

1 التركيب

قبل الدرس 4-1 أوجد القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

المثلثية الأساسية واستخدامها لإيجاد القيم المثلثية.

استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية
لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة
وأعد كتابتها.

المتطابقات المثلثية.

استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد حل للمعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما المعنى المقصود عندما يُطلق على المعادلة اسم متطابقة؟ الطرفان يساوي كل منهما الآخر لكل قيم المتغير.

● أوجدت القيم المثلثية ●
1 تحديد ال
الأساسية
لايجاد ال
باستخدام دائرة
المحددة.

استخدام المتطابقات
المثلثية الأساسية لتحويل
التعابير المثلثية لأبسط
صورة وإعادة كتابتها.

متطابقة (identity)

متطابقة مثلثية
(trigonometric identity)
دالة متساوية القيمة
(cofunction)

المتغير المعروف في كلا طرفي المعادلة. فكّر في المعادلات أدناه.

هذه متطابقة لأن كلا طرفي المعادلة محدد ومساو لكل x حيث يكون 3

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

هذه ليست متطابقة. كلا طرفي هذه المعادلة محدد ومساوٍ لقيم معينة، كما هو الحال حين يكون $x = 0$ ، ولكنها ليسا مساويين لقيم أخرى يتم تحديد كلا الطرفين من خلالها، كما هو الحال حين يكون $x = \frac{\pi}{2}$.

المتطابقات المثلثية هي المتطابقات التي تضم دوال مثلثية. تعرفُ بالفعل القليل من المتطابقات المثلثية الأساسية. والمتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة أدناه تتبع تمامًا تعريفات الدوال المثلثية الست التي تم شرحها في 4-1.

المفهوم الأساسي

متطابقات المطلوب		المتطابقات النسبية	
$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لإيجاد القيم المثلثية. وكما هو الحال في أي كسر، لا يمكن أن يساوي المقام صفراً.

مثال 1 استخدام متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

a. إذا كانت $\csc \theta = \frac{7}{4}$ ، فأوجد $\sin \theta$.

b. إذا كانت $\cot x = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ وكانت $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فأوجد $\cos x$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

متطابقة نسبية

$$\frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cot x = \frac{2}{5\sqrt{5}}; \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \cos x$$

اضرب كل طرف في $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{2}{15} = \cos \lambda$$

بِسْمِ

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

متطابقة مقلوب

$$= \frac{1}{\frac{7}{4}}$$

$$\csc \theta = \frac{7}{4}$$

$$= \frac{4}{7}$$

اقسم

تمرین موجه

1A. إذا كانت $\sec x = \frac{5}{3}$ ، فأوجد $\cos x$. 1B. إذا كانت $\csc \beta = \frac{25}{7}$ وكانت $\sec \beta = \frac{25}{24}$ ، فأوجد $\tan \beta$.

■ لماذا قد تُستخدم الدوال المثلثية في تمثيل مسار طائرة؟ **الإجابة النموذجية:** قد تمثل الدالة المثلثية المنحنى الذي تتبعه رحلة الطائرة.

1 المتطابقات المثلثية الأساسية

المثال 1 يوضح كيفية استخدام المتطابقات العكسية وناتج القسمة لإيجاد القيم المثلثية. **المثال 2** يوضح كيفية استخدام متطابقات فيثاغورس لإيجاد القيم المثلثية. **المثال 3** يوضح كيفية استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الفردية أو الزوجية لإيجاد القيم المثلثية.

التقويم التكويني

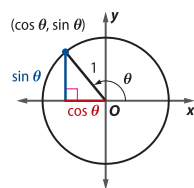
استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للتأكد من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. **a.** إذا كانت $\cos \theta = \frac{3}{4}$ ، أوجد $\sec \theta$.
- b.** إذا كانت $\sec x = \frac{5}{4}$ ، أوجد $\tan x$.
- c.** إذا كانت $\cot \theta = 2$ ، أوجد $\sin \theta$.
- d.** إذا كانت $\cos \theta < 0$ ، أوجد $\sin \theta$.

