الوحدة 4 علاقات المثلثات

السابق

تعلمت من قبل كيفية تصنيف المثلثات.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة، ستكون قادرًا على:

- التعرف على القطع المستقيمة الخاصة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- التعرف على العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.
- التعرف على طريقة كتابة البراهين غير المباشرة.

لماذا؟

تصميم الديكور الداخلي تُستخدم علاقات المثلث لإيجاد قياسات الزوايا والمسافات ومقارنتها. ويستخدم مصممو الديكور الداخلي علاقات المثلثات لزيادة الكفاءة إلى الحد الأقصى وإحداث توازن في تصاميمهم.

مشروع الوحدة

الهندسة المعمارية: التصميم المثلثي

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة الوعي العالمي، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الواحد والعشرين.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام الطريقة التالية.

تعريف: نقطة تقاطع المنصفات في مثلث هي نقطة التقاء المنصفات المتعامدة.

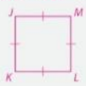
مثال:

سؤال: هل ستقع نقطة تقاطع المنصفات دائمًا في المثلث من الداخل؟ لا. إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فستقع نقطة تقاطع المنصفات خارج المثلث. إذا كان المثلث قائم الزاوية، فستقع نقطة تقاطع المنصفات على أحد أضلاع المثلث.

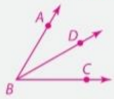
أسئلة إضافية (الاستعداد ص. 321)

4. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.

5. $JK = KL = LM = MJ$



6. $\angle ABD \cong \angle DBC$



7. أحيانًا؛ يكون التخمين صحيحًا عندما تكون E بين D و F. وإلا فهو خطأ.

الوحدة 4

علاقات المثلثات

مخطط الوحدة

	التقويم التشخيصي تدريب سريع		
	الاستكشاف 4-1 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 4-1 45 دقيقة: 1 يوم 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 4-2 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم
العنوان	مختبر الهندسة: إنشاء المنصفات	منصفات المثلثات	مختبر الهندسة: إنشاء المتوسطات والارتفاعات
الأهداف	■ إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.	■ تحديد المنصفات العمودية في المثلثات واستخدامها. ■ تحديد منصفات الزاوية في المثلثات واستخدامها.	■ إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.
المفردات الأساسية		منصف عمودي perpendicular bisector نقطة الالتقاء point of concurrency نقطة تقاطع المنصفات circumcenter. مركز الدائرة الداخلية incenter	

الدرس 4-2 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	الدرس 4-3 45 دقيقة: 1 يوم 90 دقيقة: 0.5 يوم	الاستكشاف 4-4 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 4-4 45 دقيقة: 1 يوم 90 دقيقة: 0.5 يوم
متوسطات المثلثات وارتفاعاتها	**المتباينات في مثلث واحد**	**مختبر الهندسة: منطق المصفوفة**	**البرهان غير المباشر**
▪ تحديد الوسيطات في المثلثات واستخدامها. ▪ تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.	▪ التعرف على خواص المتباينات وتطبيقها على مقاييس زوايا المثلث. ▪ التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.	▪ استخدام منطق المصفوفة.	▪ كتابة براهين جبرية غير مباشرة. ▪ كتابة براهين هندسية غير مباشرة.
الوسيط median النقطة المركزية centroid الارتفاع altitude ملتقى الارتفاعات orthocenter		منطق المصفوفة matrix logic	استنتاج غير مباشر indirect reasoning برهان غير مباشر indirect proof برهان بالتناقض proof by contradiction

التقويم التكويني

اختبار نصف الوحدة

الوحدة 4

علاقات المثلثات

مخطط الوحدة

	الاستكشاف 4-5 45 دقيقة: 0.5 يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 4-5 45 دقيقة: 1.5 يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	الدرس 4-6 45 دقيقة: يومان 90 دقيقة: يوم
العنوان	**مختبر تقنية التمثيل البياني: متباينة المثلث**	**متباينة المثلث**	**المتباينات في مثلثين**
الأهداف	▪ استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.	▪ استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة. ▪ إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.	▪ تطبيق نظرية المفصَلة أو عكسها لعمل مقارنة بين مثلثين. ▪ إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المفصَلة أو عكسها.
المفردات الأساسية			

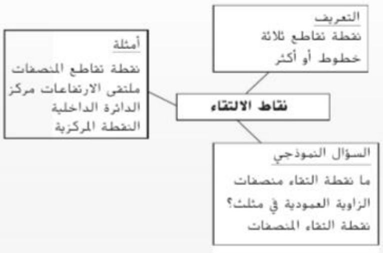
التقويم الختامي

دليل الدراسة والمراجعة

تمرين على الاختبار

مهارات دراسية

يمكن أن تساعد خريطة المفردات الطلاب على فهم معنى مصطلح ورد حديثًا. يصف نموذج خريطة المفردات على اليسار نقطة الالتقاء. اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات أو ثنائيات متعاونة لوضع خرائط للمصطلحات والمفاهيم الأخرى.



إنشاء الاستقلال من خلال إستراتيجيات يضعها الطلاب

ملاحظات

التقويم

	التشخيص	الحل
التقويم التشخيصي	**بداية الوحدة 4**	
	الاستعداد للوحدة 6 **كتاب الطالب**	الاستجابة للتدخل التقويمي **كتاب المعلم**
	بداية كل درس	
	السابق، الحالي، لماذا؟ **كتاب الطالب**	الوحدة 0 **كتاب الطالب**
التقويم الختامي	**أثناء/ بعد كل درس**	
	تمرين موجه **كتاب الطالب**، كل مثال التحقق من فهمك **كتاب الطالب** مسائل مهارات التفكير العليا **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلم** الخطوة 4، التقويم **كتاب المعلم**	
التقويم التكويني	**نصف الوحدة**	
	اختبار نصف الوحدة **كتاب الطالب**	
	اختبار ما قبل الوحدة	
	دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار المعياري **كتاب الطالب**	

التدريس المتمايز

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة AL OL BL

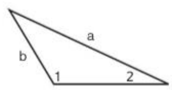
الطريقة البصرية قم بتجهيز لوح من الفلين مع دبابيس مكتب لاستخدامها كرؤوس مثلثات وخيوط ملونة بأطوال متنوعة لاستخدامها كأضلاع ومنصفات ووسيطات وارتفاعات للمثلثات. يستطيع الطلاب أن يتبادلوا الأدوار لاستخدام دبابيس المكتب والخيط لتمثيل الأنواع المختلفة من المثلثات ولوضع منصفات زوايا ومنصفات قطع مستقيمة ووسيطات وارتفاعات المثلثات.

طريقة التواصل اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات صغيرة للبحث عن أصول الهندسة، بما في ذلك أعمال يوكليد. اجعلهم يستكشفوا طريقة ابتكار إنشاءات المثلثات لأول مرة. لم يستطع اليونان القدماء مثلاً حساب نقطة المنتصف لأن نظام الأعداد عندهم لم يكن يحتوي على أعداد صحيحة أو أعداد نسبية. كان يتألف من أعداد كلية فقط. ولهذا تعذر على اليونان أن يقيسوا مستقيمًا اعتباطيًا ويقسموه على 2 لإيجاد نقطة المنتصف. أدت هذه المشكلة إلى استخدام فرجار وحافة مستقيمة. اجعل الطلاب يعملوا معًا لإنشاء عرض بصري لتعلمهم ليعرضوه على المجموعات الأخرى.

الطريقة الحسية الحركية يتعامل الكثير من الطلاب مع الهندسة بافتراض أن أي ثلاثة أضلاع يمكن أن توضع معًا لعمل مثلث بينما تتعارض فكرة نظرية متباينة المثلث مع هذا الافتراض. يستطيع الطلاب استخدام قطع مستقيمة بأطوال مختلفة (مقسمة إلى أطوال مختلفة باستخدام القش مثلاً) وإجراء تجارب لمعرفة الأطوال التي يمكن استخدامها لعمل مثلثات والتي لا يمكن استخدامها. انظر ما إذا كان الطلاب يستطيعون ابتكار "قاعدة" لتحديد ما إذا كان يمكن استخدام ثلاثة أضلاع بأطوال مختلفة لعمل مثلث قبل تقديم متباينة المثلث.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات صغيرة من مختلف القدرات لإثبات علاقات المثلثات ذات المتباينات. ارسم عدة مجموعات من المثلثات على اللوح إلى جانب العلاقات المحتملة بين زوايا المثلثات وأضلاعها. اجعل الطلاب يقرروا ما إذا كانت عبارات المتباينة صحيحة واجعلهم يكتبوا تفسيرًا لاستنتاجهم.



الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اجعل الطلاب يستكشفوا المهن التي تتطلب معرفة قوية بالهندسة. يحتاج المهندسون المعماريون إلى القدرة على تقييم المخططات ورؤيتها بناء على المساحة باستخدام قوانين هندسية لضمان أن الهياكل صحيحة وتبعث على السرور بصريًا. يستخدم مصممو الأبنية من الداخل التثليث لوضع الأعمال الفنية والملحقات الأخرى في غرفة بحيث يتحول المنظر العادي إلى منظر جميل. يستطيع الطلاب اختيار إجراء لقاء مع شخص يعمل في المجال الذي يختارونه أو القراءة عن المجال أو إجراء مسح لأمثلة من أعمال شخص يعمل في المجال حاليًا. ينبغي أن يعرضوا ما تعلموه على شكل ملصق أو في تقرير ويشاركوه مع الصف مع توضيح تطبيق من الحياة اليومية لعلاقات المثلث والمفاهيم الهندسية الأخرى.

التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 4

موضوعات ذات صلة من الصف 8

- تحديد العلاقات الخطية.
- التمثيل البياني على مستوى إحداثي.

موضوعات سابقة من الجبر 1

- تمثيل العلاقات باستخدام الجداول والتمثيل البياني.
- حل المعادلات الخطية.

الوحدة 4

موضوعات ذات صلة من الهندسة

- استخدام الميل ومعادلات المستقيمات لاستكشاف العلاقات الهندسية، بما في ذلك القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات.
- إدراك ومعرفة التطور التاريخي للنظم الهندسية ومعرفة أن الرياضيات تطورت لعدة أغراض.
- تحليل العلاقات الهندسية للتحقق من التخمينات.

بعد الوحدة 4

الإعداد لما قبل حساب التفاضل والتكامل

- حل مسائل من حالاتٍ فيزيائيةٍ باستخدام حساب المثلثات، بما في ذلك استخدام قانون الجيب وقانون جيب التمام وقوانين المساحة.

معاينة درس تلو الآخر

4-1 منصفات المثلثات

يُعتبر *المنصف العمودي* لضلع مثلث خطًا أو قطعة مستقيمة أو شعاعًا يمر عبر نقطة المنتصف لضلع ومتعامدًا على الضلع. المنصفات العمودية لها خواص خاصة. أي نقطة على المنصف العمودي لقطعة مستقيمة تقع على مسافة متساوية من نقاط نهاية القطعة المستقيمة. معكوس هذه العبارة صحيح أيضًا. تُسمى نقطة التقاء المنصفات العمودية في مثلث بنقطة التقاء المنصفات. تقع *نقطة التقاء المنصفات* في مثلث على مسافة متساوية من رؤوس المثلث.

منصفات الزوايا أيضًا لها خواص خاصة. تقع أي نقطة في منصف الزاوية على مسافة متساوية من أضلاع الزاوية. وأي نقطة داخل زاوية على مسافة متساوية من ضلعي الزاوية تقع على منصف الزاوية. يُسمى تقاطع منصفات الزوايا في مثلث *مركز الدائرة الداخلية*. يقع مركز الدائرة الداخلية لمثلث على مسافة متساوية من أضلاع المثلث.

4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

الوسيط قطعة مستقيمة بنقطتي نهاية تمثلان رأسًا في مثلث ونقطة المنتصف في الضلع المقابل للرأس. تُسمى نقطة التقاء الوسيطات في مثلث *النقطة المركزية*. تقع النقطة المركزية لمثلث على وسيط عند نقطة تقع على ثلثي المسافة من رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل للرأس.

ارتفاع المثلث قطعة متعامدة على ضلع في المثلث له رأس كنقطة نهاية ونقطة على المستقيم المحتوي على الضلع المقابل للرأس كنقطة النهاية الأخرى. يُسمى تقاطع الارتفاعات في مثلث *ملتقى الارتفاعات*.

الاسم	النوع	نقطة الالتقاء
منصف عمودي	المستقيم أو القطعة المستقيمة أو الإشعاع	مركز الدائرة المحيطة
منصّف الزاوية	المستقيم أو القطعة المستقيمة أو الإشعاع	مركز الدائرة الداخلية
وسيط	القطعة المستقيمة	نقطة مركزية
ارتفاع	القطعة المستقيمة	ملتقى الارتفاعات

4-3 المتباينات في مثلث واحد

في الجبر، تعلم الطلاب مفهوم المتباينة؛ لأي عددين حقيقيين a و b، $a > b$ فقط إذا كان هناك عدد موجب c بحيث تكون $a = b + c$. درس الطلاب أيضًا عدة خصائص للمتباينات في الأعداد الحقيقية. يطبّق الطلاب في هذا الدرس هذه المفاهيم على الزوايا.

تنص نظرية متباينة الزاوية الخارجية على أنه إذا كانت الزاوية خارجية في مثلث، فإن قياسها أكبر من قياس أي من زاويتيها الداخليتين المتناظرتين غير المتجاورتين. تستند نظرية متباينة أخرى في الهندسة على العلاقة بين ضلع والرأس المقابل لذلك الضلع. إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر، فقياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر. والمعكوس صحيح أيضًا؛ إذا كان قياس زاوية في مثلث أكبر من زاوية أخرى، فالضلع المقابل للزاوية الأكبر أطول من الضلع المقابل للزاوية الأقل.

4-4 البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر، أو *البرهان بالتناقض*، أسلوب لإثبات صحة عبارة بافتراض أنها خاطئة أولاً. توضح الخطوات التالية للبرهان غير المباشر أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع فرضية أو مع حقيقة ثابتة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية أو لازمة. وفي النهاية يتم رفض الافتراض لأنه يؤدي إلى تناقض، ولهذا فالعبارة الأصلية مقبولة باعتبارها صحيحة. يمكن استخدام البرهان غير المباشر في كل من الجبر والهندسة.

4-5 متباينة المثلث

تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث يزيد على طول الضلع الثالث. يمكن استخدام هذه النظرية في تحديد ما إذا كانت القطع المستقيمة الثلاث بالأطوال المحددة تشكل مثلثًا.

القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستقيم هي القطعة المستقيمة الأقصر من تلك النقطة إلى المستقيم. يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية وتؤدي إلى لازمة بأن القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستوى هي القطعة المستقيمة الأكثر من النقطة إلى المستوى.

4-6 المتباينات في مثلثين

يتوسع هذا الدرس في النظرية 6.11 ليطبقها على مثلثين. تنص تلك النظرية على أنه إذا كان ضلعان في مثلث مطابقين لضلعين في مثلث آخر وقياس الزاوية المحصورة في أحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الآخر، فالضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني. يُسمى هذا بنظرية المفصلة. معكوس نظرية المفصلة صحيح أيضًا. إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعين في مثلث آخر والضلع الثالث في أحد المثلثين أطول من الضلع الثالث في المثلث الآخر، فالزاوية بين الضلعين المتطابقين في المثلث الأول أكبر من الزاوية المقابلة في المثلث الثاني.

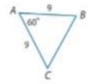
الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

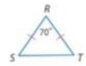
مراجعة سريعة

أوجد قياس كل مما يلي.

1. BC **9**



2. $m\angle RST$ **55**



3. **الحدائق** يصمم خميس حوض أزهار على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول ضلعين من أضلاع حوض الأزهار يساوي 7 أقدام، فما طول الضلع الثالث مع التقريب إلى أقرب قدم؟ **10 ft**

خمِّن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة.

4. $\angle 3$ و $\angle 4$ تشكلان زوجًا خطيًا. **4–7. انظر الهامش.**
5. $JKLM$ عبارة عن مربع.
6. $\overrightarrow{BD}$ عبارة عن منصف للزاوية $\angle ABC$.
7. **الاستنتاج** حدد إذا ما كان الاستنتاج التالي صحيحًا دائمًا، أم *أحيانًا*، أم غير صحيح على الإطلاق استنادًا إلى المعلومات المعطاة. علل استنتاجك.

المعطيات: تقع النقاط D، و E، و F على مستقيم واحد

التخمين: $DE + EF = DF$

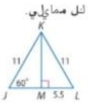
حل كل متباينة مما يلي.

8. $x + 13 < 41$ **$x < 28$**
9. $x - 6 > 2x$ **$-6 > x$**
10. $6x + 9 < 7x$ **$x > 9$**
11. $8x + 15 > 9x - 26$ **$x < 41$**
12. **الأناشيد** أضافت غادة 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل MP3 الخاص بها، ليصل الإجمالي إلى أكثر من 120 نشيد. كم عدد الأناشيد التي كانت على المشغل في الأساس؟ **الإجابة النموذجية: $x > 105$**

تدريب سريع

مثال 1 **(مستخدم بالدروس من 4-1 إلى 4-3)**

أوجد قياس كل مما يلي.



a. JM

$m\angle J = m\angle L$. إذا $m\angle L = 60$، و $\overline{JM} \cong \overline{LM}$ حسب عكس نظرية المثلث متساوي الساقين. بما أن $LM = 5.5$، فإن $JM = 5.5$ عن طريق التعويض.

b. $m\angle JKL$

$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180$	نظرية الجمع △
$60 + m\angle JKL + 60 = 180$	$m\angle J = m\angle L = 60$
$120 + m\angle JKL = 180$	بسّط
$m\angle JKL = 60$	اطرح

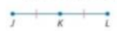
مثال 2 **(مستخدم في الدرس 4-4)**

K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. خمِّن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة وارسم شكلًا يصور تخمينك.

المعطيات: K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. J، K، و L هي نقاط على خط واحد، ويقع K على مسافة متساوية بين J و L.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

التحقّق: ارسم $\overline{JL}$. وهذا يصور التخمين.



مثال 3 **(مستخدم في الدرسين 4-5 و 4-6)**

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$.

$3x + 5 > 2x$	مُعطى
$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$	اطرح
$5 > -x$	بسّط
$-5 < x$	اقسم

203

الأسئلة الأساسية

- ما الذي يجعل المثلث مثلثًا؟ **الإجابة النموذجية: ثلاثة أضلاع، ثلاث زوايا، قياسات زوايا يبلغ مجموعها 180**
- ما الارتباط بين الأضلاع والزوايا في مثلث؟ **الإجابة النموذجية: الضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر والضلع الأصغر يقابل الزاوية الأصغر.**

مطويات® منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك®

التركيز يدون الطلاب الملاحظات ويضعون تعريفات المصطلحات ويسجلون المفاهيم ويكتبون البراهين المتعلقة بالعلاقات في المثلثات.

التدريس بعد أن يصنع الطلاب مطويتهم، اجعلهم يضعوا تسميات التبويبات لتلائم الدروس الستة في هذه الوحدة. ينبغي أن يكتب الطلاب فقرة وصفية حول المفاهيم والمفردات والنظريات في كل درس ويكتبوا ملاحظة خاصة عن أي رسوم يمكنها أن تحسن هذا الوصف.

متى تستخدمها استخدم التبويبات الملائمة مع تغطية الطلاب لكل درس في هذه الوحدة. يمكن إضافة تبويب المفردات لكل درس.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 6. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

علاقات المثلثات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على الوحدة 4 حول علاقات المثلثات. ابدأ باستخدام سبع ورقات من ورق الرسم البياني.

1 **اجمع** الورق فوق بعضه. اطو الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلية لتشكيل مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية.

2 **اطوِ** الجزء المستطيل إلى نصفين.

3 **قم** بتثبيت الورق بطول الثنية المستطيلة الشكل في أربعة أماكن.

4 **قم** بتسمية كل ورقة برقم أحد الدروس، والتبويب مستطيل الشكل بعنوان الوحدة.

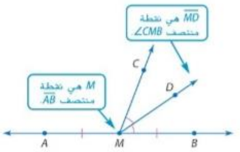
المفردات الجديدة

منصف عمودي (perpendicular bisector)
مستقيمات متلاقية (concurrent lines)
نقطة الالتقاء (point of concurrency)
مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
مركز الدائرة الداخلية (incenter)
متوسط (median)
نقطة مركزية (centroid)
ارتفاع (altitude)
ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
برهان غير مباشر (indirect proof)
برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسّم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين

نقطة المنتصف هي النقطة الموجودة على قطعة مستقيمة بمنتصفها تمامًا بين أطرافها



1 التركيز

الهدف إنشاء منصفات عمودية ومنصفات زوايا في المثلثات.

نصيحة للتدريس

يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب مع الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث نفسه.

الطريقة البديلة

يمكن أيضًا استكمال الإنشاءات المعروضة في هذا الدرس باستخدام أسلوب المسطرة العادية والفرجار.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. يستكمل كل طالب أحد هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. يتناوب الطلاب خطوات الإنشاء 1 و 2.

تمرين اجعل الطلاب يستكملوا التمرين 1 أثناء إجراء النشاطات.

الاستكشاف 4-1

مختبر الهندسة
إنشاء المنصفات

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

الإنشاء منصف عمودي

أنشئ منصفًا عموديًا على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle MPQ$. وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2

اطوي المثلث من منتصفه $\overline{MQ}$ بحيث تلمس الرأس M الرأس Q.

الخطوة 3

استخدم مسطرة لرسم $\overline{AB}$ بطول الثنية. $\overline{AB}$ هو المنصف العمودي على $\overline{MQ}$.

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

الإنشاء منصف الزاوية

أنشئ منصف زاوية لأي مثلث.

الخطوة 1

ارسم $\triangle ABC$. وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2

اطوي المثلث إلى نصفين من الرأس A. بحيث يكون الضلعان $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ محاذيين لبعضهما

الخطوة 3

حدد النقطة L في الثنية بطول الحافة $\overline{BC}$. استخدم مسطرة لرسم $\overline{AL}$ بطول الثنية. $\overline{AL}$ هو منصف زاوية في $\triangle ABC$.

النموذج والتحليل

1. أنشئ منصفين عموديين على الضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. أنشئ منصفين للزوايا على الزاويتين الأخريين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ بشأن تقاطعهما؟ **راجع عمل الطلاب. يتقاطعان عند نفس النقطة.**

كرر طريقتي الإنشاء لكل نوع من المثلثات. **4–2. راجع عمل الطلاب.**

2. حاد
3. منفرج
4. قائم

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 4-2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يدركون مفهوم المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا وإنشاءها.

من العملي إلى النظري

امنح الطلاب الأنواع الثلاثة من المثلثات المذكورة في التمارين 4-2. أبلغهم بأنك تريدهم أن يجعلوا كل مثلث يتوازن على قلم. اجعلهم ينتقون طريقة إنشاء ويشرحون.

الدرس 4-1 منصفات المثلثات

:: السابق

- لقد استخدمت مُنصِّفات القطع المستقيمة والزوايا.

:: الحالي

1. تحديد المُنصِّفات العمودية في المثلثات واستخدمها.
2. تحديد مُنصِّفات الزوايا في المثلثات واستخدمها.

:: لماذا؟

- إن إنشاء مثلث عمل في المطبخ من شأنه تحسين كفاءة عملية تحضير الطعام من خلال تقليل عدد الخطوات التي ينبغي اتخاذها. لتحديد النقطة التي تقع على مسافة واحدة من الحوض ومن الفرن ومن الثلاجة، يمكنك استخدام المُنصِّفات العمودية للمثلث.

المفردات الجديدة

مُنصِّف عمودي (perpendicular bisector)

المستقيمات المتقاطعة (concurrent lines)

نقطة التقاطع (point of concurrency)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

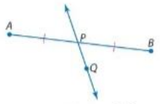
مركز الدائرة الداخلية (incenter)

ممارسات في الرياضيات

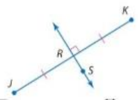
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المُنصِّفات العمودية

لقدتعلمت أن المستقيم المُنصِّف هو أي قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة بمنتصفها. إذا كان المُنصِّف عمودي أيضًا على القطعة المستقيمة، فإنه يُسمى **مُنصِّف عمودي**.



$\overleftrightarrow{PQ}$ هو منصف $\overline{AB}$.



$\overleftrightarrow{RS}$ هو منصف عمودي لـ $\overline{JK}$

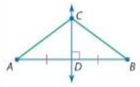
تذكر أن *المحل الهندسي* هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا مُعينًا. كما أن المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة هو محل هندسي لنقاط في مستوى تقع على مسافة واحدة من أطراف القطعة المستقيمة. هذا ينقلنا إلى النظريات التالية.

نظريات المُنصِّفات العمودية

4.1 نظرية المُنصِّفات العمودية

إذا وُجدت نقطة على المُنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة ما، إذًا فهي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.

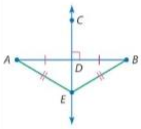
مثال: إذا كان $\overline{CD}$ هو مُنصِّف ⊥ $\overline{AB}$، إذًا $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية المُنصِّفات العمودية

إذا وُجدت نقطة تقع على مسافة واحدة من طرفي قطعة مستقيمة ما، إذًا فهي على المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة.

مثال: إذا كان $AE = BE$، إذًا E تقع على $\overline{CD}$، المُنصِّف ⊥ لـ $\overline{AB}$.



سوف تقوم بإثبات نظريتي 4.1 و 4.2 من خلال التمرينين 39 و 37، على الترتيب.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-1 استخدام منصفات القطعة المستقيمة والزاوية.

الدرس 4-1 تحديد المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-1 الربط بين التمثيل الجبري والهندسي للوظائف.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا يمكن لمثلث عمل أن يكون مفيدًا في تصميم مطبخ؟ إنه يقلل من عدد الخطوات المطلوبة.
- أين يمكن وضع جزيرة في هذا المثلث؟ نقطة على مسافة مساوية من الثلاجة والموقد والحوض.
- هل تقع هذه النقطة دائمًا عند نقطة المنتصف لكل ضلع في المثلث؟ لماذا؟ الإجابة النموذجية: لا. فهي في الصورة ليست عند نقطة منتصف الضلع الواصل بين الموقد والحوض.

1 المنصفات العمودية

المثال 1 يوضح كيفية استخدام منصفات الزوايا لإيجاد القياسات في شكل.
المثال 2 يوضح كيفية استخدام مركز الدائرة المحيطة لتحديد موقع نقطة في شكل.

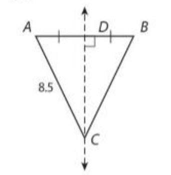
التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

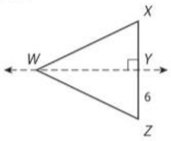
1 أوجد قياس كل مما يلي.

a. BC



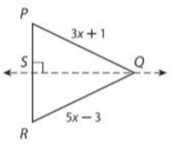
8.5

b. XY



6

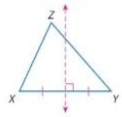
c. PQ



7

نصيحة دراسية

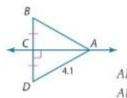
المُنصِّفات العمودية ليس بالضرورة أن يمر المُنصِّف العمودي لأحد أضلاع المثلث برأس المثلث. على سبيل المثال، في $\triangle XYZ$ أدناه، نجد أن المُنصِّف العمودي لـ $\overline{XY}$ لا يمر بالنقطة Z.



مثال 1 استخدام نظريات المُنصِّفات العمودية

أوجد قياس كل مما يلي.

a. AB

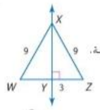


من المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{BD}$.

$AB = AD$ نظرية المُنصِّف العمودي

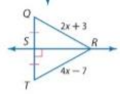
$AB = 4.1$ تعويض

b. WY



بما أن $WX = ZX$ و $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$, $\overleftrightarrow{XY}$ هو المُنصِّف العمودي لـ $\overline{WZ}$ وفقًا لعكس نظرية المُنصِّف العمودي. وفقًا لتعريف مُنصِّف القطعة المستقيمة، $WY = YZ$. بما أن $WY = 3$ ،$YZ = 3$.

c. RT



$\overleftrightarrow{SR}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظرية المُنصِّف العمودي

$4x - 7 = 2x + 3$ بالتعويض

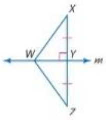
$2x - 7 = 3$ طرح $2x$ من كل طرف

$2x = 10$ اجمع 7 لكل طرف

$x = 5$ اقسم كل طرف على 2

فإن $RT = 4(5) - 7$ أو 13.

تمرين موجه



1A. إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$ و $WZ = 25.3$ أوجد XY. **22.4**

1B. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ و $WZ = 14.9$. فأوجد WX. **14.9**

1C. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ. $WX = 4a - 15$ و $WZ = a + 12$ فأوجد WX. **21**

عندما تتقاطع ثلاث مستقيمات أو أكثر عند نقطة مشتركة، فإن المستقيمات تُسمى **مستقيمات متقاطعة**. والنقطة التي تتقاطع بها المستقيمات المتقاطعة تُسمى **نقطة التقاطع**.

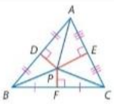
الخطوط a, b, c متقاطعة عند النقطة P.

بما أن للمثلث ثلاثة أضلاع، فإن لديه ثلاث مُنصِّفات عمودية. تعتبر المُنصِّفات مستقيمات متقاطعة. وتُسمى نقطة تقاطع المُنصِّفات العمودية **نقطة تقاطع مُنصِّفات** أضلاع المثلث.

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة المحيطة

الشرح تتقاطع المُنصِّفات العمودية لأضلاع المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة المحيطة* بحيث تكون على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

مثال إذا كانت P هي نقطة تقاطع المُنصِّفات لـ $\triangle ABC$، إذًا $PB = PA = PC$.

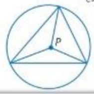


التدريس المتمايز OL AL

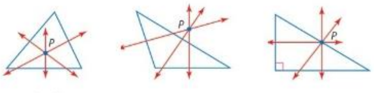
المتعلمون أصحاب النمط البصري توقع أن يجد بعض الطلاب المفاهيم والمفردات في هذا الدرس مربكة. امنح وقتًا إضافيًا لكل المفاهيم في هذا الدرس. بعد كل مفهوم، اقترح أن يساهم الطلاب في ملصق في الصف يوضح المفاهيم والحقائق المختلفة بشأنها. وراجع أيضًا المفاهيم أثناء استكمالك لها مع مناقشة أوجه التشابه والاختلاف بينها.

قراءة في الرياضيات

المحيط- كلمة المحيط- تعني الشيء الذي يكون من جميع الجهات أو الإطار الخارجي. فنقطة تقاطع المُنصّفات هي مركز الدائرة التي تمس رؤوس المثلث من الخارج.

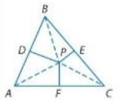


قد تقع نقطة تقاطع المُنصّفات داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد | مثلث منفرج | مثلث قائم

إثبات نظرية مركز الدائرة المحيطة



المعطيات: $\overline{PD}$ و $\overline{PF}$ و $\overline{PE}$ هم مُنصّفات عمودية لـ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$. على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

الفقرة الإثباتية:

بما أن P يقع على المُنصّف العمودي لـ $\overline{AC}$، فإنها تكون على مسافة واحدة من A و C. باستخدام تعريف المسافة الواحدة، $AP = CP$. تقع P على المُنصّف العمودي لـ $\overline{BC}$، فإن، $CP = BP$. باستخدام خاصية التعدي في المساواة، $AP = BP$. فإن، $AP = CP = BP$.

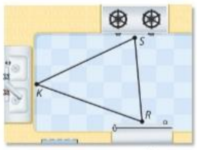
الربط بالحياة اليومية

من إحدى القواعد الأساسية لمساحة العمل المثلثة بالمطبخ هي ألا تكون أضلاع المثلث أكبر من 9 أقدام وألا تكون أقل من 4 أقدام. كما لا ينبغي أن يكون محيط المثلث أكبر من 26 قدمًا أو أقل من 12 قدمًا.

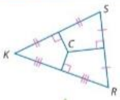
المصدر: شركة ميريلات

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة

تصميم داخلي فرن S، حوض K، و ثلاجة R موضوعة في مطبخ بالشكل الموضح. أوجد موقعًا متوسطًا لطاولة تحضير الطعام بحيث تكون على مسافة واحدة من هذه النقاط الثلاث.



باستخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة، يمكن إيجاد نقطة تقع على مسافة واحدة من ثلاث نقاط باستخدام المُنصّفات العمودية للمثلث الذي تشكل هذه النقاط الثلاث رؤوسه.



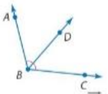
انسخ $\triangle SKR$، واستخدم مسطرة ومنقلة لرسم المُنصّفات العمودية. موقع المركز الذي ستوضع فيه الطاولة هو C، نقطة تقاطع مُنصّفات $\triangle SKR$.

تمرين موجه

2. يحتاج جاسم عند ري حديقته المثلثة إلى وضع آلة رش على مسافة واحدة من كل رأس من رؤوس مثلث الحديقة. أين ينبغي على جاسم وضع آلة الرش؟ **انظر الهامش.**

2 مُنصّفات الزاوية

تذكر أن مُنصّف الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. قد يكون مُنصّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو شعاعًا.

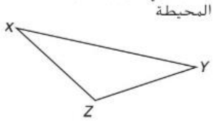


$\overrightarrow{BD}$ هو منصف الزاوية $\angle ABC$.

يمكن وصف مُنصّف الزاوية بأنه محل هندسي للنقاط الموجودة داخل الزاوية التي تقطع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية. ينقلنا هذا الوصف إلى النظريات التالية.

مثال إضافي

2 الحديقة تظهر حديقة على شكل مثلث. هل يمكن وضع نافورة في مركز الدائرة المحيطة



لا. يقع مركز الدائرة المحيطة بمثلث منفرج الزاوية خارج المثلث.

إرشاد للمعلمين الجدد

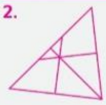
توضيح المفردات اشرح أن مركز الدائرة المحيطة لا يقع بالضرورة داخل المثلث. ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع منفرج الزاوية بزوايا تبلغ $10°$ و $10°$ و $160°$ لتوضيح مركز دائرة محيطة خارج مثلث.

التركيز على محتوى الرياضيات

فهم الكلمات يحتوي هذا الدرس على الكثير من المصطلحات التي لها سابقة أو لاحقة مرتبطة بجذر الكلمة. عليك أن تؤكد للطلاب أن كل سابقة أو لاحقة ستساعدهم في الفهم. على سبيل المثال، **circum** تعني "حول" أو "محيط". circumcenter (مركز الدائرة المحيطة) في مثلث هو مركز دائرة تحيط بالمثلث.

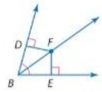
إجابات إضافية (تمرين موجّه)

2.



نظريات مُنصِّفات الزاوية

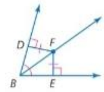
4.4 نظرية مُنصِّفات الزاوية



إذا وُجدت نقطة على مُنصِّف زاوية ما، فإنها تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$، $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$، و $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$.
فإن $DF = FE$.

4.5 معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية



إذا وُجدت نقطة داخل الزاوية تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإنها تقع على مُنصِّف الزاوية.

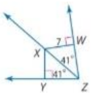
مثال: إذا كان $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$، $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$، و $DF = FE$.
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.

سوف تقوم بإثبات النظريتين 4.4 و 4.5 من خلال التمرينين 43 و 40.

مثال 3 استخدام نظريات مُنصِّف الزاوية

أوجد قياس كل مما يلي.

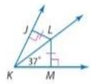
a. XY



$XY = XW$ نظرية مُنصِّف الزاوية

$XY = 7$ بالتعويض

b. $m\angle JKL$



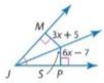
بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$، $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$، $\overline{LJ} \cong \overline{LM}$،
L يقع على مسافة واحدة من ضلعي $\angle JKM$.
باستخدام معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية
نظرية $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف مُنصِّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37$ بالتعويض

c. SP



$SP = SM$ نظرية مُنصِّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ بالتعويض

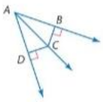
$3x - 7 = 5$ اطرح $3x$ من كل جانب.

$3x = 12$ اجمع 7 مع كل طرف.

$x = 4$ اقسم كل طرف على 3.

إذًا، $SP = 6(4) - 7$ أو تساوي 17

تمرين موجه



3A. إذا كان $m\angle BAC = 38, BC = 5, DC = 5$، فأوجد $m\angle DAC$. **38**

3B. إذا كان $m\angle BAC = 40, m\angle DAC = 40, DC = 10$، فأوجد BC. **10**

3C. إذا كان $\overrightarrow{AC}$ تنصف $\angle DAB$، $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$، فأوجد BC. **20**

نصيحة دراسية

مُنصِّف الزاوية بالنسبة للجزء **b**، فإن عدم توفر أي معطيات سوى أن $JL = LM$ لن يكون كافيًا لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

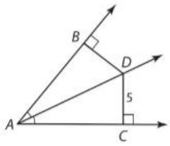
2 منصفات الزوايا

المثال 3 يوضح كيفية استخدام نظرية منصف الزاوية. **المثال 2** يوضح كيفية استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية.

مثال إضافي

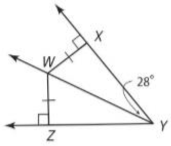
3 أوجد قياس كل مما يلي.

a. DB



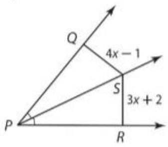
5

b. $m\angle WYZ$



28

c. QS



11

انتبه!

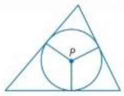
التعويض في الجزء c من المثال 3، لا يكفي أن تصل إلى قيمة المتغير x. لإيجاد طول $\overline{SP}$، تحتاج إلى إيجاد قيمة $6x - 7$.

إرشاد للمعلمين الجدد

تعريفات اجعل الطلاب يبحثوا عن تعريفات المنصفات والوسيطات والارتفاعات. ينبغي أن يقارنوا بين تعريفات الرياضيات والتعريفات في الحياة اليومية ليصلوا إلى فهم شامل للمعاني.

قراءة في الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية هو مركز الدائرة التي تتقاطع مع كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. لهذا السبب، يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث.

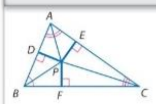


ونفس الشيء ينطبق على المُنصّفات العمودية. فبما أن المثلث له ثلاث زوايا، فإن له أيضًا ثلاث مُنصّفات زوايا. إن مُنصّفات زاوية المثلث متقاطعة، ونقطة تقاطعها تُسمى **مركز الدائرة الداخلية** للمثلث.

نظرية 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية

الشرح تتقاطع مُنصّفات زوايا المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة الداخلية* بحيث تكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث.

مثال إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$، فإن $PD = PE = PF$.

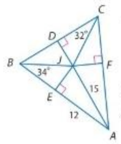


سوف تثبت النظرية 4.6 في تمرين 338

مثال 4 استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية

أوجد قياس كل مما يلي إذا علمت أنَّ J هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a. JF



باستخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية، بما أن $JF = JE$ وبما أن J تقع على مسافة واحدة من أضلاع $\triangle ABC$. أوجد JF باستخدام نظرية فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$JE^2 + 144 = 225$	$15^2 = 225$ و $12^2 = 144$
$JE^2 = 81$	بطرح 144 من كل طرف
$JE = \pm 9$	بحساب الجذر التربيعي من كل طرف

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، استخدم الجذر التربيعي الموجب فقط وهو 9.
بما أن $JE = JF$, $JF = 9$.

b. $m\angle JAC$

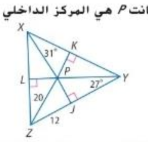
بما أن $\overrightarrow{BJ}$ تنصف $\angle CBE$، $m\angle CBE = 2m\angle JBE$. إذًا $m\angle CBE = 2(34)$ أو 68.
وبالمثل، $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$. إذًا $m\angle DCF = 2(32)$ أو تساوي 64.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$68 + 64 + m\angle FAE = 180$	$m\angle CBE = 68, m\angle DCF = 64$
$132 + m\angle FAE = 180$	بسِّط
$m\angle FAE = 48$	بطرح 132 من كل طرف

بما أن $\overrightarrow{AJ}$ تنصف $\angle FAE$، $2m\angle JAC = m\angle FAE$. فهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$ إذًا $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48)$ أو 24.

تمرين موجه

إذا كانت P هي المركز الداخلي لـ $\triangle XYZ$، أوجد قياس كل مما يلي.

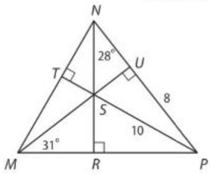


4A. PK 16

4B. $m\angle LZP$ 32

مثال إضافي

4 أوجد قياس كل مما يلي إذا كان S هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle MNP$.



a. SU 6

b. $m\angle SPU$ 31

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

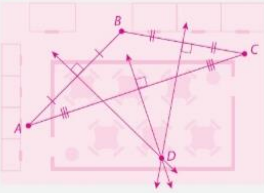
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسارًا للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمرين 8، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

إجابة إضافية

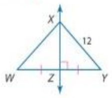
4.



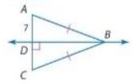
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

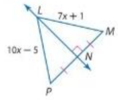
1. XW **12**



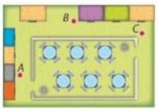
2. AC **14**



3. LP **15**

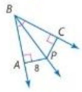


مثال 2 4. **إعلان** أربع صديقات يتبادلن النشرات الإعلانية بساحة طعام بأحد المراكز التجارية. أخذت ثلاث منهن ما استطعن جمعه من النشرات الإعلانية وجلسن كما هو موضح. تحتفظ الصديقة الرابعة بمخزون إضافي من النشرات الإعلانية. انسخ مواضع النقاط A, B, C. ثم عيّن موقع الصديقة الرابعة عند النقطة D حتى تكون على مسافة واحدة من الصديقات الثلاث الأخريات. **انظر الهامش.**

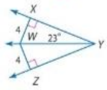


مثال 3 **أوجد قياس كل من الآتي.**

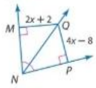
5. CP **8**



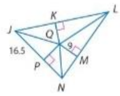
6. $m\angle WYZ$ **23**



7. QM **12**



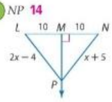
مثال 4 8. **الاستنتاج المنطقي** أوجد JQ إذا كانت Q هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$. **18.8**



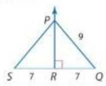
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

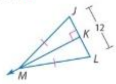
9. NP **14**



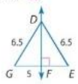
10. PS **9**



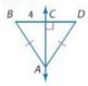
11. KL **6**



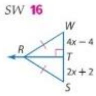
12. EG **10**



13. CD **4**



14. SW **16**



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

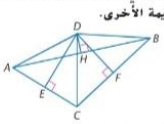
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-30, 48-51, 54-69	55-58 ,فردي 9-29	10-30 ,زوجي 48-51, 54. 59-69
OL أساسي	9-35 ,فردي 36, 37-43 ,فردي 44, 45, 47, 48-51, 54-69	9-30, 55-58	31-51, 54, 59-69
BL متقدم	32-67, (اختياري: 68, 69)		

مثال 2

15. **المعرض الوطني** تم تحديد مواقع جناح الملاهي ومسابقات الماشية وبائعي المواد الغذائية في المعرض الوطني.
قرر المخططون للمعرض وضع دورات المياه المتنقلة على مسافة واحدة من كل موقع. انسخ مواضع النقاط M, L و F.
ثم أوجد موقع دورات المياه وسمها النقطة R. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

16. **المدرسة** أنشأت إدارة مجمع مدارس مبنى للحلقة الاولى وآخر للحلقة الثانية وآخر للحلقة الثالثة كما هو موضح بالرسم التخطيطي. انسخ مواضع النقط M, E و H. ثم أوجد موقع ساحة الحافلات B التي ستخدم هذه المدارس الثلاثة بحيث تكون الساحة على نفس المسافة من كل المدارس. **انظر الهامش.**

النقطة D هي مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$. اذكر أي القطع المستقيمة تتطابق مع القطع المستقيمة الأخرى.



17. $\overline{AD}$ $\overline{CD}, \overline{BD}$

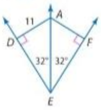
18. $\overline{BF}$ $\overline{CF}$

19. $\overline{AH}$ $\overline{BH}$

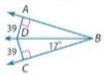
20. $\overline{DC}$ $\overline{DA}, \overline{DB}$

أوجد قياس كل مما يلي.

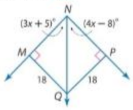
21. AF **11**



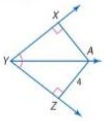
22. $m\angle DBA$ **17**



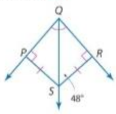
23 $m\angle PNM$ **88**



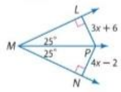
24. XA **4**



25. $m\angle PQS$ **42**

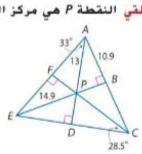


26. PN **30**



مثال 4

الاستنتاج المنطقي **النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$. أوجد قياس كل مما يلي.**



27. PB **7.1**

28. DE **13.1**

29. $m\angle DAC$ **33**

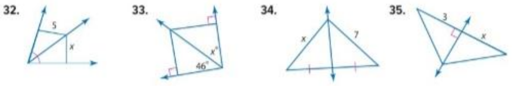
30. $m\angle DEP$ **28.5**

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسارًا للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمارين من 27 إلى 30، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

31 **تصميم داخلي** إذا أردت وضع مزهرية على طاولة ركنية بحيث تكون على مسافة واحدة من جميع حواف الطاولة. اصنع رسمًا تخطيطيًا لتوضيح موقع المزهرية. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

حدد ما إذا كانت المعلومات المعطاة بكل رسم تخطيطي كافية لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك. **32. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة عمودية على الأشعة.**



B

33. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة العمودية متساوية.

34. لا؛ نريد معرفة ما إذا كان مُنصف القطعة المستقيمة هو مُنصف عمودي.

35. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت أوتار المثلث متطابقة.

36. **كرة قدم** يتجه لاعب كرة القدم P إلى مرمى الفريق الخصم كما هو موضح بالرسم التخطيطي. لإحراز الهدف، ينبغي على اللاعب ركل الكرة بين عارضتي المرمى عند النقطتين L و R. يقف حارس المرمى أمام اللاعب. ثم حاول الحارس الوقوف بطريقة تساعده على القفز بجسده لإيقاف الركلة، بحيث يبعد عن الضلع الأيسر لزاوية التسديد بنفس المسافة التي يبعد بها عن الضلع الأيمن لزاوية التسديد. **a–c. انظر الهامش.**

a. صف الموقع الذي ينبغي على الحارس الوقوف عنده. اشرح استنتاجك.

b. انسخ $\triangle PRL$. استخدم منقلة ومسطرة لتحديد النقطة G التي ينبغي على الحارس الوقوف عندها.

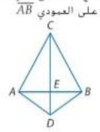
c. إذا تم ركل الكرة لتتبع المسار من P إلى R، حدد أقصر مسار ينبغي على حارس المرمى اتباعه لصد الركلة. اشرح استنتاجك.

الإثبات اكتب إثباتًا من عمودين. **37-38. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

37. النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

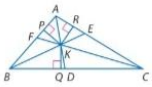
الإثبات: تقع النقطتان C و D على العمودي $\overline{AB}$



38. النظرية 4.6

معطى: مُنصّفات زوايا $\triangle ABC$.
$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$
$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC},$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

الإثبات: $KP = KQ = KR$



الفرضيات اكتب الفقرة الإثباتية لكل نظرية.

39. النظرية 4.1 **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

40. النظرية 4.5 **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة بالأطراف المعطاة. علل إجابتك.

41. $A(-3, 1)$ و $B(4, 3)$ **انظر الهامش.**

42. $C(-4, 5)$ و $D(2, -2)$ **انظر الهامش.**

41. $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$؛ يقطع المنصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. ميل القطعة المستقيمة المذكورة هو $\frac{2}{7}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو $-\frac{7}{2}$.

42. $y = \frac{6}{7}x + \frac{33}{14}$؛ يقطع المنصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$. ميل القطعة المستقيمة المحددة هو $-\frac{7}{6}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو $\frac{6}{7}$.

ملاحظات لحل التمرين

الفرجار والحافة المستقيمة

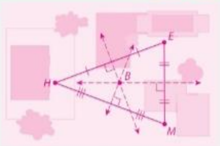
تتطلب التمارين 4 و 15 و 16 و 36 و 44 و 49 استخدام فرجار وحافة مستقيمة.

تدريس الممارسات في الرياضيات

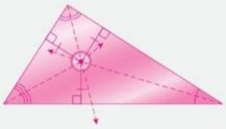
الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمرينين 39 و 40، شجّع الطلاب على رسم كل شكل قبل البدء في وضع البرهان.

