسم ان امكن 2) تحديد المنطقة المطلوبة ( التظليل) 3 ) تحديد المكامل dx او dy ( حسب المنطقة )**

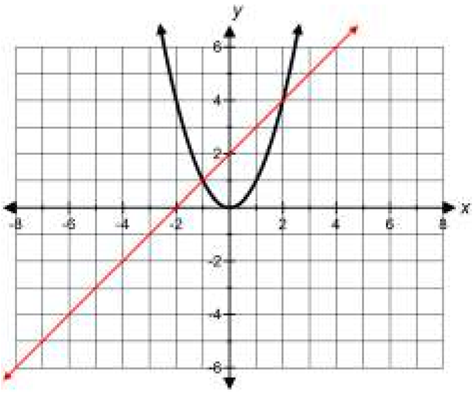
**4) تحديد حدود المنطقة ( حدود التكامل ) 5) ايجاد قيمة التكامل ( المساحة ) بالطرق المناسبة**

## أولا : المساحة بين منحنيين ( الحالة الأولى )

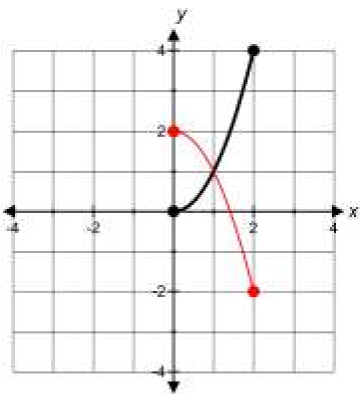
**تمرين 1 :** أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$



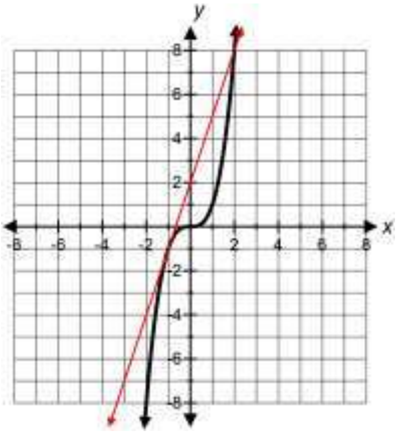
تمرين 2 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x + 2$ و $y = x^2$



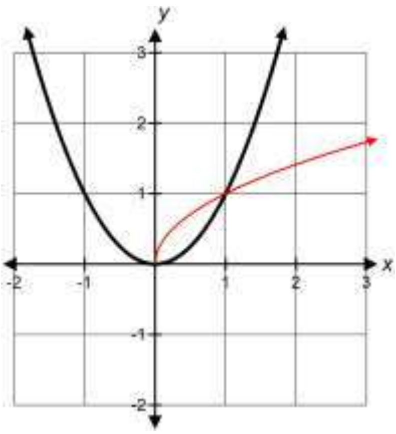
تمرين 3 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \leq x \leq 2$



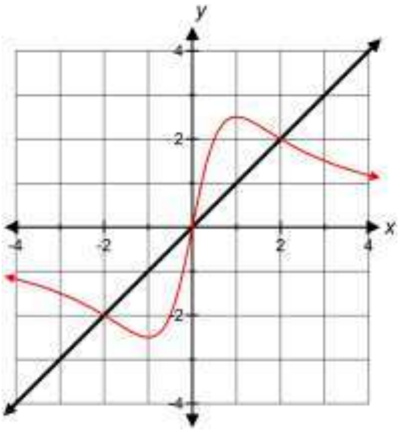
**تمرين4 :** أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x^3$ و $y = 3x + 2$



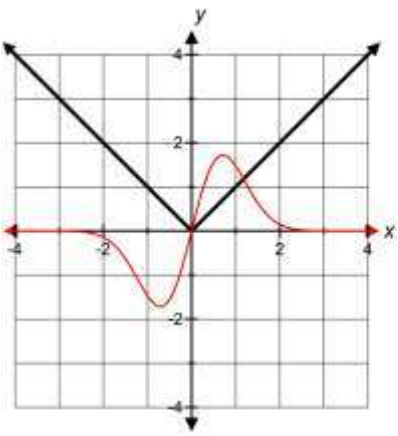

**تمرين5 :** أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$



تمرين6 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x$ و $y = \frac{5x}{x^2+1}$



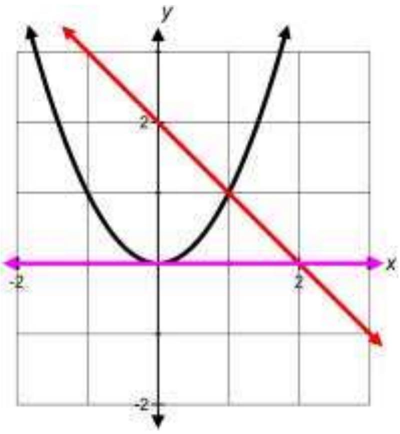

تمرين7: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = |x|$ و $y = 4xe^{-x^2}$