التركيز على محتوى الرياضيات

متطابقات فيثاغورس توجد ثلاث متطابقات فيثاغورس. إلا أنه يكفي فقط تذكر $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ لإيجاد المتطابقتين الأخرين عن طريق قسمة كل حدود المتطابقة إما على $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$.



يمكن تحديد المتطابقات المثلثية على دائرة الوحدة كما هو موضح. لاحظ أنه بالنسبة لأي زاوية θ ، فإن Sine الزاوية و Cosine هما الطولان الموجهان للضلعين الجانبيين لمثلث قائم الزاوية له الوتر 1. يمكننا تطبيق نظرية فيثاغورس على هذا المثلث قائم الزاوية لصياغة متطابقة مثلثية أساسية أخرى.

$$\begin{aligned} \text{نظرية فيثاغورس} \quad (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 &= 1^2 \\ \text{بسط} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

في حين أن إشارات هذه الأطوال الموجهة قد تتغير بناءً على الربع الذي يستقر عليه المثلث، فلاحظ أنه بسبب تربيع هذه الأطوال فإن المعادلة أعلاه تبقى صحيحة لأي قيمة لـ θ . هذه المعادلة هي إحدى **متطابقات فيثاغورس** الثلاث.

المفهوم الأساسي: متطابقات فيثاغورس

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

سُتبت صحة متطابقتي فيثاغورس المتبقيتين في التمرينين 69 و 70.

لاحظ ترميز الاختصار المستخدم لتمثيل أسس الدوال المثلثية: $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$ و $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$. وهكذا، $\tan^2 \theta = (\tan \theta)^2$.

مثال 2 استخدام متطابقات فيثاغورس

إذا كانت $\tan \theta = -8$ وكانت $\sin \theta > 0$ ، فأوجد $\cos \theta$ و $\sin \theta$.

استخدم متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\tan \theta$.

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta && \text{متطابقة فيثاغورس} \\ (-8)^2 + 1 &= \sec^2 \theta && \tan \theta = -8 \\ 65 &= \sec^2 \theta && \text{بسط} \\ \pm \sqrt{65} &= \sec \theta && \text{خذ الجذر التربيعي لكل طرف.} \\ \pm \sqrt{65} &= \frac{1}{\cos \theta} && \text{متطابقة عكسية} \\ \pm \frac{\sqrt{65}}{65} &= \cos \theta && \text{حل لإيجاد } \cos \theta \end{aligned}$$

بما أن $\theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ سالبة و $\sin \theta$ موجب، إذا ينبغي أن تكون $\cos \theta$ سالبة. إذا، فستكون $\cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$. وبذلك حينها استخدام متطابقة ناتج القسمة هذه لإيجاد $\sin \theta$.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} && \text{متطابقة نسبية} \\ -8 &= \frac{\sin \theta}{-\frac{\sqrt{65}}{65}} && \tan \theta = -8 \text{ و } \cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65} \\ \frac{8\sqrt{65}}{65} &= \sin \theta && \text{اضرب كل طرف في } -\frac{\sqrt{65}}{65}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 && \text{متطابقة فيثاغورس} \\ \left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2 &\stackrel{?}{=} 1 && \cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65} \text{ و } \sin \theta = \frac{8\sqrt{65}}{65} \end{aligned}$$

$$\frac{64}{65} + \frac{1}{65} = 1 \quad \checkmark \text{ بسط}$$

$$2A. \csc \theta = \sqrt{10}, \tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$$2B. \cot \theta = \sqrt{35}, \sec \theta = \frac{6}{\sqrt{35}} \text{ or } \frac{6\sqrt{35}}{35}$$

تمرين موجه

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة.

$$2A. \csc \theta \text{ و } \tan \theta = -3 \text{ و } \cot \theta = -3 \text{ و } \cos \theta < 0 \text{ و } \sin x = \frac{1}{6} \text{ و } \sec x \text{ و } \cot x \text{ و } \cos x > 0 \text{ و } 2B.$$

نصيحة دراسية

التحقق من الإجابات من المبدأ تأكد إجاباتك باستخدام متطابقة مختلفة عن المتطابقات التي استخدمتها لحل المسألة، كما في المثال 2، بحيث لا تقع في نفس الخطأ مرتين.