إجابات إضافية

16.



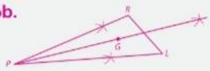
31.



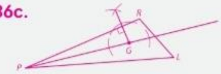
أوجد نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث، مركز الدائرة الداخلية. تقع هذه النقطة على مسافة متساوية من كل ضلع في المثلث.

36a. ينبغي أن يقف حارس المرمى بطول منصف زاوية ركلة الخصم بما أن المسافة لأي من ضلعي الزاوية واحدة بطول هذا الخط.

36b.



36c.



أقصر مسافة بين مستقيم ونقطة ليست على هذا المستقيم هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من هذه النقطة.

43. الإثبات اكتب إثباتًا من عمودين للنظرية 4.4. **انظر الهامش.**

44. تصميم بياني تقوم خولة بتصميم علم مثلث لمدرستها. فهي تريد وضع صورة لشعار المدرسة داخل دائرة في العلم الرياضي. انسخ رسمة العلم المثلث وحدد موقع النقطة التي ستكون مركز الدائرة لعمل أكبر دائرة ممكنة. علل رسمك. **انظر الهامش.**

هندسة إحداثية حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة للمثلث ذي الرؤوس المعطاة. اشرح.

45. $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$ **انظر الهامش.**

46. $J(5, 0), K(5, -8), L(0, 0)$ **انظر الهامش.**

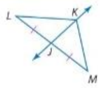
47. محل هندسي فكر في $\overline{CD}$. صف مجموعة كل النقاط الموجودة في الفراغ الواقع على مسافة واحدة من C و D.

ثمة مستوى عمودي على مستوى آخر حيث $\overline{CD}$ يقع على $\overline{CD}$ وينصفها

48. أسماء. النقطة K تقع فقط على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{LM}$ إذا كان $\overline{LK} \cong \overline{MK}$ ولكن لا توجد هذه المعلومات في الرسم التخطيطي.

مهارات التفكير العليا مسائل

48. تحليل الخطأ يقول حليم إنه بعد اطلاعه على المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، يمكنه استنتاج أن K تقع على المنصّف العمودي لـ $\overline{LM}$. لا يوافق حمادة على هذا الرأي. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



49. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثلثًا به مركز دائرة داخلية يقع داخل المثلث ولكن مع وجود مركز الدائرة المحيطة خارج المثلث. برر رسمك باستخدام مسطرة ومنقلة لإيجاد نقطتي التقاطع. **انظر الهامش.**

فرضيات حدّد ما إن كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا* أو *صحيحة دائمًا*، أو غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك باستخدام مثال مضاد أو إثبات.

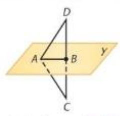
50. تتقاطع مُنصّفات زوايا المثلث في نقطة تقع على مسافة واحدة من رؤوس المثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

51. في المثلث المتساوي الساقين، يكون المنصّف العمودي للقاعدة هو أيضًا مُنصّف زاوية الرأس المقابل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

تحدٍّ اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ من التالي.

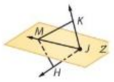
52. المعطيات: المستوى Y عمودي على مُنصّف $\overline{DC}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

الإثبات: $\angle ADB \cong \angle ACB$



53. المعطيات: المستوى Z هو مُنصّف زاوية $\angle KJH, \overline{KJ} \cong \overline{HJ}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

اثبت أن: $\overline{MH} \cong \overline{MK}$



54. الكتابة في الرياضيات قارن بين المنصّفات العمودية ومُنصّفات زوايا المثلث. ما أوجه الشبه بينها؟ وما أوجه الاختلاف بينها؟ تأكد من مقارنة نقاط تقاطعها. **انظر الهامش.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 48. ينبغي أن يدرك الطلاب أنه لا توجد معلومات متاحة بخصوص الزاوية التي يشكلها المنصف. ترى حليمة أن المستقيم ينصف القطعة المستقيمة إلى طولين متساويين، لكنها تعتقد أنه عمودي لمجرد أنه يبدو كذلك.

إجابات إضافية

43. المعطيات: $\overline{PX}$ تنصف $\angle QPR$، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب إثباته: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{PX}$ **تنصف** $\angle QPR, \overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$. (معطى)
2. $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\angle PYX$ و $\angle PZX$ زاويتان قائمتان. (تعريف المنصف العمودي)
4. $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزوايا القائمة متطابقة.)
5. $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)
6. $\triangle PYX \cong \triangle PZX$ (AAS)
7. $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (CPCTC)

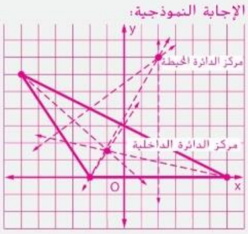
44.

عندما تكون الدائرة كبيرة قدر الإمكان، ستلمس كل الأضلاع الثلاثة للعلم المثلث. نحتاج إلى إيجاد مركز الدائرة الداخلية للمثلث عن طريق إيجاد نقطة تقاطع منصفات الزوايا.

45. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات العمودية هي $y = 3$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند $(5, 3)$. يقع مركز الدائرة المحيطة عند $(5, 3)$.

46. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات العمودية هي $y = -4$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 2.5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند $(2.5, -4)$. يقع مركز الدائرة المحيطة عند $(2.5, -4)$.

49. الإجابة النموذجية:



تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحللوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرينين 50 و 51، شجّع الطلاب على رسم كل شكل أولاً.

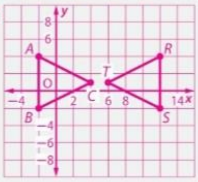
4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اجعل الطلاب يرسموا شكلاً غير منتظم بخمسة أضلاع. اجعلهم يصفوا طريقة لإيجاد مركز جاذبيته.

إجابات إضافية

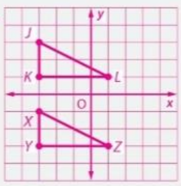
54. كل منصف ينصف شيئًا. لكن المنصفات العمودية تنصف القطع المستقيمة بينما منصفات الزوايا تنصف الزوايا. سيتقاطعون عند نقطة التقاء. نقطة التقاء المنصفات العمودية هي مركز الدائرة المحيطة. نقطة التقاء منصفات الزوايا هي مركز الدائرة الداخلية. يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث، بينما مركز الدائرة المحيطة يمكن أن يكون داخل المثلث أو خارجه أو على ضلعه.

62.



$\triangle RST$ هو انعكاس للمثلث $\triangle ABC$؛ $AB = 6, BC = \sqrt{45}, AC = \sqrt{45}$، $TR = \sqrt{45}, RS = 6, TS = \sqrt{45}$. $\triangle ABC \cong \triangle RST$ بموجب SSS.

63.



$\triangle JKL$ هو إزاحة للمثلث $\triangle XYZ$؛ $JK = 2, KL = 4, JL = \sqrt{20}$، $XY = 2, YZ = 4, XZ = \sqrt{20}$. $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$ بموجب SSS.

تمرين على الاختبار المعياري

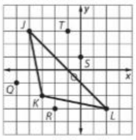
55. الجبر تم رمي جسم لأعلى بسرعة ابتدائية v متر في الثانية ومن ارتفاع ابتدائي s متر. يُقدر الارتفاع h بالأمتار للجسم بعد t ثانية بالمعادلة $h = -10t^2 + vt + s$. تقف رنا على حافة شرفة ترتفع 54 مترًا عن سطح الأرض ورمت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 12 مترًا في الثانية. بعد كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض؟ **A**

A 3 ثوانٍ
B 4 ثوانٍ
C 6 ثوانٍ
D 9 ثوانٍ

56. SAT/ACT حيث **K** $= \frac{3x+9}{x+3}$، $x \neq -3$

F $x + 12$ **J** x
G $x + 9$ **K** 3
H $x + 3$

57. أيّ من النقاط التالية يمكن رسم مستقيم يمر بها بحيث يكون المستقيم مُنصّفًا عموديًا لـ $\triangle JKL$؟ **D**



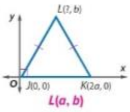
A T و K **C** J و R
B L و Q **D** S و K

58. إجابة مختصرة اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تصف المستقيم الذي تقع عليه النقطتين (0 ،1−) و (4 ،2).

مراجعة شاملة

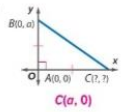
عين الإحداثيات المفقودة لكل مثلث.

59.



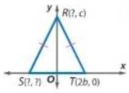
$L(a, b)$

60.



$C(a, 0)$

61.



$S(-2b, 0)$
$R(0, c)$

هندسة إحداثية ارسم كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة، ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق. **62–63. انظر الهامش.**

62. $A(-2, 4), B(-2, -2), C(4, 1)$; $R(12, 4), S(12, -2), T(6, 1)$

63. $J(-3, 3), K(-3, 1), L(1, 1)$; $X(-3, -1), Y(-3, -3), Z(1, -3)$

أوجد المسافة من المستقيم إلى النقطة المعطاة.

64. $y = 5, (-2, 4)$ **1**

65. $y = 2x + 2, (-1, -5)$ $\sqrt{5}$

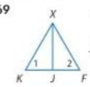
66. $2x - 3y = -9, (2, 0)$ $\sqrt{13}$

67. الهندسة الصوتية يقوم مهندس الاستوديو بتحصيل رسوم ثابتة بمقدار AED 450 مقابل تأجير المعدات و AED 42 مقابل ساعة من التسجيل والتجهيز. اكتب المعادلة التي توضح تكلفة تأجير مهندس الاستوديو كدالة زمنية. كم قد يُكلف تأجير مهندس الاستوديو لمدة 17 ساعة؟ (الدرس 3-4) **$m = 42t + 450$; AED 1164**

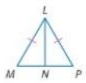
مراجعة المهارات

إثبات اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ مما يلي. 68–69. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

68. المعطيات: $\triangle XKF$ متساوي الأضلاع.
$\overline{XJ}$ تنصف $\angle X$.
المطلوب: J هي نقطة منتصف $\overline{KF}$.



69. المعطيات: $\triangle MLP$ متساوي الساقين.
N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$.
المطلوب: $\overline{LN} \perp \overline{MP}$



التدريس المتمايز BL OL

التوسّع اجعل الطلاب يناقشوا في مجموعات المصطلح الهندسي الذي يمثل مركز نجمة ويشرحوه.

الإجابة النموذجية: يقع مركز الدائرة المحيطة لشكل على مسافة متساوية من رؤوس الشكل.

1 التركيز

الهدف إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة
- مسطرة عدلة
- حبل
- دبوس

نصيحة للتدريس
يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب من الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين الوسيطات والارتفاعات في المثلث نفسه.

الطريقة البديلة
يمكن أيضًا استكمال الإنشاءات المعروضة في هذا الدرس باستخدام أسلوب المسطرة العادية والفرجار.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
قسّم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. ينتقي كل طالب إحدى هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. حدد بتناوب الطلاب خطوات الإنشاء 1 و 2.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرينين 1 و 2.

4-2 الاستكشاف
مختبر الهندسة
إنشاء المتوسطات والارتفاعات

المتوسط في المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء متوسط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.

لف طرف خيط حول قلم رصاص. واستخدم دبوسًا لتثبيت الخيط بالرأس.

الإنشاء 1 متوسط المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{DE}$. اكتب على نقاط التقاطع R و S.

الخطوة 2

استخدم مسطرة لإيجاد النقطة الناشئة من تقاطع $\overline{RS}$ مع $\overline{DE}$. اكتب على النقطة M. هذه هي نقطة المنتصف في $\overline{DE}$.

الخطوة 3

ارسم مستقيمًا يمر عبر F و M. $\overline{FM}$ هو متوسط في $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل.

الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس B وارسم قوسين يتقاطعان عند $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.

الخطوة 2

عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسمار على X وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين H.

الخطوة 3

استخدم مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$. اكتب على النقطة الناشئة عن تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ اسم D. $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ وعمودي على $\overline{AC}$.

استخدام النماذج والتحليل 1-2. انظر الهامش.

1. أنشئ متوسطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بشأن متوسطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

3 التقويم

التقويم التكويني
استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستوعبون إنشاء الوسيطات والارتفاعات.

من العملي إلى النظري
اجعل الطلاب يقارنوا تقاطعات الوسيطات والارتفاعات التي أنشأوها بمركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة الخارجية للمثلث.

إجابات إضافية
1. يتقاطعون عند النقطة نفسها.
2. يتقاطعون عند النقطة نفسها.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-2 تحديد المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

الدرس 4-2 تحديد الوسيطات والارتفاعات واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-2 التعرف على خواص متباينات زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما معنى حركي؟ يتحرك
- من أي نقطة ينبغي تعليق الهاتف المحمول لكي يوازي الأرض؟ نقطة التوازن
- هل تقع نقطة توازن الهاتف المحمول دائمًا عند مركزه؟ لماذا؟ الإجابة النموذجية: لا. فهي في الصورة ليست كذلك. وهذا بسبب اختلاف أوزان الأجسام.

الدرس 4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

:: السابق

- لقد تعرفت على المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث وقمت باستخدامهما.

:: الحالي

1. تحديد المتوسطات في المثلثات واستخدامها.
2. تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.

:: لماذا؟

- المنحوتة المتحركة هي جسم حركي أو متحرك تستخدم مبادئ التوازن والاتزان. تتكون المنحوتة المتحركة البسيطة من عدة قضبان متصلة بخيوط تُعلق عليها أجسام لها أوزان مختلفة. تتوازن الأجسام المعلقة مع بعضها ويمكن أن تدور بحرية. ولضمان تعليق مثلث على المنحوتة المتحركة بحيث يكون موازي للأرض، فعلى الفنانين معرفة نقطة توازن المثلث.

المفردات الجديدة

- متوسط المثلث (median)
- النقطة المركزية للمثلث (centroid)
- ارتفاع المثلث (altitude)
- ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

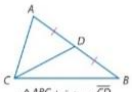
ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المتوسطات

متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة يمثل أحد طرفيها أحد رؤوس المثلث والآخر نقطة منتصف الضلع المقابل.

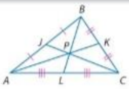


$\overline{CD}$ هو متوسط $\triangle ABC$.

لكل مثلث ثلاثة متوسطات متلاقية.
وتُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث **النقطة المركزية للمثلث** وتقع دائمًا داخل المثلث.

النظرية 4.7 نظرية النقطة المركزية للمثلث

تتقاطع متوسطات المثلث في النقطة تُسمى النقطة المركزية للمثلث. وهي تقع على بعد ثلثي المسافة من الرأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل.

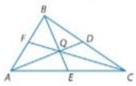


مثال إذا كانت النقطة P هي نقطة المركزية لـ $\triangle ABC$.
إذًا $BP = \frac{2}{3}BL$ ، $AP = \frac{2}{3}AK$ و $CP = \frac{2}{3}CJ$.

سوف تقوم بإثبات النظرية 4.7 في التمرين 36.

مثال 1 استخدام نظرية النقطة المركزية

**في $\triangle ABC$ إذا كان Q هي النقطة المركزية للمثلث و $BE = 9$.
أوجد BQ و QE.**



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية النقطة المركزية
$= \frac{2}{3}(9)$ or 6	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	بإضافة قطعة مستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	بطرح 6 من كل طرف.

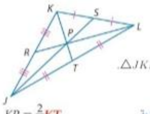
تمرين موجه في $\triangle ABC$ أعلاه، $FC = 15$. أوجد قياس كل من ما يلي.

1A. FQ 5 **1B.** QC 10

217

مثال 2 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle JKL$ إذا كان $PT = 2$ فأوجد KP.



بما أن $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ و $\overline{LR}$ تمثل متوسط $\triangle JKL$. وبالمثل، S و T هما نقطتا منتصف $\overline{KL}$ و $\overline{LJ}$ على التوالي. لذا $\overline{JS}$ و $\overline{KT}$ هما أيضًا متوسطا $\triangle JKL$. وعليه، فالنقطة P هي النقطة المركزية لـ $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية النقطة المركزية
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	بالتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصية التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من كل طرف
$KP = 4$	اضرب كل طرف في 3

تمرين موجه

في $\triangle JKL$ أعلاه، $RP = 3.5$ و $JP = 9$. أوجد قياس كل مما يلي

2A. PL 7

2B. PS 4.5

نصيحة دراسية

الاستنتاج في المثال 2، يمكنك أيضًا استخدام الحس العددي لمعرفة KP. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT, PT = \frac{1}{3}KT$ و $KP = 2PT$. بالتالي، إذا كان $PT = 2$، إذا $KP = 2(2)$ أو 4.

كل المضلعات لها نقطة توازن أو مركز متوسط. تعتبر النقطة المركزية أيضًا هي نقطة التوازن أو *مركز الجاذبية* للمنطقة المثلثة. مركز الجاذبية هو النقطة التي تستقر عندها المنطقة بفعل الجاذبية.

مثال من الحياة اليومية 3 إيجاد النقطة المركزية للمثلث في المستوى الإحداثي

الفنون الاستعراضية يخطط فنان استعراضي لموازنة قطع مثلثة معدنية خلال عرضه التالي. عند وضع هذا المثلث على المستوى الإحداثي، تقع رؤوس المثلث على النقاط (1,10) و (5,0) و (9,5). ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟

الاستيعاب تحتاج إلى إيجاد النقطة المركزية للمثلث على الإحداثيات المعطاة. تلك هي النقطة التي سوف يتوازن المثلث عندها.

التخطيط مثل المثلث بيانيًا مع تسمية رؤوسه كالتالي A(1, 10)، و B (5, 0)، و C(9, 5).
بما أن النقطة المركزية هي نقطة التقاء متوسطات المثلث، استخدم نظرية النقطة المركزية لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث. تقع النقطة المركزية على بعد ثلثي المسافة من الرأس المقابلة إلى نقطة المنتصف تلك.

1 الوسيطات

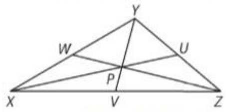
يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام نظرية النقطة المركزية لإيجاد أطوال القطع المستقيمة. يوضح **المثال 3** كيفية إيجاد النقطة المركزية باستخدام المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 في $\triangle XYZ$، P هي النقطة المركزية و $YV = 12$. أوجد YP و PV.



$YP = 8;\ PV = 4$

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات والعلاقة بينها في مواقف المسألة. شجّع الطلاب على فهم السياق المجرد في المسألة.

الربط بتاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما

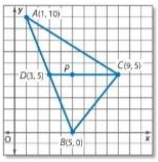
(1601–1665) ثمة مركز آخر للمثلث وهو ما يعرف بنقطة فيرما. وهي النقطة التي تكون المسافة الكلية بينها وبين الرؤوس الثلاثة أقل ما يمكن. فيرما هو أحد أشهر علماء الرياضيات في تخصص البراهين الكتابية.

الحل مثل بيانيًا $\triangle ABC$.

أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ بطرفيه $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$.

$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$ مثل بيانيًا النقطة D.

لاحظ أن $\overline{DC}$ يُعد مستقيمًا أفقيًا. المسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تبلغ $9 - 3$ أو 6 وحدات.



إذا كانت P هي النقطة المركزية لـ $\triangle ABC$.

إذًا $PC = \frac{2}{3}DC$. إذًا تمثل النقطة المركزية $\frac{2}{3}(6)$ أو 4 وحدات على يسار C. وتكون إحداثيات النقطة $P\ (9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

ينبغي على الفنان الاستعراضي موازنة المثلث عند النقطة $(5,5)$.

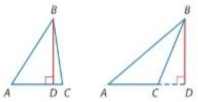
التحقق استخدم متوسطًا آخر للتحقق من الإجابة. إن نقطة المنتصف F للضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$. $\overline{BF}$ هو مستقيم عرضي. لذا فالمسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ أو 7.5. $\overline{PB} = \frac{2}{3}(7.5)$ أو 5. لذا تكون P أعلى بمقدار 5 وحدات عن B. تكون إحداثيات النقطة $P\ (5, 0 + 5)$ أو $(5, 5)$. ✓

تمرين موجه

3. تقع رؤوس مثلث آخر على النقاط $(0, 4)$ و $(6, 11.5)$ و $(12, 1)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

2 الارتفاعات

إن **ارتفاع** المثلث هو القطعة المستقيمة الممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يقع عليه الضلع المقابل وتتعامد على المستقيم الذي يقع عليه هذا الضلع. قد يكون ارتفاع المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على الضلع.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

قراءة في الرياضيات

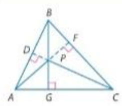
ارتفاع المثلث يُعرف بأنه المسافة بين قاعدة المثلث وقمته. يُستخدم ارتفاع المثلث لحساب مساحته.

لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات. إذا امتدت ارتفاعات المثلث فسوف تتقاطع في نقطة مشتركة.

المفهوم الأساسي ملتقى الارتفاعات

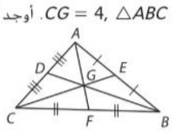
تتلاقى المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث وتتلاقى في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال تتقاطع المستقيمات التي تقع عليها الارتفاعات $\overline{AF}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{BG}$ عند النقطة P، ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$.



أمثلة إضافية

2 في $\triangle ABC$, $CG = 4$. أوجد GE.



2

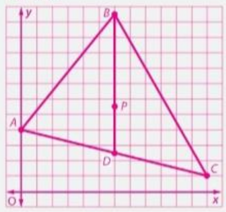
3 **النحت** يضع أحد الفنانين تصميمًا لمنحوتة توازن مثلثًا فوق عمود. في تصميم الفنان على المستوى الإحداثي، تقع الرؤوس عند $(1, 4)$ و $(3, 0)$ و $(3, 8)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان أن يضع عندها العمود تحت المثلث لكي يتوازن؟ $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$

انتبه!

ملتقى الارتفاعات قد لا يقع ملتقى الارتفاعات داخل المثلث.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

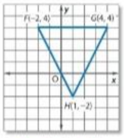
3. $(6, 5.5)$



نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$ أو $D(6, 2.5)$. $\overline{BD}$ مستقيم رأسي بحيث تكون المسافة من B إلى D هي $11.5 - 2.5$ أو 9. $PB = \frac{2}{3}(9)$ أو 6. إذًا P تبلغ 6 وحدات نزولاً من B. إحداثيات P هي $(6, 11.5 - 6)$ أو $(6, 5.5)$.

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية تقع رؤوس $\triangle FGH$ على النقاط $F(-2, 4), G(4, 4)$ و $H(1, -2)$.
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$.



الخطوة 1 مثل بيانيًا $\triangle FGH$. لإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين أو ثلاثة ارتفاعات.

الخطوة 2 أوجد معادلة للارتفاع من F إلى $\overline{GH}$. ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}$ أو 2؛ إذًا فإن ميل الارتفاع، المتعامد على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$	$(x_1, y_1) = F(-2, 4)$ و $m = -\frac{1}{2}$.
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$	بسّط
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$	خاصية التوزيع
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	أضف 4 لكل طرف

أوجد معادلة للارتفاع من G إلى $\overline{FH}$. ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)}$ أو -2. لذا فإن ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$	$(x_1, y_1) = G(4, 4)$ و $m = \frac{1}{2}$
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$	خاصية التوزيع
$y = \frac{1}{2}x + 2$	أضف 4 لكل طرف

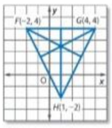
الخطوة 3 حل نظام المعادلات الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

إضافة المعادلتين لحذف x ينتج $2y = 5$ أو $y = \frac{5}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	بطرح $\frac{4}{2}$ أو 2 من كل طرف
$1 = x$	بضرب كل طرف في 2

إن إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle FGH$ تساوي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

نصيحة دراسية
تحقق من مدى صحة الحل
استخدم جانبًا من الورقة لرسم ارتفاعات كل ضلع بالمثلث.

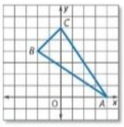


يقع التقاطع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$. إذًا، فالإجابة معقولة.

تمرين موجه

4. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ المرسوم بيانيًا على اليسار.

$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$

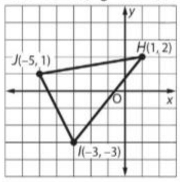


2 الارتفاعات

المثال 4 يوضح كيفية العثور على ملتقى ارتفاعات مثلث على المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

4 هندسة الإحداثيات رؤوس $\triangle HIJ$ هي $H(1, 2)$ و $I(-3, -3)$ و $J(-5, 1)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle HIJ$.



$\left(-3\frac{6}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

التركيز على محتوى الرياضيات

النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات

في مثلث حاد الزاوية، قد يبدو أن النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات هما الشيء نفسه. لا يحدث هذا إلا عندما يكون كل وسيط في المثلث مشابهًا لكل منصف عمودي.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب أن يطووا قطعة ورق إلى أربعة أقسام مكتوب عليها مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات. اجعل الطلاب يرسموا نسخة من المثلث نفسه في كل قسم من الورقة ويستخدموا مهاراتهم المساحية لتحديد الموضع التقريبي لمركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات في المثلث. ثم يستطيع الطلاب استخدام مسطرة قياس وفرجار ومنقلة لمعرفة مدى دقة تقديراتهم.

3 التمرين

التقويم التكويني

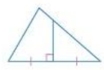
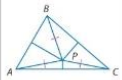
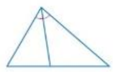
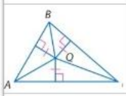
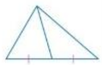
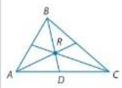
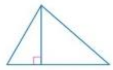
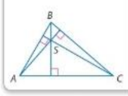
استخدم التمارين 4-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

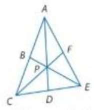
الاستنتاج المنطقي قد يكون من الصعب على الطلاب أن يميزوا بين نقاط الالتقاء الأربع في مثلث. اجعل الطلاب يرسموا رسمًا تخطيطيًا باستخدام منقلة ومسطرة لكل من النقاط. شجّع الطلاب على تكوين رابط بين القطع المستقيمة التي يرسمونها ونقطة الالتقاء المقابلة.

ملخص المفهوم القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلثات

الاسم	مثال	نقطة الالتقاء	خاصية خاصة	مثال
منصف عمودي		مركز الدائرة المحيطة	مركز الدائرة المحيطة P لـ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل رأس.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية	مركز الدائرة الداخلية Q لـ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل أضلاع المثلث.	
متوسط المثلث		النقطة المركزية	النقطة المركزية R لـ $\triangle ABC$ تقع على بعد ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل لها.	
ارتفاع المثلث		ملتقى الارتفاعات	المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ تتقاطع مع ملتقى الارتفاعات S.	

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **في $\triangle ACE$، إذا كان P هي النقطة المركزية، $PF = 6$، و $AD = 15$. أوجد قياس كل مما يلي.**



1. PC **12**

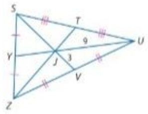
2. AP **10**

مثال 3 3. **تصميم داخلي** يقوم مهندس ديكور بتصميم طاولة قهوة مخصوصة لأحد زبائنه. سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجي تجب موازنته على دعامة واحدة. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث هي (3,6) و (5,2) و (7,10). فبأي نقطة يجب وضع الدعامة؟ **(5, 6)**

مثال 4 4. **هندسة الإحداثيات** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle ABC$ مع رؤوس $A(-3, 3)$، $B(-1, 7)$ و $C(3, 3)$. **(−1, 5)**

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-2 في $\triangle SZU$ إذا كان $UJ = 9$ و $VJ = 3$ و $ZT = 18$. أوجد طول كل مما يلي.

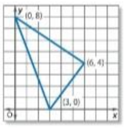


5. YJ **4.5**
6. SJ **6**
7. YU **13.5**
8. SV **9**
9. JT **6**
10. ZJ **12**

مثال 3 **الهندسة الإحداثية** حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث حسب الرؤوس المعطاة.

11. $A(-1, 11), B(3, 1), C(7, 6)$ **(3, 6)**
12. $X(5, 7), Y(9, -3), Z(13, 2)$ **(9, 2)**

13. **تصميم داخلي** صنعت حورية ملصق عليه صور أصدقائها. تريد تعليق الملصق بسقف غرفتها بحيث يكون موازيًا للسقف. يتوفر الرسم التخطيطي للملصق بالتمثيل البياني الموجود على اليسار. بأي نقطة ينبغي أن تعلّق الخيط؟ **(3, 4)**



مثال 4 **الهندسة الإحداثية** حدّد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لكل مثلث له رؤوس معلومة.

14. $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$ **(5, −1)**
15. $R(-4, 8), S(-1, 5), T(5, 5)$ **(−4, −4)**

حدد إذا ما كانت كل قطعة مستقيمة $\overline{BD}$ عبارة عن ارتفاع أم متوسط أم منصف عمودي.

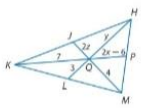
16. **الارتفاع**

17. **متوسط المثلث**

18. **عمودي منصف، ارتفاع المثلث متوسط المثلث**

19. **متوسط المثلث**

20. **الاستنتاج المنطقي** في الشكل الموجود على اليسار، إذا كانت J، P، و L هي نقاط منتصف $\overline{KH}$ و $\overline{HM}$، على الترتيب، أوجد x، y، و z.
$x = 4.75, y = 6, z = 1$



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	5-15, 37, 38, 40, 42-56	44-47 ,فردي 5-19	37, ,زوجي 6-18 38, 40, 42, 43, 48-56
OL أساسي	5-25 ,فردي 26, 27-37 ,فردي 38, 40, 42-56	5-19, 44-47	20-38, 40, 42, 43, 48-56
BL متقدم	20-55, (56 اختياري)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط للتوصل إلى حل. يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. يخططون لمسار حل. في التمرين 20، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

إجابات إضافية

31. **المعطيات:** $\triangle XYZ$ متساوي الساقين $\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.

المطلوب إثباته: $\overline{WY}$ وسيط.

البرهان: بما أن $\triangle XYZ$ متساوي الساقين $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$. بموجب تعريف منصف الزاوية، $\angle XYW \cong \angle ZYW$.
$\overline{YW} \cong \overline{YW}$ بموجب خاصية الانعكاس. إذًا بموجب SAS، $\triangle XYW \cong \triangle ZYW$. بموجب CPCTC.
$\overline{XW} \cong \overline{ZW}$. بموجب تعريف نقطة المنتصف، W هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$. بموجب تعريف الوسيط، $\overline{WY}$ وسيط.

32. **المعطيات:** $\triangle XYZ$ بالوسيطات $\overline{XR}$، $\overline{YS}$ و $\overline{ZQ}$.

المطلوب إثباته: $\frac{XP}{PR} = 2$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle XYZ$ بالوسيطات $\overline{XR}$ و $\overline{YS}$ و $\overline{ZQ}$. (معطى)
2. $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية النقطة المركزية)
3. $XR = XP + PR$ (مسلمة إضافة القطعة المستقيمة)
4. $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (التعويض).
5. $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)
6. $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)
7. $XP = 2PR$ (خاصية الضرب)
8. $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمارين 27-30، شجّع الطلاب على رسم شكل لكل تمرين مع كتابة المعلومات المعطاة.

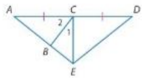
انسخ وأكمل كل عبارة للمثلث $\triangle RST$ والمتوسطات $\overline{RM}, \overline{SL}$ و $\overline{TK}$ والنقطة المركزية J.

21. $SL = x(JL)$ **3**

22. $JT = x(TK)$ $\frac{2}{3}$

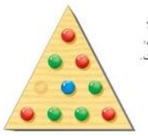
23. $JM = x(RJ)$ $\frac{1}{2}$

الجبر استخدم الشكل على اليمين.



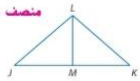
24. إذا كان $\overline{EC}$ هو ارتفاع المثلث $\triangle AED$، $m\angle 1 = 2x + 7$ و $m\angle 2 = 3x + 13$. أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$. $m\angle 1 = 35, m\angle 2 = 55$

25. أوجد قيمة x إذا كان $AC = 4x - 3, DC = 2x + 9$، $m\angle ECA = 15x + 2$ و $\overline{EC}$ هو متوسّط $\triangle AED$. هل يعد $\overline{EC}$ أيضًا ارتفاعًا للمثلث $\triangle AED$؟ اشرح. **6؛ لا؛ لأن $m\angle ECA = 92$**



26. **ألعاب** لوحة الألعاب الموضحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. فيها فجوات لقطع اللعب. هدف اللعبة هو التخلص من قطع اللعب من خلال القفز عليهم حتى لا يتبقى إلا قطعة واحدة. انسخ رسمة لوحة اللعب. وحدد أيًا من نقاط الالتقاء تمثلها القطعة الزرقاء، *مركز الدائرة المحيطة*، أو *مركز الدائرة الداخلية*، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات. اشرح استنتاجك.

فرضيات استخدم المعلومات المعطاة لتحديد ما إذا كان $\overline{LM}$ *منصف متعامد أو متوسط و/أو ارتفاع* للمثلث $\triangle JKL$.



27. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ **ارتفاع**

28. $\triangle JLM \cong \triangle KLM$ **منصف عمودي، متوسط، ارتفاع**

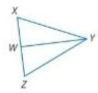
29. $\overline{JM} \cong \overline{KM}$ **متوسط**

30. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$، $\overline{JL} \cong \overline{KL}$ **منصف عمودي، متوسط، ارتفاع**

31. **الإثبات** اكتب فقرة إثباتية.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متساوي الساقين. $\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.

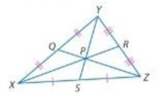
المطلوب: $\overline{WY}$ متوسط. **انظر الهامش.**



32. **الإثبات** اكتب إثبات جبري.

المعطيات: $\triangle XYZ$ ومتوسطاته $\overline{XR}$ و $\overline{YS}, \overline{ZQ}$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$ **انظر الهامش.**



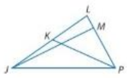
33. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة. سوف تستكشف مكان نقاط الالتقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

a. **عمليًا** أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع على ورق شفاف وقصها. اطو كل مثلث لتحديد مكان مركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي ومركز المتوسطات وملتقى الارتفاعات.

b. **لفظيًا** خمن العلاقات بين أربع نقاط التقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.

c. **بيانيًا** ضع مثلثًا متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي والمركز المتوسط وملتقى الارتفاعات على المستوى الإحداثي مستخدمًا إحداثيات مختلفة. وحدد إحداثيات كل نقطة التقاء.

جبريًا في $\triangle JLP, m\angle JMP = 3x - 6$ و $JK = 3y - 2$ و $LK = 5y - 8$.



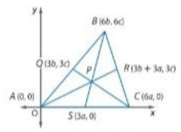
34. إذا كان $\overline{JM}$ هو ارتفاع في $\triangle JLP$، فأوجد x. **32**

35. أوجد LK إذا كان $\overline{PK}$ متوسطًا. **7**

26. مركز الدائرة المحيطة، مركز الدائرة الداخلية، النقطة المركزية، ملتقى الارتفاعات؛ الإجابة النموذجية: يعمل منصف الزاوية لكل زاوية كذلك على تنصيف الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل من المثلث. لذا فإنه يمثل أيضًا المنصف العمودي والمتوسط والارتفاع. هذا يعني أن قطع اللعب الزرقاء تمثل جميع المراكز بما في ذلك مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

223

36. **البرهان** **اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات نظرية النقطة المركزية.**



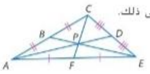
المعطيات: متوسطات $\triangle ABC$، هي $\overline{AR}, \overline{BS}$ و $\overline{CQ}$

البرهان: تتقاطع المتوسطات عند النقطة P، حيث P تساوي ثلثي المسافة بين كل رأس ونقطة منتصف الضلع المقابل.

(*إرشاد:* أولاً، أوجد معادلات المستقيمات التي بها متوسطات. ثم أوجد إحداثيات النقطة P وأثبت أن المتوسطات الثلاثة جميعها تتقاطع عند النقطة P.
بعد ذلك، استخدم قانون المسافة وعملية الضرب لإثبات أن $BP = \frac{2}{3}BS$، $AP = \frac{2}{3}AR$ و $CP = \frac{2}{3}CQ$.) **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

مسائل مهارات التفكير العليا

37. **تحليل الخطأ** وفقًا للشكل على اليسار، يقول حماد إن $\frac{2}{3}AP = AD$. لا يوافق بدر على ذلك. فهل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



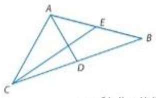
38. **فرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا. **انظر الهامش.**

يقع ملتقى ارتفاعات المثلث دائمًا على رأس الزاوية القائمة.

39. **التحدي** يوجد في $\triangle ABC$ الرؤوس $A(-3, 3)$، و $B(2, 5)$، و $C(4, -3)$. فما إحداثيات النقطة المركزية في $\triangle ABC$؟ اشرح العملية المستخدمة للتوصل للإجابة. **انظر الهامش.**

40. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين المنصفات العمودية والمتوسطات والارتفاعات للمثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

41. **التحدي** في الشكل على اليسار، القطعتان المستقيمتان $\overline{AD}$ و $\overline{CE}$ هما عبارة عن متوسطين في $\triangle ACB$، و $\overline{AD} \perp \overline{CE}, AB = 10$، و $AB = 10$، و $CE = 9$. أوجد CA. $2\sqrt{13}$



42. **مسألة غير محددة الإجابة** في هذه المسألة، إستكشف العلاقة بين نقاط الالتقاء الثلاث المذكورة. **a-d. انظر الهامش.**

a. ارسم مثلثًا حادًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

b. ارسم مثلثًا منفرجًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

c. ارسم مثلثًا قائمًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

d. خمّن العلاقة بين مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

43. **الكتابة في الرياضيات** استخدم المساحة لتوضيح سبب اعتبار النقطة المركزية للمثلث هي نفسها مركز جاذبيته. ثم استخدم هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل. **انظر الهامش.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 37، قام حمد بتبديل القطع المستقيمة من نظرية النقطة المركزية. ذكّر الطلاب بأنه في الأسئلة التي تتضمن أشكالاً هندسية، ينبغي أن يستخدموا الشكل للتحقق من مدى صحة إجابتهم.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحللوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 38، يمكن استخدام برنامج الهندسة الديناميكية لتحليل العبارة المذكورة.

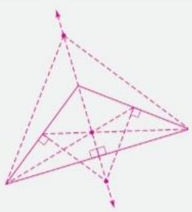
إجابات إضافية

37. الإجابة النموذجية: بدر على صواب. وفقًا لنظرية النقطة المركزية، $AP = \frac{2}{3}AD$. تم تغيير أطوال القطعة المستقيمة.

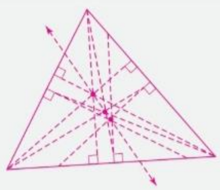
38. صحيح؛ الإجابة النموذجية: في مثلث قائم الزاوية، ستمثل الارتفاعات من رأسي زاويتين غير قائمتين ساقي المثلث دائمًا، واللذين يتقاطعان عند الرأس الذي يحتوي على الزاوية القائمة. يبدأ الارتفاع نحو وتر المثلث من الرأس. إذًا تتقاطع الارتفاعات الثلاثة هنا. ولهذا سيكون ملتقى الارتفاعات دائمًا رأس زاوية قائمة.

39. $\left(1, \frac{5}{3}\right)$؛ الإجابة النموذجية: وجدت نقطة منتصف $\overline{AC}$ واستخدمتها للتوصل إلى معادلة المستقيم الذي يحتوي على النقطة B ونقطة منتصف $\overline{AC}$، $y = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$ وجدت أيضًا نقطة منتصف $\overline{BC}$ ومعادلة المستقيم بين النقطة A ونقطة منتصف $\overline{BC}$، $y = -\frac{1}{3}x + 2$. وجدت حل نظام من معادلتين لقيمة x و y للوصول إلى إحداثيات النقطة المركزية، $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

42b.



42a.



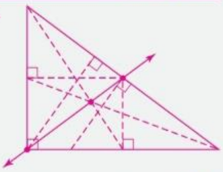
224 | الدرس 2-4 | متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
اجعل الطلاب يكتبوا وصفًا قصيرًا يوضح الاختلافات بين الوسيط والارتفاع، وبين النقطة المركزية ملتقى ارتفاعات المثلث.

إجابات إضافية

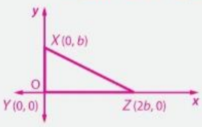
42c.



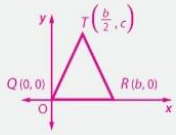
42d. الإجابة النموذجية: مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات كلهم على خط واحد.

43. الإجابة النموذجية: كل وسيط يقسم المثلث إلى مثلثين أصغر متساويين في المساحة. إذًا يمكن موازنة المثلث بطول أي من تلك الخطوط. لموازنة المثلث على نقطة، تحتاج إلى إيجاد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط التوازن الثلاثة هذه. نقطة التوازن في مثلث هي تقاطع القطعتين المستقيمتين الموصلتين بين نقطتي منتصف الضلعين المتقابلين. بما أن كل قطعة مستقيمة توصل بين نقطتي المنتصف هاتين في ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين لهما المساحة نفسها.

51.

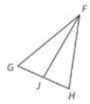


52.



تمرين على الاختبار المعياري

44. بالشكل أدناه، $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$. أي مما يلي لا بد أن يكون صحيحًا؟ **C**



A $\overline{FJ}$ هو ارتفاع $\triangle FGH$.
B $\overline{FJ}$ هو منصف زاوية $\triangle FGH$.
C $\overline{FJ}$ هو متوسط في $\triangle FGH$.
D $\overline{FJ}$ هو المنصف العمودي لـ $\triangle FGH$.

45. إجابة شبكية ما نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني لـ $4x - 6y = 12$؟ **3**

46. جبريًا تطوع أربعة طالبات لطي كتيبات لصالح مجموعة عمل مجتمعي محلية. أي طالبة هي الأسرع؟ **H**

الطالب	سرعة الطي
أماني	صفحة واحدة كل 3 ثوانٍ
سهيلة	صفحتان كل 10 ثوانٍ
منى	30 صفحة في الدقيقة
منال	45 صفحة كل دقيقتين

F منال　　**H** منى
G أماني　　**J** سهيلة

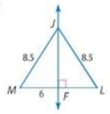
47. SAT/ACT 80 بالمائة من 42. ما نسبتها المئوية من 16؟ **B**

A 240　　**D** 50
B 210　　**E** 30
C 150

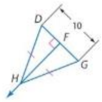
مراجعة شاملة

أوجد قياس كل منها.

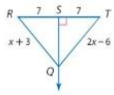
48. LM　**12**



49. DF　**5**



50. TQ　**12**



ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها. 51-52. انظر الهامش.

51. المثلث $\triangle XYZ$ قائم الزاوية وله وتر $\overline{XZ}, ZY$، ويبلغ ضعف قياس XY، و $\overline{XY}$، ويبلغ طوله b وحدة

52. $\triangle QRT$ مثلث متساوي الساقين وقياس قاعدته $\overline{QR}$ يبلغ b وحدة طولاً

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{JK}$ *متوازيان*، أم *متعامدان*، أم *خلاف ذلك*. مثّل كل مستقيم بيانيًا للتأكد من صحة إجابتك. 53-54. انظر الهامش.

53. $R(5, -4), S(10, 0), J(9, -8), K(5, -13)$

54. $R(1, 1), S(9, 8), J(-6, 1), K(2, 8)$

55. طرق سريعة بالقرب من مدينة هوبويل بولاية فيرجينيا، يقع الطريق 10 عموديًا على الطريقين المحوريين 95 و 295. اثبت أن زوايا تقاطع الطريق 10 مع الطريق المحوري 95 والطريق المحوري 295 متطابقان.

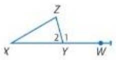
بما أن المستقيمات عمودية، فإن الزوايا المتكونة هي عبارة عن زوايا قائمة. جميع الزوايا القائمة متطابقة. لذلك، $\angle 1$ متطابقة مع $\angle 2$.

مراجعة المهارات

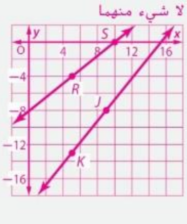
اكتب برهانًا تسلسليًا لإثبات نظرية الزاوية الخارجية.

56. المعطيات: $\triangle XYZ$

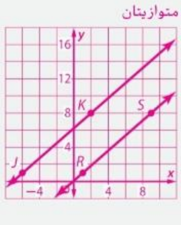
المطلوب: $m\angle X + m\angle Z = m\angle 1$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**



53. لا شيء منهما



54. متوازيتان



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 إيجاد العلاقة بين مقاييس زوايا المثلث.

الدرس 3-4 استيعاب خصائص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلثات وبين الزوايا والأضلاع في مثلث.

ما بعد الدرس 3-4 استخدام خواصّ التشابه والتوسّع فيها من أجل استكشاف التخمينات الخاصة بالأشكال الهندسية وتعليلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما أكبر زاوية في المثلث في الصورة. الزاوية التي بالأعلى
- ما أطول ضلع في المثلث؟ الضلع السفلي
- ما العلاقة بين أكبر زاوية وأطول ضلع؟ الإجابة النموذجية: أطول ضلع يقابل أكبر زاوية.

الدرس 4-3 المتباينات في مثلث واحد

السابق

- تعرفت على العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

الحالي

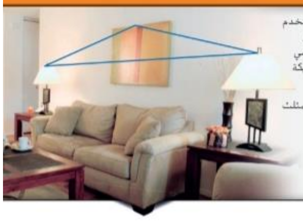
1 التعرف على خواص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلث.

2 التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.

لماذا

- لإنشاء مظهر عمق في غرفة ما، يستخدم مصممو الديكور الداخلي تقنية تُسمى *التثليث*. من أهم أمثلة هذه التقنية هي وضع طاولة جانبية على طرفي الأريكة مع وجود لوحة فوق الأريكة.

لابد أن تكون قياسات زوايا قاعدة المثلث أصغر من قياس الزاوية الأخرى.



ممارسات في الرياضيات
افهم طبيعة المسائل واجتهد في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 متباينات الزاوية في علم الجبر، تعرفت على العلاقة المتباينة بين عددين حقيقيين. تُستخدم هذه العلاقة غالبًا بالبراهين.

المفهوم الأساسي تعريف المتباينة

الشرح لأي عددين حقيقيين a و b، و $a > b$ فقط في حالة وجود عدد موجب c حيث إن $a = b + c$.

مثال إذا كان $3 + 2 = 5$، فإن $2 < 5$ و $3 < 5$.

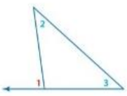
يدرج الجدول أدناه بعض خواص المتباينات التي درستها بعلم الجبر.

المفهوم الأساسي خواص المتباينات للأعداد الحقيقية

الخصائص التالية صحيحة لأي أعداد حقيقية a و b و c.

خاصية المقارنة في المتباينات	$a < b$، أو $a = b$، أو $a > b$
خاصية التعدي في المتباينات	1. إذا كان $a < b$ و $b < c$، فإن $a < c$. 2. إذا كان $a > b$ و $b > c$، فإن $a > c$.
خاصية الجمع في المتباينات	1. إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$. 2. إذا كان $a < b$، فإن $a + c < b + c$.
خاصية الطرح في المتباينات	1. إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$. 2. إذا كان $a < b$، فإن $a - c < b - c$.

يمكن تطبيق تعريف المتباينة وخواص المتباينات على قياسات الزوايا والقطع المستقيمة، وذلك لأنها أعداد حقيقية. تأمل $\angle 1$، و $\angle 2$، و $\angle 3$ بالشكل الموضح.



باستخدام نظرية الزوايا الخارجية، فأنت تعرف أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

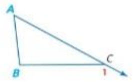
بما أن قياسات الزوايا تمثل أعدادًا موجبة، فإننا نستطيع القول أيضًا بأن

$$m\angle 1 > m\angle 2 \quad \text{و} \quad m\angle 1 > m\angle 3$$

باستخدام تعريف المتباينة، تقترح النتيجة النظرية التالية.

النظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية

قياس زاوية المثلث الخارجية أكبر من قياس كلا الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.



مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
$m\angle 1 > m\angle B$

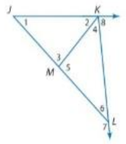
مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية غير المتجاورة تحتوي كل زاوية مثلث خارجية على زاويتين داخليتين غير مجاورتين. وأيضا غير مجاورتين للزاوية الخارجية.

برهان نظرية 4.8 بالدرس 4-4.

مثال 1 استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية

استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



a. قياسها أصغر من $m\angle 7$

$\angle 7$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle KML$. حيث إن $\angle 4$ و $\angle 5$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 7 > m\angle 4$ و $m\angle 7 > m\angle 5$.

$\angle 7$ هي أيضا زاوية خارجية في $\triangle JKL$. حيث إن $\angle 1$ و $\angle JKL$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. إذا، $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. بما أن $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$. فإنه باستخدام التعويض $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$. وبالتالي، $m\angle 7 > m\angle 2$.