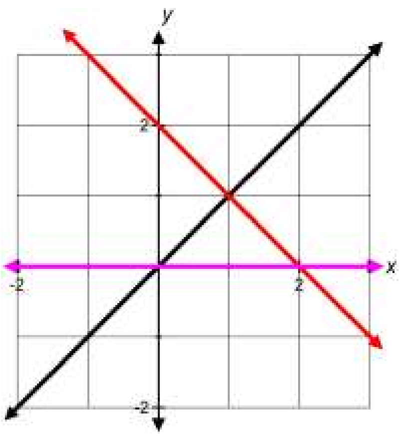
**ثانياً : المساحة بين 3 منحنيات ( الحالة الثانية )**

**ملاحظة هامة : الرسم ضروري لتحديد المنطقة وتجزئتها بين منحنيين , محور x يعتبر دالة ومعادلته y=0**

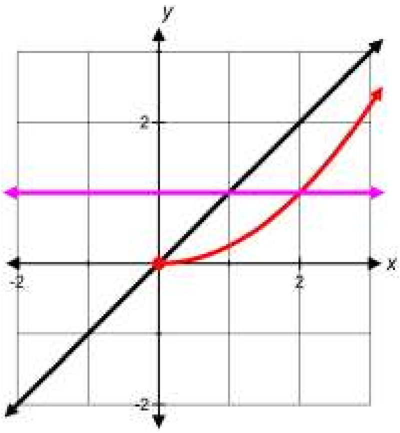
**تمرين8 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين** $y = x^2$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$



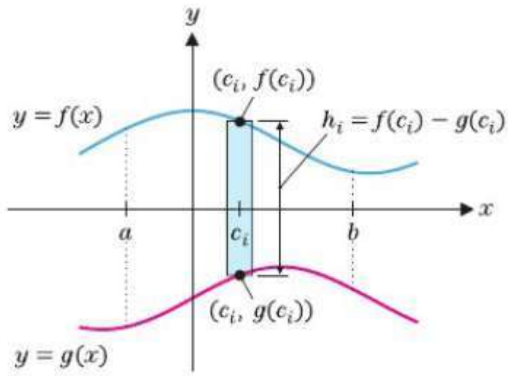

**تمرين9 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين** $y = x$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$



تمرين10 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x$ و $y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = 1$

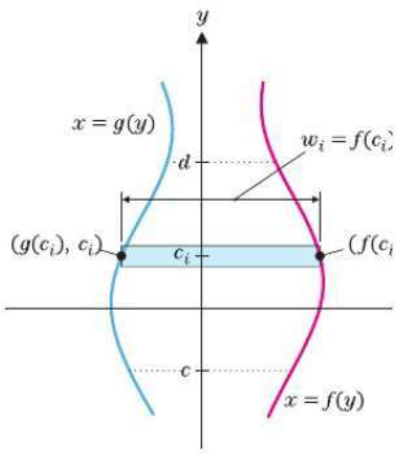



**المساحة عند المكامل dy ؟ وعند المكامل dx ؟**




**الشكل 6.3b**

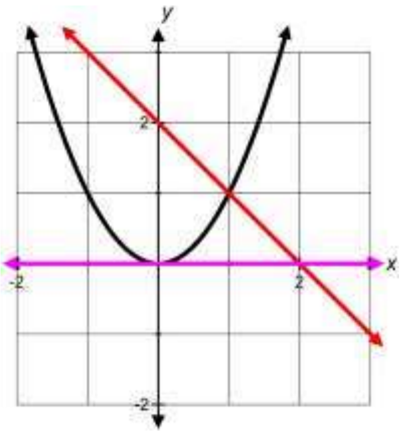
مساحة المستطيل عند الحد $i$



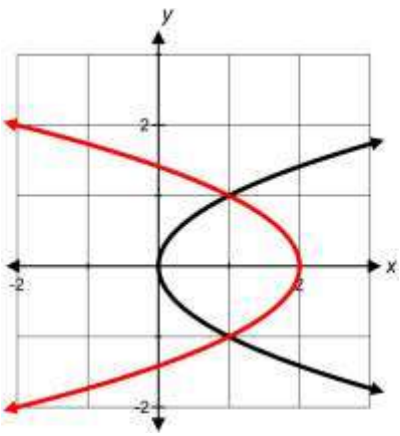

**الشكل 6.8b**

مساحة المستطيل عند الحد $i$

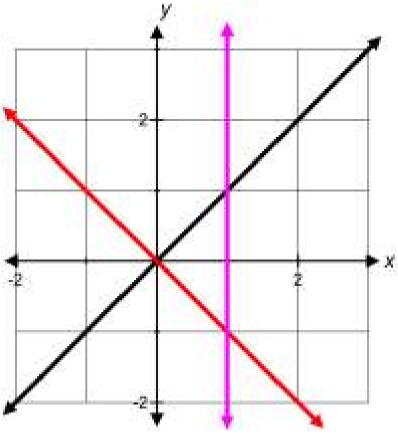
تمرين11 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين الدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x$ و $y = 0$