نصيحة للمعلمين الجدد

إشارات الدوال المثلثية إذا واجه الطلاب مشكلة في تذكر إشارات الدوال المثلثية في مختلف أرباع دائرة الوحدة، فاستخدم الحروف "ASTC" لمساعدتهم على التذكر. عند البدء في الربع الأول والتحرك عكس عقارب الساعة، تكون كل الدوال موجبة في الربع الأول، ولا يكون سوى جيب الزاوية وقاطع تمام المعكوس الضربي الخاص به موجبين في الربع الثاني، ولا يكون سوى المماس وظل تمام المعكوس الضربي الخاص به موجبين

مثال إضافي

3 إذا كانت $\cos x = -0.75$ ، فأوجد $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. **0.75**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

صفحة الويب أنشئ صفحة ويب خاصة بالصف الدراسي تضم كل المتطابقات المثلثية الموجودة في هذه الوحدة. اطلب من الطلاب الاشتراك في خدمة تلقي مخططات الأخبار "RSS feed" حتى يتمكنوا من متابعة تحديثك للصفحة بكل سهولة.

2 تحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها

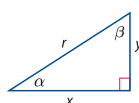
الأمثلة من 4 إلى 7 توضح كيفية استخدام مختلف المتطابقات المثلثية والأساليب الجبرية لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.

نصيحة للمعلمين الجدد

استخدام الحاسبات البيانية معظم الحاسبات البيانية ووسائل التمثيل البياني بها دوال Sine و Cosine و Tan فقط، ولذا فاستخدم المعكوسات الضربية لهذه الدوال لإيجاد قيم دوال Csc و Sec و Cot.

مجموعة أخرى من المتطابقات المثلثية الأساسية تتضمن دوال متساوية القيمة

في **دالة متساوية القيمة** لدالة مثلثية أخرى g إذا كانت $f(\alpha) = g(\beta)$ حين تكون α و β زاويتان متتامتان. في المثلث قائم الزاوية الموضح، الزاويتان α و β هما زاويتان متتامتان. باستخدام ينسب المثلث قائم الزاوية، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta = \cot (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\sec \alpha = \csc \beta = \csc (90^\circ - \alpha) = \frac{r}{y}$$

من خلال هذه العبارات، يمكننا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين التالية، وهي صحيحة لكل الأعداد الحقيقية، وليس لقياسات الزاوية الحادة فقط.

نصيحة دراسية

كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين يمكن كذلك كتابة كل من متطابقات الزاويتين المتتامتين بدلالة الدرجات. فعلى سبيل المثال، $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$.

المفهوم الأساسي: متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

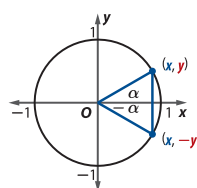
$$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

سُيِّت صحة هذه المتطابقات لأي زاوية في الدرس 3-4.



لقد عرفت أيضًا أن كلاً من الدوال المثلثية الأساسية— \sin ، \cos ، \tan ، \cot ، \sec ، \csc —هي إما فردية أو زوجية. باستخدام دائرة الوحدة، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= y & \sin(-\alpha) &= -y \\ \cos \alpha &= x & \cos(-\alpha) &= x \end{aligned}$$

تذكر من الدرس 1-2 أن الدالة f زوجية إذا كان لكل x في مجال f : $f(-x) = f(x)$ وفردية إذا كان لكل x في مجال f : $f(-x) = -f(x)$. وهذه العلاقات تؤدي إلى المتطابقات الفردية الزوجية التالية.

المفهوم الأساسي: متطابقات الدوال الزوجية و الفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

يمكنك استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإيجاد القيم المثلثية.