إذا، فالزوايا ذات القياس الأصغر من $m\angle 7$ هي $\angle 1$، و $\angle 2$، و $\angle 4$، و $\angle 5$.

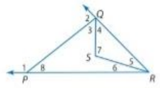
b. قياسها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ هي زاوية خارجية في $\triangle KLM$. لذا فباستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 3 > m\angle 6$. نظرا لأن $\angle 8$ هي زاوية خارجية في $\triangle JKL$. فإن $m\angle 8 > m\angle 6$. بالتالي، قياسات $\angle 3$، و $\angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

تمرين موجه

1A. قياسها أصغر من $m\angle 1$ $\angle 3$ و $\angle 4$ و $\angle 5$ و $\angle 6$

1B. قياسها أكبر من $m\angle 8$ $\angle 2$

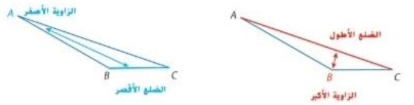


انتبه!

تحديد الضلع المقابل احرص على تحديد الضلع المقابل لزاوية ما بشكل صحيح. لا يمكن أن تكون الأضلاع المكونة للزاوية هي نفسها الأضلاع المقابلة.

2 متباينات ضلع الزاوية

لقد تعلمت أنه إذا تطابق ضلعي مثلث، أو إذا كان المثلث متساوي الساقين، فإن الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع تكون متطابقة. ما العلاقة التي تتكوّن في حالة عدم تطابق الأضلاع؟ افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج مختلف الأضلاع.



لاحظ أن أطول ضلع وأكبر زاوية في $\triangle ABC$ متقابلان. وبالمثل، فإن أقصر ضلع وأصغر زاوية متقابلان.

1 متباينات الزاوية

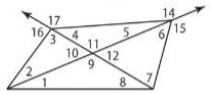
المثال 1 يوضح كيفية استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المتوافقة مع الشرط المذكور.



a. قياسها أقل من $m\angle 14$

$\angle 4$, $\angle 11$, $\angle 9$, $\angle 3$, $\angle 2$, $\angle 6$, $\angle 7$

b. قياسها أكبر من $m\angle 5$

$\angle 10$, $\angle 16$, $\angle 12$, $\angle 15$, $\angle 17$

إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا الخارجية النظرية 6.8 صحيحة لأن $\angle 1$ مكملة للزاوية الداخلية المجاورة ومجموع قياسات الزوايا الداخلية يبلغ 180.

انتبه!

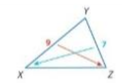
رموز الزوايا والمتباينات يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$). خاصةً عندما يُكتب بخط اليد. احرص على كتابة الرمز بشكل صحيح عند استخدام كليهما في نفس الوقت.

تنطبق علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات المنفرجة مختلفة الأضلاع على جميع المثلثات. وسيتم ذكر تلك العلاقات باستخدام المتباينات بالنظريات أدناه.

نظريات علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات

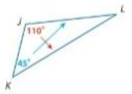
4.9 إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر. فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول ذات قياس أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

مثال: نظرًا لأن $XY > YZ$. فإن $m\angle Z > m\angle X$.



4.10 إذا كانت إحدى زوايا المثلث لها قياس أكبر من زاوية أخرى. فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.

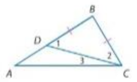
مثال: نظرًا لأن $m\angle J > m\angle K$. فإن $KL > JL$.



برهان النظرية 4.9

المعطيات: $\triangle ABC, AB > BC$

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$



البرهان:

بما أن $AB > BC$ بالمثلث المعطى $\triangle ABC$. فإن النقطة D تقع على $\overline{AB}$ حيث إن $BD = BC$. ارسم $\overline{CD}$ لعمل مثلث متساوي الساقين $\triangle BCD$. باستخدام نظرية المثلثات متساوية الساقين. $\angle 1 \cong \angle 2$. إذًا $m\angle 1 = m\angle 2$ باستخدام تعريف الزوايا المتطابقة.

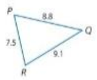
باستخدام مسلّمة إضافة الزوايا. $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$. إذًا $m\angle BCA > m\angle 2$ باستخدام تعريف المتباينات. باستخدام التعويض. نجد أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية. نجد أن $m\angle 1 > m\angle A$. بالتالي. نظرًا لأن $m\angle BCA > m\angle 1$ و $m\angle 1 > m\angle A$. فإنه باستخدام التعدي في المتباينات. نجد أن $m\angle BCA > m\angle A$.

سوف نُثبت النظرية 4.10 في الدرس 4-4. التمرين 31.

مثال 1 ترتيب قياسات زوايا المثلث

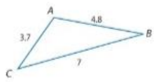
صنّف زوايا $\triangle PQR$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{PR}$. $\overline{PQ}$. $\overline{QR}$.
الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع هي $\angle Q$، و $\angle R$، و $\angle P$.
على التوالي. إذًا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle Q$، و $\angle R$، و $\angle P$.

تمرين موجه

2. صنّف زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.
$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{CB}; \angle B, \angle C, \angle A$



التركيز على محتوى الرياضيات

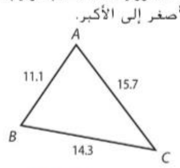
مقارنة النظريات يمكنك تلخيص النظريتين 5.9 و 5.10 بالقول بأن القطعة المستقيمة الأقصر تقابل الزاوية الأصغر والقطعة المستقيمة الأطول تقابل الزاوية الأكبر.

2 متباينات الزاوية-الضلع

توضح **الأمثلة من 2 إلى 4** كيفية تحديد العلاقة بين قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة في مثلث. ينبغي أن يتمكن الطلاب من استخدام النظريتين 5.9 و 5.10 في تحديد العلاقة بين الزاوية والضلع.

مثال إضافي

2 صنّف زوايا $\triangle ABC$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



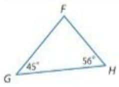
$\angle C, \angle A, \angle B$

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب أن يلخصوا في فقرة برهان النظرية 6.9 بكلمات من صياغتهم. أبلغهم أنهم ليسوا مضطرين للالتزام بالترتيب الدقيق للبرهان الرسمي، لكن ينبغي أن يكون لديهم تسلسل منطقي من بداية الفقرة إلى نهايتها. بدلًا من استخدام المبررات الرسمية، يستطيع الطلاب أن يشرحوا مفاهيم الخواص والتعريفات والمسلمات والنظريات المستخدمة في البرهان.

مثال 3 ترتيب أطوال أضلاع المثلث

صنّف أضلاع $\triangle FGH$ بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.



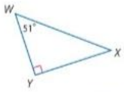
أوجد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

$m\angle F = 180 - (45 + 56)$ أو 79

إذًا، الزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle G$، و$\angle H$، و$\angle F$. الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي $\overline{FH}$، و$\overline{FG}$، و$\overline{GH}$، على التوالي. إذًا، الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{FH}$، $\overline{FG}$، $\overline{GH}$.

تمرين موجه

3. صنّف زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

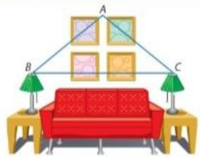


$\overline{WY}, \overline{YX}, \overline{WX}; \angle X, \angle W, \angle Y$

يمكنك استخدام علاقات الزوايا والأضلاع في المثلث لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال من الحياة اليومية 4 علاقات الزوايا والأضلاع

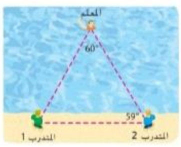
تصميم الديكور الداخلي يستخدم مصمم الديكور الداخلي التثليث لعمل عمق في غرفة معيشة أحد العملاء. إذا كان $m\angle B$ أصغر من $m\angle A$، فأي مسافة هي الأطول - المسافة بين المصباحين أم المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني؟ اشرح.



وفقًا للنظرية 4.10، حتى يكون $m\angle B < m\angle A$، فإنه يجب أن يكون طول الضلع المقابل $\angle B$ أصغر من طول الضلع المقابل $\angle A$. بما أن $\overline{AC}$ يقع مقابل $\angle B$، و$\overline{BC}$ يقع مقابل $\angle A$، إذًا $AC < BC$ و $BC > AC$. إذًا، يجب أن تكون BC، وهي المسافة بين المصباحين، أكبر من المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني.

تمرين موجه

4. **الإنقاذ** أثناء تدريب على الإنقاذ، يُحاكي المدرِّب كونه الشخص المستغيث حتى يتمكن المتدربون من ممارسة مهارات الإنقاذ التي تعلموها. إن كان المدرب والمتدرب 1 والمتدرب 2 واقفين بالمواضع الموضحة بالرسم التخطيطي، فأيُّ المتدربين هو الأقرب للمدرب؟



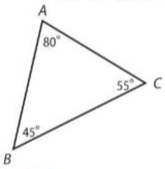
المتدرب 1

مهن من الحياة اليومية

تصميم ديكور داخلي يعمل مصمم ديكور داخلي على تزيين مساحة ما حتى تصبح مبهجة المنظر ومريحة لمن سيعيش أو يعمل بها. وينبغي على المصممين معرفة نظريات الألوان والدهان وتصميم الإضاءة وتخطيط المساحات. يوصى بالحصول على شهادة البكالوريوس لوظائف الخريجين الجدد. عادة ما يتلقى الخريج تدريبًا مهنيًا لفترة تتراوح من 1 إلى 3 سنوات قبل دخول امتحان القبول.

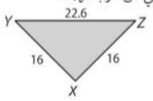
أمثلة إضافية

3 صنّف أضلاع $\triangle ABC$ بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.



$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$

4 **أدوات الشعر** تنفذ هنا تعليمات لطي منديل لعمل شريط ربط لشعرها. بعد أن تطوي المنديل إلى نصفين، تربط الزاويتين الأصغر في المثلث تحت شعرها. إذا طوت المنديل بالأبعاد الموضحة، فما الطرفان اللذان ينبغي أن تربطهما؟



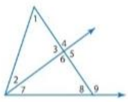
الطرفان المكتوب عليهما Y و Z

التدريس المتمايز BL OL

التوسع لديك قياسات زوايا مثلث. كيف ستعرف كيفية ترتيب الأضلاع من الأقصر إلى الأطول؟ باستخدام النظريتين 6.9 و 6.10، الضلع المقابل للزاوية الأصغر هو الضلع الأقصر والضلع المقابل للزاوية الأكبر هو الضلع الأطول.

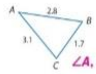
التحقق من فهمك

مثال 1 استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.

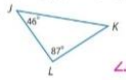


1. قياسها أصغر من $m\angle 4$ ‏$\angle 1$، $\angle 2$
2. قياسها أكبر من $m\angle 7$ ‏$\angle 3$، $\angle 5$، $\angle 9$
3. قياسها أكبر من $m\angle 2$ ‏$\angle 4$، $\angle 6$، $\angle 9$
4. قياسها أصغر من $m\angle 9$ ‏$\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 6$، $\angle 7$

المثالان 3-2 صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

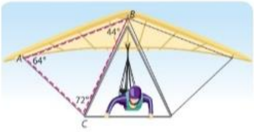
5. 

$\angle A, \angle C, \angle B; \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$

6. 

$\angle J, \angle K, \angle L; \overline{KL}, \overline{JL}, \overline{JK}$

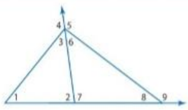
مثال 4 7. **الطيران الشراعي** تكوّن دعامات الطيران الشراعي مثلثات كما هو موضح. أي منها الأطول – الدعامة التي تمثلها $\overline{AC}$ أم الدعامة التي تمثلها $\overline{BC}$؟ اشرح استنتاجك.



$\overline{BC}$؛ الإجابة النموذجية: بما أن الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة $\overline{BC}$ أكبر من الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة $\overline{AC}$، فإن $\overline{BC}$ أطول.

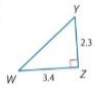
التمرين وحل المسائل

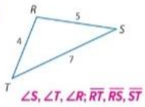
مثال 1 **الاستنتاج المنطقي** استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



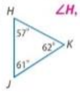
8. قياسها أكبر من $m\angle 2$ ‏$\angle 4$
9. قياسها أصغر من $m\angle 4$ ‏$\angle 1$، $\angle 2$
10. قياسها أصغر من $m\angle 5$ ‏$\angle 7$، $\angle 8$
11. قياسها أصغر من $m\angle 9$ ‏$\angle 1$، $\angle 3$، $\angle 6$، $\angle 7$
12. قياسها أكبر من $m\angle 8$ ‏$\angle 2$، $\angle 5$
13. قياسها أكبر من $m\angle 7$ ‏$\angle 5$، $\angle 9$

المثالان 3-2 صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

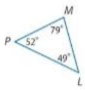
14. 

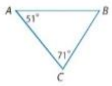
15. 

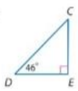
$\angle S, \angle T, \angle R; \overline{RT}, \overline{RS}, \overline{ST}$

16. 

$\angle H, \angle J, \angle K; \overline{JK}, \overline{HK}, \overline{HJ}$

17. 

18. 

19. 

$\angle C, \angle D, \angle E; \overline{DE}, \overline{CE}, \overline{CD}$

14. $\angle W, \angle Y, \angle Z; \overline{YZ}, \overline{WZ}, \overline{WY}$

17. $\angle L, \angle P, \angle M; \overline{PM}, \overline{ML}, \overline{PL}$

18. $\angle A, \angle B, \angle C; \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المتابعة

تعرّف الطلاب على المتباينات في مثلث.

اطرح السؤال التالي:

- ما الارتباط بين المتباينات وكل من الأضلاع والزوايا في المثلثات؟ الإجابة النموذجية: الزاوية المقابلة للضلع الأطول في مثلث لها قياس أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر؛ ويجب أن يكون مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

إجابات إضافية

20. زايد؛ الإجابة النموذجية: باستخدام نظرية مجموع المثلث، يبلغ قياس الزاوية التي تشكلها القطعة المستقيمة بين سالم وسلطان 70. بما أن $70 > 48$، سيكون المسار من سالم إلى زايد أقصر.

21. إذا كانت $m\angle X = 90$، فإن $m\angle Y + m\angle Z = 90$. إذا $m\angle Y < 90$ بموجب تعريف المتباينة. إذا $m\angle X > m\angle Y$. وفقًا للنظرية 7.9. إذا كانت $m\angle X > m\angle Y$، فإن طول الضلع المقابل للزاوية $\angle X$ يجب أن يكون أكبر من طول الضلع المقابل للزاوية $\angle Y$. بما أن $\overline{YZ}$ يقابل $\angle X$، و $\overline{XZ}$ يقابل $\angle Y$، فإن $XZ > YZ$. إذا YZ، التي تمثل طول السطح العلوي للمنحدر، يجب أن تكون أكبر من طول المنحدر.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	8-21, 43, 45, 46, 48-61	9-21 فردي 49-52	8-20 زوجي 43, 45, 46, 48, 53-61
OL أساسي	9-21 فردي 22-43, 45, 46, 48-61	9-21, 49-52	22-43,45,46,48, 53-61
BL متقدم	22-58, (59-61 اختياري)		

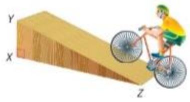
تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء التوصل إلى حل. يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. في التمارين من 30 إلى 33. حلل العلاقة بين الزاوية والضلع في كل مثلث.

مثال 4

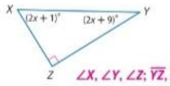
20. رياضة يلعب كل من زايد وسلطان وسالم لعبة تمرير القرص. يحاول سالم أن يقرر ما إذا كان سيمرر القرص لزايد أم لسلطان. أي من اللاعبين يجب أن يختار ليحصل على أقصر مسافة تمرير؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

21. منحدرات يمثل المنحدر الخشبي أدناه منحدر دراجات. أي منها الأطول، طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$؟ اشرح استنتاجك مستخدمًا النظرية 7.9. **انظر الهامش.**



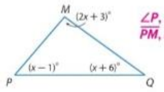
صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

22.



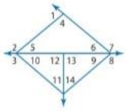
$\angle X, \angle Y, \angle Z; \overline{YZ}, \overline{XZ}, \overline{XY}$

23.



$\angle P, \angle Q, \angle M; \overline{MQ}, \overline{PM}, \overline{PQ}$

استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد الزاوية التي لها أكبر قياس.



24. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ $\angle 1$

25. $\angle 2, \angle 4, \angle 6$ $\angle 2$

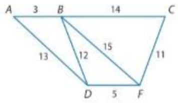
26. $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ $\angle 7$

27. $\angle 3, \angle 11, \angle 12$ $\angle 3$

28. $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ $\angle 3$

29. $\angle 8, \angle 10, \angle 11$ $\angle 8$

الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقات بين قياسات الزوايا المعلومة.



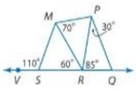
30. $\angle ABD, \angle BDA$ $m\angle ABD > m\angle BDA$

31. $\angle BCF, \angle CFB$ $m\angle BCF > m\angle CFB$

32. $\angle BFD, \angle BDF$ $m\angle BFD < m\angle BDF$

33. $\angle DBF, \angle BFD$ $m\angle DBF < m\angle BFD$

استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقة بين الأطوال المعلومة.



34. SM, MR $SM < MR$

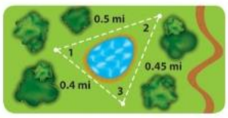
35. RP, MP $RP > MP$

36. RQ, PQ $RQ < PQ$

37. RM, RQ $RM > RQ$

38. نزهة على الأقدام يستمتع حمدان وأسرته بالمشي على الأقدام حول بحيرة كما هو موضح بالرسم التخطيطي على اليسار. رتّب زوايا المثلث المكون لمسارهما من الأكبر إلى الأصغر.

$m\angle 3 > m\angle 1 > m\angle 2$



الهندسة الإحداثية صنّف زوايا كل مثلث بمعرفة الرؤوس المعطاة بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. علل إجابتك.

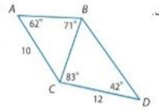
39. $A(-4, 6), B(-2, 1), C(5, 6)$

39. $\angle C, \angle A, \angle B$، لأن $AB = \sqrt{29} \approx 5.4$, $BC = \sqrt{74} \approx 8.6$, و $AC = 9$

40. $X(-3, -2), Y(3, 2), Z(-3, -6)$

$\angle Y$، $\angle Z$، $\angle X$، لأن $XZ = 4$، و $XY = \sqrt{52} \approx 7.2$، و $YZ = 10$.

41. صنّف أطوال أضلاع المثلثات بالشكل من الأقصر إلى الأطول. اشرح استنتاجك.



AB، BC، AC، CD، BD؛ في $\triangle ABC$، يكون $AB < BC < AC$ وفي $\triangle BCD$، يكون $BC < CD < BD$. باستخدام الشكل $AC < CD$، نجد أن $BC < AC < CD$.

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين أضلاع المثلث.

a. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

a. **الهندسة** ارسم ثلاثة مثلثات، أحدهم حاد الزاوية والآخر منفرج الزاوية والثالث قائم الزاوية. اكتب أسماء رؤوس كل مثلث A، B، و C.

b. **جدوليًا** قِس طول كل ضلع من أضلاع المثلثات الثلاثة. ثم انسخ الجدول وأكمله.

إجابات نموذجية موجودة بالجدول.

المثلث	AB	BC	$AB + BC$	CA
حاد الزاوية	2	2.4	4.4	3.2
منفرج الزاوية	2.6	3.4	6.0	5.0
قائم الزاوية	2.7	2.8	5.5	3.8

c. **جدوليًا** كوّن جدولين إضافيين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC و CA في أحد الجداول ومجموع AB و CA في الجدول الآخر. **انظر الهامش.**

d. **جبريًا** اكتب متباينة لكل من الجداول التي صنعتها من خلال ربط قياس مجموع ضلعين بقياس الضلع الثالث للمثلث.

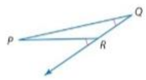
$AB + BC > CA$, $BC + CA > AB$, $AB + CA > BC$

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين قياس مجموع ضلعين بالمثلث وقياس الضلع الثالث.

42e. الإجابة النموذجية: مجموع قياسات ضلعين بالمثلث أكبر من قياس الضلع الثالث بهذا المثلث.

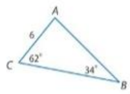
مسائل مهارات التفكير العليا

43. **الكتابة في الرياضيات حلل المعلومات المعطاة بالرسم التخطيطي واشرح سبب عدم صحة العلامات.** **انظر الهامش.**



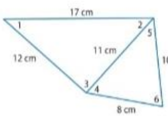
44. **تحدٍ** باستخدام مسطرة، ارسم $\triangle ABC$ بحيث يكون $m\angle A > m\angle B > m\angle C$. علل ما قمت برسمه. **انظر الهامش.**

45. **مسألة غير محددة الإجابة** قد يكون قياسًا ممكنًا لـ $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$ الموضح. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



46. **فرضيات** هل قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون أطول ضلع بالمثلث *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم *لا* تكون *أطول* منه على الإطلاق؟ اشرح. **انظر الهامش.**

47. **تحدٍ** استخدم أطوال الأضلاع في الشكل لترتيب الزوايا المرقمة من الأصغر إلى الأكبر مع العلم أن $m\angle 2 = m\angle 5$. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



48. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون الوتر دائمًا أطول ضلع بالمثلث القائم؟ **انظر الهامش.**

ملاحظات لحل التمرين

المسطرة يتطلب التمرينان 42 و 44 استخدام مسطرة.

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 42 رسوماتٍ وجداول وحسابات جبرية والوصف اللفظي لاستكشاف العلاقات القائمة بين أضلاع مثلثٍ.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحللوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 46، يمكن استخدام برنامج الهندسة الديناميكية للتعامل مع مثلث متساوي الساقين.

إجابات إضافية

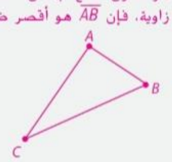
42c. الإجابة النموذجية:

مثلث	BC	CA	$BC + CA$	AB
حاد الزاوية	2.4	3.2	5.6	2
منفرج الزاوية	3.4	5.0	8.4	2.6
قائم الزاوية	2.8	3.8	6.6	2.7

مثلث	AB	CA	$AB + CA$	BC
حاد الزاوية	2	3.2	5.2	2.4
منفرج الزاوية	2.6	5.0	7.6	3.4
قائم الزاوية	2.7	3.8	6.5	2.8

43. الإجابة النموذجية: $\angle R$ زاوية خارجية للمثلث $\triangle PQR$. إذًا بموجب متباينة الزاوية الخارجية، يجب أن تكون $m\angle R$ أكبر من $m\angle Q$. توضح العلامات أن $\angle R \cong \angle Q$، مما يوضح أن $m\angle R = m\angle Q$. هذا تناقض مع نظرية متباينة الزاوية الخارجية. إذًا العلامات غير صحيحة.

44. الإجابة النموذجية: بما أن $\angle A$ أكبر زاوية، فإن الضلع المقابل لها، $\overline{CB}$، هو أطول ضلع. بما أن $\angle C$ أصغر زاوية، فإن $\overline{AB}$ هو أقصر ضلع.



45. الإجابة النموذجية: 10؛ $m\angle C > m\angle B$. فإذا كانت $AB > AC$، تتحقق النظرية 6.10. بما أن $10 > 6$، فإن $AB > AC$.

46. أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان قياسا زاويتي القاعدة أقل من $60°$، فستكون القاعدة هي الساق الأطول. إذا كان قياسا زاويتي القاعدة أكبر من $60°$، فستكون القاعدة هي الساق الأقصر.

47. $m\angle 1, m\angle 2 = m\angle 5, m\angle 4, m\angle 6, m\angle 3$؛ الإجابة النموذجية: الضلع الذي يقابل $\angle 5$ هو الضلع الأصغر في ذلك المثلث و $m\angle 2 = m\angle 5$. إذًا نحن نعلم أن $m\angle 4$ و $m\angle 6$ كلاهما أكبر من $m\angle 2$ و $m\angle 5$. الضلع الذي يقابل $\angle 6$ أكبر من الضلع الذي يقابل $\angle 4$. بما أن الضلع الذي يقابل $\angle 2$ أكبر من الضلع الذي يقابل $\angle 1$، فنحن نعلم أن $m\angle 1 < m\angle 2$ و $m\angle 5$. بما أن $m\angle 2 = m\angle 5$، فإن $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 4 + m\angle 6$. بما أن $m\angle 1 < m\angle 4$، فإن $m\angle 3 > m\angle 6$.

تمرين على الاختبار المعياري

49. الإحصاء يوضح المخطط عدد أسطوانات DVD وأنواعها المبيعة في ثلاثة متاجر. D

نوع أسطوانة DVD	المتجر 1	المتجر 2	المتجر 3
الكوميديا	75	80	92
الحركة	54	37	65
الرعب	30	48	62
الخيال العلمي	21	81	36
الإجمالي	180	246	255

وفقًا للمعلومات المقدمة بالمخطط، أيٌّ هذه العبارات صحيحة؟

A متوسط عدد أسطوانات DVD المباعة في كل متجر هو 56.

B باع المتجر 1 ضعف أفلام الحركة والرعب مما باعه المتجر 3 من أفلام الخيال العلمي.

C باع المتجر 2 أفلام كوميدية وخيال علمي أقل مما باعه المتجر 3.

D متوسط عدد أسطوانات DVD لأفلام الخيال العلمي المباعة في كل متجر هو 46.

50. يبلغ قياس زاويتين في مثلث $45°$ و$92°$. ما نوع المثلث؟ F

F منفرج مختلف الأضلاع　　H حاد مختلف الأضلاع

G منفرج متساوي الساقين　　J حاد متساوي الساقين

51. إجابة موسعة في مطعم من فئة الخمسة نجوم، يجني النادل إجمالاً t من الدراهم مقابل العمل لعدد h ساعات بحيث يحصل على AED 198 إكرامية ويجني AED 2.50 في الساعة.

a. اكتب معادلة لتمثيل المجموع الكلي من النقود التي يجنيها النادل.

b. إن كان إجمالي ما يجنيه النادل AED 213، فكم ساعة يعملها؟ 6

c. إن كان ما يجنيه النادل من إكرامية يبلغ AED 150 ويعمل 12 ساعة، فما إجمالي ما يكسبه من مال؟ AED 180

52. SAT/ACT أي تعبير يحمل *القيمة الأقل*؟ E

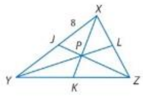
A $|-99|$　　D $|-28|$

B $|45|$　　E $|15|$

C $|-39|$

مراجعة شاملة

في $\triangle XYZ$، نجد أن P هي النقطة المركزية، و $KP = 3$، و $XJ = 8$. أوجد طول كل مما يلي.



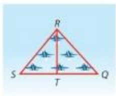
53. XK 9

54. YJ 8

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع من أجل المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة ذات نقطتي النهاية المعلومتين. علل إجابتك. 55–57. انظر الهامش.

55. $D(-2, 4)$ و $E(3, 5)$　　**56.** $D(-2, -4)$ و $E(2, 1)$

57. الطائرات النفاثة يطير سرب طيران استعراضي في تشكيل يمكن رؤيته بمثلثين لهما ضلعًا مشتركًا. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ إذا كان T هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$ و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$.



58. حمامات سباحة تبلغ مساحة حمام سباحة مستطيل الشكل 20 قدمًا في 30 قدمًا. ويبلغ عمق حمام السباحة 60 بوصة، ولكن يبلغ عمق الماء $\frac{3}{4}$ من عمق الحمام. أوجد كل قياس مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

a. مساحة سطح الحمام　1700 ft ^{2}

b. كمية الماء في الحمام　2250 ft ^{3}

مراجعة المهارات

إذا كان $x = 8$، و $y = 2$، و $z = 3$. حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم *خاطئة*.

59. $z(x - y) = 13$ خاطئة　　**60.** $2x = 3yz$ خاطئة　　**61.** $x + y > z + y$ صحيحة

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات حدد أمثلة من الدرس أو تمارين التدريب واطلب من طلاب مختلفين أن يناقشوا متباينات المثلث وعلاقات الزاوية-الضلع باستخدام المصطلحات الهندسية. احرص على أن يحدد الطلاب أسماء الزوايا والأضلاع بشكل صحيح ويستخدموا مصطلحات مثل "القياس الأكبر من/الأصغر من" مع الزوايا و"القياس الأطول/الأقصر" أو "الأكبر من/الأصغر من" مع الأضلاع.

إجابات إضافية

48. الإجابة النموذجية: بما أن الوتر يمتد من الزاوية القائمة وكلتا الزاويتين الأخريين في المثلث قائم الزاوية حادتان دائمًا، فالوتر دائمًا هو الضلع الأطول ويقابل دائمًا الزاوية الأكبر في المثلث.

55. $y = -5x + 7$؛ المنصف العمودي ينصف القطعة المستقيمة عند نقطة المنتصف في القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$. ميل القطعة المستقيمة المعطاة هو $\frac{1}{5}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو -5.

56. $y = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{2}$؛ ينصف المنصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$. ميل القطعة المستقيمة المعطاة هو $\frac{5}{4}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو $-\frac{4}{5}$.

57. المعطيات: T هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$. $\overline{SR} \cong \overline{QR}$

المطلوب إثباته: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. T هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$. (معطى)
2. $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (معطى)
4. $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ (SSS)

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح للمسائل التي أجابوها بشكل غير صحيح.

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك ®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة المعلومات التي سجّلوها للدروس من 1-4 إلى 3-4 في مطوياتهم.

إجابات إضافية

13. تشكل مداخل المدرسة الثلاثة مثلثًا. إذا تم تمديد كل من الارتفاعات الثلاثة للمثلث، فسوف يتقاطعوا عند ملتقى الارتفاعات.

14. $\angle T, \angle S, \angle R; \overline{RS}, \overline{RT}, \overline{ST}$

15. $\angle G, \angle H, \angle F; \overline{FH}, \overline{GF}, \overline{GH}$

17. $\angle 4, \angle 3$

18. $\angle 8, \angle 9, \angle 10$

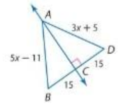
19. $\angle 6, \angle 2, \angle 4, \angle 3$

الوحدة 4 اختبار منتصف الوحدة

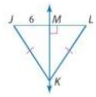
الدروس من 1-4 إلى 3-4

أوجد قياس كل مما يلي.

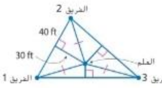
1. AB **29**



2. JL **12**

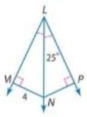


3. **المعسكر** انتهى معسكر أوناوانشي بلعبة إمساك العلم. إذا كانت مواقع البدء للثلاثة فرق موضحة بالرسم التخطيطي أدناه، بحيث يقع العلم على مسافة واحدة من قاعدة كل فريق، فكم يبعد العلم عن كل قاعدة بالأقدام؟ **50**

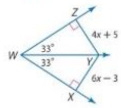


أوجد قياس كل مما يلي.

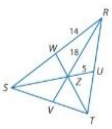
4. $\angle MNP$ **130**



5. XY **21**



في $\triangle RST$، Z هو النقطة المركزية و $RZ = 18$. أوجد طول كل مما يلي.

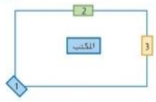


6. ZV **9**
7. SZ **10**
8. SR **28**

الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات المركز لكل مثلث مع الرؤوس المعلومة.

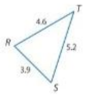
9. $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$ $\left(4, \frac{16}{3}\right)$
10. $X(-11, 0), Y(-11, -8), Z(-1, -4)$ $\left(-\frac{23}{3}, -4\right)$
11. $R(-6, 4), S(-2, -2), T(2, 4)$ **(−2, 2)**
12. $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$ **(−3, 2)**

13. **هندسة معمارية** يصمم مهندس معماري مبنى مدرسة ثانوية. صف كيف يمكن وضع المكتب المركزي بحيث يكون عند تقاطع الأروقة المتصلة بالمداخل الثلاثة للمدرسة. **انظر الهامش.**

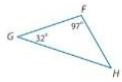


أدرج زوايا وأضلاع كل مثلث في ترتيب من الأصغر إلى الأكبر. 14-15. انظر الهامش.

14.



15.



16. **إجازة** يخطط عبد الله للطيران بالمسار المحدد على خريطة هاواي أدناه.

a. $m\angle A = 50$, $m\angle B = 48$, $m\angle C = 82$

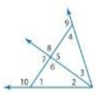
a. إذا كان $m\angle A = 2 + m\angle B$ و $m\angle C = 2(m\angle B) - 14$. فما قياسات المثلثات الثلاثة؟

b. ما ترتيب المسافات التي سيقطعها عبد الله في رحلته من الأقل إلى الأكبر؟ **AC, BC, BA**

c. طول الرحلة بأكملها حوال 68 ميلاً. تزيد مسافة الشوط الأوسط بمقدار 11 ميلاً عن نصف الشوط الأقصر. تزيد مسافة الشوط الأطول بمقدار 12 ميلاً عن ثلاثة أرباع الشوط الأقصر. ما مسافات أشواط الرحلة؟ **20 mi, 21 mi, 27 mi**

17-19. انظر الهامش.

استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



17. قياسها أصغر من $m\angle 8$
18. قياسها أكبر من $m\angle 3$
19. قياسها أصغر من $m\angle 10$

1 التركيز

الهدف

- استخدام منطق المصفوفة.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- ورق مربعات

نصائح للتدريس

- إذا كان الطلاب يحتاجون إلى تمرين إضافي، يمكنهم أن يجدوا الكثير من ألغاز المصفوفات التفاعلية المنطقية عبر الإنترنت.
- شجّع الطلاب على مراجعة إجاباتهم النهائية على المفاتيح المعطاة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية من الطلاب ذوي القدرات المختلفة. اجعل المجموعات الثنائية تساعد بعضها على استكمال التمارين.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 4.

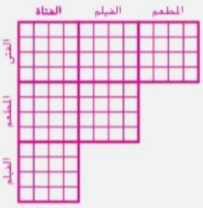
3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و2 في الصفحة التالية لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية استخدام مصفوفة لحل مسألة منطقية.

من العملي إلى النظري

اسأل الطلاب عما ستبدو عليه المصفوفة لحل لغز منطقي يتضمن أربعة متغيرات (اسم الفتاة واسم الفتى واسم المطعم وعنوان الفيلم) إذا كان كل من هذه المتغيرات له أربعة اختيارات. انظر الشكل الذي على اليمين.
ثم اطلب منهم أن يحددوا بشكل عام عدد مربعات $n \times n$ المطلوبة لإنشاء مصفوفة لغز منطقي تتضمن m متغيرات لكل منها n الاختيارات. $\frac{m^2 - m}{2}$ مربعات $n \times n$.



الاستكشاف

4-4 مختبر الهندسة
منطق المصفوفة

يستخدم منطق المصفوفات صفوفًا مستطيلة لتسجل المعلومات التي توصلت إليها من أجل حل مسألة منطق أو استنتاج. وبمجرد ملء كل الصفوف والأعمدة، يمكنك استنتاج النتيجة.

الطعام **يذهب كل من فهد وفالح وصالح وماجد وطارق إلى مطعم إيطالي. يطلب كل واحد منهم طبقه المفضل: رافيولي، أو بيتزا، أو لازانيا، أو مانيكوتي أو سباجيتي. يحب ماجد الرافيولي، ولكن فهد لا يحب أطباق البيتزا. فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي. طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي". ماذا طلب كل واحد منهم؟**

الخطوة 1 أنشئ مصفوفة مناسبة.

استخدم مصفوفة 5 × 5 التي تتضمن اسم كل شخص كعنوان لكل صف وأطعمته المفضلة المحتملة كعنوان لكل عمود.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
	الطبق المفضل				
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×			
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×			
طارق	×	×			

الخطوة 2 استخدم كل فكرة واستدلال منطقي لملء المصفوفة.

- نظرًا لأن ماجد يحب الرافيولي، ضع علامة ✓ في صف ماجد الآن تحت "رافيولي" وعلامة × في كل خلية أخرى في هذا الصف. نظرًا لأن كل طبق يحبه شخص واحد فقط، يمكنك وضع علامة × في كل خلية أخرى في عمود "رافيولي".

- ونظرًا لأن فهد لا يحب المعكرونة، فإنك تعرف أن فهد لا يمكن أن يحب المانيكوتي أو الرافيولي أو اللازانيا أو السباجيتي وكلها جميعًا أطباق معكرونة. لذا لا بد أن فهد يحب البيتزا. ضع علامة ✓ في صف فهد أسفل البيتزا. ضع علامة × في كل خلية أخرى في صف فهد وفي كل خلية أخرى في عمود البيتزا.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
	الطبق المفضل				
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×	×	×	✓
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×			×
طارق	×	×			×

- نظرًا لأن فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي، ضع علامة × في صف فالح أسفل اللازانيا والمانيكوتي. وهذا يترك السباجيتي فقط بدون علامة × في صف فالح. لذلك، يمكنك استنتاج أنه من المؤكد أن فالح يحب السباجيتي. ضع علامة ✓ في هذه الخلية وعلامة × في كل خلية أخرى في عمود السباجيتي.

- يمكنك من خلال المصفوفة رؤية أن طبق صالح المفضل لا بد أن يكون إما اللازانيا أو المانيكوتي. ونظرًا لأن طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي"، يمكنك استنتاج أن صالح يحب اللازانيا. في صف صالح، ضع علامة ✓ أسفل اللازانيا وعلامة × أسفل المانيكوتي.

- وهذا يترك خلية واحدة فقط فارغة في صف طارق، لذا يمكنك استنتاج أن طبقه المفضل هو المانيكوتي.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
	الطبق المفضل				
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×	×	×	✓
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×	✓	×	×
طارق	×	×	×	✓	×

الخطوة 3 استخدم مصفوفتك لتوضيح الإجابة على المسألة.

يمكنك من خلال المسألة معرفة أن فهد طلب البيتزا، وطلب فالح السباجيتي، وطلب ماجد الرافيولي، وطلب صالح اللازانيا وطلب طارق المانيكوتي.

مختبر الهندسة
منطق المصفوفات تابع

تمارين

استخدم مصفوفة لحل كل مسألة. 4-1. انظر الهامش للاطلاع على المصفوفات.

1. **الرياضات** يرتاد محمود وعبد العزيز، وعبد الرحمن وعبد الرحيم نفس المدرسة. يشارك كل واحد منهم في رياضة مدرسية مختلفة: كرة السلة، أو كرة القدم، أو الركض، أو التنس. استخدم المعلومات التالية لتحديد الرياضة التي يشارك فيها كل طالب.
   - لا يحب عبد العزيز الركض أو كرة السلة.
   - لا يشارك محمود في كرة القدم أو التنس.
   - يفضل عبد الرحمن رياضات الشتاء الداخلية.
   - أحرز عبد الرحمن أربعة أهداف في المباراة النهائية في الموسم.

   محمود: الركض؛ عبد العزيز: التنس؛ عبد الرحمن: كرة السلة؛ عبد الرحيم: كرة القدم

2. **العائلة** يوجد خمسة أطفال في عائلة راشد. استخدم المعلومات التالية لتحديد الترتيب الذي ولد به الأطفال.
   - سها أكبر من لميس.
   - خليفة أصغر من سهيلة.
   - لميس أكبر من خليفة وخالد.
   - خالد أكبر من خليفة.
   - سهيلة أكبر من سها.

   سهيلة ثم سها ثم لميس ثم خالد ثم خليفة

3. **الحيوانات الأليفة** ذهبت كل من خديجة وشيماء وعلياء إلى ملجأ للحيوانات الأليفة. اختارت كل فتاة حيوانًا أليفًا مختلفًا لتربيته: ببغاء أو أرنب أو قطة. أطلقت كل فتاة اسمًا على حيوانها الأليف باسم "الطاووس الجميل" أو "زوزو" أو "روسكو". استخدم المعلومات التالية والمصفوفة الموضحة لتحديد الحيوان الذي تربيه كل فتاة وما الاسم الذي أعطته إياه.
   - الفتاة التي اعتنت بالببغاء لم تسميه "الطاووس الجميل".
   - حيوان شيماء الأليف الذي أسمته "زوزو" ليس من نوع الحيوانات التي تقفز.
   - اعتنت علياء بروسكو وهو ليس قطًا.
   - لم تعتن خديجة بالأرنب.

		الحيوان الأليف			اسم الحيوان الأليف		
		ببغاء	أرنب	قطة	الطاووس	زوزو	روسكو
الاسم	خديجة						
	شيماء						
	علياء						
اسم الحيوان الأليف	الطاووس						
	زوزو						
	روسكو						

   خديجة: القطة واسمها "الطاووس الجميل"، شيماء: الكلب واسمه زوزو؛ علياء: الأرنب واسمه روسكو

4. **الهندسة** رسم كل من علي وعمر وعامر مثلثًا. ولا يتشارك اثنان منهم في نفس طول الضلع أو نوع الزاوية. استخدم المعلومات التالية لتحديد نوع المثلث الذي رسمه كل منهم.
   - لم يرسم علي مثلثًا متساوي الأضلاع.
   - يوجد في مثلث عمر زاوية قياسها 25 درجة وزاوية أخرى قياسها 65 درجة.
   - رسم عامر مثلثًا يحتوي على زوج واحد على الأقل من الأضلاع المتطابقة.
   - يحتوي المثلث المنفرج على زاويتين متطابقتين.

   علي: مثلث متساوي الساقين، منفرج الزاوية؛ عمر: مثلث مختلف الأضلع، قائم الزاوية؛ عامر، مثلث متساوي الأضلاع، حاد الزاوية

إجابات إضافية

.1

		الرياضة			
		كرة السلة	كرة القدم الأمريكية	الركض	التنس
الاسم	محمود	✗	✗	✓	✗
	عبدالعزيز	✗	✗	✗	✓
	عبدالرحمن	✓	✗	✗	✗
	عبدالرحيم	✗	✓	✗	✗

.2

		ترتيب الميلاد				
		الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
الاسم	سها	✗	✓	✗	✗	✗
	لميس	✗	✗	✓	✗	✗
	خليفة	✗	✗	✗	✗	✓
	سهيلة	✓	✗	✗	✗	✗
	خالد	✗	✗	✗	✓	✗

.3

		الحيوان الأليف			اسم الحيوان الأليف		
		ببغاء	أرنب	قطة	الطاووس الجميل	زوزو	روسكو
الاسم	خديجة	✗	✗	✓	✓	✗	✗
	شيماء	✓	✗	✗	✗	✓	✗
	علياء	✗	✓	✗	✗	✗	✓
اسم الحيوان الأليف	الطاووس الجميل	✗	✗	✓			
	زوزو	✓	✗	✗			
	روسكو	✗	✓	✗			

.4

		الأضلاع			الزوايا		
		مختلف الأضلاع	متساوي الساقين	متساوي الأضلاع	حاد الزاوية	قائم الزاوية	منفرج الزاوية
الاسم	علي	✗	✓	✗	✗	✗	✓
	عمر	✓	✗	✗	✗	✓	✗
	عامر	✗	✗	✓	✓	✗	✗
الزوايا	حاد الزاوية	✗	✗	✓			
	قائم الزاوية	✓	✗	✗			
	منفرج الزاوية	✗	✓	✗			

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-4 كتابة براهين على شكل فقرة وعمودين وبراهين تسلسلية.

الدرس 4-4 كتابة براهين جبرية وهندسية غير مباشرة.

بعد الدرس 4-4 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما السؤال المستخدم لإثبات أن الخميس ليس يوم عمل للمعلمين؟ **ما يوم اختبار الهندسة التالي لدينا؟**
- من الذي يقدم السبب في أن الخميس ليس يوم عمل للمعلمين؟ **أسامة**
- ما الذي كان يمكن أن يثبت بشكل مباشر أن الخميس يوم عمل للمعلمين؟ **الإجابة النموذجية: ينص المنهج الدراسي على أن الخميس يوم عمل للمعلمين.**

الدرس 4-4 البرهان غير المباشر

السابق	الحالي	لماذا
● قمت بكتابة فقرة إثباتية، وبرهان من عمودين، وبرهان تسلسلي.	● 1 كتابة براهين جبرية غير مباشرة. 2 كتابة براهين هندسية غير مباشرة.	●

أحمد: "أنا ... يوم ... إثبات

بلال: "لنفترض أن يوم السبت هو يوم عمل للمعلمين. في أي يوم سيكون اختبار الرياضيات القادم؟"

أسامة: "مممم.. وفقًا للمنهج الدراسي يكون يوم السبت القادم. لكننا لا نجري أي اختبارات في أيام عمل المعلمين، فنحن لسنا في المدرسة."

جمال: "بالضبط—إذًا هذا يثبت ذلك! لا يمكن أن يكون يوم السبت القادم يوم عمل للمعلمين."

المفردات الجديدة
تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
برهان غير مباشر (indirect proof)
برهان بالتناقض (proof by contradiction)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
التفكير بطريقة تجريدية وكمّية.

1 البرهان الجبري غير المباشر إن البراهين التي كتبتها هي *براهين مباشرة*—فقد بدأت بافتراض صحيح وأثبتَ أن الاستنتاج كان صحيحًا. في المثال السابق، استخدم الطالبان **الاستنتاج غير المباشر** بافتراض أن هذا الاستنتاج خاطئ ثم أظهرا أن هذا الافتراض قد أدى إلى تناقض.

في **البرهان غير المباشر** أو **البرهان بالتناقض**، أنت تفترض، بشكل مؤقت، عدم صحة ما تحاول إثباته. بإظهار استحالة هذا الافتراض منطقيًا، فإنك تثبت خطأ افتراضك وصحة الاستنتاج الأصلي. يُسمى هذا أحيانًا *البرهان بالنفي*.

المفهوم الأساسي كيف تكتب برهانًا غير مباشر

الخطوة 1 حدّد الاستنتاج المطلوب إثباته. افترض أن هذا الاستنتاج خاطئ من خلال افتراض صحة العكس.

الخطوة 2 استخدم التفكير المنطقي لإظهار أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع الافتراض أو مع بعض الحقائق الأخرى، مثل تعريف أو مسلّمة أو نظرية أو نتيجة ما.

الخطوة 3 وضّح أنه بما أن الافتراض يؤدي إلى تناقض، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي المطلوب إثباته صحيحًا.

مثال 1 ذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. إذا كان 6 من عوامل n، فإن 2 من عوامل n.

استنتاج العبارة الشرطية عبارة عن 2 *من عوامل* n. ويكون نفي الاستنتاج أن 2 *ليس من عوامل* n.

b. $\angle 3$ زاوية منفرجة.

إذا كان افتراض أن $\angle 3$ زاوية منفرجة خاطئًا، إذًا افتراض أن $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة صحيحًا.

تمرين موجه

1A. $x > 5$ $x \leq 5$

1B. $\triangle XYZ$ هو مثلث متساوي الأضلاع. **$\triangle XYZ$ ليس مثلثًا متساوي الأضلاع.**

1 البرهان الجبري غير المباشر

الأمثلة من 1 إلى 4 تشرح خطوات كتابة برهان غير مباشر. ينبغي أن يتمكن الطلاب من تحديد الافتراض واستخدام البراهين غير المباشرة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. $\overline{EF}$ ليس منصفًا عموديًا.
$\overline{EF}$ منصف عمودي.

b. إذا كانت B هي نقطة منتصف $\overline{LH}$ و $LH = 26$، فإن $\overline{BH}$ تطابق $\overline{LB}$.
$\overline{BH}$ لا تطابق $\overline{LB}$.

2 اكتب برهانًا غير مباشر يوضح أنه إذا كانت $-2x + 11 < 7$ فإن $x > 2$.

افترض أن $x < 2$ أو $x = 2$. اصنع جدولاً.

x	$-2x + 11$
2	7
1	9
0	11
−1	13
−2	15

في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض. ولهذا لا بد أن تكون $x > 2$ صحيحة.

يُمكن استخدام البراهين غير المباشرة في إثبات مفاهيم جبرية.

مثال 2 كتابة برهانًا جبريًا غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $-3x + 4 > 16$، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: $x < -4$

الخطوة 1 **البرهان غير المباشر:**
نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$. إذًا، افترض أن $x > -4$ أو $x = -4$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2 قم بعمل جدول باحتمالات متعددة لـ x بافتراض أن $x > -4$ أو $x = -4$.

x	−4	−3	−2	−1	0
$-3x + 4$	16	13	10	7	4

عندما يكون $x > -4$، فإن $-3x + 4 < 16$، وعندما يكون $x = -4$، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض في المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 > 16$. لذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $x \geq -4$ عبارة خاطئة. ويكون الاستنتاج الأصلي بأن $x < -4$ عبارة صحيحة.

قراءة في الرياضيات

التناقض
التناقض هو أحد المبادئ المنطقية التي تشير إلى أن الافتراض لا يمكن أن يكون A وعكس A في الوقت نفسه.