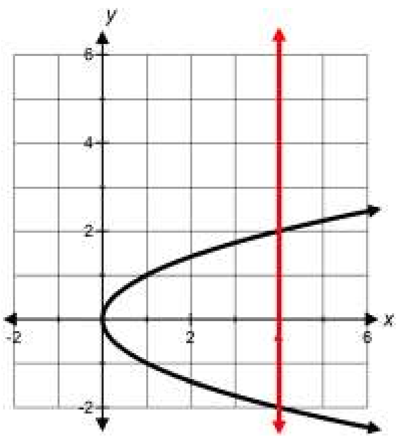

تمرين11 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$



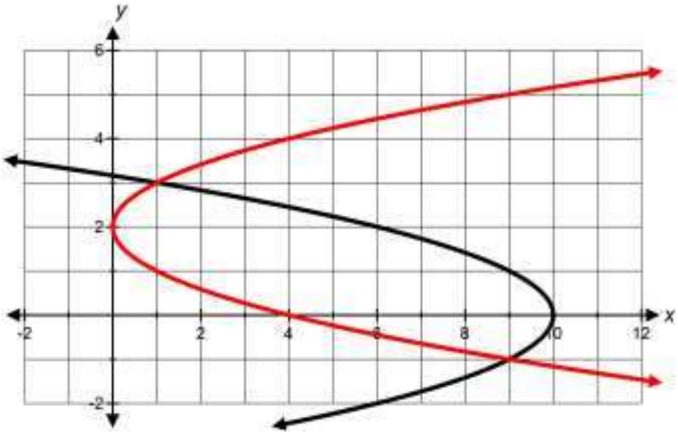
تمرين12 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x=-y$ و $x=y$ و $x=1$



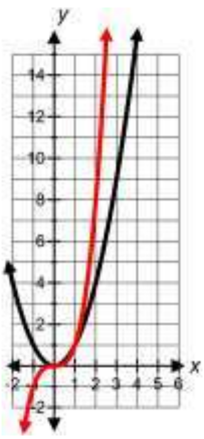

تمرين13 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x=4$ و $x=y^2$



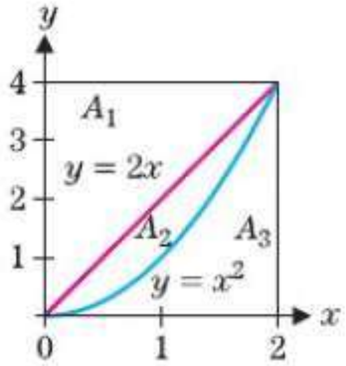
**تمرين14** : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x=(y-2)^2$ و $x=-y^2+10$




**تمرين14** : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $y=x^2$ و $y=x^3$ على الفترة المعطاة $1\le x\le 3$



تمرين :




بدلالة $A_1$، $A_2$ و $A_3$، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

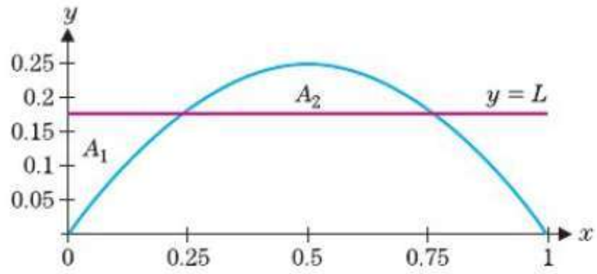
(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$ (b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$ (d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\,dy$

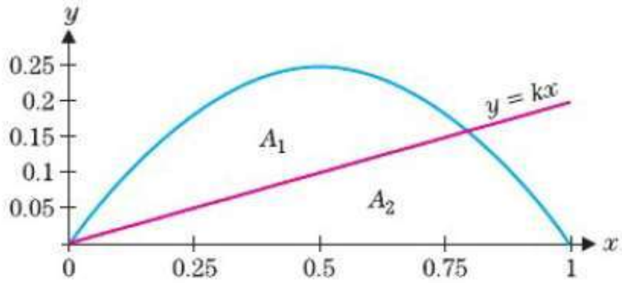
أعط تكاملًا مساويًا لكل مساحة.

(a) $A_2 + A_3$ (b) $A_1 + A_2$ (c) $A_1$ (d) $A_3$

**37.** لأجل $y = x - x^2$ كما هو مبين، أوجد قيمة $L$
$.A_1 = A_2$




**38.** لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، أوجد $k$ بحيث تكون
$.A_1 = A_2$



# قواعد أساسية للتكامل غير المحدود

| قاعدة المشتقة | التكامل غير المحدود |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ , \ n\neq -1$ | $(1)\ \int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ , \ n\neq -1$ |
| $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$ | $(2)\ \int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$ |
| $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$ | $(3)\ \int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$ |
| $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$ | $(4)\ \int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ |
| $\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$ | $(5)\ \int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$ | $(6)\ \int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$ |
| $\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$ | $(7)\ \int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$ |
| $\frac{d}{dx}(e^{kx})=ke^{kx}$ | (8) $\int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}+c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | (9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$ |
| $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$ | (10) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ | (11) $\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+c$ |
| $\frac{d}{dx}(\ln\lvert x\rvert)=\frac{1}{x}$ | (12) $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$ |
| نتيجة هامة : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$ | |