مثال 3 استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية الفردية

إذا كانت $\tan \theta = 1.28$ ، فأوجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= -\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= -\tan \theta$$

$$= -1.28$$

حل

متطابقة الدوال الزوجية الفردية

متطابقة الدالة متساوية القيمة

$$\tan \theta = 1.28$$

تمرين موجه

3. إذا كانت $\sin x = -0.37$ ، فأوجد $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. **-0.37**

التدريس المتمايز

OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من كل طالب كتابة تعبير يحتوي على جميع الدوال المثلثية الست، ويساوي 3. الإجابة النموذجية: $\sin^2 x + \cos^2 x + \sec^2 x - \tan^2 x + \csc^2 x - \cot^2 x$

أمثلة إضافية

4 حوّل لأبسط صورة
 $\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x)$
 5 حوّل لأبسط صورة
 $\cos x \tan x - \sin x \cos^2 x$
 $\sin^3 x$

2 تبسيط التعابير المثلثية وإعادة كتابتها لتحويل التعبير المثلثي لأبسط صورة. أبدأ بإعادة كتابته بدلالة الدالة المثلثية أو بدلالة sine الزاوية والـ cosine فقط.

مثال 4 التحويل لأبسط صورة باستخدام sin and cos فقط

حوّل لأبسط صورة $\csc \theta \sec \theta - \cot \theta$.
 أوجد الحل جبرياً

$$\begin{aligned} \csc \theta \sec \theta - \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ or } \tan \theta \end{aligned}$$

أعد الكتابة بدلالة sin and cos باستخدام المتطابقات العكسية والمتطابقات النسبية.

أوجد ناتج الضرب.

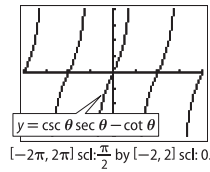
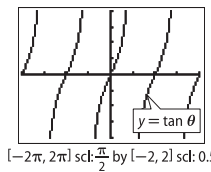
أعد كتابة الكسور باستخدام مقام مشترك.

اطرح.

نظرية فيثاغورس

اقسم البسط والمقام على $\sin \theta$.

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلان البيانيان اللذان يمثلان $y = \csc \theta \sec \theta - \cot \theta$ و $y = \tan \theta$ يدوان متطابقين.



تمرين موجه

4. حوّل لأبسط صورة $\sec x - \tan x \sin x$.

نصيحة تقنية

تمثيل الدوال العكسية بيانياً عند استخدام حاسبة لتمثيل الدوال العكسية بيانياً. مثل $y = \csc x$. فيمكنك إدخال معكوس الدالة.

Plot1 Plot2 Plot3
 $\sqrt{1/\sin(X)}$
 $\sqrt{2} =$
 $\sqrt{3} =$
 $\sqrt{4} =$
 $\sqrt{5} =$
 $\sqrt{6} =$
 $\sqrt{7} =$

ويمكن تحليل التعابير المثلثية لأبسط صورة من خلال تطبيق المتطابقات والتحليل الى العوامل.

مثال 5 التحويل لأبسط صورة باستخدام تحليل العوامل

حوّل لأبسط صورة $\sin^2 x \cos x - \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

أوجد الحل جبرياً

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \sin^2 x \cos x - \cos x \\ &= -\cos x (-\sin^2 x + 1) \\ &= -\cos x (1 - \sin^2 x) \\ &= -\cos x (\cos^2 x) \text{ or } -\cos^3 x \end{aligned}$$

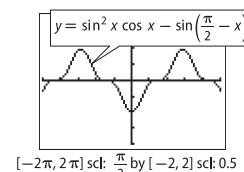
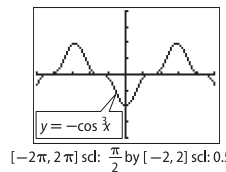
متطابقة زاويتين متتامتين

حلل عامل $-\cos x$ من كل حد.