تمرين موجه

اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة. 2A–2B. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

2A. إذا كان $7x > 56$، فإن $x > 8$.

2B. إذا كان $-c$ موجبًا، فإن c رمز سالب.

يُمكن استخدام الاستنتاج والبرهان غير المباشرين في المواقف اليومية.

مثال من الحياة اليومية 3 البرهان الجبري غير المباشر

تكاليف حفل التخرج طلب ماجد من صديقه محمد معرفة ثمن وجبته ووجبة محمد التي تناولاها عند خروجهما الأسبوع الماضي. لم يستطع محمد تذكر التكاليف الخاصة بكل وجبة، ولكنه تذكر إجمالي قيمة الفاتورة التي زادت عن AED 60، بدون الإكرامية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى الوجبتين على الأقل زادت تكلفتها عن AED 30.

افترض أن تكلفة إحدى الوجبتين هي x وتكلفة الوجبة الأخرى هي y.

الخطوة 1 **المعطيات:** $x + y = 60$

المطلوب: $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:
افترض أن $x \leq 30$ و $y \leq 30$.

الخطوة 2 إذا كان $x \leq 30$ و $y \leq 30$، فإن $x + y \leq 30 + 30$ أو $x + y \leq 60$. يُعد هذا تناقضًا لأننا نعلم أن $x + y > 60$.

الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فلا بد أن يكون الافتراض خاطئًا. لذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 30$ أو $y > 30$ صحيحًا. لهذا، لا بد أن تكلفة إحدى الوجبتين زادت عن AED 30.

تمرين موجه

3. **السفر** قطع إسماعيل ما يزيد عن 360 كيلو متراً خلال رحلته، وتوقف في استراحتين. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أنه سافر أكثر من 120 كيلو متراً في رحلة الذهاب فقط. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

انتبه!

التناقضات لا يمكن أن ينجح البرهان بالتناقض إلا إذا كان هناك افتراض من المفترض أنه صحيح.

التركيز على محتوى الرياضيات

القراءة يعتمد حل المسائل الكلامية على فهم الطلاب للكلمات المفتاحية التي توضح نوع الرياضيات المطلوبة. حلل الصياغة لتحديد الموقف الفعلي في كل برهان غير مباشر.

أمثلة إضافية

3 التعليم اشتركت مها في ثلاثة فصول في الكلية المجتمعية مقابل مبلغ يقل قليلاً عن AED 156. كانت هناك رسوم إدارية تبلغ AED 15، وتتساوى تكلفة الفصول. كيف يمكنك أن تبين أن تكلفة كل فصل أقل من AED 47؟ المعطيات: أنفقت مها ما يقل عن AED 156. المطلوب إثباته: تقل تكلفة أحد الفصول x على الأقل عن AED 47. أي أنه إذا كانت $3x + 15 < 156$، فإن $x < 47$. الخطوة 1: افترض أن $x \geq 47$. الخطوة 2: $47 + 47 + 47 + 15 \geq 156$. الخطوة 3: يتناقض هذا مع النص على أن التكلفة الإجمالية كانت أقل من AED 156. إذًا فالافتراض بأن $x \geq 47$ لا بد أن يكون خطأً. ولهذا، لا بد أن تكلفة فصل واحد تقل عن 47.

4 اكتب برهانًا غير مباشر يوضح أنه إذا كانت x عددًا أوليًا لا يساوي 3، فإن $\frac{x}{3}$ ليس عددًا صحيحًا. الخطوة 1: افترض أن $\frac{x}{3}$ عدد صحيح. الخطوة 2: $\frac{x}{3} = n$ (تعويض الافتراض) $x = 3n$ (خاصية الضرب) الخطوة 3: يتناقض هذا مع أن x عدد أولي لأن n تقبل القسمة على x و $n \neq 1$ بما أن $x \neq 3$. لهذا $\frac{x}{3}$ ليس عددًا صحيحًا.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اصنع مقطع فيديو يوضح كيفية إنشاء برهان بالتناقض. ثم انشره على موقع إلكتروني لمشاركة مقاطع الفيديو. قد يكون هذا مفهومًا صعبًا بالنسبة لبعض الطلاب، ولذلك قد يكون من المفيد لهم تشغيل شرحك الدقيق لكيفية كتابة هذا النوع من البراهين.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يدركوا الأمثلة المضادة ويستخدمونها. شجّع الطلاب على تدوين الأساليب المختلفة للبرهان (البرهان بالتناقض والبرهان بعمودين والبرهان التسلسلي وما إلى ذلك) في دفاترهم للرجوع إليها سريعًا أثناء أداء الواجب المنزلي.

تُستخدم البراهين غير المباشرة غالبًا لإثبات المفاهيم في نظرية الأعداد. في هذه البراهين، يساعد تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي بالتعبير $2k$ وتمثيل العدد الفردي بالتعبير $2k + 1$ لأي عدد صحيح k.

مثال 4 البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًا صحيحًا، فإن x عدد زوجي صحيح.

الخطوة 1 **المعطيات:** $x + 2$ هو عدد زوجي صحيح.

المطلوب: x هو عدد زوجي صحيح.

برهان غير مباشر:
افترض أن x هو عدد صحيح فردي. هذا يعني أن $x = 2k + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة k.

الخطوة 2

$x + 2 = (2k + 1) + 2$	تعويض الافتراض
$= (2k + 2) + 1$	خاصية التبديل
$= 2(k + 1) + 1$	خاصية التوزيع

حدّد الآن ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا صحيحًا زوجيًا أم فرديًا. بما أن k عدد صحيح و $k + 1$ أيضًا عدد صحيح، افترض أن m تمثل العدد الصحيح $k + 1$.

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ التعويض

إذًا، يمكن تمثيل $x + 2$ باستخدام $2m + 1$، حيث m عدد صحيح. لكن هذا التمثيل يعني أن $x + 2$ هو عدد صحيح فردي، وهو ما يتعارض مع العبارة المعطاة بأن $x + 2$ عدد صحيح زوجي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x هو عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عدد زوجي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

انتبه!
الفرضيات لا يوجد تشابه بين البراهين بالتناقض واستخدام مثال مضاد. يساعدك المثال المضاد في نبذ تخمين ما، ولا يمكن استخدامه في إثبات تخمين.

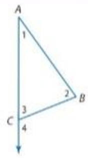
تمرين موجه

4. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أنه إذا كان تربيع العدد الصحيح فرديًا، فإن هذا العدد الصحيح يكون فرديًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

2 البراهين غير المباشرة في الهندسة يمكن استخدام الاستنتاج غير المباشر لإثبات عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

إذا كانت إحدى الزوايا زاوية خارجية لمثلث، فأثبت أن قياسها أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المجاورتين.



الخطوة 1 صمم رسمًا تخطيطًا لهذا الموقف، ثم حدّد المعطيات والمطلوب إثباته.

المعطيات: $\angle 4$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: $m\angle 4 > m\angle 1$ و $m\angle 4 > m\angle 2$.

برهان غير مباشر:
افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$ أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.
بعبارة أخرى، $m\angle 4 \leq m\angle 1$ أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

(يتبع في الصفحة التالية)

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اشرح أن الطلاب معتادون على العمل للأمام لحل المعادلات والمتباينات وأنهم قد يميلوا إلى حل المسائل الجبرية كخطوة في كتابة البراهين غير المباشرة. أبلغ الطلاب أنه على الرغم من أن هذا الأسلوب ينجح، فإنه لا يمثل البرهان غير المباشر وأنهم ينبغي أن يتجنبوا حل المسائل الجبرية في هذا الدرس، بل ينبغي أن يستخدموا أساليب مشابهة للخطوات الموضحة في المثال 2.

الخطوة 2 نحتاج فقط إلى بيان أن افتراض $m\angle 1 \le m\angle 4$ يؤدي إلى تناقض. تتبع فرضية $m\angle 4 \le m\angle 2$ نفس الاستنتاج.

$m\angle 1 \le m\angle 4$ تعني أنه إما $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة رقم 1 $m\angle 4 = m\angle 1$

نظرية الزاوية الخارجية $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

تعويض $m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$

اطرح $m\angle 4$ من كل طرف $0 = m\angle 2$

هذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0. إذًا $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة رقم 2 $m\angle 4 < m\angle 1$

بتطبيق نظرية الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$. بما أن قياس الزاوية موجب، فإن تعريف المتباينة يشير ضمنيًا إلى أن $m\angle 4 > m\angle 1$. يتناقض هذا مع افتراض أن $m\angle 4 < m\angle 1$.

الخطوة 3 في كلتا المسألتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض مع نظرية أو تعريف. ولذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $m\angle 4 > m\angle 1$ و $m\angle 4 > m\angle 2$ صحيحًا.

نصيحة دراسية

التعرف على التناقضات

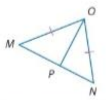
تذكر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا متضمنًا في المعلومة المعطاة أو الافتراض. قد يكون التناقض في حقيقة معلومة أو تعريف، مثل المسألة رقم 1 للمثال رقم 5، حيث لا بد أن يكون قياس الزاوية أكبر من 0.

تمرين موجه

5. اكتب برهانًا غير مباشر. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.**

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ **$\overline{AB} \not\cong \overline{CD}$**

2. $\triangle XYZ$ هو مثلث مختلف الأضلاع. **$\triangle XYZ$ هو مثلث متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع.**

3. إذا كان $4x < 24$، فإن $x < 6$. **$x \ge 6$**

4. $\angle A$ ليست زاوية قائمة. **$\angle A$ زاوية قائمة.**

مثال 2 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.** **5–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

5. إذا كان $2x + 3 < 7$، فإن $x < 2$.

6. إذا كان $3x - 4 > 8$، فإن $x > 4$.

مثال 3 7. **لاكروس** أحرزت هيام 13 نقطة لحساب فريق مدرستها الثانوية في لعبة اللاكروس خلال المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط إحرازها للنقاط في كل مباراة أقل من 3 نقاط. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

مثال 4 8. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أنه إذا كان $5x - 2$ عددًا صحيحًا فرديًا، فإن x يجب أن يكون عددًا صحيحًا فرديًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

مثال 5 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.** **9–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

9. وتر المثلث قائم الزاوية هو الضلع الأكبر في هذا المثلث.

10. إذا كانت هناك زاويتان متكاملتين، فلا يمكن أن تكونا زاويتين منفرجتين.

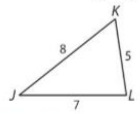
2 البرهان غير المباشر في الهندسة

يوضح **المثال 5** كيفية استخدام الاستنتاج غير المباشر في مسألة هندسية.

مثال إضافي

5 **المعطيات:** $\triangle JKL$ تبلغ أطوال أضلاعه 5 و 7 و 8.

المطلوب إثباته: $m\angle K < m\angle L$



الخطوة 1: افترض أن $m\angle K \ge m\angle L$.

الخطوة 2: بموجب علاقات الزاوية والضلع، $JL \ge JK$.

الخطوة 3: يتناقض هذا مع أطوال الأضلاع في المعطيات. إذًا لا بد أن يكون الافتراض $m\angle K \ge m\angle L$ خطأ. ولهذا، $m\angle K < m\angle L$.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

5. المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب إثباته: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $\angle MOP \cong \angle NOP$.

الخطوة 2: نعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$، و $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ بموجب خاصية الانعكاس. إذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$، فإن $\triangle MOP \cong \triangle NOP$ بموجب SAS. إذًا $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ بموجب CPCTC.

الخطوة 3: يتناقض الاستنتاج بأن $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ مع معلومات المعطيات. ولهذا، الافتراض خطأ. ولذلك، $\angle MOP \not\cong \angle NOP$.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–10 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمارين من 23 إلى 32، شجّع الطلاب على التخطيط لبراهينهم قبل البدء.

إجابات إضافية

21. افترض أن تكلفة لعبة هي x وتكلفة اللعبة الأخرى هي y.

الخطوة 1 المعطيات: $x + y > 80$

المطلوب إثباته: $x > 40$ أو $y > 40$

برهان غير مباشر:

افترض أن $x \leq 40$ و $y \leq 40$.

الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 40$ و $y \leq 40$، فإن $x + y \leq 40 + 40$ أو $x + y \leq 80$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 80$.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن $x \leq 40$ و $y \leq 40$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معروفة، لا بد أن يكون الافتراض خاطئًا. ولهذا، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 40$ أو $y > 40$ صحيحًا. ولهذا، لا بد أن إحدى الألعاب على الأقل قد تكلفت أكثر من AED 40.

22. **الخطوة 1** افترض أنه تم بيع أقل من 150 تذكرة للبالغين.

الخطوة 2 إذا تم بيع 149 تذكرة للبالغين، فقد تم بيع $375 - 149$ أو 226 تذكرة للأطفال. إجمالي الربح من 149 تذكرة للبالغين و 226 تذكرة للأطفال يبلغ (149)(AED 6) + (226)(AED 2.50) أو AED 1459.

الخطوة 3 الاستنتاج خطأ. إذًا لا بد أن الافتراض خطأ. ولهذا، عدد تذاكر البالغين المبيعة أكبر من أو يساوي 150.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.**

11. إذا كان $2x > 16$، فإن $x > 8$. $x \leq 8$

12. $\angle 1$ و $\angle 2$ ليستا زاويتين متكاملتين. **$\angle 1$ و $\angle 2$ عبارة عن زاويتين متكاملتين.**

13. إذا كان المستقيمان لهما نفس الميل، فإنهما متوازيان. **المستقيمان غير متوازيين.**

14. إذا كانت الزاويتان الداخليتان المتتاليتان اللتان تكوّنتا من مستقيمين ومحور قاطع، زاويتين متكاملتين، فإن هذين المستقيمين يكونان متوازيين. **المستقيمان غير متوازيين.**

15. إذا كان المثلث غير متساوي الأضلاع، فإنه يكون مثلثًا غير متساوي الزوايا. **المثلث متساوي الزوايا.**

16. العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2. **العدد الفردي يقبل القسمة على 2.**

مثال 2 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة. 17–20. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

17 إذا كان $2x - 7 > -11$، فإن $x > -2$.

18. إذا كان $5x + 12 < -33$، فإن $x < -9$.

19. إذا كان $-3x + 4 < 7$، فإن $x > -1$.

20. إذا كان $-2x - 6 > 12$، فإن $x < -9$.

مثال 3

21. **ألعاب الكمبيوتر** اشترى إبراهيم لعبتين من ألعاب الكمبيوتر بتكلفة AED 80. بعد مرور بضعة أسابيع، سأله صديقه عن ثمن كل لعبة. لم يتذكر إبراهيم أسعار كل لعبة على حدة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى اللعبتين على الأقل تزيد تكلفتها عن AED 40. **انظر الهامش.**

22. **جمع التبرعات** تحتفل مدرسة أمال بمهرجان الخريف لجمع التبرعات للأعمال الخيرية المحلية. تصل تكلفة تذكرة الفرد البالغ لدخول المهرجان AED 6 وتذكرة الطفل AED 2.50. إذا كان إجمالي ما تم بيعه من التذاكر 375 تذكرة، وزاد الربح عن AED 1460، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل من تذاكر البالغين. **انظر الهامش.**

المثالان 4–5 **الفرضيات اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة. 23–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

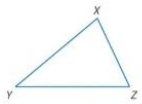
23. **المعطيات:** xy هو عدد فردي صحيح.
المطلوب: x و y هما عددان صحيحان فرديان

24. **المعطيات:** n^2 هو عدد زوجي.
المطلوب: n^2 يقبل القسمة على 4.

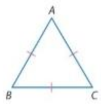
25. **المعطيات:** x هو عدد فردي.
المطلوب: x لا يقبل القسمة على 4.

26. **المعطيات:** xy هو عدد صحيح زوجي.
المطلوب: x أو y هو عدد صحيح زوجي.

27. **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \not\cong \angle Y$



28. **المعطيات:** $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الزوايا.



29. في المثلث متساوي الساقين لا يمكن أن تكون إحدى زوايا القاعدة زاوية قائمة.

30. توجد زاوية قائمة واحدة في المثلث.

B **31.** اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10

32. اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$، فإن b يكون سالبًا.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	11–30, 40, 41, 43–59	11–29 فردي، 45–48	12–30 زوجي، 40, 41, 43, 49–59
OL أساسي	11–29 فردي، 31–41, 43–59	11–30, 45–48	31–41, 43, 49–59
BL متقدم	31–56, (57–59 اختياري)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يدرك الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقات بينها في مواقف المسائل. في التمرين 36، أوضح للطلاب أنه في البرهان غير المباشر، سيفترضون إن إحدى العبارات غير صحيحة.

33. كرة السلة في رياضة كرة السلة، توجد ثلاث طرق ممكنة لتسجيل ثلاث نقاط دفعة واحدة. يمكن للاعب التسجيل في السلة من خلف خط الثلاث نقاط، أو قد تتم عرقلة اللاعب أثناء تسجيله رمية النقطتين وتحتسب له رمية حرة، أو قد تتم عرقلة اللاعب خلف خط الثلاث نقاط وتحتسب له ثلاث رميات حرة. عندما دخلت حصة في أحد صفوف الانتظار، كانت النتيجة 28 نقطة للفريق المضيف و 26 نقطة للفريق الزائر. وعند عودتها، كانت النتيجة 28 للفريق المضيف و 29 للفريق الزائر. استنتجت حصه أن أحد لاعبي الفريق الزائر قام بتسجيل رمية ثلاثية. أثبت أو ادحض افتراضها باستخدام البرهان غير المباشر. **انظر الهامش.**

34. الألعاب تدور لعبة حاسوب حول فارس في مهمة للبحث عن الكنز. وفي نهاية الرحلة، يقترب الفارس من البابين الظاهرين بالأسفل.

يخبر أحد الخدم الفارس أن إحدى العلامتين خاطئة والأخرى صحيحة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد الباب الذي يجب أن يختاره الفارس. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

C **35** **تطلاعات الرأي** أجرت مكتبة بدرية المحلية استطلاعات من خلال الإنترنت للمراهقين لمعرفة الأنشطة التي يشارك فيها المراهقون للحفاظ على البيئة. جاءت نتائج الاستطلاع كما هو موضح في الرسم البياني.

a. المطلوب: *أكثر من نصف المراهقين المشاركين قالوا إنهم يقومون بإعادة التصنيع للحفاظ على البيئة.*

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

b. إذا تم أخذ رأي 400 مراهق في استطلاع الرأي، فأثبت أن 92 مراهقًا قالوا إنهم شاركوا في يوم الحفاظ على الأرض.

36. الاستنتاج يمتلك كل من ناصر ومنصور ومحمود سيارات ذات ألوان مختلفة. توجد عبارة واحدة صحيحة بين العبارات التالية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد العبارة الصحيحة. اشرح.

(1) ناصر لديه سيارة حمراء.

(2) منصور ليس لديه سيارة حمراء.

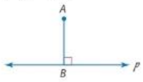
(3) محمود ليس لديه سيارة زرقاء.

العبارة 2، الإجابة النموذجية: إذا افترضت أن العبارة 2 غير صحيحة، أو "منصور لديه سيارة حمراء"، فهذا يناقض العبارة 1 "ناصر لديه سيارة حمراء". إذًا العبارة 2 صحيحة. إذا افترضت أن العبارتين 1 و 3 غير صحيحتين، فلن تتناقض أي من العبارتين المتبقيتين مع الافتراض.

حدّد إذا ما كان من الممكن إثبات صحة كل عبارة حول المسافة الأقصر بين نقطة ومستقيم أو مستوى باستخدام البرهان المباشر أو غير المباشر. ثم اكتب برهانًا لكل عبارة. 38–37. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

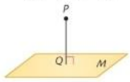
37 **المعطيات:** $\overline{AB} \perp$ المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من A إلى المستقيم p.



38. **المعطيات:** $\overline{PQ} \perp$ المستوى M

المطلوب: $\overline{PQ}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من P إلى المستوى M.



39. **نظرية الأعداد** في هذه المسألة، ستضع تخمينًا وتثبته حول علاقة نظرية الأعداد.

a. اكتب تعبيرًا حول مجموع مكعب أحد الأعداد والعدد ثلاثة. $n^3 + 3$

b. أنشئ جدولاً يشتمل على قيمة التعبير لـ 10 قيم مختلفة لـ n. أضف قيمًا زوجية وفردية لـ n. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

c. اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة التعبير زوجية.

d. اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

39c. الإجابة النموذجية: إذا كانت القيمة $n^3 + 3$ زوجية، فإن القيمة n تكون فردية.

مسائل مهارات التفكير العليا

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الإجراء لكتابة برهان غير مباشر. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

41. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عبارة يمكن إثباتها باستخدام البرهان غير المباشر. أضف برهانًا غير مباشر لعبارتك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

42. **تحدٍ** إذا كان x عددًا نسبيًا، فيمكن تمثيله بناتج القسمة $\frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين a و b، إذا كان $b \neq 0$. لا يمكن تمثيل العدد غير النسبي بناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أن ناتج ضرب عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عددًا غير نسبي.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

43. **النقد** تحاول كل من أسماء وإيمان إثبات العبارة التالية باستخدام البرهان غير المباشر. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إذا كان مجموع العددين زوجيًا، فإن الأعداد زوجية.

أسماء	إيمان
العبارة صحيحة. إذا كان أحد الأعداد زوجيًا والعدد الآخر صفرًا، فإن المجموع يكون زوجيًا. بما أن الافتراض يكون صحيحًا حتى عندما يكون الاستنتاج خاطئًا، فإن العبارة صحيحة.	*العبارة صحيحة. إذا كان العددان فرديين، فإن المجموع يكون زوجيًا. بما أن الافتراض يكون صحيحًا عندما يكون الاستنتاج خاطئًا، فإن العبارة صحيحة.*

لا توجد عبارة صحيحة؛ الإجابة النموذجية: بما أن الافتراض يكون صحيحًا عندما يكون الاستنتاج خاطئًا، فإن العبارة خاطئة.

44. **الكتابة في الرياضيات** راجع التمرين 8. اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة ثم اكتب البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي. كيف يتصل كل من البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

تدريس الممارسات في الرياضيات

التفكير النقدي يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات التمييز بين المنطق السليم والاستنتاج الخاطئ. في التمرين 43، ينبغي على الطلاب أن يدركوا أنه يكفي لرفض عبارة مثال مضاد واحد، كما تفعل إيمان. لم تكن أسماء محقة في قول إنه إذا صح الافتراض وأخطأ الاستنتاج، تكون العبارة صحيحة.

إجابات إضافية

33. نعلم أن الفريق الآخر سجّل 3 نقاط، وتعتقد حصة أنهم أحرزوا ضربة بثلاث نقاط. نعلم أيضًا أن اللاعب يستطيع تسجيل 3 نقاط عن طريق إحراز تسجيل في السلة والحصول على رمية بسبب خطأ ضده.

الخطوة 1 افترض أن لاعبًا في الفريق الآخر أحرز رمية في السلة بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضده.

الخطوة 2 كانت نقاط الفريق الآخر قبل مغادرة حصة تبلغ 26. إذًا نقاطهم بعد إحراز رمية بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضدهم تبلغ $26 + 3$ أو 29.

الخطوة 3 النقاط صحيحة عندما نفترض أن الفريق الآخر أحرز رمية بنقطتين ورمية من خطأ ضده. إذًا فقد لا يكون افتراض حصة صحيحًا. ربما يكون الفريق الآخر قد أحرز رمية بثلاث نقاط أو رمية بنقطتين ورمية مقابل خطأ ضدهم.

34. الباب الذي على اليسار. إذا كانت لافتة الباب الذي على اليمين صحيحة، فكلتا اللافتتين صحيحتان. لكن إحدى اللافتتين خطأ. إذًا لافتة الباب الذي على اليمين لا بد أن تكون خطأ.

التدريس المتمايز BL OL

التوسع اكتب برهانًا غير مباشر للعبارة التالية.

المعادلة $x^2 - y^2 = 1$ ليس لها حلول تحتوي على عدد صحيح موجب.

الخطوة 1 افترض أن هناك حل (x, y) للمعادلة $x^2 - y^2 = 1$، حيث x و y عددان صحيحان موجبان.

الخطوة 2 التعبير $x^2 - y^2$ يتحول إلى العوامل $(x - y)(x + y)$. إذا كان x و y عددان صحيحان، فإن أيًا من $x - y = 1$ و $x + y = 1$ أو $x - y = -1$ و $x + y = -1$. بحل نظام المعادلات في الحالة الأولى، نجد أن $x = 1$ و $y = 0$. بما أن صفر ليس عددًا موجبًا، يتعارض هذا مع افتراضنا. في الحالة الثانية، نجد أن $x = -1$ و $y = 0$، وهو ما يتعارض أيضًا مع افتراضنا.

الخطوة 3 لهذا، فالعبارة الأصلية القائلة بأن $x^2 - y^2 = 1$ ليس لها حلول تحتوي على عدد صحيح موجب لا بد أن تكون صحيحة.

تمرين على الاختبار المعياري

45. إجابة مختصرة اكتب معادلة في صيغة الميل والمقطع لوصف المستقيم الذي يمر بالنقطة (5, 3) ويوازي المستقيم الذي تمثله المعادلة $-2x + y = -4$.
$y = 2x - 7$

46. عبارة: إذا كانت $\angle B \cong \angle A$ و$\angle A$ مكملة لـ $\angle C$، فإن $\angle B$ مكملة لـ $\angle C$.

تثبت بثينة العبارة السابقة من خلال التناقض. فقد بدأت بافتراض أن $\angle B$ غير مكملة لـ $\angle C$. أي من التعريفات التالية ستستخدمه بثينة للوصول إلى التناقض؟ **D**

A تعريف التطابق
B تعريف الزوج الخطي
C تعريف الزاوية القائمة
D تعريف الزوايا المتكاملة

47. صنّف زوايا $\triangle MNO$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر إذا كان $MN = 9$، و $NO = 7.5$، و $OM = 12$. **J**

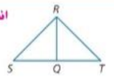
F $\angle N, \angle O, \angle M$
G $\angle O, \angle M, \angle N$
H $\angle O, \angle N, \angle M$
J $\angle M, \angle O, \angle N$

48. SAT/ACT إذا كان $b > a$، فأي مما يلي لا بد أن يكون صحيحًا؟ **A**

A $-a > -b$
B $3a > b$
C $a^2 < b^2$
D $a^2 < ab$
E $-b > -a$

مراجعة شاملة

49. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.
المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.
المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$



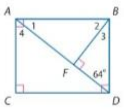
انظر الهامش.

الهندسة الإحداثية حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة لكل مثلث له رؤوس معلومة.

50. $D(-3, 3), E(3, 2), F(1, -4)$ **50.** $\left(-\frac{17}{38}, -\frac{7}{38}\right)$

51. $A(4, 0), B(-2, 4), C(0, 6)$ $\left(1\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5}\right)$

أوجد قياس كل مما يلي.



52. $m\angle 1$ **26**

53. $m\angle 4$ **64**

الهندسة الإحداثية أوجد المسافة بين كل زوج من المستقيمات المتوازية باستخدام المعادلات المعطاة.

54. $x + 3y = 6$
$x + 3y = -14$ $\sqrt{40} \approx 6.3$

55. $y = 2x + 2$
$y = 2x - 3$ $\sqrt{5} \approx 2.2$

56. إعادة التدوير راجع مخطط فن الذي يمثل عدد الأحياء في مدينة معينة المشتركة في برنامج إعادة تدوير مخلفات الأرصفة من الورق أو الألومنيوم.

a. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الألومنيوم؟ **24**
b. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير كل من الورق أو الألومنيوم أو كليهما؟ **36**
c. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الورق والألومنيوم؟ **4**

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل متباينة صحيحة أم خاطئة.

57. $23 - 11 > 9$ **صحيحة**

58. $41 - 19 < 21$ **خاطئة**

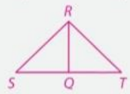
59. $57 + 68 < 115$ **خاطئة**

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
قبيل انتهاء الصف، اجعل الطلاب يشرحوا السبب في أن ارتفاع ضلع في مثلث لا يمكن أن يزيد الضلعين الآخرين في المثلث.

إجابة إضافية

49. المعطيات: $\overline{RQ}$ ينصف $\angle SRT$.
المطلوب إثباته:
$m\angle SQR > m\angle SRQ$



البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{RQ}$ زاوية $\angle SRT$. (معطى)
2. $\angle SRQ \cong \angle QRT$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $m\angle QRS = m\angle QRT$ (تعريف $\cong$ ∡)
4. $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$ (نظرية الزاوية الخارجية)
5. $m\angle SQR > m\angle QRT$ (تعريف المتباينة)
6. $m\angle SQR > m\angle SRQ$ (التعويض)

1 التركيز

الهدف استخدام التقنية لاستكشاف متباينات المثلث.

2 التدريس

العمل بصورةٍ مستقلة

يستطيع الطلاب العمل بمفردهم أو في مجموعات ثنائية من الطلاب مختلفي القدرات. اطلب من الطلاب أن ينفذوا النشاط أثناء الإجابة على التمارين من 1 إلى 6.

اسأل الطلاب عن الرابط بين تخمينهم في التمرين 4 وما لاحظوه. اجعل الطلاب يحددوا كيفية النقر على الرأس A وسحبه بحيث يقع على أقصر مسافة من الرأس B.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرين 7 بمفردهم.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب يفهمون العلاقات بين أطوال أضلاع المثلثات.

من العملي إلى النظري

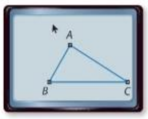
اجعل الطلاب يرسمون مثلثًا على ورقة تمثيلات بيانية. اطلب منهم أن يتبادلوا مثلثاتهم مع زملائهم. اجعل الطلاب يتوصلوا إلى أطوال الأضلاع ويكتبوا المتباينات للتعبير عن العلاقات بين الأطوال.

4-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
متباينة المثلث

يمكنك استخدام تطبيق خاص على بعض حاسبات التمثيل البياني لاكتشاف خصائص المثلثات.

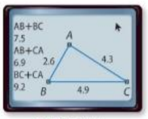
نشاط 1

صمم مثلثًا. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.



الخطوة 1

الخطوة 1 ارسم مثلثًا باستخدام أداة المثلث الموجودة في قائمة **F2**. ثم استخدم الأداة **Alph-Num** الموجودة في قائمة **F5** لتسمية الرؤوس بالأحرف A، و B، و C.



الخطوتان 2 و 3

الخطوة 2 قم بالوصول إلى أداة **distance & length (المسافة والطول)** الموضحة باسم **D. & Length** ضمن **Measure (قياس)** في القائمة **F5**. استخدم الأداة لقياس كل ضلع من أضلاع المثلث.

الخطوة 3 اعرض $AB + BC$، و $AB + CA$، و $BC + CA$ باستخدام أداة **Calculate (احسب)** في القائمة **F5**. أطلق أسماء على القياسات.

الخطوة 4 انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.

تحليل النتائج

1. استبدل كل ● بأحد الرموز <، أو >، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$AB + BC \bullet CA$ **$AB + BC > CA$** $\quad$ $AB + CA \bullet BC$ **$AB + CA > BC$** $\quad$ $BC + CA \bullet AB$ **$BC + CA > AB$**

2. انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث، ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ماذا تلاحظ؟ **بقيت المتباينات كما هي.**
3. انقر على النقطة A واسحبها لكي تقع على المستقيم BC. ماذا تلاحظ حول AB، و BC، و CA؟ هل الرموز A، و B، و C تمثل رؤوس المثلث؟ اشرح.
الإجابة النموذجية: $AB + BC = CA$؛ لا، النقاط ليست رؤوس للمثلث لأنها على مستقيم واحد.
4. **ضع تخمينًا** حول مجموع أطوال ضلعين من مثلث وطول الضلع الثالث.
مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
5. هل القياسات والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمارين 3-1 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 4؟ اشرح. **انظر الهامش.**
6. استبدل كل ● بأحد الرموز <، أو >، أو = لجعل العبارة صحيحة.

$|AB - BC| \bullet CA$ $\quad$ $|AB - CA| \bullet BC$ $\quad$ $|BC - CA| \bullet AB$

ثم انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث ومراجعة إجاباتك. ماذا تلاحظ؟ **$|AB - BC| < CA; |AB - CA| < BC; |BC - CA| < AB;$ تظل جميع المتباينات كما هي.**

7. كيف تمكنت من استخدام ملاحظاتك لتحديد الأطوال المحتملة للضلع الثالث بالمثلث من خلال معرفة طولي الضلعين الآخرين؟ **انظر الهامش.**

إجابات إضافية

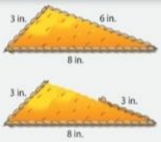
5. لا؛ تم التوصل إلى التخمين في التمرين 4 باستخدام الاستنتاج الاستقرائي، وهو ليس طريقة صالحة لإثبات التخمين.
7. سيقل طول الضلع الثالث عن مجموع طولي الضلعين الآخرين ويزيد على القيمة المطلقة للفارق بين طولي الضلعين الآخرين.

الدرس 4-5 متباينة المثلث

السابق
- لقد تعرفت على خواص متباينات العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث وقمت بتطبيقها.

الحالي
1. استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.
2. أثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.

لماذا
- في عرض لتحسين المنازل، أرادت مصممة استخدام قطع مقصوصة من أحبال من مشروع حياكة آخر لتزيين الوسائد المثلثية الشكل التي صنعتها هي وصاحب المنزل. ولتقليل التكاليف، أرادت المصممة استخدام القصاصات دون قطعها. واختارت ثلاث قصاصات بشكل عشوائي وحاولت تكوين مثلث. ثم توضيح محاولتين من ذلك.



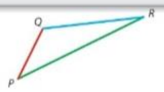
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 متباينة المثلث

في حين أن المثلث يتم تصميمه باستخدام هذه القطع المستقيمة الثلاث، يجب أن تنشأ علاقة خاصة بين أطوال القطع المستقيمة حتى تشكّل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.



أمثلة
$PQ + QR > PR$
$QR + PR > PQ$
$PR + PQ > QR$

سوف تثبت النظرية 4.11 في تمرين 23.

لتوضيح أنه ليس من الصعب تكوين مثلث باستخدام ثلاثة أطوال أضلاع، يجب عليك فقط توضيح أن إحدى متباينات المثلث الثلاث ليست صحيحة.

مثال 1 تحديد أطوال الأضلاع المعطاة المحتملة للمثلثات

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا، فاشرح السبب.

a. 8 in., 15 in., 17 in.

تحقق من كل متباينة.

$8 + 15 \overset{?}{>} 17$ $8 + 17 \overset{?}{>} 15$ $15 + 17 \overset{?}{>} 8$
$23 > 17$ ✓ $25 > 15$ ✓ $32 > 8$ ✓

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 8 و 15 و 17 بوصة ستكوّن مثلثًا.

b. 6 m, 8 m, 14 m

$6 + 8 \overset{?}{>} 14$
$14 \not> 14$ ✗

بما أن مجموع زوج واحد من أطوال الأضلاع ليس أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 6 و 8 و 14 مترا لن تكوّن مثلثًا.

تمرين موجه 1A. نعم؛ $15 + 16 > 30; 15 + 30 > 16; 16 + 30 > 15$

1A. 15 yd, 16 yd, 30 yd

1B. 2 ft, 8 ft, 11 ft لا؛ $2 + 8 \not> 11$

1 الهدف

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-5 التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلثات وأضلاعها وتطبيقها.

الدرس 4-5 استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة وإثبات علاقات المثلث.

بعد الدرس 4-5 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:
- ما أطوال التوصيلات الثلاث في كل محاولة؟ الأولى: 3 in., 6 in., 8 in.؛ الثانية: 3 in., 3 in., 8 in.
- ما مجموع الضلعين الأقصر في كل محاولة؟ الأول: 9 in.؛ الثاني: 6 in.

(يتبع في الصفحة التالية)

- ما وجه المقارنة بين المجموع والتوصيلة الثالثة في كل محاولة؟ في المحاولة الأولى، المجموع أكبر من الضلع الثالث، وفي المحاولة الثانية، المجموع أصغر.
- استخدم هذه المعلومات لتخمين العلاقات بين الضلعين الأقصر والضلع الثالث في مثلث. الإجابة النموذجية: يجب أن يزيد مجموع الضلعين الأقصر على الضلع الثالث.

1 متباينة المثلث

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية التوصل إلى أطوال الأضلاع في مثلث وتحديدها. سيستخدم الطلاب المتباينات لتحديد أطوال الأضلاع.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاشرح السبب.

a. $6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}$

لا؛ $6\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} < 14\frac{1}{2}$

b. 6.8, 7.2, 5.1 نعم

2 **مثال على الاختبار المعياري** في $\triangle PQR$، $PQ = 7.2$ و $QR = 5.2$. ما القياس الذي لا يمكن أن تبلغه PR؟ D

A 7 B 9 C 11 D 13

عندما يكون طولا ضلعين في مثلث معلومين، قد يكون الضلع الثالث أي طول في مدى معين من القيم. يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث.

مثال على الاختبار المعياري 2 إيجاد الأطوال المحتملة للضلع

إذا كان قياسا ضلعين في مثلث 3cm و 7cm، فما *أقل* عدد صحيح ممكن لقياس الضلع الثالث؟

A 3 cm B 4 cm C 5 cm D 10 cm

نصيحة عند حل الاختبار

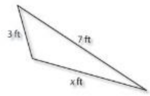
اختبار الخيارات إذا لم يكن لديك متسع من الوقت، فيمكنك اختبار كل خيار لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد الخيارات المتبقية.

قراءة فقرة الاختبار

يجب أن تحدد أي قيمة تمثل أقل قياس محتمل للضلع الثالث من المثلث الذي يبلغ طولا ضلعيه 3 أقدام و 7 أقدام.

حل فقرة الاختبار

لتحديد أقل قياس محتمل من الخيارات المعطاة، حدد أولاً مدى القياس المحتمل للضلع الثالث.



ضع رسمًا تخطيطيًا وافرض أن x يمثل طول الضلع الثالث.

أولاً، أنشئ كل متباينات المثلثات الثلاثة وحلها.

$x + 7 > 3$	$3 + x > 7$	$3 + 7 > x$
$x > -4$	$x > 4$	$10 > x$ أو $x < 10$

لاحظ أن $x > -4$ صحيح دائمًا لأي قياس عدد صحيح لـ x.
بجمع المتباينتين المتبقيتين، فإن مدى القيم التي تلائم كلا المتباينتين هو $x < 10$ و $x > 4$، والذي يمكن كتابته بالصيغة $4 < x < 10$.

أقل قيمة لعدد صحيح بين 4 و 10 هي 5. إذًا الإجابة الصحيحة هي الخيار C.

قراءة في الرياضيات

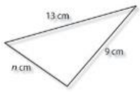
رموز المتباينات المتعددة المتباينة المركبة $4 < x < 10$ تُقرأ x بين 4 و 10.

تمرين موجه

2. أي مما يلي قد لا يمكن أن يمثل قيمة n؟ J

F 7 H 13

G 10 J 22



2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث

يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث للاستنتاج في البراهين.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون أصحاب النمط الطبيعي اشرح أنه حتى المثلثات الموجودة في الطبيعة يجب أن تتبع المبادئ الواردة في هذا الدرس. اطلب من الطلاب أن يجدوا أمثلة لاستكشاف متباينة المثلث واختبارها، مثل مناقير الطيور وأوراق الشجر ومجموعات النجوم ومسارات الحيوانات وما إلى ذلك. تشكّل نجوم النسر الواقع وذنب الدجاجة والنسر الطائر مثلثًا قائم الزاوية يُسمى "مثلث الصيف". يستطيع الطلاب البحث للوصول إلى المسافات المقدرة بين النجوم والتحقق من أن النظرية صحيحة حتى في الطبيعة.

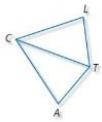
مثال من الحياة اليومية 3 البرهان باستخدام نظرية متباينة المثلث

السفر المسافة من ينابيع كولورادو، في منطقة الينابيع، بكولورداو، إلى أبيلين في تكساس هي نفسها المسافة من ينابيع كولورادو إلى تولسا في أوكلاهوما. أثبت أن رحلة الطيران مباشرة من ينابيع كولورادو إلى تولسا عبرلنكولن، في نبراسكا، تقطع مسافة أكبر من رحلة الطيران التي تنطلق دون توقف من ينابيع كولورادو إلى أبيلين.

صمم رسمًا تخطيطيًا أبسط لهذه الحالة وحدد اسمًا له. ارسم الضلع $\overline{LT}$ لتكوين $\triangle CTL$.

المعطيات: $CA = CT$

المطلوب: $CL + LT > CA$



البرهان:

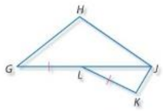
العبارات	التبرير
1. $CA = CT$	1. المعطيات
2. $CL + LT > CT$	2. نظرية متباينة المثلث
3. $CL + LT > CA$	3. التعويض

تمرين موجه

3. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



انظر الهامش.

الربط بالحياة اليومية

لا تقطع رحلة الطيران المباشرة نفس المسافة التي تقطعها رحلة الطيران التي تنطلق دون توقف. بالنسبة إلى رحلة الطيران المباشرة، لا يغير المسافرون الطائرات، ولكن قد تهبط الطائرة في محطة واحدة أو اثنتين قبل المتابعة إلى وجهتها النهائية.

التحقق من فهمك

مثال 1 **هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.**

1. 5 cm, 7 cm, 10 cm
2. 3 in., 4 in., 8 in.
   لا؛ $3 + 4 \ngtr 8$
3. 6 m, 14 m, 10 m

1. نعم؛ $5 + 7 > 10$، $5 + 10 > 7$، و $7 + 10 > 5$

3. نعم؛ $6 + 14 > 10$، $6 + 10 > 14$، و $10 + 14 > 6$

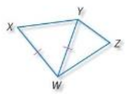
مثال 2 4. **الاختيار من متعدد** إذا كان قياسا ضلعي مثلث 5 أمتار و 9 أمتار، فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟ **B**

A 4 m   **B** 5 m   **C** 6 m   **D** 14 m

مثال 3 5. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$ **انظر الهامش.**



التدريس المتمايز BL OL

التوسع يخطط أحد مصممي المتنزهات لمتنزه جديد سيكون على شكل مثلث. أبلغ المصمم أعضاء مجلس المدينة بأن قياسات حدود المثلث تبلغ 180 قدمًا و 150 قدمًا و 340 قدمًا. طلب أحد أعضاء مجلس المدينة من المصمم أن يعود إلى الموقع ويقيسه مرة أخرى. اشرح السبب بالتفصيل. تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث. بما أن $180 + 150 = 330$، وهو أقل من الضلع الثالث، فلا يمكن أن تشكل القياسات مثلثًا.

2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث

المثال 3 يوضح طريقة استخدام نظرية متباينة المثلث لكتابة برهان حول المسافات.

مثال إضافي

3 السفر تظهر على الخريطة أدناه مدن جيفرسون وكينغستون ونيوبيري. أثبت أن مسافة القيادة من جيفرسون إلى كينغستون ثم من كينغستون إلى نيوبيري أطول من مسافة القيادة من جيفرسون إلى نيوبيري.

الرموز المختصرة للرؤوس هي J و K و N، و $JK + KN > JN$.

إرشاد للمعلمين الجدد

متباينة المثلث بموجب مسلمة جمع القطعة المستقيمة، إذا كان مجموع أي قطعتين مستقيمتين يساوي طول قطعة مستقيمة ثالثة، فنقاط النهاية الثلاث تقع على خط واحد. ولهذا، لا تستطيع القطع المستقيمة الثلاث تشكيل مثلث.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3. **الجمل (المبررات)**

1. $GL = LK$ (معطى)
2. $JH + GH > GJ$ (نظرية متباينة المثلث)
3. $GJ = GL + LJ$ (مسلمة إضافة القطعة المستقيمة)
4. $JH + GH > GL + LJ$ (التعويض)
5. $JH + GH > LK + LJ$ (التعويض)
6. $LK + LJ > JK$ (نظرية متباينة △)
7. $JH + GH > JK$ (خاصية التعدي)

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 5-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء الحل. ويخططون لمسار الحل بدلاً من القفز لمحاولة الحل مباشرة بكل بساطة. في التمرينين 20 و 21، أوضح للطلاب أنهم ينبغي أن يستخدموا نظرية متباينة المثلث.

إجابات إضافية

5. **المعطيات:** $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب إثباته: $YZ + ZW > XW$

الجمل (المبررات)

1. $\overline{XW} \cong \overline{YW}$ (معطى)
2. $XW = YW$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
3. $YZ + ZW > YW$ (نظرية متباينة △)
4. $YZ + ZW > XW$ (التعويض)

6. لا: $4 + 9 \not> 15$
7. نعم: $11 + 21 > 16$ و $11 + 16 > 21$ و $16 + 21 > 11$
8. لا: $1.1 + 8.2 \not> 9.9$
9. لا: $2.1 + 4.2 \not> 7.9$
10. لا: $2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} \not> 5\frac{1}{8}$
11. نعم: $1\frac{1}{5} + 4\frac{1}{2} > 3\frac{3}{4}$ و $4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} > 1\frac{1}{5}$ و $1\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4} > 4\frac{1}{2}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.

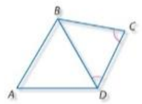
6. 4 ft, 9 ft, 15 ft **6–11. انظر الهامش.**
7. 11 mm, 21 mm, 16 mm
8. 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm
9. 2.1 in., 4.2 in., 7.9 in.
10. $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m
11. $1\frac{1}{5}$ km, $4\frac{1}{2}$ km, $3\frac{3}{4}$ km

مثال 2 احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.

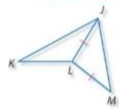
12. 4 ft, 8 ft **$4 \text{ ft} < n < 12 \text{ ft}$**
13. 5 m, 11 m **$6 \text{ m} < n < 16 \text{ m}$**
14. 2.7 cm, 4.2 cm **$1.5 \text{ cm} < n < 6.9 \text{ cm}$**
15. 3.8 in., 9.2 in. **$5.4 \text{ in.} < n < 13 \text{ in.}$**
16. $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km **$2\frac{3}{4} \text{ km} < n < 3\frac{3}{4} \text{ km}$**
17. $2\frac{1}{3}$ yd, $7\frac{2}{3}$ yd **$5\frac{1}{3} \text{ yd} < n < 10 \text{ yd}$**

مثال 3 **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.

18. **المعطيات:** $\angle BCD \cong \angle CDB$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
المطلوب: $AB + AD > BC$

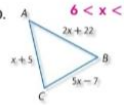


19. **المعطيات:** $\overline{JL} \cong \overline{LM}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
المطلوب: $KJ + KL > LM$

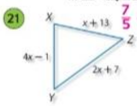


B **الاستنتاج المنطقي** حدد القيم المحتملة لـ x.

20. **$6 < x < 17$**



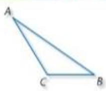
21. **$\frac{7}{5} < x < 21$**



22. **القيادة** يريد حارب اتخاذ أقصر طريق من منزله إلى مباراة كرة قدم في استاد نادي الاتحاد. يمكنه أن يتخذ طريق أبو ظبي الرئيسي أو الطريق السريع 4 ثم شارع 6 للوصول إلى نادي الاتحاد.
   a. أي طريق من المسارين المحتملين يعطي أقصر مسافة؟ اشرح استنتاجك.
   b. افترض أن حارب يقود دائمًا بأقل من حد السرعة. إذا كان أقصى سرعة في طريق أبو ظبي الرئيسي هو 30 ميلاً في الساعة وفي كل من الطريق السريع 4 وشارع 6 هو 55 ميلاً في الساعة، فما الطريق الأسرع؟ اشرح.

22a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

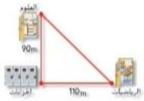
23. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
المعطيات: $\triangle ABC$
المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)
(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة إضافية $\overline{CD}$، بحيث يكون C بين B و D، و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$.)



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	6-19, 44, 45, 47-64	7-19 فردي 49-52	6-18 زوجي 44, 45, 47, 48, 53-64
OL أساسي	7-19 فردي 21-42, 44, 45, 47-64	6-19, 49-52	20-42, 44, 45, 47, 48, 53-64
BL متقدم	20-60, (اختياري) 61-64		

24. **المدرسة** عندما تذهب رهام من صف العلوم إلى صف الرياضيات، فإنها تتوقف عند خزانتها. المسافة بين صف العلوم وخزانتها هي 90 متراً، والمسافة من غرفتها إلى صف الرياضيات هي 110 أمتار. ما المسافة المحتملة من صف العلوم إلى صف الرياضيات إذا كانت تمشي في الطريق الذي يمر مباشرة بين الفصلين الدراسيين **المسافة أكبر من 20 ft وأقل من 200 ft.**



أوجد مدى القياسات الممكنة لـ x إذا كانت كل مجموعة من التعابير تمثل قياسات أضلاع المثلث.