خاصية التبديل

متطابقة فيثاغورس

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلات البيانية أدناه تبدو متطابقة.



تمرين موجه

5. حوّل لأبسط صورة $-\sec^3 x - \csc(\frac{\pi}{2} - x) - \tan^2 x \sec x$.

انتبه!

التمثيل البياني في حين يمكن لمنهجية التمثيل البياني الموضحة في المثالين 4 و 5 أن تقدم الدعم لفكرة المساواة بين تعبيرين. فلا يمكن استخدامها لإثبات أن تعبيرين متساويان. من المستحيل توضيح أن التمثيلان البيانيان متطابقان على كامل امتداد مجاليهما باستخدام الجزء الموضح من التمثيل البياني على حاسبتك.

المعلمون أصحاب النهط البصري/المكاني اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لايتكار ملصق به كل المتطابقات الواردة في الدرس. ينبغي أن يتضمن كل ملصق مثلاً يستخدم كل متطابقة. ويمكن استخدام لون مختلف لكل متطابقة. وبعد استخدام المتطابقة في المثال، ينبغي كتابتها باللون المطابق. على الطلاب إضافة متطابقات أخرى للملصقات تدريجياً تماشياً مع التقدم في الوحدة.

يمكنك تحويل بعض التعابير المثلثية لأبسط صورة عن طريق جمع الكسور.

مثال 6 التحويل لأبسط صورة باستخدام جمع الكسور

حوّل لأبسط صورة $\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x} &= \frac{\sin x \cos x (\cos x)}{(1 - \sin x)(\cos x)} - \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(\cos x)(1 - \sin x)} && \text{مقام مشترك} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} && \text{أوجد حاصل الضرب.} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} && \text{متطابقة فيثاغورس} \\ &= \frac{\sin x \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} && \text{اطرح.} \\ &= \frac{(\cos^2 x)(\sin x - 1)}{(-\cos x)(\sin x - 1)} && \text{حلل البسط والمقام إلى العوامل.} \\ &= -\cos x && \text{اختصر العوامل المشتركة.} \end{aligned}$$

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} \quad 2 \sec x$

6B. $\frac{\csc x}{1 + \sec x} + \frac{\csc x}{1 - \sec x} \quad -2 \cot^2 x \csc x$

في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج أحياناً إلى إعادة كتابة التعبير المثلثي بحيث لا يضم كسراً. حينها يكون المقام من الصيغة $u \pm 1$ أو $1 \pm u$. يمكنك أحياناً فعل ذلك عن طريق ضرب البسط والمقام في مرافق المقام وتنفيذ متطابقة فيثاغورس.

مثال 7 إعادة الكتابة لحذف الكسور

أعد كتابة $\frac{1}{1 + \cos x}$ في صورة تعبير لا يضم كسراً.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \cos x} &= \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} && \text{اضرب البسط والمقام في مرافق } 1 + \cos x. \\ &= \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} && \text{وهو } 1 - \cos x \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} && \text{أوجد حاصل الضرب.} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} && \text{متطابقة فيثاغورس} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} && \text{اكتب بصيغة توضح الفارق بين كسرين.} \\ &= \csc^2 x - \cot x \csc x && \text{حلل.} \\ & && \text{متطابقات المطلوب والمتطابقات النسبية} \end{aligned}$$

تمرين موجه

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسراً.

7A. $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \quad 1 + \sin x$

7B. $\frac{4}{\sec x + \tan x} \quad 4 \sec x - 4 \tan x$

مراجعة المفردات

المرافق (conjugate) عامل ذو حدين يُضرب في العامل ذي الحدين الأصلي ويكون حاصل الضرب هو الفرق بين المربعين (الدرس 0-3)

أمثلة إضافية

6 حوّل لأبسط صورة

$$\frac{\sec x}{1 - \sec x} - \frac{\sec x}{1 + \sec x} = -2 \csc^2 x$$

7 أعد كتابة $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$ في صورة تعبير لا يضم كسراً. $\tan^2 x$

إجابة إضافية

$$60. B = \frac{F \csc \theta}{l\ell}$$

$$Bl\ell = F \csc \theta$$

$$F = \frac{Bl\ell}{\csc \theta}$$

$$F = Bl\ell \left(\frac{1}{\csc \theta} \right)$$

$$F = Bl\ell \sin \theta$$

50. **كرة القدم** عند ركل كرة قدم من سطح الأرض، فإن ارتفاعها الممثل في y وإزاحتها الأفقية x مرتبطان بواسطة $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{x \sin \theta}{\cos \theta}$ حيث تكون v_0 هي سرعة الكرة المبدئية، وتكون θ هي الزاوية التي زُكِلت بها الكرة، وتكون g هي التسارع بسبب الجاذبية. أعد كتابة هذه المعادلة بحيث تكون $\tan \theta$ هي الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) + x \tan \theta$$

اكتب كل تعبير بدلالة دالة مثلثية مفردة.

51. $\tan x - \csc x \sec x = -\cot x$
 52. $\cos x + \tan x \sin x = \sec x$
 53. $\csc x \tan^2 x - \sec^2 x \csc x = -\csc x$
 54. $\sec x \csc x - \cos x \csc x = \tan x$

55. **النمذجة المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف كيفية التحقق من المتطابقات المثلثية. فكر في الدوال الموضحة.

- i. $y_1 = \tan x + 1$
 $y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x$
 ii. $y_3 = \tan x \sec x - \sin x$
 $y_4 = \sin x \tan^2 x$

a. **العرض الجدولي** انسخ وأكمل الجدول أدناه بدون تمثيل الدوال بيانياً.

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
y_1	1	1	1	1	1
y_2	1	1	1	1	1
y_3	0	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0	0

- b. d. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
 b. **التمثيل البياني** مثل كل دالة بيانياً على حاسبة بيانية.
 c. **التمثيل اللغوي** كُنْ مرافقاً عن العلاقة بين y_1 و y_2 . كرر العملية لكل من y_3 و y_4 .
 d. **طريقة التحليل** هل المرافقات التي كُوتتها في الجزء c صحيحة للمجال الكامل لكل دالة؟ اشرح استنتاجك.

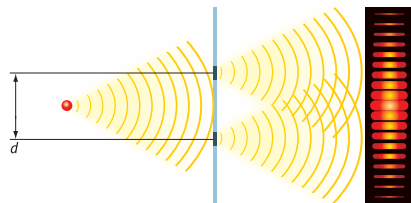
$$c. y_1 \neq y_2, y_3 = y_4$$

أعد كتابة كل تعبير في صورة لوغاريتم مفرد وحول الإجابة لأبسط صورة.

56. $\ln |\sin x| - \ln |\cos x| = \ln |\tan x|$
 57. $\ln |\sec x| - \ln |\cos x| = -2 \ln |\cos x|$
 58. $\ln (\cot^2 x + 1) + \ln |\sec x| = \ln |\csc^2 x \sec x|$
 59. $\ln (\sec^2 x - \tan^2 x) - \ln (1 - \cos^2 x) = -\ln |\csc^2 x|$

60. **الكهرباء** التيار الساري في سلك في مجال مغناطيسي يسبب فرض قوة على السلك. ويمكن تحديد قوة المجال المغناطيسي باستخدام الصيغة $B = \frac{F}{I\ell \csc \theta}$ حيث تكون F هي القوة الواقعة على السلك، وتكون I هي التيار داخل السلك، وتكون ℓ هي طول السلك، وتكون θ هي الزاوية التي يصنعها السلك مع المجال المغناطيسي. في بعض كتب الفيزياء، يتم توضيح الصيغة كما يلي $F = I\ell B \sin \theta$ وضح أن الصيغتين متساويتان. **انظر الهامش.**