25. x, 4, 6 **$2 < x < 10$**

26. 8, x, 12 **$4 < x < 20$**

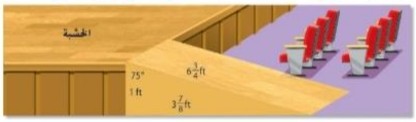
27. $x + 1$, 5, 7 **$1 < x < 11$**

28. $x - 2$, 10, 12 **$4 < x < 24$**

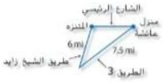
29. $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ **$x > 0$**

30. x, $2x + 1$, $x + 4$ **$x > \frac{3}{2}$**

31. **نادي الدراما** يعمل حميد وحسن على إنشاء منحدر للمسرح من أجل الإنتاج القادم لنادي الدراما. نموذج حميد للانحدار موضح أدناه. يهتم حسن بالقياسات ويعتقد أنه يجب أن يتحققا من القياسات قبل بدء تقطيع الخشب. هل اهتمام حسن في محله؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**



32. **الاستنتاج المنطقي** تركب عائشة دراجتها إلى المتنزه ويمكنها أن تتخذ أحد طريقين. الطريق الأكثر اختصارًا من منزلها هو اتخاذ الشارع الرئيسي، ولكن سيزداد الأمان باتخاذ الطريق رقم 3 ثم التحول يمينًا إلى طريق الشيخ زايد كما هو موضح. ما المسافة الإضافية التي ستمشيها بالميل إذا اتخذت الطريق رقم 3 إلى طريق الشيخ زايد؟ **0 و 12**



33. **صميم** صممت سالي مظلة يمكنها هي وصديقاتها أخذها إلى الشاطئ. وقررت سالي تغطية الجزء العلوي من المظلة بمواد ستمتد بمقدار 6 بوصات فوق المقدمة. ما طول المواد التي يجب عليها شراؤها لاستخدامها في تصميمها بحيث تتم تغطية الجزء العلوي من المظلة، بما في ذلك الثنية عندما تكون الدعامات مفتوحة بأكبر قدر ممكن؟ لنفترض أن عرض المادة يكفي لتغطية المظلة. **يجب عليها ألا تشتري ما يزيد عن 7.5 ft.**

C التقدير دون استخدام الحاسبة، حدد هل من الممكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة للأضلاع أم لا. اشرح. 34-37. انظر الهامش.

34. $\sqrt{8}$ ft, $\sqrt{2}$ ft, $\sqrt{35}$ ft

35. $\sqrt{99}$ yd, $\sqrt{48}$ yd, $\sqrt{65}$ yd

36. $\sqrt{3}$ m, $\sqrt{15}$ m, $\sqrt{24}$ m

37. $\sqrt{122}$ in., $\sqrt{5}$ in., $\sqrt{26}$ in.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط بدء الحل، ويخططون لمسار الحل بدلاً من القفز لمحاولة الحل مباشرة بكل بساطة. في التمرين 20، أوضح للطلاب أنهم ينبغي أن يستخدموا نظرية متباينة المثلث.

التبرير حدد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة هي رؤوس المثلث أم لا. اشرح.

38. $X(1, -3)$, $Y(6, 1)$, $Z(2, 2)$
نعم: $XY + YZ > XZ$، و $XY + XZ > YZ$، و $XZ + YZ > XY$

39. $F(-4, 3)$, $G(3, -3)$, $H(4, 6)$
نعم: $FG + GH > FH$، $FG + FH > GH$، و $GH + FH > FG$

40. $J(-7, -1)$, $K(9, -5)$, $L(21, -8)$
لا: $JK + KL = JL$

41. $Q(2, 6)$, $R(6, 5)$, $S(1, 2)$
نعم: $QR + QS > RS$، و $QR + RS > QS$، و $QS + RS > QR$

42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستخدم المتباينات لعقد مقارنات بين أضلاع مثلثين وزواياه.

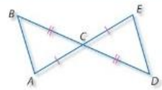
a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات التي يوجد بها زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج واحد من الأضلاع غير المتطابقة. حدد كل زوج من الأضلاع المتطابقة. اكتب على كل زوج مثلثات الرموز ABC و DEF، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول أدناه. قس وسجّل قيم BC، و $m\angle A$، و EF، و $m\angle D$ لكل زوج من المثلثات.

زوج من المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1	0.75	26	2	105
2	0.3	15	1	97
3	0.8	44	1.4	101

c. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزوايا المقابلة للأضلاع غير المتطابقة لزوج المثلثات التي بها ضلعان متطابقان. **الإجابة النموذجية: الزاوية المقابلة للضلع الأكبر من الأضلع غير المتطابقة أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر من الأضلاع غير المتطابقة.**

مسائل مهارات التفكير العليا



43. **التحدي** ما المدى للمحيطات المحتلة للشكل $ABCDE$ إذا كان $AC = 7$ و $DC = 9$؟ شرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

44. **الاستدلال** ما المدى لأطوال كل ضلع في مثلث متساوي الساقين إذا كان قياس القاعدة 6 بوصات؟ اشرح. **انظر الهامش.**

45. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي يمكنك التوصل إليه حول مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة؟ قم بتضمين عنصرين على الأقل. **انظر الهامش.**

46. **تحدٍ** أضلاع مثلث متساوي الساقين هي أعداد صحيحة ومحطيه يساوي 30 وحدة. ما احتمال أن يكون المثلث متساوي الأضلاع؟ $\frac{1}{7}$

47. **مسألة غير محددة** الإجابة طول أحد أضلاع مثلث متران. ارسم مثلثًا يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أقصر ضلع، وارسم مثلثًا آخر يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أطول ضلع. قم بتضمين قياسات الأضلاع والزوايا في رسمك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

48. **الكتابة في الرياضيات** لنفرض أن منزلك يبعد $\frac{3}{4}$ كيلو متر عن أحد المتنزهات، ويبعد المتنزه كيلو مترا ونصف عن مركز التسوق. **a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

a. إذا لم يكن منزلك والمتنزه ومركز التسوق على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت المواقع الثلاثة على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات والعلاقة بينها في مواقف المسألة. في التمارين من 38 و 41، شجّع الطلاب على عمل تمثيل بياني لكل زوج مرتّب.

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 42 رسوماتٍ هندسيةً وجدولاً إضافةً إلى الوصف اللفظي لاستكشاف العلاقة بين ضلعين وزاويتين في مثلث.

إجابات إضافية

34. لا: $\sqrt{8} \approx 2.9$ بما أن $\sqrt{9} = 3$. فإن $\sqrt{2} \approx 1.5$ بما أن $\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{1} = 1$، و $\sqrt{35} \approx 5.9$ بما أن $\sqrt{36} = 6$. إذًا، $2.9 + 1.5 \ngtr 5.9$.

35. نعم: $\sqrt{99} \approx 9.9$ بما أن $\sqrt{100} = 10$. فإن $\sqrt{48} \approx 6.9$ بما أن $\sqrt{49} = 7$ و $\sqrt{65} \approx 8.1$ بما أن $\sqrt{64} = 8$. $6.9 + 8.1 > 9.9$ إذًا هذا ممكن.

36. نعم: $\sqrt{3} \approx 1.9$ بما أن $\sqrt{4} = 2$. فإن $\sqrt{15} \approx 3.9$ بما أن $\sqrt{16} = 4$. و $\sqrt{24} \approx 4.9$ بما أن $\sqrt{25} = 5$. $1.9 + 3.9 > 4.9$ إذًا هذا ممكن.

37. لا: $\sqrt{122} \approx 11.1$ بما أن $\sqrt{121} = 11$. فإن $\sqrt{5} \approx 2.1$ بما أن $\sqrt{4} = 2$. و $\sqrt{26} \approx 5.1$ بما أن $\sqrt{25} = 5$. إذًا $2.1 + 5.1 \ngtr 11.1$.

43. المحيط أكبر من 36 وأقل من 64. الإجابة النموذجية: نعلم من الرسم التخطيطي أن $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ و $\overline{DC} \cong \overline{BC}$، و $\angle ACB \cong \angle ECD$ لأن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة. إذًا $\triangle ACB \cong \triangle ECD$. باستخدام نظرية متباينة المثلث، أدنى قيمة لكل من AB و ED هي 2 وأقصى قيمة هي 16. ولذلك تزيد أدنى قيمة للمحيط على $2(2 + 7 + 9)$ أو 36، وتقل أقصى قيمة للمحيط عن $2(16 + 7 + 9)$ أو 64.

44. يجب أن يزيد قياس كل ساق على 3 بوصات. الإجابة النموذجية: عندما تستخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد أدنى طول للساق، يزيد الحل على 3 بوصات. عندما تستخدمها لإيجاد أقصى طول للساق، تكون المتباينة $6 > 0$. وهذا صحيح دائمًا. ولهذا، لا يوجد حد أقصى للطول.

45. الإجابة النموذجية: ما إذا كانت أطوال الأضلاع تشكل فعليًا مثلثًا، فما أصغر الزوايا وأكبرها، ما إذا كان المثلث متساوي الأضلاع أم متساوي الساقين أم مختلف الأضلاع

4 التقويم

الكرة البلورية لتحسين استيعاب مفاهيم الدرس، اطلب من الطلاب أن يعيدوا كتابة النظريات واللازمات في هذا الدرس بعباراتهم الخاصة ويتوقعوا كيف ستساعدهم في الدرس 6-4.

إجابات إضافية

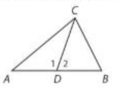
61. $x = 2;\ JK = KL = JL = 14$

62. $x = 9;\ AB = BC = 23$

63. $x = 7;\ SR = RT = 24,\ ST = 19$

تمرين على الاختبار المعياري

49. إذا كان $\overline{DC}$ متوسطًا في $\triangle ABC$ و $m\angle 1 > m\angle 2$. أي العبارات التالية ليست صحيحة؟ **B**



A $AD = BD$

B $m\angle ADC = m\angle BDC$

C $AC > BC$

D $m\angle 1 > m\angle B$

50. إجابة مختصرة يرغب فريق كرة قدم في مدرسة ثانوية في الفوز بنسبة 75% بعد خوض 15 مباراة هذا الموسم. في الأسابيع الثلاثة الأولى، فاز الفريق في 5 مباريات. كم عدد المباريات الإضافية التي يجب على الفريق الفوز فيها لتحقيق هدفه؟ **7**

51. أي مما يلي يمثل خاتمة منطقية وفقًا للعبارة وعكسها أدناه؟

عبارة: إذا كان المضلع عبارة عن مستطيل، فإن له أربعة أضلاع.

العكس: إذا كان المضلّع به أربعة أضلاع، إذا فهو مستطيل. **H**

F العبارة وعكسها صحيحان.

G العبارة خاطئة، والعكس خطأ.

H العبارة صحيحة؛ والعكس خطأ.

J العبارة خاطئة، والعكس صحيح.

52. SAT/ACT عند طرح 7 من $14w$، تكون النتيجة z. أي من المعادلات التالية تمثّل هذه العبارة؟ **D**

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

E $7 + 14w = 7z$

مراجعة شاملة

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

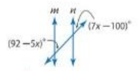
53. إذا كان $4y + 17 = 41$، إذًا $y = 6$. **$y < 6$ أو $y > 6$**

54. إذا كان المستقيمان مقطوعين بقاطع وكان زوج من الزوايا الداخلية البديلة متطابقًا، فإن الخطان متوازيان. **المستقيمان غير متوازيين.**

55. الجغرافيا تبلغ المسافة بين مدينة العين في إمارة أبو ظبي ومدينة دبا الحصن في إمارة الشارقة حوالي 375 كيلو متراً. المسافة من دبا الحصن إلى مدينة زايد في إمارة العين حوالي 243 كيلو متراً. استخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد المسافة المحتملة بين مدينة العين ومدينة زايد. **$132\text{ mi} \le d \le 618\text{ mi}$**

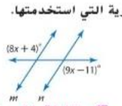
أوجد قيمة x حيث إن $m \parallel n$. حدد المسلمة أو النظرية التي استخدمتها.

56.



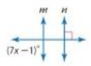
16؛ متقابلة ∡ مسلّمة

57.



15؛ متبادلة خارجية ∡نظرية

58.



13؛ متبادلة خارجية ∡ نظرية

الجبر **أوجد قيمة x و JK إذا كان J بين K و L.**

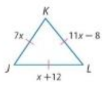
59. $KJ = 3x$، و $JL = 6x$، و $KL = 12$ **$x = \frac{4}{3} \approx 1.3;\ JK = 4$**

60. $KJ = 3x - 6$، و $JL = x + 6$، و $KL = 24$ **$x = 6$؛ $JK = 12$**

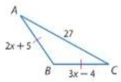
مراجعة المهارات

أوجد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث. 61-63. انظر الهامش.

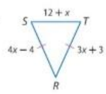
61.



62.



63.



1 الهدف

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-6 استخدام المتباينات لإجراء مقارنات في مثلث واحد.

الدرس 4-6 تطبيق نظرية المفصلة أو معكوسها لإجراء مقارنات في مثلثين وإثبات علاقات المثلثات.

بعد الدرس 4-6 وضع تخمينات بخصوص الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر والأشكال ثلاثية الأبعاد وتحديد صلاحية التخمينات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- هل $\angle A$ أكبر عندما تكون السيارة أعلى أم عندما تكون أكثر انخفاضًا؟ أكثر انخفاضًا
- هل $\overline{BC}$ أطول عندما تكون السيارة أعلى أم عندما تكون أكثر انخفاضًا؟ أكثر انخفاضًا
- ساقا المثلث متطابقتان دائمًا، لكن كيف تتغير $m\angle ACB$ و $m\angle ABC$؟ تصبح أصغر.

الدرس 4-6 المتباينات في مثلثين

:: السابق

- لقد استخدمت المتباينات لعمل مقارنات في مثلث واحد.

:: الحالي

1. تطبيق نظرية المفصَلة أو عكسها لعمل مقارنة بين مثلثين.
2. إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المفصَلة أو عكسها.

:: لماذا

- يُستخدم مرفاع السيارة لرفع السيارات. وهذا المرفاع الموضح أدناه يعد أحد أبسط المرافيع المستخدمة اليوم. لاحظ أنه عند خفض المرفاع، تظل ساقا $\triangle ABC$ متساوي الساقين متطابقتين، ولكن تتسع الزاوية المحصورة A ويطول كلّ من $\overline{BC}$، والضلع المقابل لــ $\angle A$.

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

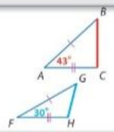
1 نظرية المفصَلة

تعد الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من أنواع المثلثات، وهي تصور النظريات التالية.

النظريات المتباينات في مثلثين

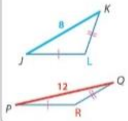
4.13 نظرية المفصَلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان $m\angle A > m\angle F$ و $\overline{AB} \cong \overline{FG}, \overline{AC} \cong \overline{FH}$.
إذًا $BC > GH$.



4.14 عكس نظرية المفصَلة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول تكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{PR}, \overline{KL} \cong \overline{QR}$، و $PQ > JK$. إذًا $m\angle R > m\angle L$.

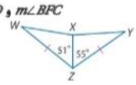


سوف تُثبت النظرية 4.14 في تمرين 28.

مثال 1 استخدام نظرية المفصَلة وعكسها

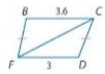
قارن بين القياسات المعطاة.

a. WX و XY



في $\triangle WXZ$ و $\triangle YXZ$، يكون $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$، و $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$، و $\angle YZX > \angle WZX$.
بتطبيق نظرية $m\angle WZX < m\angle YZX$. إذًا $WX < XY$.

b. $m\angle FCD$ و $m\angle BFC$

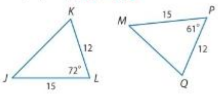


وفي $\triangle DFC$ $\triangle BCF$، يكون $\overline{BF} \cong \overline{DC}$، و $\overline{FC} \cong \overline{CF}$، و $BC > FD$.
المفصَلة وعكسها، $\angle BFC > \angle DCF$.

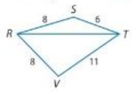
تمرين موجه

قارن بين القياسات المعطاة.

1A. JK و MQ **$JK > MQ$**



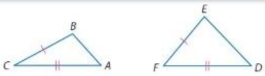
1B. $m\angle SRT$ و $m\angle VRT$ **$m\angle SRT < m\angle VRT$**



البرهان نظرية المِفْصَلة

المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$، يكون
$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$
$m\angle F > m\angle C$

المطلوب: $DE > AB$



البرهان:

نعلم أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. ونعلم أيضًا أن $m\angle F > m\angle C$.

ارسم شعاعًا مساعدًا FP بحيث يكون $m\angle DFP = m\angle C$ و $\overline{PF} \cong \overline{BC}$. يؤدي ذلك إلى حالتين.

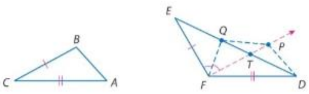
الحالة 1 تقع P على $\overline{DE}$.

إذًا $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بتطبيق مسلمة SAS. إذًا، $PD = BA$ بتطبيق CPCTC وتعريف القطع المتطابقة.

بتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة، $DE = EP + PD$. وأيضًا، $DE > PD$ حسب تعريف المتباينة. لذلك، $DE > AB$ بالتعويض.

الحالة 2 **لا تقع** P على $\overline{DE}$.

ثم افترض أن تقاطع $\overline{FP}$ و $\overline{ED}$ يكون عند النقطة T. وارسم قطعة مستقيمة مساعدة أخرى $\overline{FQ}$ بحيث يقع Q على $\overline{DE}$ و $\angle EFQ \cong \angle QFP$. ارسم بعد ذلك القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PD}$ و $\overline{PQ}$.



بما أن $\overline{FP} \cong \overline{BC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. إذًا $\overline{FP} \cong \overline{EF}$ بتطبيق خاصية التعدي. أيضًا يتطابق $\overline{QF}$ مع نفسه بتطبيق خاصية الانعكاس. إذًا، $\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$ بتطبيق مسلّمة SAS. بتطبيق CPCTC $\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$ أو $EQ = PQ$. أيضًا، $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بتطبيق مسلّمة SAS. إذًا، $\overline{PD} \cong \overline{BA}$ بتطبيق CPCTC و $PD = BA$.

في $\triangle QPD$، يكون $QD + PQ > PD$ بتطبيق نظرية متباينة المثلث. بتطبيق التعويض، نجد أن $QD + EQ > PD$. بما أن $ED = QD + EQ$ بتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة، فإن $ED > PD$. باستخدام التعويض، $ED > BA$ أو $DE > AB$.

نصيحة دراسية

نظرية المتباينة SAS و SSS

تُسمى نظرية المِفْصَلة كذلك بنظرية المتباينة SAS. يُسمى أيضًا عكس نظرية المفصلة بنظرية المتباينة SSS.

1 نظرية المِفْصَلة

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام نظرية المفصلات لإنشاء متباينة من مثلثين. يوضح **المثال 3** كيفية استخدام المتباينات لإثبات علاقات المثلث.

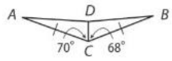
التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

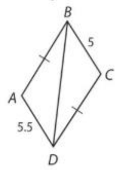
1 قارن بين القياسات المعطاة.

a. AD و BD



بموجب نظرية المفصلة، $AD > BD$.

b. $m\angle ABD$ و $m\angle BDC$



بموجب معكوس نظرية المفصلة، $m\angle ABD > m\angle BDC$.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي/نمط الرياضيات أبلغ الطلاب أن نظريات المتباينات في هذا الدرس منطقية تمامًا، ولذلك يستطيع الطلاب الاعتماد على مهارات الاستنتاج لتذكرها. شجّع الطلاب على مراجعة النظريتين بحثًا عن أوجه الشبه. اشرح أن الطلاب يستطيعون ببساطة أن يتذكروا أن الضلع الأطول سيكون دائمًا في مقابل الزاوية الأكبر والضلع الأقصر سيكون دائمًا في مقابل الزاوية الأصغر. كما أن كلتا النظريتين تتضمنان مثلثين بزاوية محصورة بين ضلعين متطابقين.

254 | الدرس 6-4 | المتباينات في مثلثين

التركيز على محتوى الرياضيات

التنظيم ضع علامات المطابقة والرموز المفيدة الأخرى على الأشكال قبل كتابة برهان للمساعدة في تنظيم كل معلومات المعطيات وتيسير عملية كتابة البرهان. كما تساعد مراحل التخطيط هذه على توضيح العلاقات القائمة بالفعل وتلك التي سيتم إثباتها.

انتبه!

نظرية المفصلة لاستخدام نظرية المفصلة أو معكوسها، يجب أن تكون الزاوية بين الضلعين المتطابقين.

مثال إضافي

2 **الصحة** يستخدم الأطباء اختبار رفع ساق مستقيمة لتحديد مقدار الألم الذي يشعر به الشخص في ظهره. يستلقي المريض مستويًا على طاولة الفحص ويرفع الطبيب كل ساق إلى أن يشعر المريض بألم في ظهره. يستطيع نادر أن يتحمل رفع الطبيب لساقه اليمنى بزاوية 35° وساقه اليسرى بزاوية 65° من الطاولة. ما الساق التي يستطيع نادر أن يرفعها بمستوى أعلى فوق الطاولة؟ ساقه اليسرى

يمكنك استخدام نظرية المفصلة لحل مسائل من واقع الحياة.

الربط بالحياة اليومية

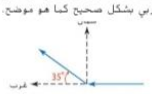
يوجد أكثر من 225,000 ميلاً من مسارات الجليد الممهدة والمحددة في أمريكا الشمالية.

المصدر: الجمعية الدولية لمصنعي مركبات التزلج على الجليد

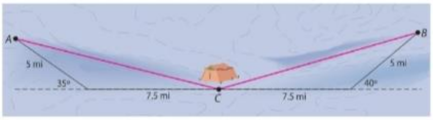
مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية المفصلة

التزلج على الجليد غادرت مجموعتان من متزلجي الجليد من المعسكر الأساسي نفسه. قطعت المجموعة A مسافة 7.5 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 35° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 5 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 7.5 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 40° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 5 أميال. عند هذه النقطة، أي من المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي؟ اشرح استنتاجك.

الفهم لاستخدام مجموعة الاتجاهات المعطاة في هذه المسألة، سنحتاج إلى تحديد أي من مجموعتي التزلج على الجليد قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ثم تفسير التحول بمقدار 35° باتجاه الشمال الغربي بشكل صحيح كما هو موضح.



التخطيط صمم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.



نصيحة في حل المسائل

تصميم رسم تخطيطي صمم رسمًا تخطيطيًا لمساعدتك في رؤية المسألة الموصوفة بالكلمات وتفسيرها بشكل صحيح.

تشكّل المسارات التي سلكتها المجموعتان وخط العودة المستقيم مثلثين. قطعت كل مجموعة 7.5 أميال ثم حولت اتجاهها وقطعت 5 أميال.

استخدم الأزواج الخطية لحساب قياس الزاويتين المحصورتين. ثم طبّق نظرية المفصلة لمقارنة المسافة التي قطعتها كل مجموعة بعيدًا عن المعسكر الرئيسي.

الحل قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي 35 − 180 أو 145.
قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة B يساوي 40 − 180 أو 140.

بما أن 140 < 145، فإن $AC > BC$ بتطبيق نظرية المفصلة. إذًا قطعت المجموعة A مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي.

التحقق تحولت المجموعة B بمقدار 5° أكثر من المجموعة A عند عودتهما إلى المعسكر الرئيسي. لذا يجب أن تكون المجموعة B أقرب إلى المعسكر من المجموعة A. وبذلك يجب أن تكون المجموعة A على مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ✔

تمرين موجه

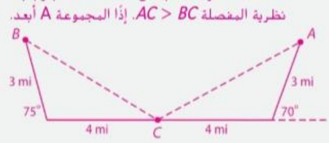
2A. **التزلج** غادرت مجموعتان من المتزلجين المنتجع نفسه. وقطعت المجموعة A مسافة 4 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 70° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 3 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 4 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 75° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 3 أميال. عند هذه النقطة، أي المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المنتجع؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

2B. **التزحلق** في المسألة 2A، افترض أنه بدلاً مما سبق قطعت المجموعة A مسافة 4 أميال غربًا ثم تحولت 45° في الاتجاه الشمالي الغربي وسارت 3 أميال. أي المجموعتين ستكون أقرب إلى المنتجع؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

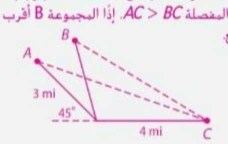
إذا كانت الزاوية المحصورة لأحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة للمثلث الآخر، فإننا نستخدم عكس نظرية المفصلة.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

2A. المجموعة A: يبلغ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعته المجموعة A 70 − 180 أو 110. تبلغ الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعته المجموعة B 75 − 180 أو 105. بما أن 105 < 110، بموجب نظرية المفصلة $AC > BC$. إذًا المجموعة A أبعد.

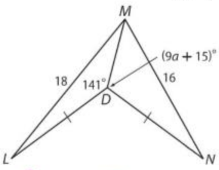


2B. المجموعة B: يبلغ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعته المجموعة A 45 − 180 أو 135. تبلغ الزاوية المحصورة للمسار الذي قطعته المجموعة B 75 − 180 أو 105. بما أن 105 < 135، بموجب نظرية المفصلة $AC > BC$. إذًا المجموعة B أقرب إلى المنتجع.



مثال إضافي

3 الجبر احسب مدى القيم المحتملة لـ a.



$-\frac{5}{3} < a < 14$

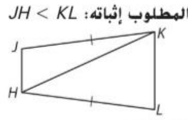
2 إثبات العلاقات في مثلثين

يوضح **المثالان 4 و 5** كيفية استخدام نظرية المفصلة ومعكوسها لإثبات علاقات المثلث.

مثال إضافي

4 المعطيات: $JK = HL$، $m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$

المطلوب إثباته: $JH < KL$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $JK = HL$ (معطى)
2. $HK = HK$ (خاصية الانعكاس)
3. $m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$ (معطى)
4. $m\angle HKL = m\angle JHK$ (الزوايا الداخلية المتبادلة ≅)
5. $m\angle JKH + m\angle JHK < m\angle JHK + m\angle KHL$ (التعويض)
6. $m\angle JKH < m\angle KHL$ (خاصية الطرح في المتباينة)
7. $JH < KL$ (نظرية المفصلة)

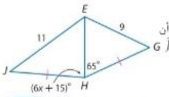
مثال 3 تطبيق الجبر على العلاقات بين المثلثات

نصيحة دراسية

استخدام حقائق إضافية عند حساب المدى للقيم المحتملة لـ x، قد تحتاج إلى استخدام إحدى الحقائق التالية.

- قياس أي زاوية يكون دائمًا أكبر من 0 وأصغر من 180.
- قياس أي قطعة مستقيمة يكون دائمًا أكبر من 0.

الجبر احسب القيم المحتملة لـ x.



الخطوة 1 من خلال الرسم التخطيطي، نعلم أن $\overline{JH} \cong \overline{GH}, \overline{EH} \cong \overline{EH}$ و $JE > EG$

$m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس نظرية المِفْصَلة

$6x + 15 > 65$ التعويض

$x > 8\frac{1}{3}$ الحل لإيجاد قيمة x.

الخطوة 2 استخدم حقيقة أن قياس أي زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة ثانية.

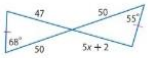
$m\angle JHE < 180$

$6x + 15 < 180$ التعويض

$x < 27.5$ حل لإيجاد قيمة x.

الخطوة 3 اكتب $x > 8\frac{1}{3}$ و $x < 27.5$ في صورة المتباينة المركّبة $8\frac{1}{3} < x < 27.5$.

تمرين موجه



3. احسب القيم المحتملة للمتغير x.
$-0.4 < x < 9$

2 إثبات العلاقات بين مثلثين

يمكنك استخدام نظرية المِفْصَلة وعكسها لإثبات العلاقات بين مثلثين.

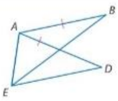
مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المِفْصَلة

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:



العبارات	التبرير
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1. المعطيات
2. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2. خاصية الانعكاس
3. $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3. مسلّمة جمع الزوايا
4. $m\angle EAB > m\angle EAD$	4. تعريف المتباينة
5. $EB > ED$	5. نظرية المِفْصَلة

تمرين موجه

4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

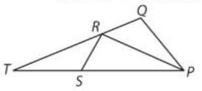
المطلوب: $RS > TQ$

4.
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $RS > TQ$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ (المعطيات)
2. $\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (خاصية الانعكاس.)
3. $\angle 1$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle QST$. (تعريف ∠ الخارجية)
4. $m\angle 1 > m\angle 2$ (إذا كانت ∠ عبارة عن ∠ خارجية لـ △، فيكون إذًا قياسها أكبر من قياس كلا الزاويتين غير المجاورتين المتقابلتين لها.)
5. $RS > TQ$ (متباينة SAS)

مثال إضافي

5 المعطيات: $ST = PQ$
$SR = QR$
$SP > ST$

المطلوب إثباته:
$m\angle SRP > m\angle PRQ$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $SR = QR$ (معطى)
2. $PR = PR$ (انعكاس)
3. $ST = PQ$ (معطى)
4. $SP > ST$ (معطى)
5. $SP > PQ$ (التعويض)
6. $m\angle SRP > m\angle PRQ$ (معكوس نظرية المفصلة)

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج اشرح للطلاب أنهم يستطيعون تحديد شكل مكون من مثلثين أو أكثر وتصميم رسم تخطيطي لتوضيح قياسات الضلع والزاوية المتطابقة في المثلثات.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 9-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

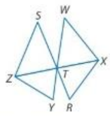
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

مثال 5 إثبات العلاقات باستخدام عكس نظرية المفصلة

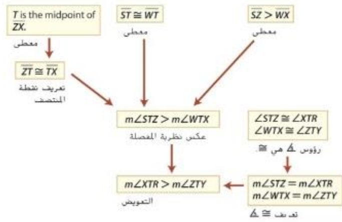
اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: T هي نقطة منتصف ZX.
$\overline{ST} \cong \overline{WT}$
$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$



البرهان التسلسلي:



تمرين موجه

5. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ هو أحد متوسطات $\triangle JMN$.
$JN > NM$

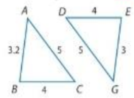
المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

5.
المعطيات: $\overline{NK}$ هو أحد متوسطات $\triangle JMN$.
$JN > NM$
المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{NK}$ هو أحد متوسطات $\triangle JMN$. (المعطيات)
2. K هي نقطة منتصف $\overline{JM}$. (تعريف الوسيط)
3. $\overline{JK} \cong \overline{KM}$ (نظرية نقطة المنتصف)
4. $\overline{KN} \cong \overline{KN}$ (خاصية الانعكاس)
5. $JN > NM$ (المعطيات)
6. $m\angle 1 > m\angle 2$ (المتباينة SSS)

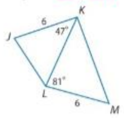
التحقق من فهمك

مثال 1 قارن بين القياسات المعطاة.

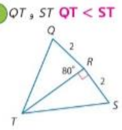
1. $m\angle ACB$ ، $m\angle GDE$ **$m\angle ACB > m\angle GDE$**



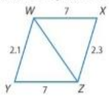
2. JL ، KM **$JL < KM$**



3. QT ، ST **$QT < ST$**



4. $m\angle XWZ$ ، $m\angle YZW$ **$m\angle XWZ > m\angle YZW$**



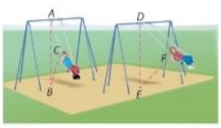
المتابعة

تعرّف الطلاب على المتباينات في مثلث ومثلثين.

اطرح السؤال التالي:

- ما الارتباط بين زوايا مثلثين و/أو أضلاعهما؟ **الإجابة النموذجية: إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.**

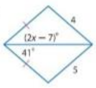
مثال 2 **5. الأراجيح** يتغير وضع الأرجوحة وفقًا لمدى قوة دفعها.

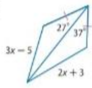


a. أي من أزواج القطع المستقيمة التالية يكون متطابقًا؟ **5a.** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

b. هل قياس $\angle A$ أكبر أم قياس $\angle D$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

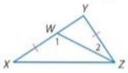
مثال 3 **احسب مدى القيم المحتملة للمتغير x.**

6.  $\frac{7}{2} < x < 24$

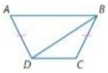
7.  $\frac{5}{3} < x < 8$

المثالان 4-5 **الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين. **9-8. انظر الهامش.**

8. **المعطيات:** $\triangle YZX$
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$
المطلوب: $ZX > YW$



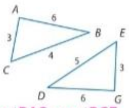
9. **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$DC < AB$
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



التمرين وحل المسائل

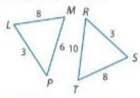
مثال 1 **قارن بين القياسات المعطاة.**

10. $m\angle BAC$ و $m\angle DGE$



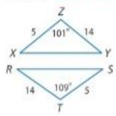
$m\angle BAC < m\angle DGE$

11. $m\angle MLP$ و $m\angle TSR$

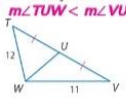


$m\angle MLP < m\angle TSR$

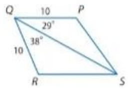
12. SR و XY $SR > XY$



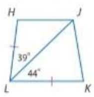
13. $m\angle TUW$ و $m\angle VUW$ $m\angle TUW < m\angle VUW$



14. PS و SR $PS < SR$



15. JK و HJ $JK > HJ$



مثال 2 **16. التخييم** أقام حسن ومازن معسكرًا في حديقة وطنية. في الصباح، قرر حسن السير إلى الشلال. لذا غادر المعسكر وسار 5 أميال باتجاه الشرق ثم تحول 15° إلى الجنوب الشرقي وسار ميلين آخرين. وغادر مازن المعسكر وسار 5 أميال إلى الغرب، ثم تحول 35° باتجاه الشمال الغربي وسار ميلين إلى البحيرة للسباحة. **16a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

a. عند وصولهما إلى وجهتيهما، من منهما أقرب إلى المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.

b. افترض أنه بدلاً من تحول مازن 35° باتجاه الشمال الغربي، تحول 10° باتجاه الجنوب الغربي. من سيكون على مسافة أبعد عن المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-26, 39, 41-58	9-25 فردي، 43-46	10-26 زوجي، 39, 41, 42, 47-58
OL أساسي	9-29 فردي، 30, 31-39 فردي، 41-58	9-26, 43-46	27-37, 41, 42, 47-58
BL متقدم	27-55, (56-58 اختياري)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

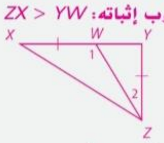
الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات المذكورة والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا ويستخدمونها في وضع فرضيات. في التمارين من 8 إلى 9 ومن 23 إلى 26، شجّع الطلاب على مراجعة النظريات المعروضة في هذه الوحدة أثناء التخطيط لبراهينهم.

إجابات إضافية

5b. $\angle D$؛ الإجابة النموذجية: بما أن $EF > BC$. فوفقًا لمعكوس نظرية المفصلة، $m\angle D > m\angle A$.

8. المعطيات: $\triangle YZX$, $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب إثباته: $ZX > YW$

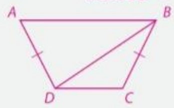


العبارات (المبررات)

1. $\triangle YZX$, $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$ (معطى)
2. $\overline{ZW} \cong \overline{ZW}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle 1$ زاوية خارجية للمثلث $\triangle YZW$. (تعريف $\angle$ الخارجية)
4. $m\angle 1 > m\angle 2$ (نظرية متباينة الزاوية الخارجية)
5. $ZX > YW$ (متباينة SAS)

9. المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $DC < AB$

المطلوب إثباته: $m\angle CBD < m\angle ADB$

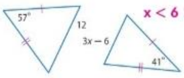


العبارات (المبررات)

1. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (معطى)
2. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (خاصية الانعكاس)
3. $DC < AB$ (معطى)
4. $m\angle CBD < m\angle ADB$ (متباينة SSS)

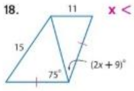
مثال 3 احسب مدى القيم المحتملة للمتغير x.

17.



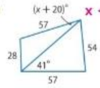
$x < 6 > 2$

18.



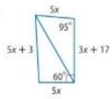
$x < 33 > -4.5$

19.



$x < 21 > -20$

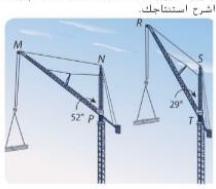
20.



$x > 7$

21. $\overline{RS}$؛ الإجابة النموذجية: نظرًا لأن ارتفاع الرافعة هو نفسه وطول ذراع الرافعة ثابت، إذًا وفقًا لنظرية المِفْصَلَة، فالضلع المقابل للزاوية الأصغر هو الضلع الأقصر. بما أن $29° < 52°$، إذًا $\overline{RS} < \overline{MN}$

21. **الرافعات** في الرسم التخطيطي، تظهر رافعة وهي ترفع جسمًا ما إلى ارتفاعين مختلفين. يتم تثبيت طول ذراع الرافعة.
و $\overline{MP} \cong \overline{RT}$. فما الأقصر طولاً: $\overline{MN}$ أم $\overline{RS}$؟ اشرح استنتاجك.



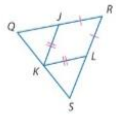
22. **الخزائن** تركت كلٌ من سمية وسندية خزانتيهما مفتوحتين كما هو موضح في الرسم التخطيطي. من صاحبة الخزانة التي تشكّل زاوية أكبر؟ اشرح استنتاجك.

المثالان 4-5 **الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين. 23–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

22. سمية، الإجابة النموذجية: بما أن طول فتحتي الخزانتين وطول بابهما متساويين، استخدم عكس نظرية المِفْصَلَة لتحديد أنه. بما أن 17 in. > 12 in.، فإن زاوية فتح خزانة سمية أكبر من زاوية فتح خزانة سندية.

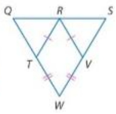
23. **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}, \overline{RL} \cong \overline{RJ}$
K هي نقطة منتصف $\overline{QS}$.
$m\angle SKL > m\angle QKJ$

المطلوب: $RS > QR$



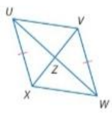
24. **المعطيات:** $\overline{VR} \cong \overline{RT}, \overline{WV} \cong \overline{WT}$
$m\angle SRV > m\angle QRT$
R هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$.

المطلوب: $WS > WQ$



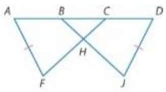
25. **المعطيات:** $\overline{XU} \cong \overline{VW}, VW > XW$
$\overline{XU} \parallel \overline{VW}$

المطلوب: $m\angle XZU >$
$m\angle UZV$



26. **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}$
$AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$

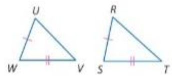


B **27 تمرين رياضي** يقوم خلف بتمرينات تكوير عضلة الذراع الأمامية بالارتكاز على الركبة كجزء من تدريبات التقوية.

a. هل المسافة بين قبضة خلف وكتفه أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2 ؟ برر إجابتك باستخدام القياسات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

b. هل قياس الزاوية التي يشكّلها مرفق خلف أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

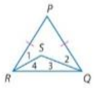
28. **البرهان** استخدم برهانًا غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS (النظرية 6.14).



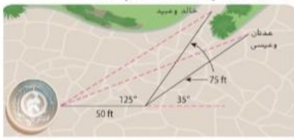
المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$
$\overline{ST} \cong \overline{WV}$
$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$ **انظر الهامش.**

29. **البرهان** إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ و $SQ > SR$، فاكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $m\angle 1 < m\angle 2$. **انظر الهامش.**



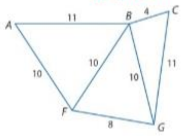
C 30. **البحث عن الكنز** شارك كل من عبيد وعدنان وعيسى وخالد في لعبة البحث عن الكنز كجزء من درس الجغرافيا. تُظهر هذه الخريطة أن المفتاح التالي لحل اللغز يبعد 50 قدمًا في اتجاه الشرق ثم 75 قدمًا بزاوية 35° باتجاه الشمال الشرقي من نقطة البداية، وهي النافورة الموجودة في فناء المدرسة. عندما استعدوا للدوران والسير 75 قدمًا بزاوية 35° في اتجاه الشرق الشمالي، اختلفوا حول اختيار الطريق. لذا افترقوا وسلكوا الطريقين الموضحين في الرسم التخطيطي أدناه.



a. أي ثنائي منهما اختار الطريق الصحيح؟ وضّح استنتاجك.

b. أي ثنائي منهما هو الأقرب إلى النافورة عندما يتوقف؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

الاستنتاج المنطقي **استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوج الزاوية المعطاة أو قياسات القطعة المستقيمة.**



31. AB و CB **CB < AB**

32. $m\angle BFA$ و $m\angle FBG$ **$m\angle FBG < m\angle BFA$**

33. $m\angle BFA$ و $m\angle FBG$ **$m\angle BGC < m\angle FBA$**

التدريس المتمايز OL AL

التوسع قسّم الطلاب إلى مجموعات من 2. اجعل كل طالب يضع تصميمًا لملعب بيسبول له 4 أضلاع ولكل ضلع طول مختلف. ينبغي تحديد اسم نصف الأطوال والزوايا فقط. اجعل الطلاب يتبادلوا تصميماتهم ويحددوا ما إذا كانت الأطوال التي ليس عليها اسم أكبر من الأطوال المعطاة أم أقل.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسارًا للحل بدلًا من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمارين من 31 إلى 33، شجّع الطلاب على استخدام علاقات الضلع-الزاوية في تحليل الشكل المعروض.

إجابات إضافية

28. البرهان غير المباشر

الخطوة 1: افترض أن $m\angle S \le m\angle W$.

الخطوة 2: إذا كانت $m\angle S \le m\angle W$، فإما أن $m\angle S < m\angle W$ أو $m\angle S = m\angle W$.

الحالة 1: إذا كانت $m\angle S < m\angle W$، فإن $RT < UV$ بموجب متباينة SAS.

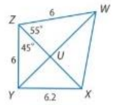
الحالة 2: إذا كانت $m\angle S = m\angle W$، فإن $\triangle RST \cong \triangle UVW$ بموجب SAS، و $\overline{RT} \cong \overline{UV}$ بموجب CPCTC. لهذا $RT = UV$.

الخطوة 3: كلتا الحالتين تتعارضان مع المعطى $RT > UV$. لهذا، لا بد أن يكون الافتراض خطأ، والاستنتاج، $m\angle S > m\angle W$، لا بد **أن يكون صحيحًا.**

29. الجمل (المبررات)

1. $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ (معطى)
2. $\angle PRQ \cong \angle PQR$ (نظرية △ متساوي الساقين)
3. $m\angle PRQ = m\angle 1 + m\angle 4$, $m\angle PQR = m\angle 2 + m\angle 3$ (مسلمة جمع الضلع)
4. $m\angle PRQ = m\angle PQR$ (تعريف ≅ ∡)
5. $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle 2 + m\angle 3$ (التعويض)
6. $SQ > SR$ (معطى)
7. $m\angle 4 > m\angle 3$ (نظرية العلاقة بين الزاوية والضلع)
8. $m\angle 4 = m\angle 3 + x$ (تعريف المتباينة)
9. $= m\angle 1 + m\angle 4 - m\angle 4$ $(m\angle 2 + m\angle 3 - (m\angle 3 + x$ (خاصية الطرح)
10. $m\angle 1 = m\angle 2 - x$ (الطرح)
11. $m\angle 1 + x = m\angle 2$ (خاصية الجمع)
12. $m\angle 1 < m\angle 2$ (تعريف المتباينة)

استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوج الزوايا المعطاة أو قياسات القطعة.



34. $m\angle ZUW$ و $m\angle ZUY$ **$\angle ZUY > \angle ZUW$**

35. YU و WU **$WU > YU$**

36. XY و WX **$WX > XY$**

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف خواص المضلّعات.

a. **هندسيًا** ارسم مضلعًا ثلاثي الأضلاع ورباعي الأضلاع وخماسي الأضلاع. اجعل اسم المضلّع ثلاثي الأضلع ABC، والمضلّع رباعي الأضلع $FGHJ$، والمضلّع خماسي الأضلع $PQRST$. استخدم المنقلة لقياس كل زاوية وتسميتها. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله.

عدد الأضلاع	قياسات الزاوية				مجموع الزوايا
3	$m\angle A$	**59**	$m\angle C$	**45**	**180**
	$m\angle B$	**76**			
4	$m\angle F$	**90**	$m\angle H$	**90**	**360**
	$m\angle G$	**90**	$m\angle J$	**90**	
5	$m\angle P$	**105**	$m\angle S$	**116**	**540**
	$m\angle Q$	**100**	$m\angle T$	**123**	
	$m\angle R$	**96**			

37c. الإجابة النموذجية: مجموع زوايا المضلع يساوي 180 مضروبًا في أقل من عدد أضلاع المضلع بمقدار اثنين.

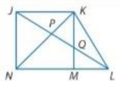
c. **لفظيًا** اكتب تخمينًا حول العلاقة بين عدد أضلع المضلّع ومجموع قياسات زوايا المضلّع.

d. **منطقيًا** ما نوع الاستنتاج الذي استخدمته في الجزء c؟ اشرح.

e. **جبريًا** اكتب تعبيرًا جبريًا لمجموع قياسات زوايا مضلّع له عدد n من الأضلاع. **$180(n-2)$**

37d. الاستدلال الاستقرائي، الإجابة النموذجية: بما أنني استخدمت نمطًا لتحديد العلاقة، فيكون الاستدلال الذي استخدمته استقرائيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

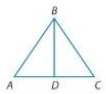


38. **التحدي** إذا كان $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$، $m\angle LJN > m\angle KJL$، و $\overline{JN} \perp \overline{NL}$. فما الأكبر، $m\angle LKN$ أم $m\angle LNK$؟ وضّح استنتاجك.

38-42. انظر الهامش.

39. **مسألة غير محددة** الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لأداة تستخدم مفصَلة. صمم رسمين تكون فيهما المفَصلة المثبتة في الأداة في موضعين مختلفين. استخدم الرسومات لشرح سبب تسمية نظرية 7.13 بنظرية المفصلة.

40. **التحدي** المعطيات $\triangle RST$ مع المتوسط $\overline{RQ}$. إذا كان RT أكبر من أو يساوي RS، فما التصنيفات المتاحة لـ $\triangle RQT$؟ اشرح استنتاجك.



41. **الدقة** إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا و $AB < BC$، إذًا $\angle BDC$ تكون *دائمًا* أو *أحيانًا* أو *لا تكون أبدًا* زاوية حادة. اشرح.

42. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين نظرية المفَصلة ومسلّمة SAS في تطابق المثلثات.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة خلال مناقشاتهم مع الآخرين وفي استنتاجاتهم الخاصة. في التمرين 41، شجِّع الطلاب على مراجعة المصطلحات المستخدمة في هذا التمرين.

إجابات إضافية

30b. خالد وعبيد؛ الإجابة النموذجية: شكّل خالد وعبيد مسارًا يصنع زاوية قياسها $125°$ بينما شكّل عدنان وعيسى زاوية قياسها $145°$.

38. في $\triangle JKL$ و $\triangle JNL$، المعطى أن $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$ و $m\angle LJN > m\angle KJL$. و $\overline{JL} \cong \overline{JL}$. إذًا، وفقًا لمعكوس نظرية المفصلة، $LN > LK$. في $\triangle LKN$، $LN > LK$ مما يعني أن $m\angle LKN > m\angle LNK$.

39. الباب؛ عند فتح الباب، تزداد فتحة الباب مع زيادة الزاوية التي تشكلها المفصلة. عند غلق الباب، تقل فتحة الباب مع انخفاض الزاوية التي تشكلها المفصلة. يتشابه هذا مع الضلع المقابل لزاوية في مثلث، لأنه مع زيادة الضلع المقابل لزاوية، يزيد قياس الزاوية أيضًا. مع انخفاض الضلع، تنخفض الزاوية أيضًا.

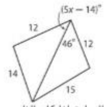
40. قائمة أو منفرجة؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت $RT = RS$، فالمثلث متساوي الساقين، والوسيط أيضًا عمودي على $\overline{TS}$. يعني ذلك أن كلا المثلثين المتشكلين من الوسيط $\triangle RQT$ و $\triangle RQS$، قائما الزاوية. إذا كانت $RT > RS$، فهذا يعني أن $m\angle RQT > m\angle RQS$. بما أنه زوج خطي وقياس مجموع الزوايا يجب أن يكون 180 على الأقل، يجب أن تكون $m\angle RQT$ أكبر من 90 و $\triangle RQT$ منفرج الزاوية.

41. أبدًا؛ بناء على معكوس نظرية المفصلة، $\angle ADB < \angle BDC$. $\angle ADB$ و $\angle BDC$ تشكلان زوجًا خطيًا. إذًا، $m\angle ADB + m\angle BDC = 180$. بما أن $m\angle BDC > m\angle ADB$، يجب أن تكون $m\angle BDC$ أكبر من 90 ويجب أن تكون $m\angle ADB$ أصغر من 90. إذًا بموجب تعريف الزوايا المنفرجة والحادة، $m\angle BDC$ منفرجة دائمًا و $m\angle ADB$ حادة دائمًا.

42. تتطلب كل من مسلمة SAS لتطابق المثلث ونظرية المفصلة أن يكون لديك زوجان من الأضلاع المتناظرة المتطابقة وتضع الزاوية المحصورة في اعتبارك. باستخدام مسلمة SAS لتطابق المثلث، إذا كانت الزوايا المحصورة المتناظرة متطابقة، فالمثلثان متطابقان. باستخدام نظرية المفصلة، إذا كانت إحدى الزوايا المحصورة أكبر من الزاوية المناظرة في المثلث الآخر، فالضلع المقابل للزاوية الأكبر أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر في المثلث الآخر.

تمرين على الاختبار المعياري

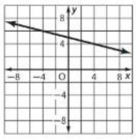
43. إجابة مختصرة اكتب متباينة لوصف مدى القيم المحتملة للمتغير x.
$2.8 < x < 12$



44. أي من العبارات التالية معكوس العبارة إذا كان الثلج يتساقط، فإن خليفة يرتدي *حذاء الثلوج*؟ **B**

A إذا ارتدى خليفة حذاء الثلوج، فإن الثلج يتساقط.
B إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.
C إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة يرتدي حذائه الشتوي.
D إذا لم يتساقط الثلج أبدًا، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.

45. الجبر ما الدالة الخطية التي تصف التمثيل البياني الموضح بشكل أفضل؟ **F**



F $y = -\frac{1}{4}x + 5$

G $y = -\frac{1}{4}x - 5$

H $y = \frac{1}{4}x + 5$

J $y = \frac{1}{4}x - 5$

46. SAT/ACT إذا كان ضلع المربع يساوي $x + 3$، فقطر المربع هو **B**

A $x^2 + 1$
B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
C $2x + 6$
D $x^2\sqrt{2} + 6$
E $x^2 + 9$

مراجعة شاملة

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.

47. 3.2 cm, 4.4 cm
$1.2 \text{ cm} < n < 7.6 \text{ cm}$

48. 5 ft, 10 ft
$5 \text{ ft} < n < 15 \text{ ft}$

49. 3 m, 9 m
$6 \text{ m} < n < 12 \text{ m}$

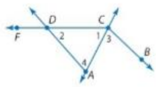
50. الجولات البحرية سألت مها صديقتها ميساء عن تكلفة الرحلة البحرية التي قامت بها هي وأقرب صديقاتها بعد التخرج. لم تتذكر ميساء تكلفة الفرد، ولكنها تذكرت إجمالي التكلفة التي تجاوزت AED 500. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن تكلفة الفرد كانت أكبر من AED 250. **انظر الهامش.**

ارسم شكلًا واذكر اسمه لتمثيل المثلثات المتطابقة. أوجد قيمة x. 51-52. انظر الهامش.

51. $\triangle QRS \cong \triangle GHJ$, و $RS = 12$, و $QR = 10$, و $QS = 6$, و $HJ = 2x - 4$.

52. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$, و $AB = 13$, و $AC = 19$, و $BC = 21$, و $XY = 3x + 7$.

استخدم الشكل على اليسار.



53. ما اسم رأس $\angle 4$؟ **A**

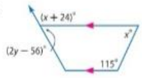
54. ما الاسم الآخر لـ $\angle 2$؟ **$\angle CDA$, $\angle ADC$**

55. ما الاسم الآخر لـ $\angle BCA$؟ **$\angle 3$, $\angle ACB$**

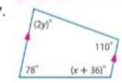
مراجعة المهارات

أوجد قيمة المتغير (المتغيرات) في كل شكل. اشرح استنتاجك. 56-58. انظر الهامش.

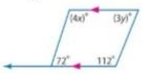
56.



57.



58.



4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اختر أو ابتكر أمثلة لبراهين باستخدام نظرية المفصلة ومعكوسها. في كل مثال، اسمح للطلاب بأن يقدموا عبارات ومبررات بالترتيب الضروري لاستكمال البرهان.

إجابات إضافية

50. افترض أن تكلفة رحلة ميساء البحرية هي x وتكلفة الرحلة الأخرى هي y.

الخطوة 1 المعطيات:
$x + y > 500$

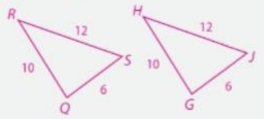
المطلوب إثباته:
$x > 25$ أو $y > 2500$

برهان غير مباشر:
افترض أن $x \leq 250$ و $y \leq 250$.

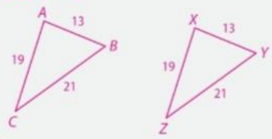
الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 250$ و $y \leq 250$، إذًا $x + y \leq 250 + 250$ أو $x + y \leq 500$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 500$.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن $x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معروفة، لا بد أن يكون الافتراض خطأً. ولهذا، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 30$ أو $y > 30$ صحيحًا. ولهذا، لا بد أن رحلة واحدة على الأقل قد تكلفت أكثر من AED 250.

51. $x = 8$



52. $x = 2$



56. $x = 65$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية؛ $y = 73.5$ بموجب نظرية التكامل

57. $x = 66$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية؛ $y = 35$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية

58. $x = 27$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية؛ $y = 22\frac{2}{3}$ بموجب نظرية الزوايا الداخلية المتتالية

التقويم التكويني

المفردات الرئيسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في استكمال التمارين من 1 إلى 10. فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن مفردات المصطلحات.

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك®

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا المفاهيم الأساسية إلى علامة تبويب الدرس الملائم في مطوياتهم. اقترح على الطلاب الاحتفاظ بمطوياتهم بجانبهم أثناء إنجاز صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أن المطويات تمثل أداة مراجعة سريعة للمذاكرة لاختبار الوحدة.

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات

- القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات هي المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا والمتوسطات والارتفاعات.
- تُسمى نقاط تقاطع كلٍ من القطع المستقيمة الخاصة في المثلث بنقاط الالتقاء.
- نقاط الالتقاء في المثلث هي مراكز الدائرة المحيطة ومراكز الدائرة الداخلية والنقاط المركزية وملتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر

- كتابة برهان غير مباشر:

1. افتراض أن الاستنتاج خاطئ.
2. وضّح أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
3. بما أن الاستنتاج الخاطئ يؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي صحيحًا.

متباينات المثلث

- تقابل الزاوية الأكبر في المثلث الضلع الأكبر، وتقابل الزاوية الأصغر الضلع الأصغر.
- مجموع طولي أي ضلعين من أضلاع المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- **متباينة SAS (نظرية المفصلة)**، في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان، فقياس الزاوية المحصورة يحدد أي من المثلثين لديه الضلع الثالث الأكبر.
- **متباينة SSS** ، في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان متناظران في كل من المثلثين، فطول الضلع الثالث يحدد أيًا من المثلثين يحتوي على الزاوية المحصورة ذات القياس الأكبر.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

ارتفاع (altitude)

نقطة مركزية (centroid)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

مستقيمات متلاقية (concurrent lines)

مركز الدائرة الداخلية (incenter)

برهان غير مباشر (indirect proof)

تبرير غير مباشر (indirect reasoning)

متوسط (median)

ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

منصف عمودي (perpendicular bisector)

نقطة الالتقاء (point of concurrency)

برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لعمل عبارة صحيحة.

1. تتقاطع ارتفاعات المثلث عند النقطة المركزية. **خطأ، ملتقى ارتفاعات المثلث**
2. تُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث بمركز الدائرة الداخلية. **خطأ، منصفات الزاوية**
3. نقطة الالتقاء هي نقطة تقاطع ثلاثة خطوط أو أكثر. **صحيحة**
4. مركز الدائرة المحيطة للمثلث يساوي البعد عن رؤوس المثلث. **صحيحة**
5. لإيجاد النقطة المركزية للمثلث، يتم أولاً إنشاء منصفات الزاوية. **خطأ، المتوسط**
6. المنصفات العمودية لمثلث هي مستقيمات متلاقية. **صحيحة**
7. لعمل برهان بالتناقض، تفترض أولاً أن ما تحاول إثباته صحيح. **خطأ، خاطئ**
8. يستخدم البرهان بالتناقض الاستنتاج غير المباشر. **صحيحة**
9. يربط متوسط المثلث نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث بنقطة منتصف ضلع آخر في المثلث. **خطأ، الرأس المقابل لهذا الضلع**
10. مركز الدائرة الداخلية هو نقطة تتقاطع فيها منصفات زاوية المثلث. **صحيحة**

263

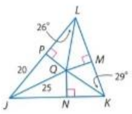
الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

4-1 منصفات المثلثات

مثال 1

أوجد قياس كل مما يلي إذا كان Q هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$.



a. $\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$2(26) + 2(29) + m\angle NJP = 180$ التعويض

$110 + m\angle NJP = 180$ بسّط

$m\angle NJP = 70$ الطرح

بما أن $\overrightarrow{JQ}$ ينصف $\angle NJP$، فإن $2m\angle QJK = m\angle NJP$.
إذًا $m\angle QJK = \frac{1}{2}m\angle NJP$. إذًا $m\angle QJK = \frac{1}{2}(70) = 35$.

b. QP

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

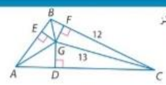
$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$ التعويض

$(QP)^2 + 400 = 625$ $20^2 = 400$ و $25^2 = 625$

$(QP)^2 = 225$ الطرح.

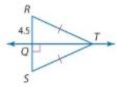
$QP = 15$ بسّط

11. أوجد EG إذا كان G هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$. **5**

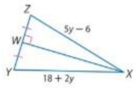


أوجد قياس كل مما يلي.

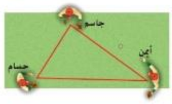
12. RS **9**



13. XZ **34**



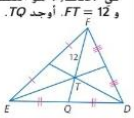
14. **كرة القاعدة** يقوم جاسم وحسام وأيمن بعملية الإحماء قبل لعب مباراة كرة القاعدة. يتطلب أحد تدريبات الإحماء وجود ثلاثة لاعبين لتشكيل مثلث، مع وجود لاعب في المنتصف. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع بحيث يكون على مسافة متساوية من اللاعبين الثلاثة؟ **انظر الهامش.**



4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

مثال 2

في $\triangle EDF$، T هو النقطة المركزية و $FT = 12$. أوجد TQ.



$FT = \frac{2}{3}FQ$

$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$

$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$ $FT = 12$

$12 = 8 + \frac{2}{3}TQ$ خاصية التوزيع

$4 = \frac{2}{3}TQ$ الطرح.

$6 = TQ$ الضرب.

15. رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$، و $E(0, 7)$، و $F(6, 3)$.
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$. **(2, 3)**

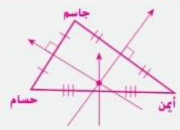
16. **حفل التخرج** ليلى هي إحدى أعضاء لجنة حفل التخرج، وترغب في تعليق 12 مثلثًا متطابقًا في السقف بحيث تكون موازية للأرض. لذا رسمت مثلثًا واحدًا على مستوى إحداثي بالإحداثيات $(0, 4)$، و $(3, 8)$، و $(6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيتم تعليقه بسلسلة واحدة، ما إحداثيات النقطة التي يجب أن تتصل السلسلة عندها بالمثلث؟ **(3, 4)**

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

14.



17. $\angle S, \angle R, \angle T; \overline{RT}, \overline{TS}, \overline{SR}$ R

18. $\angle N, \angle L, \angle M; \overline{ML}, \overline{MN}, \overline{LN}$

21. $\triangle FGH$ لا يطابق $\triangle MNO$.

22. $\triangle KLM$ ليس قائم الزاوية.

24. افترض أن قياس زاوية هو x وقياس الزاوية الأخرى هو y. حسب تعريف الزوايا المتتامة، $x + y = 90$.

الخطوة 1 افترض أن الزاوية ذات القياس x زاوية قائمة. إذًا $x = 90$.

الخطوة 2 بما أن $x = 90$، فإن $x + y > 90$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y = 90$.

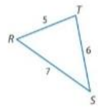
الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن إحدى الزوايا زاوية مستقيمة يؤدي إلى تناقض، فلا بد أن الافتراض خطأ. ولهذا، لا بد أن الافتراض بأن أيًا من الزوايا ليست زاوية قائمة افتراض صحيح.

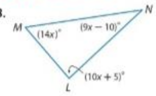
إجابة إضافية

25. افترض أن تكلفة قرص DVD واحد هي x وتكلفة القرص الآخر هي y.
المعطيات: $x + y > 50$
المطلوب إثباته:
$x > 25$ أو $y > 25$
برهان غير مباشر:
الخطوة 1 افترض أن $x \leq 25$ و $y \leq 25$.
الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 25$ و $y \leq 25$، فإن $x + y \leq 25 + 25$ ، أو $x + y \leq 50$. هذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 50$.
الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 25$ و $y \leq 25$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معروفة، لا بد أن يكون الافتراض خاطئًا. ولهذا، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 25$ أو $y > 25$ صحيحًا. ولهذا، لا بد أن قرص DVD واحدًا على الأقل قد تكلف أكثر من AED 25.

4-3 المتباينات في مثلث واحد

صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. **18-17. انظر الهامش.**

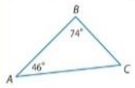
17.


18.


19. **الأحياء المجاورة** تعيش كل من ياسمين وسهيلة ووفاء عند تقاطعات ثلاثة طرق وهذا يشكّل المثلث الموضح. إذا أرادت الفتيات قضاء فترة ما بعد الظهر معًا. هل الطريق الأقصر لياسمين هو الذهاب إلى سهيلة وأخذها إلى بيت وفاء، أم الطريق الأقصر لسهيلة هو الذهاب إلى وفاء ثم الذهاب إلى بيت ياسمين؟ **الطريق الأقصر هو ذهاب سهيلة إلى وفاء ثم ذهابهما إلى بيت ياسمين.**

مثال 3

صنّف زوايا وأضلاع $\triangle ABC$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



a. أوجد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

$m\angle C = 180 - (46 + 74)$ أو 60

لذا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle A$، و $\angle C$، و $\angle B$.

b. الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{BC}, \overline{AB}$ و $\overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

20. $m\angle A \geq m\angle B$ **$m\angle A < m\angle B$**

21. $\triangle FGH \cong \triangle MNO$ **انظر الهامش.**

22. $\triangle KLM$ هو مثلث قائم الزاوية. **انظر الهامش.**

23. إذا كان $3y < 12$، فإن $y < 4$. **$y \geq 4$**

24. اكتب برهانًا غير مباشر يثبت أن الزاويتين المتتامتين لا تكون أي منهما زاوية قائمة. **25-24. انظر الهامش.**

25. **الأفلام** اشترى سالم أسطوانات DVD بتكلفة تجاوزت AED 50. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أن تكلفة إحدى أسطوانات (DVD) التي اشترها تجاوزت AED 25.

مثال 4

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. $\overline{XY} \ncong \overline{JK}$

$\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b. **إذا كان $3x > 18$، فإن $x > 6$.**

استنتاج العبارة الشرطية هو $x < 6$.
نفي الاستنتاج هو $x \geq 6$.

c. **$\angle 2$ هي زاوية حادة.**

إذا كان افتراض أن $\angle 2$ *زاوية حادة* خاطئ، فلابد أن يكون افتراض أن $\angle 2$ *زاوية غير حادة* صحيحًا. هذا يعني أن افتراض $\angle 2$ *زاوية منفرجة أو زاوية قائمة* يجب أن يكون صحيحًا.

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

4-5 متباينة المثلث

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

26. 5, 6, 9 **نعم** **27.** 3, 4, 8 **لا؛ $3 + 4 < 8$**

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياس ضلعيه الآخرين.

28. 5 ft, 7 ft **انظر الهامش.** **29.** 10.5 cm, 4 cm **انظر الهامش.**

30. الدراجات يقود يوسف دراجته لزيارة سعيد. ونظرًا لإغلاق الطريق السريع، فلابد أن يسير ميلين في الطريق الرئيسي والدوران لسير 3 أميال إضافية في الطريق رقم 5. إذا رسمنا مثلثًا يحتوي على رأسين إحداهما ليوسف والأخرى لبيت سعيد، احسب مدى المسافة المحتملة بين يوسف وبيت سعيد عند السير مباشرة في الطريق السريع. **انظر الهامش.**

المثال 5

هل يُمكن تكوين مثلث بالأطوال7 و 10 و 9 أقدام؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

تحقق من كل متباينة.

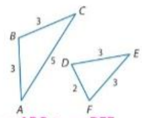
$7 + 10 > 9$	$7 + 9 > 10$	$10 + 9 > 7$
$17 > 9$ ✓	$16 > 10$ ✓	$19 > 7$ ✓

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 7 و 10 و 9 أقدام ستكوّن مثلثًا.

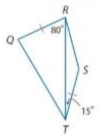
4-6 المتباينات في مثلثين

قارن بين القياسات المعطاة.

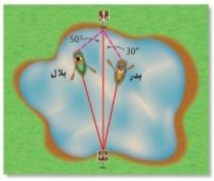
31. $m\angle ABC$, $m\angle DEF$ **32.** QT و RS **$QT > RS$**



$m\angle ABC > m\angle DEF$

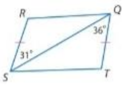


33. الزوارق يقوم كل من بدر وبلال بالتجديف حول بركة ويتجهان إلى نفس النقطة. هذه أول تجربة لهما في التجديف، لذا خرجوا عن المسار كما هو موضح في الرسم التخطيطي. بعد دقيقتين، قاموا بالتجديف لمسافة 50 ياردة. من منهم الأقرب إلى وجهته؟ **بدر**



مثال 6

قارن بين القياسات المعطاة.

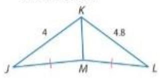


a. RQ و ST

In $\triangle QRS$ و $\triangle STQ$, $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QS}$, و $\angle SQT > \angle RSQ$. بحسب نظرية المفصلة، $m\angle SQT < m\angle RSQ$, إذًا $RQ < ST$.

b. $m\angle JKM$ و $m\angle LKM$

In $\triangle JKM$ و $\triangle LKM$, $\overline{JM} \cong \overline{LM}$, $\overline{KM} \cong \overline{KM}$, و $LK > JK$. بحسب عكس نظرية المفصلة، $\angle LKM > \angle JKM$.



إجابات إضافية

28. افترض أن x هي طول الضلع الثالث. $2\text{ ft} < x < 12\text{ ft}$

29. افترض أن x هي طول الضلع الثالث. $6.5\text{ cm} < x < 14.5\text{ cm}$

30. المسافة أكبر من ميل وأقل من 5 أميال.

إجابة إضافية (تمرين على الاختبار)

5. المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

المطلوب إثباته: $x \geq 9$

البرهان:

الخطوة 1: افترض أن $x < 9$.

الخطوة 2: اصنع جدولاً لعدة احتمالات لقيمة x. بافتراض أن $x < 9$.

x	8	7	0	−2
$5x + 7$	47	42	7	−3

عندما تكون $x < 9, 5x + 7 < 52$.

الخطوة 3: يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $5x + 7 \geq 52$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x < 9$ لا بد أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x \geq 9$ صحيحًا.

إجابة إضافية (تمرين على الاختبار)

23. المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

المطلوب إثباته: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

البرهان:

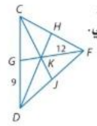
العبارات (المبررات)

1. $\overline{RQ}$ ينصف $\angle SRT$. (معطى)
2. $\angle SRQ \cong \angle QRT$ (تعريف المنصف)
3. $m\angle QRS = m\angle QRT$ (تعريف $\cong$ ∡)
4. $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$ (نظرية الزاوية الخارجية)
5. $m\angle SQR > m\angle QRT$ (تعريف المتباينة)
6. $m\angle SQR > m\angle SRQ$ (التعويض)

الوحدة 4 تدريب على الاختبار

1. **الحدائق** تريد شيخة زراعة حوض للزهور داخل منطقة مثلثة محددة بثلاثة ممرات. ما نقطة الالتقاء المرتبطة بالمثلثات التي ستستخدمها لمركز الدائرة الأكبر الذي سيتناسب وضعه داخل المثلث؟ **مركز الدائرة الداخلية (incenter)**

في $\triangle CDF$، K هو النقطة المركزية و $DK = 16$. أوجد طول كل مما يلي.



2. KH **8**
3. CD **18**
4. FG **18**

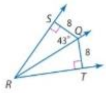
5. **الإثبات** اكتب إثباتًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$ **انظر الهامش.**

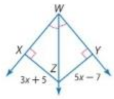
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد قياس كل مما يلي.

6. $m\angle TQR$ **43**



7. XZ **23**



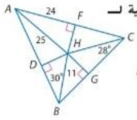
8. **الجغرافيا** تبعد تونوبا عن راوند ماونتن نفس المسافة التي تبعدها عن وورم سبرينغز. والمسافة التي تفصل تونوبا عن مدينة هوثورن هي نفس المسافة التي تبعدها عن مدينة بيتي. حدّد المسافة الأكبر: راوند ماونتن إلى هوثورن أم من وورم سبرينغز إلى بيتي. **من وورم سبرينغز إلى بيتي**

9. **الاختيار من متعدد** إذا كان قياس ضلعين في مثلث هو 3.1 أقدام و 4.6 أقدام، فما قياس *أقل* عدد كلي محتمل للضلع الثالث؟ **B**

A 1.6 أقدام　　C 7.5 أقدام

B قدمان　　D 8 أقدام

النقطة H هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$. أوجد قياس كل مما يلي.



10. DH **7**　　11. BD **8.5**

12. $m\angle HAC$ **32**　　13. $m\angle DHG$ **120**

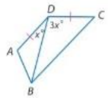
14. **الاختيار من متعدد** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 5 أقدام و 11 قدمًا، فما مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث؟ **H**

F $6 < x < 10$　　H $6 < x < 16$

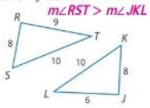
G $5 < x < 11$　　J $x < 5$ أو $x > 11$

قارن بين كل مما يأتي:

15. AB و BC **$AB < BC$**



16. $\angle RST$ و $\angle JKL$ **$m\angle RST > m\angle JKL$**



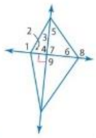
اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة. **17. 4 ليس عاملًا لـ n.**

17. إذا كان 8 هو عامل n، إذًا 4 هو عامل n.

18. $m\angle M > m\angle N$ **$m\angle M \leq m\angle N$**

19. إذا كان $3a + 7 \leq 28$، إذًا $a \leq 7$. **$a > 7$**

استخدم الشكل لتحديد أكبر الزوايا قياسًا.

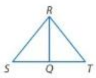


20. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **$\angle 1$**

21. $\angle 9, \angle 8, \angle 3$ **$\angle 8$**

22. $\angle 4, \angle 3, \angle 2$ **$\angle 4$**

23. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. **انظر الهامش.**



المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

احسب طول الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.

24. 10 ft, 16 ft **$6\text{ ft} < x < 26\text{ ft}$**

25. 23 m, 39 m **$16\text{ m} < x < 62\text{ m}$**

4 التحضير للاختبارات المعيارية

استبعاد الإجابات غير المنطقية

يمكنك استبعاد الإجابات غير المنطقية لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل بنود اختبار الاختيار من متعدد.

إستراتيجيات استبعاد الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية لتحديد ما المطلوب منك إيجاده بدقة.

- ما المطلوب حله؟
- هل الإجابة الصحيحة عدد صحيح، أم كسر أم رقم عشري؟
- هل يجب عليّ استخدام رسمًا بيانيًا أم جدولاً؟
- ما الوحدات (إن وجدت) التي ستتضمنها الإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته.

لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.

- حدد أي خيارات إجابة تكون غير صحيحة بشكل واضح واستبعدها.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون بتنسيق سليم.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تشمل وحدات صحيحة.

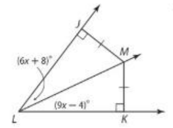
الخطوة 3

حل المسألة واختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المتبقية. تحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

ما قياس $\angle KLM$؟



A 32
B 44
C 78
D 94

1 التركيز

الهدف تعلم إستراتيجية استبعاد الإجابات غير المنطقية للمساعدة في حل أسئلة الاختيار من متعدد.

2 التدريس

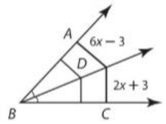
الأسئلة الداعمة

اطرح السؤال التالي:

- اشرح كيف يمكن أن يساعد استبعاد الإجابات غير المنطقية في حل أسئلة الاختيار من متعدد. الإجابة النموذجية: يساعد استبعاد الإجابات غير المنطقية في تضييق اختيارات الإجابة.
- ما بعض الأسئلة الأخرى التي يمكنك أن تطرحها عن المعلومات التي يتطلبها السؤال؟ الإجابة النموذجية: يمكنك أثناء قراءة السؤال أن تحدد المطلوب منك حله، سواء كانت الإجابة الصحيحة عددًا كليًا أو كسرًا أو عددًا عشريًا، وما الوحدات التي ينبغي أن يحتوي عليها الحل (إذا كان ينبغي ذلك).
- ما بعض الأمثلة في هذه الوحدة التي يمكنك فيها استبعاد الإجابات العددية الكبيرة أو الصغيرة بشدة؟ الإجابة النموذجية: عند حل مسألة، إذا كانت الإجابة التي تسعى لإيجادها هي قياس زاوية مثلث أكبر من أو تساوي 180 أو تجعل مجموع قياسات زاوية المثلث أكبر من 180، ينبغي أن تستبعد ذلك الاختيار من الإجابة.

مثال إضافي

ما قياس $\overline{AD}$؟ D



A -8
B -2
C 2
D 7

3 التقويم

استخدم التمارين من 1 إلى 5 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. بما أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هي $180°$، إذًا يجب أن يكون $m\angle KLM + m\angle LMK$ يساوي $90°$. وإلا سيتجاوز المجموع 180 درجة. بما أن خيار الإجابة D هو زاوية منفرجة، فيمكن استبعادها كإجابة غير منطقية. لا بد أن تكون الإجابة الصحيحة A، أو B، أو C.

حل المسألة. وفقًا لعكس نظرية منصف الزاوية، إذا كانت هناك نقطة داخل زاوية معينة وتقع على مسافة واحدة من جوانب الزاوية، فإن النقطة تقع على منصف الزاوية. النقطة M تقع على مسافة واحدة من الشعاعين LJ و LK، لذا فهي تقع على منصف $\angle JLK$. لذا، يجب أن تكون $\angle JLM$ مطابقة لـ $\angle KLM$. كوّن معادلة وحلها لـ x.

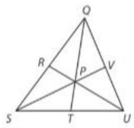
$$6x + 8 = 9x - 4$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

لذا فإن قياس $\angle KLM$ هو $[9(4) - 4]°$، أو $32°$. الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

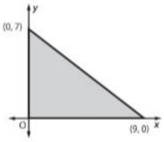
اقرأ كُل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. النقطة P هي النقطة المركزية للمثلث QUS. إذا كان $QP = 14$ سنتيمترًا، فما طول $\overline{QT}$؟ D



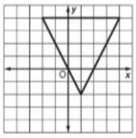
A 7 cm
B 12 cm
C 18 cm
D 21 cm

2. ما المساحة بالوحدات المربعة للمثلث الموضح أدناه؟ H



F 8
G 27.4
H 31.5
J 63

3. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟ C



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$
B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$
D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4. إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين و $m\angle A = 94$، فأي مما يلي ينبغي أن يكون صحيحًا؟ J

F $m\angle B = 94$
G $m\angle B = 47$
H $AB = BC$
J $AB = AC$

5. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل أبعاد مثلث؟ B

A 1.9, 3.2, 4
B 1.6, 3, 4.6
C 3, 7.2, 7.5
D 2.6, 4.5, 6

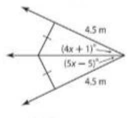
269

تدريب على الاختبار المعياري

اختيار من متعدِّد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

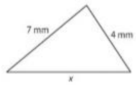
.1 أوجد حل x. **D**



A 3 C 5

B 4 D 6

.2 أي مما يلي لا يمكن أن يمثل قيمة x؟ **J**



F 8 mm H 10 mm

G 9 mm J 11 mm

.3 يزعم أيوب أنك إذا كنت تعيش في أبو ظبي، فإنك تعيش مدينة العين. أي افتراض قد تحتاجه للوصول إلى برهان غير مباشر لهذا الزعم؟ **D**

A لنفرض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين ولكن ليس في إمارة أبو ظبي.

B لنفرض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين وإمارة أبو ظبي.

C لنفرض أن شخصًا ما يعيش في إمارة أبو ظبي وفي مدينة العين.

D لنفرض أن شخصًا ما يعيش في إمارة أبو ظبي، ولكن ليس في مدينة العين.

.4 أي مما يلي يصف أقصر مسافة من إحدى رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل؟ **F**

F الارتفاع H المتوسط

G قطر الدائرة J قطعة مستقيمة

.5 بدأ رشيد جز الأعشاب. لنفرض أن x يمثل عدد الأسابيع بعد بدء رشيد جز الأعشاب، و y يمثل عدد العملاء. استخدم النقطتين $(3, 4)$ و $(9, 6)$ لإيجاد معادلة مستقيم يمكن أن يتم استخدامها للتنبؤ بعدد العملاء الموجودين لدى رشيد بحلول نهاية أسبوع معين. **B**

A $y = \frac{1}{3}x$ C $y = \frac{2}{3}x + 2$

B $y = \frac{1}{3}x + 3$ D $y = \frac{2}{3}x$

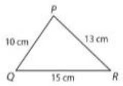
.6 ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$؟ **F**

F $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$

G $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$

H $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$

J $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$



.7 أي افتراض قد نحتاجه من أجل بدء برهان غير مباشر للعبارة؟ **B**

الزاوية S ليست منفرجة.

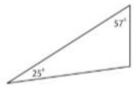
A $\angle S$ هي زاوية قائمة.

B $\angle S$ هي زاوية منفرجة.

C $\angle S$ هي زاوية حادة.

D $\angle S$ ليست زاوية حادة.

.8 صنّف المثلث أدناه وفقًا لقياسات زواياه. **H**



F حاد H منفرج

G متساوي الزوايا J قائم الزاوية

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يجب أن يكون مجموع أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث.

تشخيص أخطاء الطلاب

قم بإجراء مسح لإجابات الطلاب على كل عنصر. قد تشير الاتجاهات السائدة في الصف إلى أخطاء شائعة ومفاهيم خاطئة.

.1 A خطأ حسابي
B خطأ حسابي
C خطأ حسابي
D إجابة صحيحة

.2 F تخمين
G تخمين
H تخمين
J إجابة صحيحة

.3 A يتوصل إلى النتيجة
B يتوصل إلى النتيجة
C يتوصل إلى النتيجة
D إجابة صحيحة

.4 F إجابة صحيحة
G تخمين
H تخمين
J تخمين

.5 A قانون خطأ
B إجابة صحيحة
C ميل خاطئ
D ميل خاطئ

.6 F إجابة صحيحة
G تخمين
H تخمين
J ترتيب معكوس

.7 A نسي حالة الزاوية الحادة
B إجابة صحيحة
C نسي حالة الزاوية القائمة
D تخمين

.8 F مصنفة حسب الزوايا المعطاة فقط
G تعريف خاطئ
H إجابة صحيحة
J تخمين من الشكل

ورقة إجابات التمارين

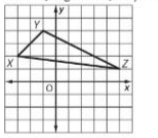
اطلب من الطلاب محاكاة الاختبار المعياري بتسجيل إجاباتهم في ورقة تسجيل التمارين.

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

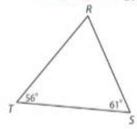
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. **إجابة شبكية** إذا كان قياسي ضلعين من مثلث 9 سنتيمترات و 15 سنتيمترًا، فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث بالسنتيمترات إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟ **7**

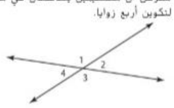
10. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟ $\left(-\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$



11. صنّف أضلاع المثلث أدناه بالترتيب من الأقصر إلى الأطول. ***RS, RT, ST***



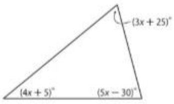
12. لنفرض أن مستقيمين يتقاطعان في مستوى إحداثي معين لتكوين أربع زوايا.



ما الذي تعرفه حول أزواج الزوايا المجاورة التي تكونت؟ اشرح.
يكونان زاويتان متكاملتين. يكوّن كل زوج من الزوايا المجاورة زوجًا خطيًا.

13. عمر وعلي يأخذان مجموعة من المخيمين للتنزه في الغابات. غادرت مجموعة عمر المعسكر وسارت ميلين باتجاه الشرق، ثم تحولت بمقدار °20 إلى الجنوب الشرقي وسارت 4 أميال أخرى. غادرت مجموعة علي المعسكر وسارت ميلين باتجاه الغرب، ثم تحولت °30 إلى الشمال الغربي وسارت 4 أميال أخرى. كم عدد الدرجات إلى الجنوب الشرقي التي احتاج عمر أن يتحولها لكي تكون مجموعته ومجموعة علي على نفس المسافة من المعسكر بعد جولتين من التنزه؟ **°30**

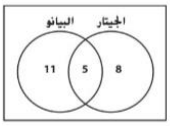
14. **إجابة شبكية** أوجد قيمة x في المثلث أدناه. **15**



الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

15. ارجع إلى الشكل للإجابة على كل سؤال.



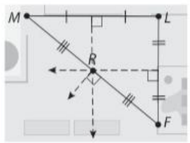
a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على الجيتار؟ **13**

a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على البيانو؟ **16**

c. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على كل من البيانو والجيتار؟ **5**

الدرس 4-1

15.



37. البرهان:

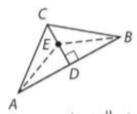
العبارات (المبررات)

1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)
2. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (تطابق القطع المستقيمة انعكاسي.)
3. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS)
4. $\angle ACD \cong \angle BCD$ ($CPCTC$)
5. $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (تطابق القطع المستقيمة انعكاسي.)
6. $\triangle CEA \cong \triangle CEB$ (SAS)
7. $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ ($CPCTC$)
8. E نقطة منتصف $\overline{AB}$. (تعريف نقطة المنتصف)
9. $\angle CEA \cong \angle CEB$ ($CPCTC$)
10. $\angle CEA$ و $\angle CEB$ تشكلان زوجًا خطيًا. (تعريف الزوج الخطي)
11. $\angle CEA$ و $\angle CEB$ متكاملتان. (نظرية التكامل)
12. $m\angle CEA + m\angle CEB = 180$ (تعريف التكامل)
13. $m\angle CEA + m\angle CEA = 180$ (خاصية التعويض)
14. $2m\angle CEA = 180$ (خاصية التعويض)
15. $m\angle CEA = 90$ (خاصية القسمة)
16. $\angle CEA$ و $\angle CEB$ زاويتان قائمتان $\angle$. (تعريف الزاوية القائمة $\angle$)
17. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف $\perp$)
18. $\overline{CD}$ منصف $\perp$ لـ $\overline{AB}$. (تعريف المنصف $\perp$)
19. C و D تقعان على منصف $\perp$ لـ $\overline{AB}$. (تعريف نقطة على مستقيم)

38. البرهان:

العبارات (المبررات)

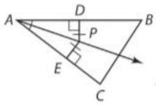
1. $\triangle ABC$، منصفات الزوايا $\overline{AD}$، و $\overline{BE}$، و $\overline{CF}, \overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp$ $\overline{BC}$، $\overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطى)
2. $KP = KQ, KQ = KR, KP = KR$ (أي نقطة على منصف $\angle$ تقع على مسافة متساوية من ضلعي الزاوية.)
3. $KP = KQ = KR$ (خاصية الانتقال)



39. المعطيات: $\overline{CD}$ هو منصف $\perp$ لـ $\overline{AB}$.
E نقطة على CD.

المطلوب إثباته: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$ منصف $\perp$ لـ $\overline{AB}$. حسب تعريف المنصف، D نقطة منتصف $\overline{AB}$. ولهذا، $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف. $\angle CDA$ و $\angle CDB$ زاويتان قائمتان حسب تعريف التعامد. بما أن كل الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle CDB \cong \angle CDA$. بما أن E نقطة على $\overline{CD}$، فإن $\angle EDA$ و $\angle EDB$ زاويتان قائمتان ومتطابقتان. حسب خاصية الانعكاس، فإن $\overline{ED} \cong \overline{ED}$. ولهذا $\triangle EDA \cong \triangle EDB$ حسب SAS. $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ بموجب CPCTC. وحسب تعريف التطابق، فإن $EA = EB$.

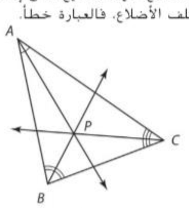


40. المعطيات: $\angle BAC$
P تقع داخل $\angle BAC$؛
$PD = PE$

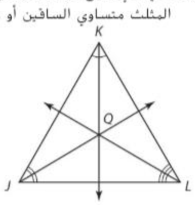
المطلوب إثباته: $\overline{AP}$ هو منصف $\angle BAC$.

البرهان: تقع النقطة P داخل $\angle BAC$ في $\triangle BAC$ و $PD = PE$. حسب تعريف التطابق، $\overline{PD} \cong PE$. $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ بما أن المسافة من نقطة إلى مستقيم تُقاس بطول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة على المستقيم. $\angle ADP$ و $\angle AEP$ زاويتان قائمتان حسب تعريف المستقيمات العمودية و $\triangle ADP$ و $\triangle AEP$ مثلثان قائما الزاوية حسب تعريف الزوايا القائمة. بموجب خاصية الانعكاس، $\overline{AP} \cong \overline{AP}$. لهذا، $\triangle ADP \cong \triangle AEP$ حسب LH. $\angle DAP \cong \angle EAP$ بسبب CPCTC، و $\overline{AP}$ هو منصف الزاوية $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.

50. أحيانًا؛ إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، فهذا صحيح، لكن إذا كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع، فالعبارة خطأ.

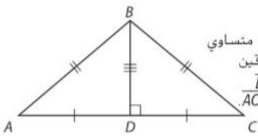


$AP \neq BP \neq CP.$



$JQ = KQ = LQ$

51. دائمًا



المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين بالساقين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{BD}$ منصف $\perp$ لـ $\overline{AC}$.

المطلوب إثباته: $\overline{BD}$ منصف الزاوية $\angle ABC$.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle ABC$ متساوي الساقين بالساقين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. (معطى)
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (تعريف $\triangle$ متساوي الساقين)
3. $\overline{BD}$ منصف $\perp$ لـ $\overline{AC}$. (معطى)
4. D نقطة منتصف $\overline{AC}$. (تعريف منصف القطعة المستقيمة)
5. $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ (تعريف نقطة المنتصف)
6. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)
7. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)
8. $\angle ABD \cong \angle CBD$ ($CPCTC$)
9. $\overline{BD}$ منصف الزاوية $\angle ABC$. (تعريف منصف $\angle$)

.52 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. المستوى Y منصف عمودي لـ $\overline{DC}$. (معطى)
2. $\angle DBA$ و $\angle CBA$ زاويتان قائمتان $\measuredangle$، $\overline{DB} \cong \overline{CB}$ (تعريف المنصف $\perp$)
3. $\angle DBA \cong \angle CBA$ (الزوايا القائمة متطابقة.)
4. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle DBA \cong \triangle CBA$ (SAS)
6. $\angle ADB \cong \angle ACB$ (CPCTC)

.53 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. المستوى Z منصف الزاوية $\angle KJH$؛ $\overline{KJ} \cong \overline{HJ}$ (معطى)
2. $\angle KJM \cong \angle HJM$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\overline{JM} \cong \overline{JM}$ (خاصية الانعكاس)
4. $\triangle KJM \cong \triangle HJM$ (SAS)
5. $\overline{MH} \cong \overline{MK}$ (CPCTC)

.68 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle XKF$ مثلث متساوي الأضلاع. (معطى)
2. $\angle 2 \cong \angle 1$ ($\triangle$ متساوي الأضلاع يكون متساوي الزوايا.)
3. $\overline{KX} \cong \overline{FX}$ (تعريف $\triangle$ متساوي الأضلاع)
4. $\overline{XJ}$ ينصف $\angle X$. (معطى)
5. $\angle KXJ \cong \angle FXJ$ (تعريف منصف $\angle$)
6. $\triangle KXJ \cong \triangle FXJ$ (ASA)
7. $\overline{KJ} \cong \overline{FJ}$ (CPCTC)
8. J نقطة منتصف $\overline{KF}$. (تعريف نقطة المنتصف)

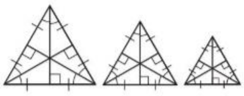
.69 البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\triangle MLP$ مثلث متساوي الساقين. (معطى)
2. $\overline{ML} \cong \overline{PL}$ (تعريف $\triangle$ متساوي الساقين)
3. $\angle M \cong \angle P$ (نظرية $\triangle$ متساوي الساقين)
4. N نقطة منتصف $\overline{MP}$. (معطى)
5. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$ (تعريف نقطة المنتصف)
6. $\triangle MNL \cong \triangle PNL$ (SAS)
7. $\angle LNM \cong \angle LNP$ $(CPCTC)$
8. $m\angle LNM = m\angle LNP$ (تعريف $\measuredangle$ $\cong$)
9. $\angle LNM$ و $\angle LNP$ زوج خطي. (تعريف الزوج الخطي)
10. $m\angle LNM + m\angle LNP = 180$ (مجموع قياسات الزوج الخطي $\measuredangle = 180$)
11. $2m\angle LNM = 180$ (التعويض)
12. $m\angle LNM = 90$ (القسمة)
13. $\angle LNM$ زاوية قائمة. (تعريف $\angle$ القائمة)
14. $\overline{LN} \perp \overline{MP}$ (تعريف $\perp$)

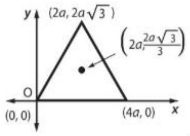
الدرس 2-4

33a.



33b. الإجابة النموذجية: نقاط التلاقي الأربع في مثلث متساوي الأضلاع جميعها نقطة واحدة.

33c.



.36 البرهان: ميل $\overline{AR} = \frac{3c}{3b + 3a} = \frac{c}{b + a}$.

ميل $\overline{BS} = \frac{6c}{6b - 3a} = \frac{2c}{2b - a}$.

ميل $\overline{CQ} = \frac{3c}{3b - 6a} = \frac{c}{b - 2a}$

$\overline{AR}$ يحتويه المستقيم $y = \left(\frac{c}{b + a}\right)x$.

$\overline{BS}$ يحتويه المستقيم $y = \frac{2c}{2b + a}(x - 3a)$.

$\overline{CQ}$ يحتويه المستقيم $y = \frac{c}{b - 2a}(x - 6a)$

لإيجاد إحداثيات P، أوجد نقطة تقاطع الوسيطين $\overline{BS}$ و $\overline{CQ}$.

$$y = \frac{2c}{2b - a}(x - 3a) \quad \text{و} \quad y = \frac{c}{b - 2a}(x - 6a)$$

$$\frac{2c}{2b - a}(x - 3a) = \frac{c}{b - 2a}(x - 6a).$$

$$2c(x - 3a)(b - 2a) = c(x - 6a)(2b - a)$$
$$2c(bx - 2ax - 3ab + 6a^2) = c(2bx - ax - 12ab + 6a^2)$$
$$2bcx - 4acx - 6abc + 12a^2c = 2bcx - acx - 12abc + 6a^2c$$
$$-3acx = -6abc - 6a^2c$$
$$x = 2b + 2a$$

أوجد قيمة y.

$$y = \frac{2c}{2b - a}(x - 3a) = \frac{2c}{2b - a}(2b + 2a - 3a) =$$
$$\frac{2c(2b - a)}{2b - a} = 2c$$

إذًا إحداثيات P هي $(2b + 2a, 2c)$. والآن أوضح أن P تقع على $\overline{AR}$.

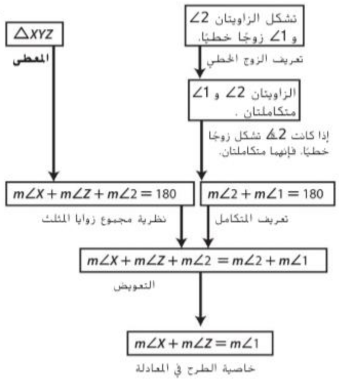
$$y = \left(\frac{c}{b + a}\right)(2b + 2a) = \frac{2c(b + a)}{b + a} = 2c.$$

وبهذا تتقاطع الوسيطات الثلاث عند النقطة نفسها.

أوجد أطوال $\overline{CP}$ و $\overline{CQ}$ و $\overline{BP}$ و $\overline{BS}$ و $\overline{AP}$ و $\overline{AR}$ باستخدام قانون المسافة.

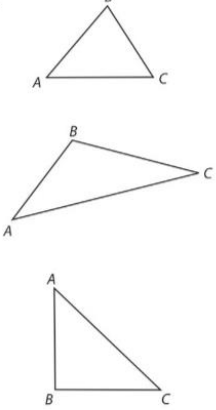
$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{((3b + 3a) - 0)^2 + (3c - 0)^2} \\ &= \sqrt{(3(b + a))^2 + (3c)^2} \\ &= \sqrt{9((b + a)^2 + c^2)} \\ &= 3\sqrt{(b + a)^2 + c^2} \end{aligned}$$

56.



الدرس 3-4

42a.



الدرس 4-4 (تمرين موجّه)

2A. **المعطيات:** $7x > 56$

المطلوب إثباته: $x > 8$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x < 8$ أو $x = 8$.

الخطوة 2

x	4	5	6	7	8
$7x$	28	35	42	49	56

عندما تكون $x < 8$، فإن $7x < 56$ وعندما تكون $x = 8$، فإن $7x = 56$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $7x > 56$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \leq 8$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x > 8$ يجب أن يكون صحيحًا.

$$AP = \sqrt{((2b + 2a) - 0)^2 + (2c - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(2(b + a))^2 + (2c)^2}$$
$$= \sqrt{4\left((b + a)^2 + c^2\right)}$$
$$= 2\sqrt{(b + a)^2 + c^2}$$
$$BS = \sqrt{(6b - 3a)^2 + (6c - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(3(2b - a))^2 + (3(2c))^2}$$
$$= \sqrt{9(2b - a)^2 + 9(2c)^2}$$
$$= 3\sqrt{(2b - a)^2 + 4c^2}$$
$$BP = \sqrt{(6b - (2b + 2a))^2 + (6c - 2c)^2}$$
$$= \sqrt{(4b - 2a)^2 + (4c)^2}$$
$$= \sqrt{2(2b - a)^2 + 2(2c)^2}$$
$$= 2\sqrt{(2b - a)^2 + 4c^2}$$
$$CQ = \sqrt{(6a - 3b)^2 + (0 - 3c)^2}$$
$$= \sqrt{(3(2a - b))^2 + (-3c)^2}$$
$$= \sqrt{9\left((2a - b)^2 + c^2\right)}$$
$$= 3\sqrt{(2a - b)^2 + c^2}$$
$$CP = \sqrt{(6a - (2b + 2a)) + (0 - 2c)^2}$$
$$= \sqrt{(4a - 2b)^2 + (-2c)^2}$$
$$= \sqrt{(2(2a - b))^2 + 4c^2}$$
$$= \sqrt{4(2a - b)^2 + 4c^2}$$
$$= 2\sqrt{(2a - b)^2 + c^2}$$

أوضح أن P تقع على ثلثي المسافة من الرؤوس إلى نقاط المنتصف.

$$\frac{2}{3}AR = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{(b + a)^2 + c^2}\right)$$
$$= 2\sqrt{(b + a)^2 + c^2} \text{ و } AP$$
$$\frac{2}{3}BS = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{(2b - a)^2 + 4c^2}\right)$$
$$= 2\sqrt{(2b - a)^2 + 4c^2} \text{ و } BP$$
$$\frac{2}{3}CQ = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{(2a - b)^2 + c^2}\right)$$
$$= 2\sqrt{(2a - b)^2 + c^2} \text{ و } CP$$

40. الإجابة النموذجية: المنصف العمودي والوسيط يمران عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث، لكن الوسيط فقط يمر دائمًا عبر الرأس المقابل للضلع. المنصف العمودي والارتفاع كلاهما عموديان على الضلع، لكنهما لا يمران بالضرورة عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث. يمر كل من الوسيط والارتفاع عبر الرأس، لكنهما لا يمران بالضرورة عبر نقطة مشتركة على ضلع المثلث.