61. **موجات الضوء** حين يشع الضوء عبر فتحتين ضيقتين، تظهر سلسلة من الحواف المضيئة والمظلمة. يمكن حساب الزاوية θ بقياس الزوايا نصف القطرية. المحددة لموقع الحافة رقم m بواسطة $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$ حيث تكون d هي المسافة بين الفتحتين وتكون λ هي طول موجة الضوء.



a. أعد كتابة الصيغة بدلالة θ . $\csc \theta = \frac{d}{m\lambda}$

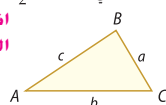
b. حدد الزاوية المحددة لموقع الحافة المئة عندما يكون طول موجي للضوء يبلغ 550 نانومتر يشع عبر الفتحتين المزدوجتين اللتين

تفصل بينهما مسافة 0.5 ميليمتر. \approx زاوية نصف قطرية قياس 0.11

مسائل مهارات التفكير العليا

62. **التحقق من الصحة** أثبت أن مساحة المثلث هي $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ حيث تكون $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (تلميح: مساحة المثلث المائل هي $A = \frac{1}{2}bc \sin A$)

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.



63. **تحليل الخطأ** معها وموزة تحولان ما يلي لأبسط صورة $\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$. وتظن أنها أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\frac{\cos^2 x}{1 - 2 \cos^2 x}$. وتظن موزة أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\tan^2 x - \csc^2 x$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

التحدي اكتب كلاً من الدوال المثلثية الأساسية بناءً على الدوال التالية. 64-66. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

64. $\sin x$ 65. $\cos x$ 66. $\tan x$

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك. 67-68. **انظر الهامش.**

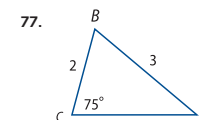
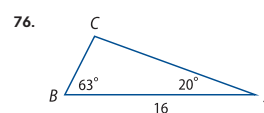
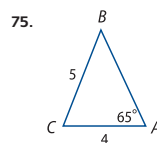
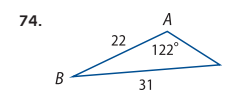
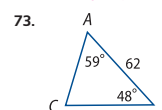
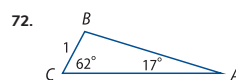
67. $\csc^2 x \tan x = \csc x \sec x$ صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الحقيقية.
 68. يمكن استخدام متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإثبات أن التمثيلات البيانية التي تخص $y = \cos x$ و $y = \sec x$ متماثلة بالنسبة للمحور الرأسي y . 69-70. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

الإثبات أثبت كل متطابقة فيثاغورس. **الوحدة 4.**

69. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ 70. $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

راجع عمل الطلاب.
 71. **الكتابة المسبقة** استخدم مخططاً أو جدولاً لمساعدتك على تنظيم المتطابقات المثلثية الرئيسية الموجودة في الدرس 4-1.

حل كل مثلث. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. 72-77. انظر الهامش.



أوجد القيمة الصحيحة لكل تعبير، إن وُجدت.

78. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{7}{9}\right) \frac{4\sqrt{2}}{7}$

79. $\tan(\arctan 3) \quad 3$

80. $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \quad -\frac{1}{2}$

81. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

82. $\cos^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ليس لها قيمة}$

83. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) \quad \frac{4}{5}$

84. علم الأجناس البشرية قياس التماهي هو دراسة العلاقة بين حجم كائن حي وحجم أي جزء من أجزائه. قرر أحد الباحثين إجراء اختبار لقياس التماهي بين حجم رأس الإنسان مقارنةً بجسمه بينما يتقدم الشخص في العمر. تمثل البيانات في الجدول تمثل الذكر الأمريكي العادي.

a. أوجد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات من خلال تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. $y = 0.117x + 1.28$

b. استخدم نموذج البيانات المعربة خطيًا لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية. $y = 3.6e^{0.117x}$

c. استخدم نموذجك للتنبؤ بطول الذكر الأمريكي الذي محيط رأسه يساوي 24 بوصة. حوالي 59.7 in.

نفترض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{6, 9\}$, $B = \{6, 9, 10\}$, $C = \{0, 1, 6, 9, 11\}$, $D = \{2, 5, 11\}$. حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة.