2B. المعطيات: $-c > 0$

المطلوب إثباته: $c < 0$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $c > 0$ أو $c = 0$.

الخطوة 2

c	0	1	2	3	4
$-c$	0	−1	−2	−3	−4

إذا كانت $c > 0$، فإن $-c < 0$. إذا كانت $c = 0$، فإن $-c = 0$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $-c > 0$. ولهذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $c > 0$ خاطئًا ولا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $c < 0$ صحيحًا. بما أن $c < 0$ صحيح، فلا بد أن يكون c عددًا سالبًا.

3. افترض أن x = المسافة المقطوعة في المرحلة الأولى من رحلته، و y = المسافة المقطوعة في المرحلة الثانية من رحلته و z = المسافة المقطوعة في المرحلة الثالثة من رحلته.

المعطيات: $x + y + z > 360$

المطلوب إثباته: $z > 120$ أو $y > 120$ أو $x > 120$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أنه لم تكن هناك أي مرحلة في رحلته تزيد على 120 ميلاً. أي أن $z \leq 120$ و $y \leq 120$ و $x \leq 120$.

الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 120$ و $y \leq 120$ و $z \leq 120$، فإن $x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$.

الخطوة 3 هذا تناقض مع العبارة المعطاة، ولهذا، الافتراض خطأ و $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$. أي أنه قطع أكثر من 120 ميلاً في مرحلة واحدة من رحلته.

4. المعطيات: x^2 عدد فردي صحيح.

المطلوب إثباته: x عدد فردي صحيح.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x عدد زوجي صحيح. يعني هذا أن $x = 2k$ بالنسبة للعدد الصحيح k.

الخطوة 2

$x^2 = (2k)^2$	تعويض الافتراض
$= 4k^2$	حوّل لأبسط صورة.
$= (2 \cdot 2)k^2$	خاصية الضرب
$= 2(2k^2)$	خاصية التجميع في الضرب

بما أن k عدد صحيح، $2k^2$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تمثل العدد الصحيح $2k^2$. إذًا x^2 يمكن أن تمثلها $2m$، حيث m عدد صحيح. يعني هذا أن x^2 عدد زوجي صحيح، لكن هذا يتناقض مع العبارة المعطاة أن x^2 عدد فردي صحيح.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x عدد زوجي يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عدد فردي، استنتاجًا صحيحًا.

الدرس 4-4

5. المعطيات: $2x + 3 < 7$

المطلوب إثباته: $x < 2$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x > 2$ أو $x = 2$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2

x	2	3	4	5	6
$2x+3$	7	9	11	13	15

عندما تكون $x > 2$ فإن $2x + 3 > 7$ وعندما تكون $x = 2$ فإن $2x + 3 = 7$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $2x + 3 < 7$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \geq 2$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x < 2$ يجب أن يكون صحيحًا.

6. المعطيات: $3x - 4 > 8$

المطلوب إثباته: $x > 4$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x < 4$ أو $x = 4$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2

x	0	1	2	3	4
$3x - 4$	−4	−1	2	5	8

عندما تكون $x < 4$ فإن $3x - 4 < 8$ وعندما تكون $x = 4$ فإن $3x - 4 = 8$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $3x - 4 > 8$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \leq 4$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x > 4$ يجب أن يكون صحيحًا.

7. استخدم a = المتوسط أو $\frac{\text{عدد النقاط المسجلة}}{\text{عدد المباريات التي تمت}}$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1 افترض أن متوسط نقاط هيام في المباراة كان أكبر من أو يساوي 3. $a \geq 3$.

الخطوة 2	**الحالة 1**	**الحالة 2**
	$a = 3$	$a > 3$
	$3 \stackrel{?}{=} \frac{13}{6}$	$\frac{13}{6} \stackrel{?}{>} 3$
	$3 \neq 2.2$	$2.2 \not> 3$

الخطوة 3 الاستنتاجات خاطئة. إذًا لا بد أن يكون الافتراض خاطئًا. ولهذا، فمتوسط نقاط هيام في المباراة كان أقل من 3.

8. **المعطيات:** $5x - 2$ عدد فردي صحيح.
المطلوب إثباته: x عدد فردي صحيح.
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x ليست عددًا فرديًا صحيحًا. بمعنى أن تفترض أن x عدد زوجي صحيح.
الخطوة 2 افترض أن $x = 2k$ بالنسبة للعدد الصحيح k.

تعويض الافتراض	$5x - 2 = 5(2k) - 2$
خاصية الضرب	$= 10k - 2$
خاصية التوزيع	$= 2(5k - 1)$

بما أن k عدد صحيح، فإن $5k - 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن p تمثل العدد الصحيح $5k - 1$. إذًا $5x - 2$ يمكن أن تمثلها $2p$، حيث p عدد صحيح. يعني هذا أن $5x - 2$ عدد زوجي صحيح، لكن هذا يناقض المعطى بأن $5x - 2$ عدد فردي صحيح.
الخطوة 3 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عدد فردي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

9. **المعطى:** $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية؛
$\angle C$ مثلث قائم الزاوية.
المطلوب إثباته: $AB > BC$ و $AB > AC$

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن وتر المثلث قائم الزاوية ليس الضلع الأطول. أي أن $AB < BC$ و $AB < AC$.

الخطوة 2 إذا كانت $AB < BC$، فإن $m\angle C < m\angle A$. بما أن $m\angle C = 90$، فإن $m\angle A > 90$. إذًا $m\angle C + m\angle A > 180$. بموجب الاستنتاج نفسه، $m\angle C + m\angle B > 180$.

الخطوة 3 كلتا العلاقتين تتناقضان مع حقيقة أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180. ولهذا يجب أن يكون الوتر هو الضلع الأول في المثلث قائم الزاوية.

10. **المعطيات:** $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان.
المطلوب إثباته: لا يمكن أن تكون كل من $\angle A$ و$\angle B$ زاويتين منفرجتين معًا.
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن كلاً من $\angle A$ و $\angle B$ زاويتان منفرجتان.
الخطوة 2 بموجب تعريف الزوايا المنفرجة $m\angle A > 90$ و $m\angle B > 90$. إذًا $m\angle A + m\angle B > 180$.
الخطوة 3 يتناقض هذا مع المعلومات المعطاة بأن $m\angle A + m\angle B = 180$. ولهذا لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن كلاً من $\angle A$ و $\angle B$ لا يمكن أن تكونا زاويتين منفرجتين استنتاجًا صحيحًا.

17. **المعطيات:** $2x - 7 > -11$
المطلوب إثباته: $x > -2$
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \leq -2$ عبارة صحيحة.
الخطوة 2

x	-6	-5	-4	-3	-2
$2x - 7$	-19	-17	-15	-13	-11

عندما تكون $x < -2$ فإن $2x - 7 < -11$ وعندما تكون $x = -2$، فإن $2x - 7 = -11$.
الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $2x - 7 > -11$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \leq -2$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x > -2$ يجب أن يكون صحيحًا.

18. **المعطيات:** $5x + 12 < -33$
المطلوب إثباته: $x < -9$
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \geq -9$ عبارة صحيحة.
الخطوة 2

x	-9	-8	-7	-6	-5
$5x + 12$	-33	-28	-23	-18	-13

عندما تكون $x > -9$ فإن $5x + 12 > -33$ وعندما تكون $x = -9$ فإن $5x + 12 = -33$.
الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $5x + 12 < -33$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \geq -9$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x < -9$ يجب أن يكون صحيحًا.

19. **المعطيات:** $-3x + 4 < 7$
المطلوب إثباته: $x > -1$
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \leq -1$ عبارة صحيحة.
الخطوة 2

x	-5	-4	-3	-2	-1
$-3x + 4$	19	16	13	10	7

عندما تكون $x < -1$ فإن $-3x + 4 > 7$ وعندما تكون $x = -1$ فإن $-3x + 4 = 7$.
الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $-3x + 4 < 7$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \leq -1$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x > -1$ يجب أن يكون صحيحًا.

20. **المعطيات:** $-2x - 6 > 12$
المطلوب إثباته: $x < -9$
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $x \geq -9$ عبارة صحيحة.
الخطوة 2

x	-9	-8	-7	-6	-5
$-2x - 6$	12	10	8	6	4

عندما تكون $x > -9$ فإن $-2x - 6 < 12$ وعندما تكون $x = -9$ فإن $-2x - 6 = 12$.
الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومات المعطاة بأن $-2x - 6 > 12$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $x \geq -9$ يجب أن يكون خاطئًا والاستنتاج الأصلي أن $x < -9$ يجب أن يكون صحيحًا.

23. المعطيات: xy عدد فردي صحيح.

المطلوب إثباته: x و y عددان فرديان صحيحان.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x و y ليسا عددين فرديين صحيحين. أي افترض أن أيًا من x أو y عدد زوجي صحيح.

الخطوة 2 نحتاج فقط إلى توضيح أن الافتراض بأن x عدد زوجي صحيح يؤدي إلى تناقض بما أن فرضية أن y عدد زوجي صحيح يستتبع الاستنتاج نفسه. إذًا افترض أن x عدد زوجي صحيح و y عدد فردي صحيح. يعني هذا أن $x = 2k$ بالنسبة للعدد الصحيح k و $y = 2m + 1$ بالنسبة للعدد الصحيح m.

$xy = (2k)(2m + 1)$ تعويض الافتراض

$= 4km + 2k$ خاصية التوزيع

$= 2(km + k)$ خاصية التوزيع

بما أن k و m عددان صحيحان، فإن $km + k$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن p تمثل العدد الصحيح $km + k$. إذًا xy يمكن أن تمثلها $2p$، حيث p عدد صحيح. يعني هذا أن xy عدد زوجي صحيح. لكن هذا يناقض المعطى بأن xy عدد فردي صحيح.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x عدد زوجي صحيح و y عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع المعطى، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي أن x و y كليهما عددان فرديان صحيحان استنتاج صحيح.

24. المعطيات: n^2 عدد زوجي.

المطلوب إثباته: n^2 يقبل القسمة على 4.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن n^2 لا يقبل القسمة على 4. بمعنى آخر، 4 ليست من عوامل n^2.

الخطوة 2 إذا كان مربع العدد زوجيًا، فالعدد أيضًا زوجي. إذًا، إذا كان n^2 عدد زوجي، فلا بد أن n عدد زوجي. افترض أن $n = 2a$.

$n = 2a$

$n^2 = (2a)^2 = 4a^2$

4 من عوامل n^2، وهو ما يناقض الافتراض.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن n^2 لا يقبل القسمة على 4 يؤدي إلى تناقض مع الافتراض، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن n^2 يقبل القسمة على 4 استنتاجًا حقيقيًا.

25. المعطيات: x عدد فردي.

المطلوب إثباته: x لا يقبل القسمة على 4.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x تقبل القسمة على 4. بمعنى آخر، 4 من عوامل x.

الخطوة 2 افترض أن $x = 4n$، بالنسبة للعدد الصحيح n.

$x = 2(2n)$

إذًا، 2 من عوامل x مما يعني أن x عدد زوجي، لكن هذا يناقض معلومات المعطيات.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن x تقبل القسمة على 4 يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن x لا تقبل القسمة على 4 استنتاج حقيقي.

26. المعطيات: xy عدد زوجي صحيح.

المطلوب إثباته: x أو y عدد زوجي صحيح.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن x و y عددان فرديان صحيحان.

الخطوة 2 افترض أن $x = 2n + 1$ و $y = 2k + 1$ بالنسبة للعددين الصحيحين n و k.

$xy = (2n + 1)(2k + 1)$ التعويض

$= 4nk + 2n + 2k + 1$ خاصية التوزيع

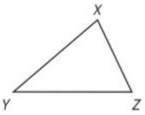
$= 2(2nk + n + k) + 1$ خاصية التوزيع

بما أن k و n عددان صحيحان، فإن $2nk + n + k$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن p تمثل العدد الصحيح $2nk + n + k$. إذًا xy يمكن أن تمثلها $2p + 1$، حيث p عدد صحيح. يعني هذا أن xy عدد فردي صحيح لكن هذا يناقض المعطيات بأن xy عدد زوجي صحيح.

الخطوة 3 بما أن الافتراض بأن x و y عددان فرديان صحيحان يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، فلا بد أن الاستنتاج الأصلي بأن x أو y عدد زوجي صحيح استنتاج حقيقي.

27. المعطيات: $XZ > YZ$

المطلوب إثباته: $\angle X \ncong \angle Y$



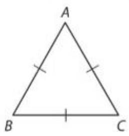
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\angle X \cong \angle Y$.

الخطوة 2 $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ بموجب معكوس نظرية $\triangle$ متساوي الساقين.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $XZ > YZ$. ولهذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $\angle X \cong \angle Y$ خطأ. إذًا، الاستنتاج الأصلي بأن $\angle X \ncong \angle Y$ يجب أن يكون صحيحًا.

28. المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع.

المطلوب إثباته: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الزوايا.



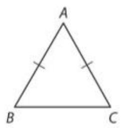
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ ليس متساوي الزوايا.

الخطوة 2 إذًا $m\angle B > m\angle C$. إذًا $AC > AB$ بموجب علاقات الزاوية–الضلع في نظرية المثلثات.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع. ولهذا، فإن الافتراض بأن $\triangle ABC$ ليس متساوي الزوايا لا بد أن يكون خطأ. إذًا الاستنتاج الأصلي بأن $\triangle ABC$ متساوي الزوايا لا بد أن يكون صحيحًا.

29. المعطيات: $\triangle ABC$ مثلث متساوي الساقين.

المطلوب إثباته: لا زاوية من زاويتي الأساس زاوية قائمة.



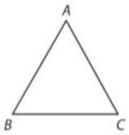
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\angle B$ زاوية قائمة.

الخطوة 2 بموجب نظرية $\triangle$ متساوي الساقين، فإن $\angle C$ زاوية قائمة أيضًا.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع حقيقة أن المثلث لا يمكن أن يكون له أكثر من زاوية قائمة. ولهذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $\angle B$ زاوية قائمة خطأ. إذًا، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن أيًا من زاويتي القاعدة ليست زاوية قائمة استنتاجًا صحيحًا.

.30 المعطيات: $\triangle ABC$

البرهان: $\triangle ABC$ لا يحتوي على أكثر من زاوية قائمة.



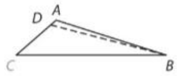
البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة 2 إذا كانت $\angle B$ و $\angle C$ زاويتين قائمتين، فإن $m\angle B + m\angle C = 180$. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ لأن مجموع زوايا المثلث يبلغ 180. بالتعويض، $m\angle A + 180 = 180$. إذًا $m\angle A = 0$.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات، $\triangle ABC$. ولهذا، فإن الافتراض بأن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة لا بد أن يكون خطأ. إذًا فالاستنتاج الأصلي بأن $\triangle ABC$ يضم أكثر من زاوية قائمة لا بد أن يكون حقيقيًا.

.31 المعطيات: $m\angle A > m\angle ABC$

المطلوب إثباته: $BC > AC$



البرهان:

افترض أن $BC \not> AC$. بموجب خاصية المقارنة، $BC = AC$ أو $BC < AC$.

الحالة 1: إذا كانت $BC = AC$، فإن $\angle ABC \cong \angle A$ بموجب نظرية المثلث متساوي الساقين. (إذا كان ضلعان في المثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان). لكن الافتراض بأن $\angle A \cong \angle ABC$ يتناقض مع عبارة المعطيات بأن $m\angle A > m\angle ABC$. إذًا، $BC \neq AC$.

الحالة 2: إذا كانت $BC < AC$، فلا بد أن تكون هناك نقطة D بين A و C بحيث تكون $\overline{DC} \cong \overline{BC}$. ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{BD}$. بما أن $DC = BC$، بموجب نظرية المثلث متساوي الساقين $\angle BDC \cong \angle DBC$. الآن $\angle BDC$ زاوية خارجية في $\triangle BAD$ وبموجب نظرية متباينة الزوايا الخارجية (يزيد قياس الزاوية الخارجية لمثلث على قياس أي من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المتجاورتين) $m\angle BDC > m\angle A$. بموجب مسلمة مجموع الزوايا، $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. ثم حسب تعريف المتباينة، $m\angle ABC > m\angle DBC$. بموجب التعويض وخاصية الانتقال في المتباينة، $m\angle ABC > m\angle A$. لكن هذا يتناقض مع عبارة المعطيات بأن $m\angle A > m\angle ABC$. في كلتا الحالتين، يوجد تناقض وبذلك لا بد أن افتراضنا كان خطأ. ولهذا، $BC > AC$.

.32 المعطيات: $\frac{1}{b} < 0$

المطلوب إثباته: b سالب.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $b > 0$. $b \neq 0$ بما أن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير محددة.

الخطوة 2 $b > 0$

$\frac{1}{b} > 0$؛ العدد الموجب المقسوم على عدد موجب يكون موجبًا.

الخطوة 3 الافتراض بأن $\frac{1}{b} > 0$ يتناقض مع المعطيات. إذًا، لا بد أن يكون الافتراض خطأ. وبهذا، b يجب أن يكون عددًا سالبًا.

.35a البرهان غير المباشر: الخطوة 1 نسبة 50% هي النصف. والعبارة تقول إن أكثر من نصف المراهقين المشاركين في الاقتراع قالوا إنهم يعيدون التدوير. إذًا افترض أن 50% يعيدون التدوير.

الخطوة 2 توضح البيانات أن 51% من المراهقين قالوا إنهم يعيدون التدوير و $51\% > 50\%$. إذًا فعدد المراهقين الذين يعيدون التدوير لا يقل عن النصف.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع بيانات المعطيات. ولهذا، الافتراض خطأ، ولا بد أن يكون الاستنتاج بأن أكثر من نصف المراهقين المشاركين في الاقتراع قالوا إنهم يعيدون التدوير استنتاجًا صحيحًا.

35b. $400 \cdot 23\% \stackrel{?}{=} 92$

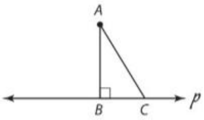
$400 \cdot 0.23 \stackrel{?}{=} 92$

$92 = 92$

.37 البرهان غير المباشر

المعطيات: $\overline{AB} \perp P$

المطلوب إثباته: $\overline{AB}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.



البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

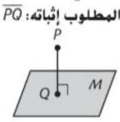
الخطوة 2 بما أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P، فهناك النقطة C بحيث إن $\overline{AC}$ هي أقصر مسافة. $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية بالوتر $\overline{AC}$، وهو أطول ضلع في $\triangle ABC$ بما أنه مقابل لأكبر زاوية في $\triangle ABC$ بموجب علاقات الزاوية–الضلع في نظرية المثلثات.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع حقيقة أن $\overline{AC}$ هو أقصر ضلع. ولهذا، الافتراض خطأ والاستنتاج بأن $\overline{AB}$ هو أقصر ضلع لا بد أن يكون صحيحًا.

.38 البرهان المباشر

المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ على المستوى M

المطلوب إثباته: $\overline{PQ}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى M.



البرهان:

بموجب التعريف، $\overline{PQ}$ عمودي على المستوى M إذا كان عموديًا على كل مستقيم في M يتقاطع معه. لكن بما أن القطعة المستقيمة العمودية من نقطة على مستقيم هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة إلى المستقيم، فإن تلك القطعة المستقيمة العمودية هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة إلى كل من هذه المستقيمات. ولهذا، $\overline{PQ}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى M.

39b. الإجابة النموذجية:

n	n^3+3
2	11
3	30
10	1003
11	1334
24	13,827
25	15,628
100	1,000,003
101	1,030,304
526	145,531,579
527	146,363,186

39d. **البرهان غير المباشر: الخطوة 1** افترض أن n عدد زوجي. افترض أن $n = 2k$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2

$n^3 + 3 = (2k)^3 + 3$ افتراض التعويض

$= 8k^3 + 3$ حوّل لأبسط صورة.

$= (8k^3 + 2) + 1$ استبدل العدد 3 بـ $1 + 2$ وقم بتجميع أول حدين.

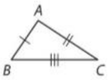
$= 2(4k^3 + 1) + 1$ خاصية التوزيع

بما أن k عدد صحيح، فإن $4k^3 + 1$ عدد صحيح أيضًا. ولهذا، $n^3 + 3$ عدد فردي.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات بأن $n^3 + 3$ عدد زوجي. ولهذا الافتراض خطأ. إذًا الاستنتاج بأن n عدد فردي لا بد أن يكون صحيحًا.

40. الإجابة النموذجية: حدد أولاً العبارة التي تحتاج إلى إثباتها وافترض مؤقتًا أن هذه العبارة خطأ بافتراض أن عكس العبارة صحيح. ثم فكّر منطقيًا إلى أن تصل إلى تناقض. وأخيرًا، أوضح أن العبارة التي أردت أن تثبتها لا بد أن تكون صحيحة لأن التناقض يثبت أن الافتراض المؤقت الذي وضعته كان خطأ.

41. الإجابة النموذجية: $\triangle ABC$ مثلث مختلف الأضلاع.



المعطيات: $\triangle ABC$، $AB \neq BC$، $AB \neq AC$، $BC \neq AC$

المطلوب إثباته: $\triangle ABC$ مثلث مختلف الأضلاع.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 افترض أن $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

الحالة 1: $\triangle ABC$ متساوي الساقين.

الخطوة 2 إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين، فإن $AB = BC$، أو $BC = AC$، أو $AB = AC$.

الخطوة 3 يتناقض هذا مع معلومات المعطيات. إذًا $\triangle ABC$ ليس متساوي الساقين.

الحالة 2: $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

لكي يكون المثلث متساوي الأضلاع، يجب أن يكون أيضًا متساوي الساقين، وقد أثبتت الحالة 1 أن $\triangle ABC$ ليس متساوي الساقين. ولهذا، $\triangle ABC$ ليس متساوي الأضلاع. ولهذا، $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

42. **المعطيات:** x عدد نسبي غير الصفر و y عدد غير نسبي.

المطلوب إثباته: xy عدد غير نسبي.

البرهان غير المباشر: الخطوة 1 بما أن المعطيات لدينا أن x عدد نسبي غير الصفر، $x = \frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين a و b، $b \neq 0$. بالتعويض، $xy = \frac{a}{b} \cdot y$ أو $\frac{ay}{b}$.
افترض أن xy عدد نسبي. ثم $xy = \frac{c}{d}$ بالنسبة للعددين الصحيحين c و d، $d \neq 0$.

الخطوة 2 $xy = \frac{ay}{b}$ x عدد نسبي.

$\frac{ay}{b} = \frac{c}{d}$ تعويض الافتراض

$ayd = cb$ اضرب كل طرف في db. هذا ممكن لأن $b \neq 0$ و $d \neq 0$.

$\frac{cb}{ad} = y$ أوجد حل y بقسمة كل طرف على ad. $a \neq 0$ بما أن $x = \frac{a}{b}$ و x ليست صفرًا.

بما أن a و b و c و d أعداد صحيحة و$a, d \neq 0$، $\frac{cb}{ad}$ هو ناتج قسمة عددين صحيحين. لهذا، y عدد نسبي. يتناقض هذا مع عبارة المعطيات بأن y عدد غير نسبي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن xy عدد نسبي يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، يجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن xy عدد غير نسبي، استنتاجًا صحيحًا.

44. إذا كانت x ليست عددًا فرديًا صحيحًا، فإن $5x - 2$ ليست عددًا فرديًا صحيحًا. الإجابة النموذجية: إذا كانت x ليست عددًا فرديًا صحيحًا، فهي عدد زوجي صحيح. إذا كانت x عددًا زوجيًا صحيحًا، فإن $5x$ عدد زوجي أيضًا لأن ناتج ضرب أي عدد في عدد زوجي يكون زوجيًا. $5x - 2$ زوجي أيضًا لأن ناتج طرح 2 من عدد زوجي يكون زوجيًا. ولهذا، تصح عبارة أنه إذا كانت x ليست عددًا فرديًا صحيحًا، فإن $5x - 2$ *ليست عددًا فرديًا* صحيحًا؛ يقوم البرهان المباشر لمعكوس العبارة والبرهان غير المباشر للعبارة على الافتراضات نفسها ويصل إلى الاستنتاجات نفسها.

الدرس 5-4

18. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle BCD \cong \angle CDB$ (معطى)
2. $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ (معكوس نظرية $\triangle$ متساوي الساقين)
3. $BC = BD$ (تعريف القطع المستقيمة $\cong$)
4. $AB + AD > BD$ (نظرية متباينة $\triangle$)
5. $AB + AD > BC$ (التعويض)

19. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{JL} \cong \overline{LM}$ (معطى)
2. $JL = LM$ (تعريف القطع المستقيمة $\cong$)
3. $KJ + KL > JL$ (نظرية متباينة $\triangle$)
4. $KJ + KL > LM$ (التعويض)

22a. طريق المقاطعة المستقيم؛ الإجابة النموذجية: في المثلث، يزيد مجموع ضلعين دائمًا على الضلع الثالث. إذًا مجموع مسافة الطريق السريع 4 والمسافة على الطريق 6 أكبر من المسافة على طريق المقاطعة المستقيم.

22b. الطريق السريع 4 إلى الطريق 6؛ الإجابة النموذجية: بما أن حارب يستطيع القيادة بسرعة 30 ميلاً في الساعة على طريق المقاطعة المستقيم والمسافة 30 ميلاً، فسيستغرق الطريق منه ساعة. عليه أن يقود لمسافة 47 ميلاً على الطريق السريع 4 والطريق 6 وحد السرعة هو 55 ميلاً في الساعة. إذًا سيستغرق منه الأمر 0.85 ساعة أو حوالي 51 دقيقة. سيستغرق السير على الطريق السريع 4 والطريق 6 وقتًا أقل من السير على طريق المقاطعة المستقيم.

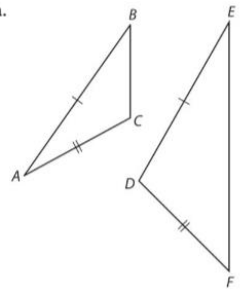
23. البرهان:

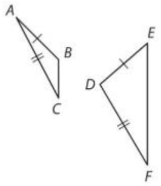
العبارات (المبررات)

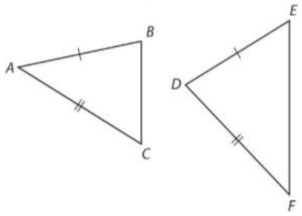
1. أنشئ $\overline{CD}$ بحيث تكون C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$. (مسلمة المسطرة)
2. $CD = AC$ (تعريف القطع المستقيمة $\cong$)
3. $\angle CAD \cong \angle ADC$ (نظرية $\triangle$ متساوي الساقين)
4. $m\angle CAD = m\angle ADC$ (تعريف $\measuredangle$ $\cong$)
5. $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$ ($\angle$ مسلمة الجمع)
6. $m\angle BAC + m\angle ADC = m\angle BAD$ (التعويض)
7. $m\angle ADC < m\angle BAD$ (تعريف المتباينة)
8. $AB < BD$ (النظرية 7.10)
9. $BD = BC + CD$ (مسلمة جمع القطعة المستقيمة)
10. $AB < BC + CD$ (التعويض (الخطوتان 8, 9))
11. $AB < BC + AC$ (التعويض (الخطوتان 10, 2))

31. نعم؛ الإجابة النموذجية: لا تشكل القياسات على الرسم مثلثًا. وفقًا لنظرية متباينة المثلث، يزيد مجموع طولي أي ضلعين في مثلث على طول الضلع الثالث. تبلغ الأطوال في الرسم 1 ft و $3\frac{7}{8}$ ft و $6\frac{3}{4}$ ft. بما أن $6\frac{3}{4} \not> 3\frac{7}{8} + 1$، فلا يمكن أن يوجد المثلث. ينبغي عليهم إعادة قياساتهم قبل أن يقطعوا الخشب.

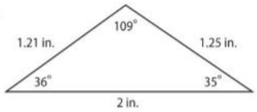
42a.

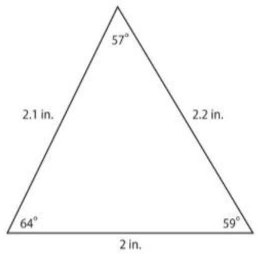






47.





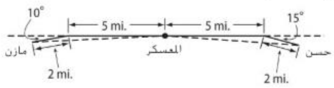
48a. الإجابة النموذجية: بموجب نظرية متباينة المثلث، المسافة من منزلي إلى مركز التسوق أكبر من $\frac{3}{4}$ ميل وأقل من $2\frac{1}{4}$ ميل.

48b. الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون المتنزه بين منزلي ومركز التسوق مما يعني أن المسافة من منزلي إلى مركز التسوق تبلغ $2\frac{1}{4}$ ميل أو يمكن أن يكون منزلي بين الحديقة ومركز التسوق، مما يعني أن المسافة من منزلي إلى مركز التسوق تبلغ $\frac{3}{4}$ ميل.

الدرس 6-4

16a. مازن؛ الإجابة النموذجية: استدار حسن °15 جنوبًا. إذًا فقياس الزاوية المقابلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ 15 − 180 أو 165. استدار مازن °35 شمالاً. إذًا فقياس الزاوية المقابلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ 35 − 180 أو 145. بموجب نظرية المفصلة، بما أن 165 > 145، فمازن أقرب إلى المعسكر.

16b. مازن؛ الإجابة النموذجية: استدار حسن °15 جنوبًا. إذًا فقياس الزاوية المقابلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ 15 − 180 أو 165. استدار مازن °35 جنوبًا. إذًا فقياس الزاوية المقابلة لضلع المثلث الذي يمثل المسافة بينه وبين المعسكر يبلغ 10 − 180 أو 145. بموجب نظرية المفصلة، بما أن 165 < 170، فمازن أبعد عن المعسكر.



23. البرهان:

<u>العبارات (المبررات)</u>

1. $\overline{LK} \cong \overline{JK}, \overline{RL} \cong \overline{RJ}$ ،K هي نقطة منتصف $\overline{QS}$، $m\angle SKL > m\angle QKJ$ (معطى)
2. $SK = QK$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $SL > QJ$ (نظرية المفصلة)
4. $RL = RJ$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
5. $SL + RL > RL + RJ$ (خاصية الجمع)
6. $SL + RL > QJ + RJ$ (التعويض)
7. $RS = SL + RL, QR = QJ + RJ$ (مسلمة جمع القطعة المستقيمة)
8. $RS > QR$ (التعويض)

24. البرهان:

<u>العبارات (المبررات)</u>

1. $\overline{VR} \cong \overline{RT}$ ؛R هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$. (معطى)
2. $SR = QR$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
4. $m\angle SRV > m\angle QRT$ (معطى)
5. $VS > TQ$ (متباينة SAS)
6. $\overline{WV} \cong \overline{WT}$ (معطى)
7. $WV = WT$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
8. $WV + VS > WV + TQ$ (خاصية الجمع)
9. $WV + VS > WT + TQ$ (التعويض)
10. $WV + VS = WS, WT + TQ = WQ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
11. $WS > WQ$ (التعويض)

25. البرهان:

<u>العبارات (المبررات)</u>

1. $\overline{XU} \cong \overline{VW}, \overline{XU} \parallel \overline{VW}$ (المعطى)
2. $\angle UXV \cong \angle XVW, \angle XUW \cong \angle UWV$ (نظرية ∡ الداخلية المتبادلة)
3. $\triangle XZU \cong \triangle VZW$ (ASA)
4. $\overline{XZ} \cong \overline{VZ}$ (CPCTC)
5. $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ (خاصية الانعكاس)
6. $VW > XW$ (معطى)
7. $m\angle VZW > m\angle XZW$ (معكوس نظرية المفصلة)
8. $\angle VZW \cong \angle XZU, \angle XZW \cong \angle VZU$ (∡ الرأسية تكون ≅)
9. $m\angle VZW = m\angle XZU, m\angle XZW = m\angle VZU$ (تعريف ∡ ≅)
10. $m\angle XZU > m\angle UZV$ (التعويض)

26. البرهان:

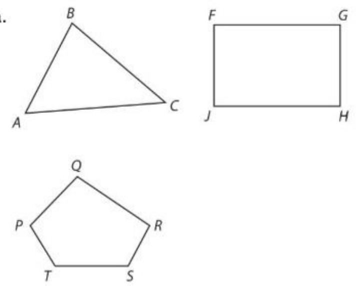
<u>العبارات (المبررات)</u>

1. $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}, AB > DC$ (معطى)
2. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)
3. $BC = BC$ (تعريف القطع المستقيمة ≅)
4. $AB + BC = AC, DC + CB = DB$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
5. $AB + BC > DC + CB$ (خاصية الجمع)
6. $AC > DB$ (التعويض)
7. $m\angle AFC > m\angle DJB$ (معكوس نظرية المفصلة)

27a. الموضع 2؛ الإجابة النموذجية: إذا قست المسافة من كتفها إلى قبضتها في كل موضع، فإنها تبلغ 1.6 *cm* في الموضع 1 و 2 cm في الموضع 2. ولهذا، تزيد المسافة من كتفها إلى قبضتها في الموضع 2.

27b. الموضع 2؛ الإجابة النموذجية: باستخدام القياسات في الجزء *a* ومعكوس نظرية المفصلة، فأنت تعلم أن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأكبر يكون أكبر. إذًا فالزاوية التي يشكلها كوع خلف أكبر في الموضع 2.

37a.



Glossary/القاموس

English	العربية

A

absolute value function A function written as $f(x) = |x|$, in which $f(x) \geq 0$ for all values of x.

دالة القيمة المطلقة دالة تُكتب بالصيغة $f(x) = |x|$، وفيها $f(x) \geq 0$ بالنسبة لجميع قيم x.

adjacent arcs Arcs in a circle that have exactly one point in common.

أقواس متجاورة هي أقواس داخل دائرة تشترك جميعها في نقطة واحدة بالضبط.

algebraic proof A proof that is made up of a series of algebraic statements. The properties of equality provide justification for many statements in algebraic proofs.

برهان جبري هو برهان مكوّن من مجموعة عبارات جبرية. توفر خواص المساواة تفسيرًا للعديد من العبارات في البراهين الجبرية.

altitude 1. In a triangle, a segment from a vertex of the triangle to the line containing the opposite side and perpendicular to that side. 2. In a prism or cylinder, a segment perpendicular to the bases with an endpoint in each plane. 3. In a pyramid or cone, the segment that has the vertex as one endpoint and is perpendicular to the base.

ارتفاع 1. في المثلث، قطعة مستقيمة ممتدة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل، وعمودية على ذلك الضلع. 2. في المنشور أو الأسطوانة، قطعة مستقيمة عمودية على القاعدتين ولها نقطة نهاية في كل مستوى. 3. في الشكل الهرمي أو المخروط، قطعة مستقيمة لها رأس هو إحدى نقطتي نهايتها، وهي عمودية على القاعدة.

ambiguous case of the Law of Sines Given the measures of two sides and a nonincluded angle, there exist two possible triangles.

حالة مبهمة لقانون الـ Sine بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما. هناك احتمال بوجود مثلثين.

angle of depression The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks downward.

زاوية الانخفاض هي الزاوية بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أسفل.

angle of elevation The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks upward.

زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أعلى.

arc A part of a circle that is defined by two endpoints.

قوس هو جزء من الدائرة يتم تحديده بنقطتي نهاية.

absolute value function A function written as $f(x) = |x|$, in which $f(x) \geq 0$ for all values of x.

دالة القيمة المطلقة دالة تُكتب بالصيغة $f(x) = |x|$، وفيها $f(x) \geq 0$ بالنسبة لجميع قيم x.

adjacent arcs Arcs in a circle that have exactly one point in common.

أقواس متجاورة هي أقواس داخل دائرة تشترك جميعها في نقطة واحدة بالضبط.

algebraic proof A proof that is made up of a series of algebraic statements. The properties of equality provide justification for many statements in algebraic proofs.

برهان جبري هو برهان مكوّن من مجموعة عبارات جبرية. توفر خواص المساواة تفسيرًا للعديد من العبارات في البراهين الجبرية.

altitude 1. In a triangle, a segment from a vertex of the triangle to the line containing the opposite side and perpendicular to that side. 2. In a prism or cylinder, a segment perpendicular to the bases with an endpoint in each plane. 3. In a pyramid or cone, the segment that has the vertex as one endpoint and is perpendicular to the base.

ارتفاع 1. في المثلث، قطعة مستقيمة ممتدة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل، وعمودية على ذلك الضلع. 2. في المنشور أو الأسطوانة، قطعة مستقيمة عمودية على القاعدتين ولها نقطة نهاية في كل مستوى. 3. في الشكل الهرمي أو المخروط، قطعة مستقيمة لها رأس هو إحدى نقطتي نهايتها، وهي عمودية على القاعدة.

ambiguous case of the Law of Sines Given the measures of two sides and a nonincluded angle, there exist two possible triangles.

حالة مبهمة لقانون الـ Sines بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما، هناك احتمال بوجود مثلثين.

angle of depression The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks downward.

زاوية الانخفاض هي الزاوية بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أسفل.

angle of elevation The angle between the line of sight and the horizontal when an observer looks upward.

زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين خط الرؤية والخط الأفقي عندما ينظر المشاهد إلى أعلى.

arc A part of a circle that is defined by two endpoints.

قوس هو جزء من الدائرة يتم تحديده بنقطتي نهاية.

asymptote A line that a graph approaches.

خط تقارب هو خط يقترب منه الرسم البياني.

auxiliary line An extra line or segment drawn in a figure to help complete a proof.

خط مساعد هو قطعة مستقيمة أو خط إضافي يتم رسمه في الشكل للمساعدة على استكمال البرهان.

axiom A statement that is accepted as true.

مسلّمة "القاعدة البديهية" هي عبارة يُفترض صحتها دون برهان.

axis In a cylinder, the segment with endpoints that are the centers of the bases.

محور في الأسطوانة، هو القطعة المستقيمة التي تكون نقطتا نهايتها مركزي القاعدة .

axis of symmetry The vertical line containing the vertex of a parabola.

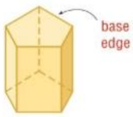
محور التماثل هو الخط الرأسي الذي يحوي رأس القطع المكافئ.

B

base angle of an isosceles triangle See ***isosceles triangle*** and isosceles trapezoid.

زاوية القاعدة في مثلث متساوي الساقين انظر ***مثلث متساوي الساقين*** وشبه منحرف متساوي الساقين.

base edges The intersection of the lateral faces and bases in a solid figure.



حواف القاعدة هي تقاطع القواعد والأوجه الجانبية في مجسم ما.

binomial The sum of two monomials.

ثنائي الحد حاصل جمع اثنين من أحادي الحد.

Glossary/القاموس

C

center of circle The central point where radii form a locus of points called a circle.

مركز الدائرة النقطة المركزية حيث تشكل أنصاف الأقطار محلاً هندسيًا للنقاط يطلق عليه دائرة.

center of dilation The center point from which dilations are performed.

مركز تغيير الأبعاد هو نقطة المركز التي يتم إجراء التوسعات منها.

central angle An angle that intersects a circle in two points and has its vertex at the center of the circle.

زاوية مركزية هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ويكون رأسها في مركز الدائرة.

centroid The point of concurrency of the medians of a triangle.

نقطة المركز هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث.

chord **1.** For a given circle, a segment with endpoints that are on the circle. **2.** For a given sphere, a segment with endpoints that are on the sphere.

وتر 1. بالنسبة إلى دائرة معينة، يكون الوتر هو القطعة التي توجد نقطتا نهايتها على الدائرة. 2. بالنسبة إلى كرة معينة، يكون الوتر هو القطعة التي توجد نقطتا نهايتها على الكرة.

chord segments Segments that form when two chords intersect inside a circle.

قطاعات وترية هي القطاعات التي تتكون عندما يتقاطع وتران داخل الدائرة.

circle The locus of all points in a plane equidistant from a given point called the ***center*** of the circle.

دائرة المحل الهندسي لجميع النقاط في مستوى متساوي الأبعاد يُطلق عليه **مركز** الدائرة.

P is the center of the circle.

P هو مركز الدائرة

circular permutation A permutation of objects that are arranged in a circle or loop.

تبديل دائري تبديل الكائنات المرتبة في دائرة أو حلقة.

circumcenter The point of concurrency of the perpendicular bisectors of a triangle.

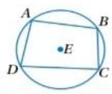
مركز الدائرة المحيطة هو نقطة التقاء المنصفات العمودية للمثلث

circumference The distance around a circle.

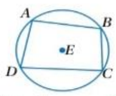
محيط الدائرة هو المسافة التي تحيط بالدائرة.

circumscribed A circle is circumscribed about a polygon if the circle contains all the vertices of the polygon.

مُحاط بدائرة تكون الدائرة محيطة بمضلع إذا كانت الدائرة تحتوي على كل رؤوس المضلع.



⊙*E* is circumscribed abo quadrilateral *ABCD*.



⊙*E* هو جزء محاط بالدائرة التي تحتوي على *ABCD*

closed A set is closed under an operation if for any numbers in the set, the result of the operation is also in the set.

مغلقة تكون أي مجموعة مغلقة في عملية ما إذا كانت نتيجة العملية، بالنسبة لأي أرقام في المجموعة، عنصرًا ينتمي لنفس المجموعة.

combination An arrangement or listing in which order is not important.

توافقية هي تنسيق أو قائمة ليس للترتيب أهمية فيها.

common tangent A line or segment that is tangent to two circles in the same plane.

مماس مشترك هو قطعة مستقيمة أو خط مستقيم يلامس دائرتين في نفس المستوى.

complement The complement of an event ***A*** consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event ***A***.

متمم يتكون متمم الحدث ***A*** من جميع النواتج في فراغ العينة، والتي لا تندرج على أنها من نواتج الحدث ***A***.

completing the square To add a constant term to a binomial of the form $x^2 + bx$ so that the resulting trinomial is a perfect square.

إكمال المربع هو إضافة حد ثابت إلى ثنائي الحد بالصيغة $x^2 + bx$ بحيث يكون ثلاثي الحدود الناتج مربعًا كاملاً.

complex conjugates Two complex numbers of the form $a + bi$ and $a - bi$.

مترافقان مركبان هما رقمان مركبان بالصيغة $a + bi$ و $a - bi$.

complex number Any number that can be written in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.

عدد مركب أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$، حيث a و b عددان حقيقيان وi وحدة تخيلية.

component form A vector expressed as an ordered pair, ⟨change in x, change in y⟩.

صيغة مركبة هي متجه يعبر عنه بزوج مرتب، ⟨كلما تغير x، تغيرy⟩.

composite solid A three-dimensional figure that is composed of simpler figures.

مجسم مركب هو شكل ثلاثي الأبعاد يتكون من أشكال أبسط.

compound event An event that consists of two or more simple events.

حدث مركب هو حدث مكوّن من حدثين بسيطين أو أكثر.

compound interest Interest paid on the principal of an investment and any previously earned interest.

فائدة مركبة فائدة تُدفع على رأسمال الاستثمار وأي فائدة مكتسبة في السابق.

concentric circles Coplanar circles with the same center.

دوائر متحدة المركز هي دوائر متحدة المستوى لها نفس المركز.

concurrent lines Three or more lines that intersect at a common point.

خطوط مستقيمة متقاطعة هي ثلاثة خطوط مستقيمة أو أكثر تتقاطع في نقطة مشتركة.

conditional probability The probability of an event under the condition that some preceding event has occurred.

احتمال مشروط هو احتمال وقوع حدث بشرط وقوع حدث سابق.

congruent Having the same measure.

متطابق ما لديه نفس القياس.

congruent arcs Arcs in the same circle or in congruent circles that have the same measure.

أقواس متطابقة هي أقواس توجد في الدائرة نفسها أو دوائر متطابقة ولها نفس القياس.

congruent polygons Polygons in which all matching parts are congruent.

مضلعات متطابقة المضلعات التي تتطابق فيها كل الأجزاء المماثلة.

congruent solids Two solids with the same shape, size and scale factor of 1:1.

مجسمات متطابقة مجسمان لهما الشكل والحجم أنفسهما ومعامل المقياس لهما 1:1.

conic section Any figure that can be obtained by slicing a cone.

قطع مخروطي هو أي شكل يمكن الحصول عليه عن طريق قطع أي مخروط.

conjugates Binomials of the form $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ and $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$.

مترافقات ثنائيو الحد في الصيغة $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$.

coordinate proofs Proofs that use figures in the coordinate plane and algebra to prove geometric concepts.

براهين إحداثية هي براهين تستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسية.

corner view The view from a corner of a three-dimensional figure, also called the ***isometric view***.

عرض الزاوية العرض من إحدى زوايا شكل ثلاثي الأبعاد. ويسمى أيضًا ***العرض متساوي القياس***.

corollary A statement that can be easily proved using a theorem is called a corollary of that theorem.

نتيجة هي عبارة يمكن إثباتها بسهولة باستخدام نظرية، وتسمى "لازمة تلك النظرية".

corresponding parts Matching parts of congruent polygons.

أجزاء متناظرة هي الأجزاء المماثلة من المضلعات المتطابقة.

cosecant The reciprocal of the sine of an angle in a right triangle.

الـــ CSC هي معكوس Sine أي زاوية في مثلث قائم الزاوية.

cosine For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg adjacent to the acute angle to the measure of the hypotenuse.

الـ Cosine بالنسبة لأي زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، هو نسبة قياس الساق المجاور للزاوية الحادة إلى قياس الوتر.

cotangent The ratio of the adjacent to the opposite side of a right triangle.

الـ Tan هو نسبة الضلع المجاور إلى الضلع المقابل في المثلث القائم.

cross products In the proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ where $b \neq 0$ and $d \neq 0$, the cross products are ad and bc. The proportion is true if and only if the cross products are equal.

ضرب تقاطعي (وفي المتجهات الضرب الاتجاهي) في التناسب $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$ و$d \neq 0$، يكون الضرب التقاطعي ad وbc. يكون التناسب صحيحًا فقط في حالة تساوي الضرب التقاطعي.

cross section The intersection of a solid and a plane.

مقطع عرضي هو تقاطع مجسم مع مستوى.

D

decay factor In exponential decay, the base of the exponential expression, $1 - r$.

عامل تضاؤل في التضاؤل الأسي، هو قاعدة التعبير الأسي $1 - r$.

deductive argument A proof formed by a group of algebraic steps used to solve a problem.

برهان استدلالي هو البرهان المكوّن من مجموعة من الخطوات الجبرية المستخدمة لحل مسألة.

degree of a monomial The sum of the exponents of all its variables.

درجة أحادي الحد هي حاصل جمع أسس جميع متغيراته.

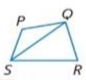
degree of a polynomial The greatest degree of any term in the polynomial.

درجة كثير الحدود هي أكبر درجة لأي حد في كثير الحدود.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

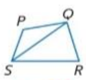
أحداث مستقلة هي حدثان أو أكثر تؤثر نتيجة إحداها على نتيجة الأحداث الأخرى.

diagonal In a polygon, a segment that connects nonconsecutive vertices of the polygon.



$\overline{SQ}$ is a diagonal

قطر في المضلع، قطعة مستقيمة تربط الرؤوس غير المتتالية في المضلع.



$\overline{SQ}$ هو قطر

diameter 1. In a circle, a chord that passes through the center of the circle. 2. In a sphere, a segment that contains the center of the sphere, and has endpoints that are on the sphere.

قطر 1. في الدائرة، هو الوتر الذي يمر عبر مركز الدائرة. 2. في الكرة، هو القطعة المستقيمة التي تتضمن مركز الكرة وتكون نقطتا نهايتها على الكرة.

difference of two squares Two perfect squares separated by a subtraction sign. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ or $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

الفرق بين مربعين مربعان كاملان تفصلهما عن بعضهما إشارة طرح.
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

dilation 1. A transformation that alters the size of a figure but not its shape. 2. (pp. 593, 694) A transformation that enlarges or reduces the original figure proportionally. A dilation with center C and positive scale factor k, $k \neq 1$, is a function that maps a point P in a figure to its image such that

- if point P and C coincide, then the image and preimage are the same point, or
- if point P is not the center of dilation, then P' lies on $\overrightarrow{CP}$ and $CP' = k(CP)$.

If $k < 0$, P' is the point on the ray opposite $\overrightarrow{CP}$ such that $CP' = |k|(CP)$.

تغيير الأبعاد بمقياس 1. تحويل يغير من حجم الشكل دون تغيير شكله. 2. تحويل يكبر الشكل الأصلي أو يصغره بشكل متناسب. تغيير الأبعاد بمقياس عند المركز C ومعامل المقياس الإيجابي k، و $k \neq 1$، هو الدالة التي ترسم النقطة P في شكل مقابل صورتها بحيث

- إذا تطابقت النقطتان P وC، تكون كل من الصورة والصورة الأصلية نفس النقطة
- أو إذا لم تكن النقطة P هي مركز تغيير الأبعاد، تقع P' حينها على $\overrightarrow{CP}$ و $CP' = k(CP)$.