اشرح استنتاجك. 85-86. انظر الهامش.

85. $A \subset B$

86. $D \subset U$

معدل نمو الذكر الأمريكي العادي (بمتر) من 0 إلى 3 أعوام	
محيط الرأس (in.)	الطول (in.)
14.1	19.5
18.0	26.4
18.3	29.7
18.7	32.3
19.1	34.4
19.4	36.2
19.6	37.7

المصدر: المركز القومي للإحصاءات الصحية

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. أي مما يلي يتساوى مع

$\frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \cdot \tan \theta$ B

A $\tan \theta$

C $\sin \theta$

B $\cot \theta$

D $\cos \theta$

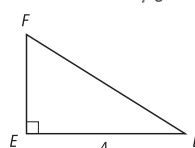
90. مراجعة انظر إلى الشكل. إذا كانت $\cos D = 0.8$ ، فما طول \overline{DF} ؟ F

F 5

G 4

H 3.2

J $\frac{4}{5}$



87. SAT/ACT إذا كان $x > 0$ ، إذا

$\frac{x^2 - 1}{x + 1} + \frac{(x + 1)^2 - 1}{x + 2} + \frac{(x + 2)^2 - 1}{x + 3} =$ D

A $(x + 1)^2$

B $(x - 1)^2$

C $3x - 1$

D $3x$

E $3(x - 1)^2$

88. مراجعة إذا كانت $\sin x = m$ وكانت $0 < x < 90^\circ$ ، إذا $\tan x =$ H

F $\frac{1}{m^2}$

H $\frac{m\sqrt{1 - m^2}}{1 - m^2}$

G $\frac{1 - m^2}{m}$

J $\frac{m}{1 - m^2}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 63، على الطلاب إدراك أن متطابقة فيثاغورس $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ يمكن استخدامها في كالحل الذي توصلت لمقام وهذا سيؤدي إلى الحل الذي توصلت إليه مها.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب كتابة رأيهم فيما يتعلق بكيفية استفادتهم مما تعلموه في هذا الدرس لمساعدتهم في الدرس القادم الذي يتناول إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

إجابات إضافية

67. خطأ؛ الإجابة النموذجية: لا يحتوي المجال على قيم لـ $\csc x$ حيث x غير محدد، مثل $n\pi$.

68. صواب، الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية للدوال الزوجية متماثلة بالنسبة إلى محور y . حيث إن $\sec x$ و $\cos x$ دالتان زوجيتان، إذا فالتمثيلات البيانية لهاتين الدالتين متماثلة بالنسبة إلى محور y .

72. $B = 101^\circ$, $c \approx 3.0$, $b \approx 3.4$

73. $C = 73^\circ$, $a \approx 55.6$, $b \approx 48.2$

74. $B \approx 21^\circ$, $C \approx 37^\circ$, $b \approx 13.1$

75. $B \approx 46^\circ$, $C \approx 69^\circ$, $c \approx 5.2$

76. $C = 97^\circ$, $a \approx 5.5$, $b \approx 14.4$

77. $A \approx 40^\circ$, $B \approx 65^\circ$, $b \approx 2.8$

85. صحيح، جميع عناصر A هي أيضًا عناصر B .

86. خطأ، جميع عناصر D ليست عناصر U ، 11 هو عنصر D وليس عنصر U .

التدريس المتمايز

التوسع عبّر عن $\cos x$ بدلالة كل واحدة من الدوال المثلثية الخمس الأخرى. ينبغي أن يتضمن كل تعبير بالضبط دالة واحدة أخرى غير جيب التمام افترض أن x تقع في الربع ا.

الإجابة النموذجية: $\sqrt{1 - \sin^2 x}$, $\frac{\sqrt{\csc^2 x - 1}}{\csc x}$, $\frac{1}{\sec x}$, $\sqrt{\frac{1}{\tan^2 x + 1}}$, $\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$