إذا كانت $k < 0$ و P' هي النقطة التي توجد على الشعاع المقابل $\overrightarrow{CP}$ بحيث $CP' = |k|(CP)$.

direction The measure of the angle that a vector forms with the positive x-axis or any other horizontal line.

اتجاه هو قياس الزاوية التي يشكلها أي متجه مع المحور الأفقي x الموجب أو أي خط أفقي آخر.

directrix The fixed line in a parabola that is equidistant from the locus of all points in a plane.

دليل الخط المستقيم الثابت في القطع المكافئ الذي يقع على أبعاد متساوية من المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى.

discriminant In the Quadratic Formula, the expression $b^2 - 4ac$.

مميز في الصيغة التربيعية، التعبير $b^2 - 4ac$.

double root The roots of a quadratic function that are the same number.

جذر مكرر هو جذور الدالة التربيعية التي تتكون من الأرقام نفسها

E

edge A line that connects two nodes in a network.

حافة خط مستقيم يربط عقدتين في شبكة.

efficient route The path in a network with the least weight.

مسار فعّال هو المسار الأقل وزنًا في أي شبكة.

enlargement An image that is larger that the original figure.

تكبير هو صورة أكبر من الشكل الأصلي.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

متجهات متكافئة هي متجهات لها نفس المقدار والاتجاه.

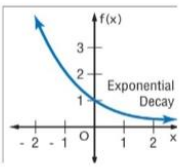
euclidean geometry A geometrical system in which a plane is a flat surface made up of points that extend infinitely in all directions.

هندسة إقليدية هي نظام هندسي يكون المستوى فيه عبارة عن سطح مستوٍ مكّون من نقاط تمتد في جميع الاتجاهات بصورة لا نهائية.

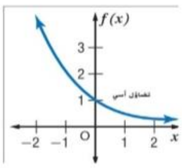
expected value Also ***mathematical expectation***, is the average value of a random variable that one expects after repeating an experiment or simulation an infinite number of times.

قيمة متوقعة تسمى أيضًا *التوقع الحسابي*، هي متوسط القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي عقب تكرار تجربة أو محاكاة لعدد غير متناه من المرات.

exponential decay Exponential decay occurs when a quantity decreases exponentially over time.



تضاؤل أسي يحدث التضاؤل الأسي عندما تنخفض الكمية من حيث الأس على مدار الوقت.



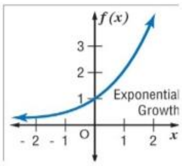
exponential equation An equation in which the variables occur as exponents.

معادلة أسية هي معادلة تظهر فيها المتغيرات كأسس.

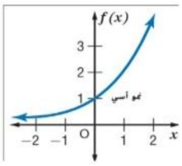
exponential function (pp. 227, 543) A function of the form $y = ab^x$, where $a \neq 0$, $b > 0$, and $b \neq 1$.

دالة أسية هي دالة تأخذ الصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0$, $b > 0$ و $b \neq 1$.

exponential growth Exponential growth occurs when a quantity increases exponentially over time.



نمو أسي يحدث النمو الأسي عندما تزيد الكمية من حيث الأس على مدار الوقت.



exponential inequality An inequality involving exponential functions.

متباينة أسية هي متباينة تنطوي على دوال أسية.

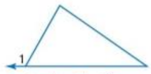
extended ratios Ratios that are used to compare three or more quantities.

نسب ممتدة هي النسب المستخدمة لمقارنة ثلاث كميات أو أكثر.

exterior angle An angle formed by one side of a triangle and the extension of another side.

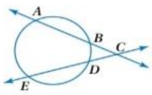
∠1 is an exterior angle

زاوية خارجية هي الزاوية التي تتكون من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع آخر.



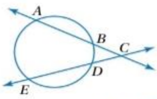
∠1 زاوية خارجية

external secant segment A secant segment that lies in the exterior of the circle.



$\overline{BC}$ and $\overline{CD}$ are external secant segments.

قطعة قاطع خارجية هي قطعة قاطع موجودة خارج الدائرة.



$\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ هما قطعتا قاطع خارجيتان

extraneous solutions Results that are not solutions to the original equation.

حلول دخيلة هي نتائج لا تمثل حلولاً للمعادلة الأصلية.

extremes In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ the numbers a and d.

طرفا التناسب في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، هما العددان a و d.

F

factored form The form of a polynomial showing all of its factors. $y = a(x - p)(x - q)$ is the factored form of a quadratic equation.

صيغة محللة هي صيغة لكثير الحدود توضح جميع عوامله. $y = a(x - p)(x - q)$ الصيغة المحللة للمعادلة التربيعية.

factorial The product of the integers less than or equal to a positive integer n, written as $n!$

مضروب أن يكون حاصل ضرب الأعداد الصحيحة أقل من أو يساوي العدد الصحيح الموجب n، ويكتب بالصيغة $n!$

factoring To express a polynomial as the product of monomials and polynomials.

التحليل إلى العوامل هو التعبير عن كثير الحدود بصفته حاصل ضرب عدد من أحادي الحد وكثير الحدود.

factoring by grouping The use of the Distributive Property to factor some polynomials having four or more terms.

التحليل إلى العوامل بالتجميع هو استخدام خاصية التوزيع لتحليل عدد من كثيري الحدود المكونة من أربعة حدود فأكثر إلى عوامل.

flow proof A proof that organizes statements in logical order, starting with the given statements. Each statement is written in a box with the reason verifying the statement written below the box. Arrows are used to indicate the order of the statements.

برهان متسلسل هو البرهان الذي ينظم العبارات بترتيب منطقي، بدءًا بعبارات المعطيات. تُكتب كل عبارة في مربع مع كتابة السبب المبرر للعبارة أسفل المربع. تُستخدم الأسهم لتوضيح ترتيب العبارات.

focus The fixed point in a parabola that is equidistant from the locus of all points in a plane.

بؤرة هي النقطة الثابتة في القطع المكافئ وتقع على أبعاد متساوية من المحل الهندسي لكل النقاط في أي مستوى.

FOIL method To multiply two binomials, find the sum of the products of the First terms, the Outer terms, the Inner terms, and the Last terms.

طريقة فويل لضرب اثنين من أحادي الحد، اجمع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين الخارجيين والحدين الداخليين والحدين الأخيرين.

formal proof A two-column proof containing statements and reasons.

برهان شكلي هو البرهان المكون من عمودين يحتويان على عبارات واستدلالات.

fractal A figure generated by repeating a special sequence of steps infinitely often. Fractals often exhibit self-similarity.

كسيري هو شكل يتولد من تكرار تسلسل خاص للخطوات بشكل غير متناه في أغلب الأحيان. غالبًا ما تظهر الكسيريات التشابه الذاتي.

frustum The part of a solid that remains after the top portion has been cut by a plane parallel to the base.

مخروط ناقص هو جزء من المجسم الذي يبقى بعد قطع الجزء العلوي بواسطة مستوى موازٍ للقاعدة.

fundamental counting principle A method used to determine the number of possible outcomes in a sample space by multiplying the number of possible outcomes from each stage or event.

مبدأ العد الأساسي هو طريقة تستخدم لتحديد عدد النتائج المحتملة في فراغ العينة من خلال ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

G

geometric mean For any positive numbers a and b, the positive number x such that $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

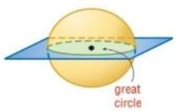
متوسط هندسي لأي أعداد موجبة a وb، العدد الموجب x بحيث $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

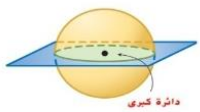
geometric probability Using the principles of length and area to find the probability of an event.

احتمال هندسي هو استخدام مبادئ الطول والمساحة لإيجاد احتمالية وقوع الحدث.

great circle A circle formed when a plane intersects a sphere with its center at the center of the sphere.

دائرة كبرى هي دائرة تتكون عندما يقطع المستوى الكرة مع وضع مركزه عند مركز الكرة.





greatest integer function A step function, written as $f(x)=[\![x]\!]$, where $f(x)$ is the greatest integer less than or equal to x.

دالة أكبر عدد صحيح هي دالة درجية تُكتب بالصيغة $f(x)=[\![x]\!]$، حيث $f(x)$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

growth factor In exponential growth, the base of the exponential expression, $1+r$.

عامل نمو في النمو الأسي، تكون قاعدة التعبير الأسي $1+r$.

H

hemisphere One of the two congruent parts into which a great circle separates a sphere.

نصف كرة أحد الجزأين المتطابقين الناتجين عندما تقسم دائرة كبرى الكرة.

I

imaginary unit i, or the principal square root of -1.

وحدة تخيلية i، أو الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1.

incenter The point of concurrency of the angle bisectors of a triangle.

نقطة تمركز نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث.

included angle In a triangle, the angle formed by two sides is the included angle for those two sides.

زاوية محصورة في المثلث، تكون الزاوية المكونة من التقاء ضلعي المثلث هي الزاوية المحصورة لهذين الضلعين.

included side The side of a polygon that is a side of each of two angles.

ضلع محصور هو أحد أضلاع المضلع الذي يمثل ضلعًا لكلتا الزاويتين.

independent events Two or more events in which the outcome of one event does not affect the outcome of the other events.

أحداث مستقلة هي حدثان أو أكثر لا تؤثر نتيجة أحدهما على نتيجة الأحداث الأخرى.

indirect proof In an indirect proof, one assumes that the statement to be proved is false. One then uses logical reasoning to deduce that a statement contradicts a postulate, theorem, or one of the assumptions. Once a contradiction is obtained, one concludes that the statement assumed false must in fact be true.

برهان غير مباشر في البرهان غير المباشر، يُفترض أن العبارة الجاري إثباتها عبارة خاطئة. ثم يُستخدم التفكير المنطقي لاستنتاج أن العبارة تتعارض مع مسلمة أو نظرية أو إحدى الفرضيات. وبمجرد إثبات خلاف ذلك، نستنتج أن العبارة التي تم افتراض أنها خاطئة هي عبارة صحيحة.

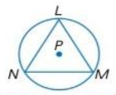
indirect reasoning Reasoning that assumes that the conclusion is false and then shows that this assumption leads to a contradiction of the hypothesis like a postulate, theorem, or corollary. Then, since the assumption has been proved false, the conclusion must be true.

استدلال غير مباشر هو الاستدلال الذي يفترض أن الاستنتاج خاطئ ثم يوضح أن هذا الافتراض ينتج عنه تناقض مع الفرضية مثل المسلمة أو النظرية أو اللازمة. وبعد ذلك، بما أنه قد ثبت خطأ الافتراض، يجب أن يكون الاستنتاج صحيحًا.

informal proof A paragraph proof.

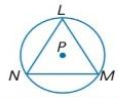
برهان غير شكلي هو برهان الفقرة.

inscribed A polygon is inscribed in a circle if each of its vertices lie on the circle.



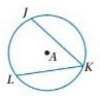
nLMN is inscribed in $\odot P$.

محيطي يكون المضلع محيطيًا داخل دائرة، إذا كانت كل رأس من رؤوسه تقع على الدائرة.



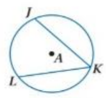
$\triangle LMN$ محصور في $\odot P$

inscribed angle An angle that has a vertex on a circle and sides that contain chords of the circle.



In $\odot A$, $\angle JKL$ is an inscribed angle.

زاوية محيطية الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة ويمثل ضلعاها وترين في الدائرة.



$\angle JKL$ هو زاوية محصورة في $\odot A$

intercepted arc An angle intercepts an arc if and only if each of the following conditions are met. 1. The endpoints of the arc lie on the angle. 2. All points of the arc except the endpoints are in the interior of the circle. 3. Each side of the angle has an endpoint of the arc.

قوس محصور هو زاوية تحصر قوسًا في حالة استيفاء جميع الشروط التالية.
1. وقوع نقطتي نهاية القوس على الزاوية.
2. وقوع جميع نقاط القوس داخل الدائرة فيما عدا نقطتي النهاية. 3. احتواء كل ضلع من أضلاع الزاوية على نقطة نهاية القوس.

inverse cosine The inverse function of cosine, or $\cos^{-1}$. If the cosine of an acute $\angle \boldsymbol{A}$ is equal to $\boldsymbol{x}$, then $\cos^{-1} \boldsymbol{x}$ is equal to the measure of $\angle \boldsymbol{A}$.

معكوس جيب التمام دالة معكوس جيب التمام أو $\cos^{-1}$. بما أن جيب تمام الزاوية الحادة $\angle \boldsymbol{A}$ يساوي $\boldsymbol{x}$، فبالتالي $\cos^{-1} \boldsymbol{x}$ يساوي قياس $\angle \boldsymbol{A}$.

inverse sine The inverse function of sine, or $\sin^{-1}$. If the sine of an acute $\angle \boldsymbol{A}$ is equal to $\boldsymbol{x}$, then $\sin^{-1} \boldsymbol{x}$ is equal to the measure of $\angle \boldsymbol{A}$.

معكوس جيب الزاوية دالة معكوس جيب الزاوية أو $\sin^{-1}$. بما أن جيب الزاوية الحادة $\angle \boldsymbol{A}$ يساوي $\boldsymbol{x}$، فبالتالي $\sin^{-1} \boldsymbol{x}$ يساوي قياس $\angle \boldsymbol{A}$.

inverse tangent The inverse function of tangent, or $\tan^{-1}$. If the tangent of an acute $\angle A$ is equal to x, then $\tan^{-1} x$ is equal to the measure of $\angle A$.

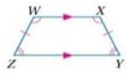
معكوس ظل الزاوية دالة معكوس ظل الزاوية أو $\tan^{-1}$. بما أن ظل الزاوية الحادة $\angle A$ يساوي x، فبالتالي $\tan^{-1} x$ يساوي قياس $\angle A$.

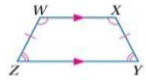
isometric view Corner views of three-dimensional objects on two-dimensional paper.

عرض متساوي القياس هو عرض الأجسام ثلاثية الأبعاد من الزوايا على ورقة ثنائية الأبعاد.

isosceles trapezoid A trapezoid in which the legs are congruent, both pairs of base angles are congruent, and the diagonals are congruent.

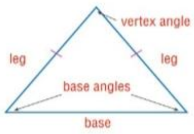
شبه منحرف متساوي الساقين هو شبه منحرف يتطابق فيه الساقان ويتطابق زوجا زوايا القاعدة والأقطار.





isosceles triangle A triangle with at least two sides congruent. The congruent sides are called ***legs***. The angles opposite the legs are ***base angles***. The angle formed by the two legs is the ***vertex angle***. The side opposite the vertex angle is the ***base***.

مثلث متساوي الساقين هو مثلث يتطابق ضلعان على الأقل من أضلاعه. يُطلق على الأضلاع المتطابقة اسم ***الساقين***. يُطلق على الزوايا المقابلة للأضلاع اسم ***زوايا القاعدة***. يُطلق على الزاوية المكونة من التقاء ضلعي المثلث ***الزاوية الرأسية***. يُطلق على الضلع المقابل للزاوية الرأسية اسم ***القاعدة***.



iteration A process of repeating the same procedure over and over again.

تكرار هو عملية تكرار نفس الإجراء مرارًا.

J

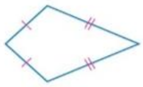
joint frequencies In a two-way frequency table, the frequencies reported in the cells in the interior of the table.

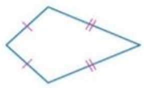
تكرارات متصلة في جدول تردد بمدخلين، هي التكرارات الواردة في الخلايا داخل الجدول.

K

kite A quadrilateral with exactly two distinct pairs of adjacent congruent sides.

شكل محدب رباعي الأضلاع هو شكل رباعي مكون من زوجين مختلفين من الأضلاع المتطابقة المتجاورة.





L

lateral area For prisms, pyramids, cylinders, and cones, the area of the faces of the figure not including the bases.

مساحة جانبية في المناشير والأهرامات والأسطوانات والمخروطات، هي مساحة أوجه الشكل باستثناء القواعد.

lateral edges 1. In a prism, the intersection of two adjacent lateral faces.

حواف جانبية 1. في المنشور، هي تقاطع وجهين جانبيين متجاورين.

lateral faces 1. In a prism, the faces that are not bases.

latitude A measure of distance north or south of the equator.

law of cosines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a, b, and c representing the measures of sides opposite the angles with measures A, B, and C respectively. Then the following equations are true.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

law of large numbers Law that states that as the number of trials of a random process increases, the average value will approach the expected value.

law of sines Let $\triangle ABC$ be any triangle with a, b, and c representing the measures of sides opposite the angles with measures A, B, and C respectively. Then, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

leading coefficient The coefficient of the term with the highest degree in a polynomial.

legs of a trapezoid The nonparallel sides of a trapezoid.

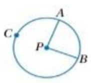
legs of an isosceles triangle The two congruent sides of an isosceles triangle.

longitude A measure of distance east or west of the Prime Meridian.

M

magnitude The length of a vector.

major arc An arc with a measure greater than 180. $\widehat{ACB}$ is a major arc.



marginal frequencies In a two-way frequency table, the accumulated frequencies reported in the Totals row and Totals column.

matrix logic A rectangular array in which learned clues are recorded in order to solve a logic or reasoning problem.

means In $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, the numbers b and c.

median In a triangle, a line segment with endpoints that are a vertex of a triangle and the midpoint of the side opposite the vertex.

meridians Imaginary vertical lines drawn around the Earth through the North and South Poles.

أوجه جانبية 1. في المنشور، هي الأوجه التي لا تمثل القاعدتين.

خط العرض هو قياس المسافة شمال خط الاستواء أو جنوبه.

قانون الــ Cosine بافتراض أن $\triangle ABC$ يمثل أي مثلث به a وb وc تمثل قياسات الأضلاع المقابلة للزوايا A وB وC على التوالي. فبالتالي، المعادلات التالية صحيحة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

قانون الأعداد الكبيرة هو القانون الذي ينص على أنه كلما زادت عدد محاولات تجريب عملية عشوائية، زاد اقتراب قيمة المتوسط من القيمة المتوقعة.

قانون الــ Sines بافتراض أن $\triangle ABC$ يمثل أي مثلث به a وb وc تمثل قياسات الأضلاع المقابلة للزوايا A وB وC على التوالي.

معامل رئيسي هو معامل الحد صاحب أعلى درجة في كثير الحدود.

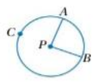
ساقا شبه المنحرف هما الضلعان غير المتوازيين في شبه المنحرف.

ساقا المثلث متساوي الساقين هما الضلعان المتطابقان في المثلث متساوي الساقين.

خط الطول هو قياس المسافة شرق خط الطول الرئيسي أو غربه.

مقدار هو طول المتجه.

قوس أكبر هو قوس قياسه أكبر من 180. $\widehat{ACB}$ هو قوس أكبر.



تكرارات هامشية في جدول تكرار بمدخلين، هي التكرارات المجمعة المنصوص عليها في صف الإجمالي وعموده.

منطق المصفوفة هي مصفوفة مستطيلة الشكل يُسجل فيها مفاتيح الحل التي تم التوصل إليها لحل المسائل المتعلقة بالمنطق أو الاستنتاج.

وسطا التناسب في $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، العددان b وc.

وسيط في المثلث، هو القطعة المستقيمة التي لها نقطتا نهاية إحداهما رأس المثلث والأخرى نقطة منتصف الضلع المقابل للرأس.

خطوط الطول هي خطوط وهمية رأسية مرسومة حول الأرض عبر القطبين الشمالي والجنوبي.

Glossary/القاموس

midsegment of trapezoid A segment that connects the midpoints of the legs of a trapezoid.

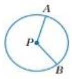
منصف ساقي شبه المنحرف هو القطعة التي تصل نقطتي نهاية ساقي شبه المنحرف.

midsegment of triangle A segment with endpoints that are the midpoints of two sides of a triangle.

منصف ساقي المثلث هو القطعة التي لها نقطتا نهاية تمثلان نقطتي منتصف لضلعي المثلث.

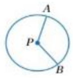
minor arc An arc with a measure less than 180.

$\widehat{AB}$ is a minor arc.



قوس أصغر هو قوس قياسه أقل من 180.

$\widehat{AB}$ هو قوس أصغر.



multi-stage experiments Experiments with more than two stages.

تجارب عديدة المراحل هي تجارب تتضمن أكثر من مرحلتين.

mutually exclusive Two events that have no outcomes in common.

أحداث منفصلة هي حدثان ليس لهما نتائج مشتركة.

N

nth root If $a^n = b$ for a positive integer n, then a is an nth root of b.

الجذر n بما أن $a^n = b$ لعدد صحيح موجب n، فبالتالي a هو الجذر n لـ b.

net A two-dimensional figure that when folded forms the surfaces of a three-dimensional object.

شبكة هي شكل ثنائي الأبعاد يشكل عند طيه أسطحًا لجسم ثلاثي الأبعاد.

network A graph of interconnected vertices.

شبكة مترابطة هي التمثيل البياني لرؤوس مترابطة.

node A collection of vertices.

عقدة هي مجموعة من الرؤوس.

non-Euclidean geometry The study of geometrical systems that are not in accordance with the Parallel Postulate of Euclidean geometry.

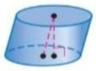
هندسة غير إقليدية هي دراسة النظم الهندسية التي لا تتوافق مع مسلمة المتوازيات في الهندسة الإقليدية.

O

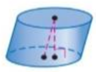
oblique cone A cone that is not a right cone.

مخروط مائل هو مخروط لا يكون قائمًا.

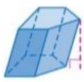
oblique cylinder A cylinder that is not a right cylinder.



أسطوانة مائلة هي أسطوانة لا تكون قائمة.



oblique prism A prism in which the lateral edges are not perpendicular to the bases.



منشور مائل هو منشور لا تكون حوافه الجانبية عمودية على قاعدتيه.

oblique solid A solid with base(s) that are not perpendicular to the edges connecting the two bases
or vertex.

مجسم مائل هو مجسم لا تكون قاعدته (قواعده) عمودية على الحواف التي تصل القاعدتين أو الرأس.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

متجهات معاكسة هي متجهات لها نفس المقدار لكنها متضادة الاتجاهات.

ordered triple Three numbers given in a specific order used to locate points in space.

ثلاثي منتظم هو ثلاثة أرقام في ترتيب محدد تُستخدم لوضع النقاط في الفراغ.

orthocenter The point of concurrency of the altitudes of a triangle.

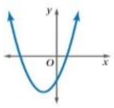
نقطة ملتقى الارتفاعات هي نقطة التقاء ارتفاعات المثلث.

orthographic drawing The two-dimensional top view, left view, front view, and right view of a three-dimensional object.

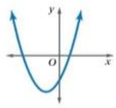
رسم متعامد هو عرض ثنائي الأبعاد من الأعلى ومن اليسار ومن الأمام ومن اليمين لجسم ثلاثي الأبعاد.

P

parabola 1. The graph of a quadratic function. parabola 2. The graph of a quadratic function. The set of all points in a plane that are the same distance from a given point, called the focus, and a given line, called the directrix.



قطع مكافئ 1. هو التمثيل البياني للدالة التربيعية. قطع مكافئ 2. هو التمثيل البياني للدالة التربيعية. مجموع كل النقاط في مستو ما، تقع على مسافة واحدة من نقطة معينة، تُسمى البؤرة، وخط معين، يُسمى الدليل.



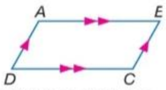
paragraph proof An informal proof written in the form of a paragraph that explains why a conjecture for a given situation is true.

برهان الفقرة هو برهان غير شكلي مكتوب بصيغة فقرة توضح سبب صحة فرضية لموقف معين.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction.

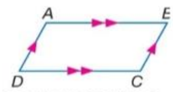
متجهات متوازية هي متجهات لها نفس الاتجاهات أو متضادة الاتجاهات.

parallelogram A quadrilateral with parallel opposite sides. Any side of a parallelogram may be called a ***base***.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي الأضلاع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. يمكن تسمية أي ضلع من متوازي الأضلاع *قاعدة*.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

parallelogram method A method used to find the resultant of two vectors in which you place the vectors at the same initial point, complete a parallelogram, and draw the diagonal.

طريقة متوازي الأضلاع هي طريقة تُستخدم لإيجاد محصلة متجهين تضع فيها المتجهين عند نفس نقطة البدء، وتكمل متوازي الأضلاع وترسم القطر.

parallels Imaginary horizontal lines parallel to the equator.

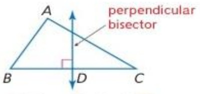
متوازيات هي خطوط أفقية تخيلية موازية لخط الاستواء.

perfect square trinomial A trinomial that is the square of a binomial.
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ or
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

مربع كامل ثلاثي الحدود هو ثلاثي حدود يُعد مربعا لثنائي الحدين.
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ أو
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

permutation An arrangement of objects in which order is important.

perpendicular bisector In a triangle, a line, segment, or ray that passes through the midpoint of a side and is perpendicular to that side.



D is the midpoint of $\overline{BC}$.

pi (π) An irrational number represented by the ratio of the circumference of a circle to the diameter of the circle.

piecewise-defined function A function that is written using two or more expressions.

piecewise-linear function A function written using two or more linear expressions.

plane Euclidean geometry Geometry based on Euclid's axioms dealing with a system of points, lines, and planes.

point of concurrency The point of intersection of concurrent lines.

point of tangency For a line that intersects a circle in only one point, the point at which they intersect.

poles The endpoints of the diameter of a great circle.

polynomial A monomial or sum of monomials.

postulate A statement that describes a fundamental relationship between the basic terms of geometry. Postulates are accepted as true without proof.

prime polynomial A polynomial that cannot be written as a product of two polynomials with integral coefficients.

probability model A mathematical model used to match a random phenomenon.

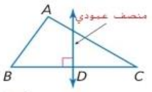
probability tree An organized table of line segments (branches) that shows the probability of each outcome.

proof A logical argument in which each statement you make is supported by a statement that is accepted as true.

proof by contradiction An indirect proof in which one assumes that the statement to be proved is false. One then uses logical reasoning to deduce a statement that contradicts a postulate, theorem, or one of the assumptions. Once a contradiction is obtained, one concludes that the statement assumed false must in fact be true.

تبديل هو ترتيب الأجسام التي يكون الترتيب فيها مهمًا.

منصف عمودي في المثلث، هو خط مستقيم أو قطعة أو شعاع يمر بنقطة منتصف الضلع ويكون عموديًا على ذلك الضلع.



D هي نقطة منتصف الضلع $\overline{BC}$

باي (π) هو عدد غير نسبي تمثله نسبة محيط الدائرة إلى قطر الدائرة.

دالة متعددة التعريف هي دالة تُكتب باستخدام تعبيرين أو أكثر.

دالة خطية متعددة التعريف هي دالة تُكتب باستخدام تعبيرين خطيين أو أكثر.

هندسة إقليدية مستوية هي هندسة مبنية على مسلّمات إقليدس التي تتناول بالدراسة أي نظام من النقاط والخطوط والمستويات.

نقطة التقاء هي نقطة تقاطع الخطوط المتلاقية.

نقطة تماس هي نقطة تقاطع الخط المستقيم مع الدائرة.

قطبان هما نقطتي نهاية قطر الدائرة الكبيرة.

كثير الحدود هو أحد أحادي الحد أو حاصل جمع أحادي الحد.

مسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية بين الحدود الأساسية في الهندسة. تعتبر المسلّمات صحيحة بدون برهان.

كثير الحدود الأولي هو كثير حدود لا يمكن كتابتها كحاصل ضرب اثنين من كثيري الحدود ذي المعاملات الصحيحة.

نموذج الاحتمال هو نموذج حسابي يستخدم في مطابقة ظاهرة عشوائية.

شجرة الاحتمال هي جدول منظم من قطع مستقيمة (الأغصان) توضح احتمالية كل نتيجة.

برهان هو حجة منطقية يتم دعم كل عبارة فيها بعبارة مسلّم بأنها صحيحة.

برهان بالتناقض هو برهان غير مباشر يُفترض فيه أن العبارة الجاري إثباتها عبارة خاطئة. ثم يُستخدم التفكير المنطقي لاستنتاج عبارة تتعارض مع مسلمة أو نظرية أو إحدى الفرضيات. وبمجرد إثبات خلاف ذلك، نستنتج أن العبارة التي تم افتراض أنها خاطئة هي عبارة صحيحة.

proportion An equation of the form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ that states that two ratios are equal.

تناسب هو معادلة بصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تنص على وجود نسبتين متساويتين.

pure imaginary number (pp. 178, 335) The square roots of negative real numbers. For any positive real number b,

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}, \text{ or } bi.$$

عدد تخيلي بحت هو جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. بالنسبة إلى أي عدد حقيقي موجب b.

$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$، أو bi.

pythagorean triple A group of three whole numbers that satisfies the equation $a^2 + b^2 = c^2$, where c is the greatest number.

ثلاثية فيثاغورس هي مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة $a^2 + b^2 = c^2$، حيث يكون c هو العدد الأكبر.

Q

quadratic equation An equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$.

معادلة تربيعية هي معادلة بصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$.

quadratic expression An expression in one variable with a degree of 2 written in the form $ax^2 + bx + c$.

تعبير تربيعي هو تعبير في متغير واحد من الدرجة الثانية يُكتب بالصيغة $ax^2 + bx + c$.

quadratic Formula (pp. 133, 264) The solutions of a quadratic equation in the form $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, are given by the formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

صيغة تربيعية هي حل المعادلات التربيعية بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$، تُقدم من خلال الصيغة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quadratic function An equation of the form $y = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

دالة تربيعية هي معادلة بالصيغة

$y = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$.

quadratic inequality An inequality of the form $y > ax^2 + bx + c$, $y \geq ax^2 + bx + c$, $y < ax^2 + bx + c$, or $y \leq ax^2 + bx + c$.

متباينة تربيعية هي متباينة بالصيغة $y > ax^2 + bx + c$, $y \geq ax^2 + bx + c$،

$y < ax^2 + bx + c$ أو $y \leq ax^2 + bx + c$.

R

radical equations Equations that contain radicals with variables in the radicand.

معادلات جذرية هي معادلات تحتوي على جذور بمتغيرات في المجذور.

radical expression An expression that contains a square root.

تعبير جذري هو تعبير يحتوي على جذر تربيعي.

radius 1. In a circle, any segment with endpoints that are the center of the circle and a point on the circle. 2. In a sphere, any segment with endpoints that are the center and a point on the sphere.

نصف القطر 1. في الدائرة، هو أي قطعة دائرية لها نقطتا نهاية إحداهما مركز الدائرة والأخرى نقطة على الدائرة. 2. في الكرة، هو أي قطعة دائرية لها نقطتا نهاية إحداهما مركز الكرة والأخرى نقطة على الكرة.

random variable A variable that can assume a set of values, each with fixed probabilities.

متغير عشوائي هو متغير يمكنه افتراض مجموعة من القيم، وتكون كل قيمة ذات احتمالات ثابتة.

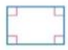
ratio A comparison of two quantities using division.

نسبة هي مقارنة كميتين باستخدام القسمة.

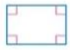
rationalizing the denominator A method used to eliminate radicals from the denominator of a fraction.

إنطاق المقام هي طريقة تُستخدم لحذف الجذور من مقام الكسر.

rectangle A quadrilateral with four right angles.



مستطيل هو شكل رباعي مكون من أربع زوايا قائمة.



reduction An image that is smaller than the original figure.

اختزال هو صورة أصغر من الشكل الأصلي.

reflection A transformation where a figure, line, or curve, is flipped across a line.

انعكاس هو تحويل يتم فيه قلب الشكل أو الخط أو المنحنى حول خط مستقيم.

regular pyramid A pyramid with a base that is a regular polygon.

هرم منتظم هو هرم تكون قاعدته على شكل مضلع منتظم.

relative frequency In a frequency table, the ratio of the number of observations in a category to the total number of observations.

تكرار نسبيّ في جدول التكرار، هو نسبة عدد الملاحظات في فئة ما إلى العدد الكلي للملاحظات.

remote interior angles The angles of a triangle that are not adjacent to a given exterior angle.

زوايا داخلية غير متجاورة هي زوايا المثلث التي تكون غير متجاورة لزاوية خارجية مقدمة.

resultant The sum of two vectors.

محصلة هي حاصل جمع متجهين.

rhombus A quadrilateral with all four sides congruent.

معين هو شكل رباعي يتكون من أربعة أضلاع متطابقة.

right cone A cone with an axis that is also an altitude.

مخروط قائم هو مخروط له محور يمثل الارتفاع أيضًا.

right cylinder A cylinder with an axis that is also an altitude.

أسطوانة قائمة هي أسطوانة لها محور يمثل الارتفاع أيضًا.

right prism A prism with lateral edges that are also altitudes.

منشور قائم هو منشور له حواف جانبية هي ارتفاعات أيضًا.

right solid A solid with base(s) that are perpendicular to the edges connecting them or connecting the base and the vertex of the solid.

مجسم قائم هو مجسم له قاعدة (قواعد) عمودية على الحواف المتصلة بها أو التي تصل بين القاعدة ورأس المجسم.

S

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

فراغ العينة هو مجموعة النتائج المحتملة لأي تجربة.

scalar A constant multiplied by a vector.

كمية قياسية هي ثابت مضروب في متجه.

scalar multiplication Multiplication of a vector by a scalar.

ضرب قياسي هو ضرب متجه في كمية قياسية.

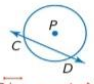
scale factor The ratio of the lengths of two corresponding sides of two similar polygons or two similar solids.

عامل المقياس هو نسبة طولي ضلعين متناظرين لمضلعين أو مجسمين متشابهين.

scale factor of dilation The ratio of a length on an image to a corresponding length on the preimage.

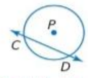
معامل مقياس تغيير الأبعاد هو نسبة الطول في صورة إلى الطول المتناظر في الصورة الأصلية.

secant Any line that intersects a circle in exactly two points.



$\overleftrightarrow{CD}$ is a secant of $\odot P$.

قاطع هو أي خط يقطع دائرة في نقطتين بالضبط.

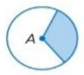


$\overleftrightarrow{CD}$ هو قاطع في الدائرة $\odot P$

secant segment A segment of a secant line that has exactly one endpoint on the circle.

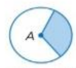
قطعة دائرية قاطعة هي قطعة من خط قاطع يكون له نقطة نهاية واحدة على الدائرة.

sector of a circle A region of a circle bounded by a central angle and its intercepted arc.



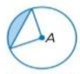
The shaded region is a sector of $\odot A$.

قطاع دائرة هي منطقة من الدائرة محددة بين زاوية مركزية وقوسها المحصور.



المنطقة المظللة هي قطاع من $\odot A$

segment of a circle The region of a circle bounded by an arc and a chord.



The shaded region is a segment of $\odot A$.

قطعة دائرة هي منطقة من الدائرة محددة بقوس ووتر.

المنطقة المظللة هي قطعة من $\odot A$

self-similar If any parts of a fractal image are replicas of the entire image, the image is self-similar.

تشابه ذاتي إذا كانت أي أجزاء من صورة كسورية تمثل نسخًا مطابقة للصورة بأكملها، تكون الصورة متشابهة ذاتيًا.

semicircle An arc that measures 180.

نصف دائرة هي قوس قياسه 180.

sierpinski triangle A self-similar fractal described by Waclaw Sierpinski. The figure was named for him.

مثلث سيربنسكي هو كسيري متشابه ذاتيًا وصفه واكلاو سيربنسكي. سُمّيَ الشكل باسمه.

similar solids Solids that have exactly the same shape, but not necessarily the same size.

مجسمات متشابهة هي مجسمات لها نفس الشكل بالضبط، لكن لا يتحتم أن تكون بالحجم ذاته.

similarity ratio The scale factor between two similar polygons

نسبة التشابه هي معامل المقياس بين مضلعين مشابهين

Glossary/القاموس

similarity transformation When a figure and its transformation image are similar.

تحويل تشابهي عندما يتشابه الشكل مع صورة تحويله.

simulation A probability model used to recreate a situation again and again so the likelihood of various outcomes can be estimated.

محاكاة هو نموذج احتمال مستخدم لإيجاد حالة مرارًا وتكرارًا بحيث يمكن تقدير احتمالية النتائج المختلفة.

sine For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg opposite the acute angle to the measure of the hypotenuse.

الـ Sine بالنسبة إلى أي زاوية حادة بمثلث قائم الزاوية، هو نسبة قياس ضلع القائمة المقابل للزاوية الحادة إلى قياس الوتر.

slant height The height of the lateral side of a pyramid or cone.

ارتفاع جانبي هو ارتفاع الضلع الجانبي لهرم أو مخروط.

solving a triangle Finding the measures of all of the angles and sides of a triangle.

حل المثلث هو إيجاد مقاييس جميع زوايا المثلث وأضلاعه.

spherical geometry The branch of geometry that deals with a system of points, great circles (lines), and spheres (planes).

هندسة فراغية هي فرع من فروع الهندسة يتعامل مع نظام من النقاط والدوائر الكبرى (الخطوط) والكرات (المستويات).

square A quadrilateral with four right angles and four congruent sides.

مربع هو شكل رباعي مكون من أربع زوايا قائمة وأربع أضلاع متطابقة.

square root property For any real number n, if $x^2 = n$, then $x = \pm\sqrt{n}$.

خاصية الجذر التربيعي لأي عدد حقيقي n، if $x^2 = n$، وبالتالي $x = \pm\sqrt{n}$.

standard form of a polynomial A polynomial that is written with the terms in order from greatest degree to least degree.

صيغة قياسية لكثير الحدود هي كتابة كثير الحدود بمصطلحات مرتبة من أكبر درجة إلى أصغر درجة.

standard position When the initial point of a vector is at the origin.

موقع قياسي عندما تكون نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل.

step function A function with a graph that is a series of horizontal line segments.

دالة درجية هي دالة تحتوي على رسم بياني يمثل سلسلة من قطع مستقيمة أفقية.

T

tangent 1. For an acute angle of a right triangle, the ratio of the measure of the leg opposite the acute angle to the measure of the leg adjacent to the acute angle. 2. A line in the plane of a circle that intersects the circle in exactly one point. The point of intersection is called the ***point of tangency***. 3. A line that intersects a sphere in exactly one point.

تماس 1. بالنسبة إلى أي زاوية حادة بمثلث قائم الزاوية، هو نسبة قياس ضلع القائمة المقابلة للزاوية الحادة إلى قياس ضلع القائمة المجاورة إلى الزاوية الحادة. 2. هو خط في مستوى دائرة تتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط. ويُطلق على نقطة التقاطع ***نقطة التماس***. 3. هو خط يتقاطع مع كرة في نقطة واحدة بالضبط.

tangent segment A segment of a tangent with one endpoint on a circle that is both the exterior and whole segment.

قطعة تماس هي قطعة من التماس بها نقطة نهاية واحدة على دائرة تمثل كل من القطعة الخارجية والكلية.

theorem A statement or conjecture that can be proven true by undefined terms, definitions, and postulates.

نظرية هي عبارة أو فرضية يمكن إثبات صحتها عن طريق مصطلحات وتعريفات ومسلمات غير محددة.

topographic map A representation of a three-dimensional surface on a flat piece of paper.

خريطة طبوغرافية هي تمثيل لسطح ثلاثي الأبعاد على قطعة ورقية مستوية.

traceable network A network in which all of the nodes are connected and each edge is used once when the network is used.

شبكة مرتبطة قابلة للشف هي شبكة تكون جميع العقد فيها مرتبطة وتستخدم كل حافة بمجرد استخدام الشبكة.

transformation 1. A movement of a geometric figure. 2. In a plane, a mapping for which each point has exactly one image point and each image point has exactly one preimage point.

تحويل 1. هو حركة الشكل الهندسي. 2. يشير التحويل في أحد المستويات إلى التخطيط الذي تحتوي فيه كل نقطة على نقطة صورة واحدة بالضبط. وتحتوي كل نقطة صورة على نقطة صورة أصلية واحدة بالضبط.

translation A transformation where a figure is slid from one position to another without being turned.

انسحاب هو تحويل ينزلق فيه شكل ما من موقع إلى آخر دون دورانه.

trigonometry The study of the properties of triangles and trigonometric functions and their applications.

حساب المثلثات هو دراسة خصائص المثلثات والدوال المثلثية وتطبيقاتها.

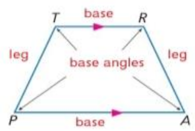
two-column proof A formal proof that contains statements and reasons organized in two columns. Each step is called a ***statement***, and the properties that justify each step are called ***reasons***.

برهان ذو عمودين هو برهان شكلي يحتوي على عبارات ومبررات مرتبة في عمودين. يُطلق على كل خطوة "*عبارة*" ويُطلق على الخصائص التي تبرر كل خطوة "*مبررات*".

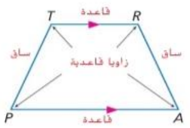
two-stage experiment An experiment with two stages or events.

تجربة ثنائية المرحلة هي تجربة مكونة من مرحلتين أو حدثين.

trapezoid A quadrilateral with exactly one pair of parallel sides. The parallel sides of a trapezoid are called ***bases***. The nonparallel sides are called ***legs***. The pairs of angles with their vertices at the endpoints of the same base are called ***base angles***.



شبه منحرف هو شكل رباعي مكون من زوج واحد من الأضلاع الموازية تمامًا. يُطلق على الأضلاع الموازية لشبه المنحرف ***القواعد***. ويُطلق على الأضلاع غير الموازية ***الساقان***. ويُطلق على أزواج الزوايا مع رؤوسها عند نقاط نهاية نفس القاعدة ***زوايا القاعدة***.



tree diagram An organized table of line segments (branches) which shows possible experiment outcomes.

مخطط الشجرة هو جدول منظم يتكون من القطع (الفروع) المستقيمة التي تعرض النتائج المحتملة للتجربة.

triangle method A method used to find the resultant of two vectors in which the second vector is connected to the terminal point of the first and the resultant is drawn from the initial point of the first vector to the terminal point of the second vector.

طريقة المثلث هي طريقة تستخدم لإيجاد محصلة متجهين يكون المتجه الثاني فيهما متصل بنقطة نهاية المتجه الأول، ويتم رسم قيمة المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني.

trigonometric ratio A ratio of the lengths of sides of a right triangle.

نسبة مثلثية هي نسبة طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية.

trinomials The sum of three monomials.

ثلاثيات الحدود هي حاصل جمع ثلاثة من أحادي الحد.

two-way frequency table A table used to show the frequencies or relative frequencies of data from a survey or experiment classified according to two variables, with the rows indicating one variable and the columns indicating the other.

جدول تكراري بمدخلين هو جدول يُستخدم لعرض التكرارات أو التكرارات النسبية للبيانات من دراسة مسحية أو تجربة مصنفة وفقًا لمتغيرين، وتشير الصفوف إلى أحد المتغيرين بينما تشير الأعمدة إلى المتغير الآخر.

V

vector A directed segment representing a quantity that has both magnitude, or length, and direction.

متجه هو قطعة موجهة تمثل كمية لها مقدار أو طول واتجاه.

vertex The maximum or minimum point of a parabola.

رأس هو أقصى نقطة للقطع المكافئ أو أدنى نقطة له.

vertex angle of an isosceles triangle See ***isosceles triangle***.

زاوية رأس مثلث متساوي الساقين انظر ***مثلث متساوي الساقين***.

vertex form A quadratic function in the form $y = a(x - h)^2 + k$, where (h, k) is the vertex of the parabola and $x = h$ is its axis of symmetry.

صيغة الرأس هي دالة تربيعية بصيغة $y = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) هي رأس القطع المكافئ و$x = h$ هي محور تماثله.

vertex-edge graphs2 A collection of nodes connected by edges.

رسوم بيانية لحواف الرأس 2 مجموعة من العقد مرتبطة بالحواف.

W

weight The value assigned to an edge in a vertex-edge graph.

وزن هو القيمة المحددة لحافة ما في الرسم البياني لحافة الرأس.

weight of a path The sum of the weights of the edges along a path.

وزن المسار هو إجمالي أوزان الحواف على المسار.

weighted vertex-edge graphs A collection of nodes connected by edges in which each edge has an assigned value.

رسوم بيانية مرجحة لحواف الرأس مجموعة من العقد مرتبطة بالحواف، تمتلك كل حافة فيها قيمة محددة.

الرموز

$\neq$	لا يساوي	AB	قياس $\overline{AB}$
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\angle$	زاوية
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$\|a\|$	القيمة المطلقة لـ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتّب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f لـ x؛ قيمة f لـ x	$P(n, r)$	تباديل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB	$C(n, r)$	توافيق n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة

الخواص الجبرية والمفاهيم الأساسية

المحايد	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، فإنه يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث a و $b \neq 0$، يوجد فقط عدد واحد $\frac{a}{b}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مجموع مربعين	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
فرق بين مربعين	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على* $<$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على مستوى إحداثي	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف على مستوى إحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
محيط المستطيل	$P = 2\ell + 2w$ أو $P = 2(\ell + w)$
محيط الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة			
مستطيل	$A = \ell w$	شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$		
مساحة السطح			
مكعب	$S = 6s^2$	هرم منتظم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$		
الحجم			
مكعب	$V = s^3$	هرم منتظم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (.in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على خط الأعداد:	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة على مستوى إحداثي:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
المسافة في الفضاء:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
طول قوس المسافة:	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد:	$M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف على مستوى إحداثي:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نقطة المنتصف في الفضاء:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المُحيط ومحيط الدائرة

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مربع	$A = s^2$	مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
مستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$	مُضلع منتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	قطاع من دائرة	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
معين	$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$ أو $A = bh$		

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	كرة	$S = 4\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور مستطيل	$V = \ell wh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
منشور	$V = Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

صيغة الميل والمقطع لمستقيم	$y = mx + b$	دائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
صيغة النقطة والميل لمستقيم	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$		

الرموز

$\neq$	لا يساوي	$\parallel$	يوازي	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\nparallel$	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
$\cong$	يطابق	$\perp$	متعامد على	$\rightarrow$	موقع على
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
$\angle, \measuredangle$	زاوية، زوايا	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	$\widehat{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$^{\circ}$	درجة	$\square$	متوازي أضلاع	$\widehat{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	n-gon	مضلع عدد أضلاعه n	$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$\overrightarrow{AB}$	شعاع تحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتّب	!	مضروب
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر	$_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$\sim p$	نفي p، ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	$_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p و q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q	$\vec{a}$	متجه a		
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا كان q	$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m) 1 متر = 100 سنتيمتر (cm) 1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd) 1 ميل = 5280 قدمًا (ft) 1 ياردة = 3 أقدام 1 ياردة = 36 بوصة 1 قدم = 12 بوصة (in.)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL) 1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt) 1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz) 1 ربع = 2 باينت (pt) 1 باينت = 2 كوب (c) 1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g) 1 جرام = 1000 مللي جرام (mg) 1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	1 طن (T) = 2000 رطل (lb) 1 رطل = 16 أونصة (oz)

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	فرق بين مربعين	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مجموع مربعين	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$y = a(x - h)^2 + k$ أو $x = a(y - k)^2 + h$	قطع ناقص	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	قطع زائد	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني، لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني، لمتتالية هندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

حساب المثلثات

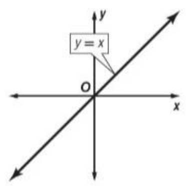
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
النسب المثلثية	$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
	$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

الرموز

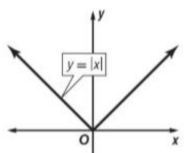
$f(x) = \{$	دالة متعددة التعريف	$\sum$	سيغما، المجموع
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة	$\bar{x}$	متوسط عينة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a	μ	متوسط مجتمع إحصائي
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x و y	s	الانحراف المعياري لعينة
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB	σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
i	الوحدة التخيلية	$P(B \mid A)$	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f و g	nPr	تباديل n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$	nCr	توافيق عدد n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b	$\text{Sin}^{-1}\, x$	Arcsin x
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b	$\text{Cos}^{-1}\, x$	Arccos x
$\log x$	اللوغاريتم العادي x	$\text{Tan}^{-1}\, x$	Arctan x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x		

الدوال الأصلية

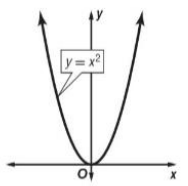
الدوال الخطية



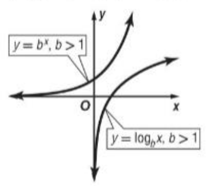
دوال القيمة المطلقة



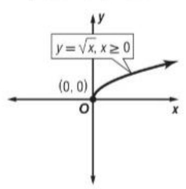
الدوال التربيعية



الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية