1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-2 حوّل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

الدرس 4-2 التحقق من صحة المتطابقات المثلثية.
تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

بعد الدرس 4-2 إيجاد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما الشيء المشترك بين كلتا المعادلتين؟ h, v^2, and $2g$
- ما وجه الاختلاف بين المعادلتين؟ الدوال المثلثية
- ما الذي قد يلزم أن يكون صحيحًا في المعادلتين حتى تصبح الصيغتان متكافئتين؟ $\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

الدرس 4-2 اثبات صحة المتطابقات المثلثية

:: السابق

- حوّلت التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

:: الحالي

1. اثبات صحة المتطابقات المثلثية.
2. تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

:: لماذا؟

- تتحرك لعبتان ناريتان بنفس السرعة v. ويرغب فني الألعاب النارية في تفجير إحداهما على ارتفاع أعلى من الأخرى عن طريق تعديل الزاوية θ الخاصة بالمسار الذي يشكله كل صاروخ مع الأرض. ولحساب أقصى ارتفاع h لكل صاروخ، فالصيغة $h = \dfrac{v^2 \tan^2\theta}{2g \sec^2\theta}$ يمكن استخدامها، ولكن هل ستؤدي $h = \dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g}$ إلى نفس النتيجة؟

مفردات جديدة
إثبات صحة المتطابقة
verify an identity

1 اثبات صحة المتطابقات المثلثية

لقد استخدمتَ المتطابقات المثلثية لإعادة كتابة التعابير بصيغ متكافئة وأحيانًا بصيغ أكثر جدوى. عند اثبات صحتها، يمكن استخدام هذه المتطابقات *الجديدة* أيضًا لحل المسائل أو لإعادة كتابة تعابير مثلثية أخرى.

إن **اثبات صحة متطابقة** يعني *التحقق* من أن كلا طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير المعرف في كلا الطرفين من خلالها. ويتم هذا عن طريق تحويل التعبير في أحد طرفي المتطابقة إلى التعبير في الطرف الآخر عن طريق سلسلة من التعابير الوسيطة التي تتساوى كلها مع التعبير الأول. وكما هو الحال مع أنواع الإثباتات الأخرى، كل خطوة يبررها سبب، وهذا السبب هو عادةً متطابقة مثلثية أو عملية جبرية أخرى تم التحقق من صحتها.

ستجد في الأغلب أنه من الأسهل البدء في التحقق من صحة متطابقة مثلثية عن طريق البدء من الطرف الذي به التعبير الأكثر تعقيدًا ثم المتابعة للوصول إلى التعبير الأقل تعقيدًا.

مثال 1 اثبات صحة متطابقة فيثاغورس

تحقق من أن $\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \cos^2 x$.

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء بهذا التعبير أولاً.

$\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \dfrac{\cot^2 x}{\csc^2 x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \cot^2 x \sin^2 x$ متطابقة مقلوب

$= \left(\dfrac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}\right)\cancel{\sin^2 x}$ متطابقة نسبية

$= \cos^2 x$ ✔ متطابقة فيثاغورس

لاحظ أن عملية اثبات الصحة تنتهي بوجود تعبير على الطرف الآخر من المتطابقة.

تمرين موجه

أثبت صحة كل متطابقة. **1A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1A. $\sec^2\theta \cot^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

1B. $\tan^2\alpha = \sec\alpha \csc\alpha \tan\alpha - 1$

وهناك في العادة أكثر من طريقة لإثبات صحة متطابقة. فعلى سبيل المثال، المتطابقة في المثال 1 يمكن التحقق من صحتها أيضًا كما يلي.

$\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \dfrac{\csc^2 x}{\csc^2 x} - \dfrac{1}{\csc^2 x}$ اكتب في صور الفرق بين كسرين

$= 1 - \sin^2 x$ بسّط وطبّق متطابقة مقلوب

$= \cos^2 x$ متطابقة فيثاغورس

1 التحقق من المتطابقات المثلثية

توضح الأمثلة 1-5 طريقة استخدام المتطابقات والأساليب الجبرية لإثبات تساوي طرفي المعادلة المعطاة لجميع القيم المحدد لها طرفا المعادلة.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أثبت أن $\frac{\tan^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} = \sec^4 x$.

$$\frac{\tan^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$= \sec^4 x$$

2 أثبت أن

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -2 \cot x$$

انظر الهامش.

3 تحقق من أن

$$\frac{\sin x}{\sec x - 1} = \cos x \cot x + \cot x$$

$$\frac{\sin x}{\sec x - 1} = \frac{\sin x (\sec x + 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \sin x (\sec x + 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{(\sec x + 1) \cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \sec x + \cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \times \frac{1}{\cos x}}{\sin x} + \cos x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot x + \cos x \cot x$$

حين يكون هناك الكثير من الكسور التي لها مقامات مختلفة في أحد التعابير، يمكنك إيجاد مقام مشترك لتقليل التعبير إلى كسر واحد.

مثال 2 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام جمع الكسور

أثبت أن $2 \csc x = \frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$

الطرف الأيمن من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء من هناك، وإعادة كتابة كل كسر باستخدام المقام المشترك $(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)$.

ابدأ بالطرف الأيمن من المتطابقة.	$\frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$
المقام المشترك	$= \frac{\csc x - \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)} + \frac{\csc x + \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$
اجمع.	$= \frac{2 \csc x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$
أوجد حاصل الضرب.	$= \frac{2 \csc x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$
متطابقة فيثاغورس	$= 2 \csc x$ ✔

تمرين موجه

2. أثبت أن $2 \sec \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

ولحذف كسر مقامه بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$، تذكّر أن تحاول ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام. ثم يُحتمل أنه يمكنك تطبيق متطابقة فيثاغورس.

مثال 3 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام الضرب

أثبت أن $\csc \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

لأن الطرف الأيسر من هذه المتطابقة يضم كسرًا، فهو أكثر تعقيدًا بقليل من الطرف الأيمن. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 - \cos \alpha$، وهو $1 + \cos \alpha$.	$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$
أوجد حاصل الضرب.	$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}$
متطابقة فيثاغورس	$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$
اقسم المقام المشترك لـ $\sin \alpha$.	$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$
اكتب في صورة مجموع كسرين.	$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
متطابقة المقلوب ومتطابقة نسبية.	$= \csc \alpha + \cot \alpha$ ✔

نصيحة دراسية

طريقة بديلة ليس عليك دومًا البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا من المعادلة. فإذا بدأت بالطرف الأيمن في المثال 3، فلا يزال بإمكانك إثبات صحة المتطابقة.

$\csc \alpha + \cot \alpha$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$ ✔

تمرين موجه

3. أثبت أن $\csc x - \cot x = \frac{\tan x}{\sec x + 1}$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

وحتى يتم إثبات صحة متطابقة، لا يمكنك افتراض أن كلا الطرفين متساويان. ولهذا، لا يمكنك استخدام خصائص المعادلة لإجراء العمليات الجبرية على كل طرف من طرفي المتطابقة، مثل جمع نفس الكمية على كل طرف من المعادلة.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

2. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

$$= \frac{\sin x (1 - \cos x) - \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin x - \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{-2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-2 \sin x \cos x}{(\sin x)(\sin x)} = -2 \cot x$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 239 12/15/2016 8:09:16 PM

حين يضم التعبير الأكثر تعقيدًا في متطابقة أُسسًا، جرّب التحليل الى العوامل.

مثال 4 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام التحليل الى العوامل

أثبت أن $\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta = \csc\theta$

$\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta$ ابدأ بالطرف الأيسر من المتطابقة.

$= \cot\theta \sec\theta (\csc^2\theta - \cot^2\theta)$ حلل الى العوامل.

$= \cot\theta \sec\theta$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta}$ المتطابقات العكسية ومتطابقة نسبية

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$ أوجد حاصل الضرب.

$= \csc\theta$ ✓ متطابقة مقلوب

تمرين موجه

4. أثبت أن $\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x = \sec^2 x$. **انظر الهامش.**

فمن المفيد أحيانًا العمل بشكل مستقل على كل طرف من طرفي المتطابقة للحصول على تعبير وسيط مشترك.

مثال 5 اثبات صحة متطابقة بالعمل على كل طرف بشكل مستقل

أثبت أن $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

يبدو أن كلا الطرفين معقد، ولكن الطرف الأيسر أكثر تعقيدًا بقليل لأن مقامه يضم حدين. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

$\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ حلل الى العوامل.

$= \sec x - 1$ اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$.

من هذه النقطة، ليس واضحًا كيفية تحويل $\sec x - 1$ إلى $\dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$، لذا عليك البدء بالطرف الأيمن والعمل لتحويله إلى صيغة وسيطة $\sec x - 1$.

$\dfrac{1 - \cos x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}$ اكتب في صورة الفارق بين كسرين.

$= \sec x - 1$ استخدم متطابقة ناتج القسمة وحوّل لأبسط صورة

لإكمال الإثبات، حُل بترتيب عكسي لربط طرفي الإثبات.

$\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ حلل العوامل.

$= \sec x - 1$ اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}$ استخدم متطابقة ناتج القسمة واكتبها 1 في صورة $\dfrac{\cos x}{\cos x}$

$= \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$ ✓ اجمع الكسور.

تمرين موجه

5. أثبت أن $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

$$\begin{aligned} \sec^4 x - \sec^2 x &= \sec^2 x(\sec^2 x - 1) \\ &= \sec^2 x \tan^2 x \\ &= (\tan^2 x + 1)\tan^2 x \\ &= \tan^4 x + \tan^2 x \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

خطوات إضافية أثناء إثبات صحة متطابقة، قد يكون عدد الخطوات اللازمة لتبرير التحقق واضحًا. ولكن، إذا لم يكن واضحًا، فمن الأسلم عادةً تضمين خطوات أكثر من اللازم بدلاً من اعتماد خطوات أقل من اللازم.

أمثلة إضافية

4 أثبت أن $\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x = \sin x$.

$$\begin{aligned} &\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x \\ &= \cos x \tan x(\sec^2 x - \tan^2 x) \\ &= \cos x \tan x(1) \\ &= \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \sin x \end{aligned}$$

5 أثبت أن $\cot^3 x + \cot x = \cos x \csc^3 x$

$$\begin{aligned} &\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x \\ &= \cos x \tan x(\sec^2 x - \tan^2 x) \\ &= \cos x \tan x(1) \\ &= \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \sin x \end{aligned}$$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة التفاعلية ابدأ في حل الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ عملك في صورة صفحات ملاحظات. وفي نهاية الفصل، انشر ملاحظاتك على صفحة الويب الخاصة بالصف الدراسي. وقد يساعد ذلك الطلاب في التركيز على الدرس بدلاً من نسخ الملاحظات لكل خطوة من خطوات إيجاد البرهان.

التركيز على محتوى الرياضيات

التحقق من صحة التطابقات المثلثية

للتحقق من صحة المتطابقة المثلثية، يجب إثبات تساوي الأطراف لكل قيم المتغير. ويمكن إثبات ذلك بتحويل طرف أو كلا طرفي المعادلة. وقد يفضل بعض الطلاب محاولة إيجاد الحل لطرف واحد فقط في المرة لتجنب الالتباس.

نصيحة للمعلمين الجدد

تحليل العوامل هناك بداية جيدة لإثبات صحة المتطابقة وهي رؤية ما إذا كان هناك أي شيء في أي طرف يمكن تحليله إلى عامل أم لا.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4. $$\begin{aligned} &\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x \\ &= \tan^2 x \csc^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \tan^2 x \csc^2 x \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

يوضح **المثال 6** كيف يمكن تحديد ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة أم لا باستخدام التمثيل البياني. يمكن استخدام البرهان لتوضيح أن المعادلة متطابقة. إذا لم تكن المعادلة متطابقة، فإنه يمكن استخدام التمثيل البياني لتحديد قيمة محددة لكلا الطرفين ولكنها غير متساوية.

مثال إضافي

6 استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة تمثل متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فتحقق من صحتها. وإذا كانت عكس ذلك، فأوجد قيمة x التي يُحدَّد لها كلا الطرفين دون أن يكونا متساويين.

a. $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc x \sec x} = \tan x$

$$\frac{1+\tan^2 x}{\csc x \sec x} = \frac{\sec^2 x}{\csc x \sec x} = \frac{\sec x}{\csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

b. $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} = \cos^2 x - \sin^2 x$

عندما $Y1 \approx 1.43$,$x = \frac{\pi}{3}$ و $Y2 = -0.5$. فإن هذه المعادلة ليست متطابقة.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

6A.
$$\frac{\cot\theta\tan^2\theta + \cot\theta}{\sec\theta} = \frac{\cot\theta(\tan^2\theta + 1)}{\sec\theta} = \frac{\cot\theta(\sec^2\theta)}{\sec\theta} = \cot\theta\sec\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

6B. عندما تكون $x = \pi$، فإن $Y1 \approx 0$ و $Y2 \approx 0.5$؛ ولذلك فالمعادلة ليست متطابقة.

ملخص المفاهيم إستراتيجيات لإثبات صحة المتطابقات المثلثية

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأبسط، مع إبقاء الطرف الآخر من المتطابقة في الحسبان على أنه هدفك.
- استخدم متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، وإعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فرق، وضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل مقامًا بصيغة $u \pm 1$ أو صيغة $1 \pm u$ إلى حد فردي باستخدام المُرافق ومتطابقة فيثاغورس.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير وسيط مشترك.
- إذا لم تَظهر جدوى أي إستراتيجية، فحاول تحويل التعبير بالكامل إلى تعبير لا يشتمل إلا على جيوب الزوايا وجيوب التمام.

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف ما إذا كان من المحتمل أن المعادلة هي متطابقة أم لا من خلال التمثيل البياني للدوال المرتبطة بكل طرف من المعادلة.

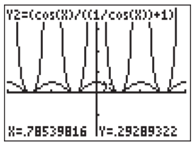
انتبه!
استخدام تمثيل بياني يمكنك استخدام حاسبة بيانية للمساعدة في تأكيد لامتطابقة، ولكنك لا تستطيع استخدام حاسبة بيانية *لإثبات* أن إحدى المعادلات هي متطابقة. عليك تقديم تحقق جبري من صحة متطابقة.

مثال 6 تحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا

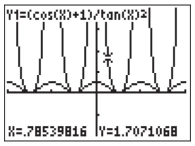
استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فأوجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين.

a. $\dfrac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sec\beta + 1}$

التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة لا تتطابق في كل قيم x التي تحدد كلتا الدالتين. حين تكون $x = \frac{\pi}{4}$، فإنّ $Y1 \approx 1.7$ ولكن $Y2 \approx 0.3$. وعندها تكون هذه المعادلة ليست متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

b. $\dfrac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sec\beta - 1}$

المعادلة تبدو كأنها متطابقة لأن التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة تتطابق. تحقق من صحة هذا جبريًا.

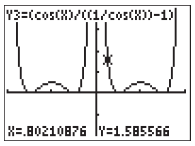
$\dfrac{\cos\beta}{\sec\beta - 1} = \dfrac{\cos\beta}{\sec\beta - 1}\cdot\dfrac{\sec\beta + 1}{\sec\beta + 1}$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $\beta - 1$.

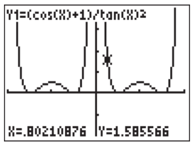
$= \dfrac{\cos\beta\sec\beta + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$ أوجد حاصل الضرب.

$= \dfrac{\cos\beta\left(\frac{1}{\cos\beta}\right) + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$ متطابقة مقلوب

$= \dfrac{1 + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$ بسّط

$= \dfrac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta}$ ✓ خاصية التبديل ومتطابقة فيثاغورس





$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

تمرين موجه 6A–B. انظر الهامش.

6A. $\csc\theta = \dfrac{\cot\theta\tan^2\theta + \cot\theta}{\sec\theta}$

6B. $\dfrac{\cos x + 1}{\sec^2 x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - 1}$

التدريس المتمايز

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من المجموعات الثنائية من الطلاب التعاون لإثبات صحة المتطابقات في التمرينات الموجهة. اطلب من الطلاب تسجيل الأشياء والأساليب المفيدة التي بحثوا عنها عند البدء. جمّع قائمة بالصف الدراسي على اللوحة.

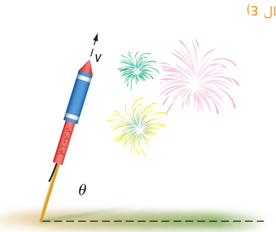
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 241 12/15/2016 8:09:18 PM

تمارين

أثبت صحة كل متطابقة. (الأمثلة 1-3) **1-18. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1. $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$
2. $\sec^2\theta(1 - \cos^2\theta) = \tan^2\theta$
3. $\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta = \sin^3\theta$
4. $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta = \sin\theta$
5. $\cot^2\theta\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot^4\theta$
6. $\tan\theta\csc^2\theta - \tan\theta = \cot\theta$
7. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$
8. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$
9. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = \sec\theta$
10. $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
11. $\frac{1}{1-\tan^2\theta} + \frac{1}{1-\cot^2\theta} = 1$
12. $\frac{1}{\csc\theta+1} + \frac{1}{\csc\theta-1} = 2\sec^2\theta\sin\theta$
13. $(\csc\theta - \cot\theta)(\csc\theta + \cot\theta) = 1$
14. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
15. $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$
16. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$
17. $\csc^4\theta - \cot^4\theta = 2\cot^2\theta + 1$
18. $\frac{\csc^2\theta + 2\csc\theta - 3}{\csc^2\theta - 1} = \frac{\csc\theta + 3}{\csc\theta + 1}$

.19 **الألعاب النارية** إذا أُطلق صاروخ من مستوى الأرض، فإن أقصى ارتفاع يصل إليه يُعطى بالعلاقة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$، بحيث تكون θ هي الزاوية بين الأرض والمسار الأولي للصاروخ، وتكون v هي سرعة الصاروخ المبدئية، وتكون g هي التسارع بسبب الجاذبية التي مقدارها تربيع 9.8 أمتار في الثانية. (مثال 3)



a. أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. **انظر الهامش.**

b. لنفترض أنه تم إطلاق صاروخ آخر بزاوية قياسها 80° من الأرض بسرعة مبدئية تبلغ 110 أمتار في الثانية. فأوجد أقصى ارتفاع للصاروخ. **598.7 m**

أثبت صحة كل متطابقة. (المثالان 4 و5) **20-31. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

20. $(\csc\theta + \cot\theta)(1 - \cos\theta) = \sin\theta$
21. $\sin^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
22. $\frac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$
23. $\frac{1+\csc\theta}{\sec\theta} = \cos\theta + \cot\theta$
24. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
25. $\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta - 1}$
26. $\tan^2\theta\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
27. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$
28. $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$
29. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
30. $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$
31. $\frac{2+\csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

.32 **علم البصريات** إذا وُضع منشوران بنفس القوة بجوار بعضهما البعض، يمكن تحديد إجمالي قوتهما باستخدام الصيغة $z = 2p\cos\theta$، حيث z هي القوة المجمعة للمنشورين، وتكون p هي قوة كل منشور على حدة، وتكون θ هي الزاوية بين المنشورين. فتحقق من أن $2p\cos\theta = 2p(1 - \sin^2\theta)\sec\theta$. (مثال 4) **انظر الهامش.**

.33 **التصوير الفوتوغرافي** كمية الضوء المارة عبر مرشح استقطاب يمكن تمثيلها في نموذج باستخدام الصيغة $I = I_m\cos^2\theta$، حيث تكون I هي كمية الضوء المارة عبر المرشح، وتكون I_m هي كمية الضوء المُشعة على المرشح، وتكون θ هي زاوية الدوران بين مصدر الضوء والمرشح. أثبت أن $I_m\cos^2\theta = I_m - \frac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$. (مثال 4) **انظر الهامش.**

الحاسبة البيانية اختبر ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا عن طريق التمثيل البياني. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فأوجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين. (مثال 6)

34-39. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

34. $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x}$
35. $\sec x + \tan x = \frac{1}{\sec x - \tan x}$
36. $\sec^2 x - 2\sec x\tan x + \tan^2 x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
37. $\frac{\cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} = 1 - 2\sin^2 x$
38. $\frac{\tan x - \sec x}{\tan x + \sec x} = \frac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}$
39. $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 39 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

نصيحة للمعلمين الجدد

البدء عند إثبات صحة المتطابقة، غالبًا ما يواجه الطلاب صعوبة في معرفة من أين يبدؤون. اطلب منهم الاطلاع على قائمة المتطابقات في الوحدة، ثم تحديد المتطابقات التي تتطابق مع جزء من المعادلة التي يوجدون حلها.

انتبه!

خطأ شائع في التمرينات 40-43، قد لا يطبّق الطلاب القيمة المطلقة تطبيقًا صحيحًا. اطلب من الطلاب تدوين كل خطوة في حلولهم لتجنب الأخطاء.

إجابات إضافية

19a. $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{2g\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}$

$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$

32. $2p(1 - \sin^2\theta)\sec\theta$

$= 2p\cos^2\theta\sec\theta$

$= 2p\cos^2\theta \times \frac{1}{\cos\theta}$

$= 2p\cos\theta$

33. $I_m - \frac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$

$= I_m\left(1 - \frac{1}{\cot^2\theta + 1}\right)$

$= I_m\left(1 - \frac{1}{\csc^2\theta}\right)$

$= I_m(1 - \sin^2\theta)$

$= I_m\cos^2\theta$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-39, 60, 62-92	1-39 فردي، 89-92	2-38 زوجي، 60, 62-88
OL ضمن المستوى	1-49 فردي، 50، 51-59 فردي، 60، 62-92	1-39, 89-92	40-60, 62-88
BL أعلى من المستوى	40-92		

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 242 12/15/2016 8:09:20 PM

إجابات إضافية

50a. $d = w \tan \alpha$

50b. $d = w \tan \alpha$

$= \dfrac{w \sin \alpha}{\cos \alpha}$

$= \dfrac{w \cos (90° - \alpha)}{\cos \alpha}$

50d. الإجابة النموذجية: لم يمكن استخدام المواقع التي عرضها 5 و140 قدمًا لأن $\alpha < 20°$ و $\alpha > 60°$ على التوالي. كان من الممكن استخدام الموقع الذي عرضه 35 قدمًا لأن $20° < \alpha < 60°$.

B أثبت صحة كل متطابقة. **40–43. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

40. $\sqrt{\dfrac{\sin x \tan x}{\sec x}} = |\sin x|$

41. $\sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \left|\dfrac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$

42. $\ln |\csc x + \cot x| + \ln |\csc x - \cot x| = 0$

43. $\ln |\cot x| + \ln |\tan x \cos x| = \ln |\cos x|$

أثبت صحة كل متطابقة. **44–49. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

44. $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \sec^4 \theta - \tan^4 \theta$

45. $-2 \cos^2 \theta = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta - 1$

46. $\sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^4 \theta - (\tan^4 \theta + \sec^2 \theta)$

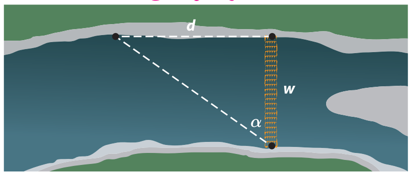
47. $3 \sec^2 \theta \tan^2 \theta + 1 = \sec^6 \theta - \tan^6 \theta$

48. $\sec^4 x = 1 + 2 \tan^2 x + \tan^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

50. **البيئة** عالم أحياء يدرس التلوث وَضَعَ شبكة بعرض نهر ووضع أدوات في نقطتين مختلفتين على ضفة النهر لجمع العينات. وفي الرسم التخطيطي الموضح، فإن d هي المسافة بين المحطات وw هي عرض النهر.

a–b, d. انظر الهامش.



a. حدد معادلة فيما يتعلق بـ $\tan \alpha$ الذي يمكن استخدامها لإيجاد المسافة بين المحطتين.

b. أثبت أن $d = \dfrac{w \cos (90° - \alpha)}{\cos \alpha}$

c. أكمل الجدول الموضح حينما تكون $d = 40$ قدمًا.

w	20	40	60	80	100	120
α	63.4	45	33.7	26.6	21.8	18.4

d. إذا كان $\alpha > 60°$ أو كان $\alpha < 20°$. فالأدوات لن تعمل بشكل سليم. استخدم الجدول من الجزء c لتحديد أي من الموقعين – حيث يكون عرض النهر فيه 5 أو 35 أو 140 قدمًا – يمكن استخدامه لإجراء التجربة.

C **الدوال الزائدية** *الدوال المثلثية الزائدية* يمكن تحديدها بالطرق التالية.

$\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}, x \neq 0$

$\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\quad$ $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}, x \neq 0$

51–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

أثبت صحة كل متطابقة باستخدام الدوال الموضحة أعلاه.

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

52. $\sinh(-x) = -\sinh x$

53. $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

54. $\cosh(-x) = \cosh x$

الحاسبة البيانية مَثِّل كل طرف من كل معادلة بيانيًا. فإذا بدا أن المعادلة متطابقة، أثبت صحتها جبريًا. **55–58. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

55. $\dfrac{\sec x}{\cos x} - \dfrac{\tan x \sec x}{\csc x} = 1$

56. $\sec x - \cos^2 x \csc x = \tan x \sec x$

57. $(\tan x + \sec x)(1 - \sin x) = \cos x$

58. $\dfrac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} = -1$

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الطرق المستخدمة لحل المعادلات المثلثية. فكّر في $2 \sin x = 1$.

a. **تمثيل عددي** اعزل الدالة المثلثية في المعادلة بحيث يكون $\sin x$ هو التعبير الوحيد الموجود بأحد طرفي المعادلة. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

b. **تمثيل بياني** مَثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي أوجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $[0, 2\pi)$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

c. **تمثيل هندسي** استخدم دائرة الوحدة للتحقق من صحة الإجابات التي أوجدتها في الجزء b.

d. **تمثيل بياني** مثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي أوجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $-2\pi < x < 2\pi$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

e. **تمثيل لفظي** خمّن ما هي حلول $2 \sin x = 1$. اشرح استنتاجك.

b–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

مسائل مهارات التفكير العليا

60. **التبرير** هل يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

61. **التحدي** أثبت صحة أن مساحة مثلث A موضحة بالمعادلة

$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$$

حيث يمثل كلٌ من a و b و c أضلاع المثلث ويمثل α و β و γ الزوايا المقابلة ذات الصلة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

62. **الكتابة في الرياضيات** استخدم خصائص اللوغاريتمات لشرح السبب في أن مجموع اللوغاريتمات الطبيعية الخاصة بالدوال المثلثية الأساسية الست لأي زاوية θ يساوي 0. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

63. **مسألة ذات إجابة مفتوحة** كوّن متطابقات لكلٍ من $\sec x$ و $\csc x$ بدلالة دالتين أو أكثر من الدوال المثلثية الأخرى. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

64. **التبرير** إذا كانت الزاويتان α و β متتامتين. فهل $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$؟ اشرح استنتاجك. علل إجاباتك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

65. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف تثبت صحة متطابقة مثلثية يكون فيها طرفا المعادلة متساويين في درجة التعقيد. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من كل طالب كتابة كيف استفاد من درس الأمس في اليوم الجديد.

المتابعة

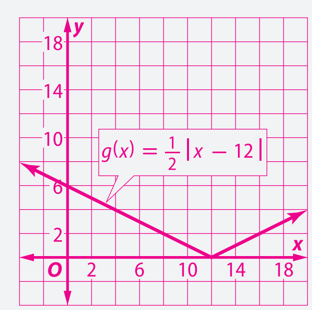
استكشفَ الطلابُ المتطابقات المثلثية وأثبتوا صحتها.

اسأل:

- ما وجه الاستفادة من المتطابقات المثلثية؟ الإجابة النموذجية: تُوفر المتطابقات المثلثية طريقة لتحويل التعابير المثلثية المعقدة إلى أبسط صورة وذلك بإعادة كتابتها بصور متكافئة ولكنها أكثر ملاءمة.

إجابة إضافية

88. الدالة عبارة عن تغيير للأبعاد وتفسير لها. التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$ اضغط التمثيل البياني $f(x) = |x|$ رأسيًا وانقله 12 نقطة جهة اليمين.



مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

66. $\cos\theta \csc\theta$ $\cot\theta$

67. $\tan\theta \cot\theta$ 1

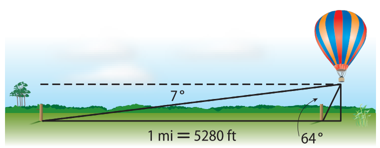
68. $\sin\theta \cot\theta$ $\cos\theta$

69. $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ $\cot^2\theta$

70. $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$ $\tan\theta$

71. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ 1

72. **ركوب المنطاد** بينما يمر منطاد هواء ساخن عبر جزء مستقيم من الطريق السريع، رأى قائده نقطتين متتابعتين من نقاط توضيح المسافة على نفس الجانب من المنطاد. وحين معاينة النقطتين، كانت زاويتا الانخفاض °64 و°7. فما ارتفاع المنطاد مقربًا لأقرب قدم؟ 690 ft



حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومَثّل كل دالة بيانيًا. 73–75. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

73. $y = \frac{1}{4}\tan x$

74. $y = \csc 2x$

75. $y = \frac{1}{2}\sec 3x$

حول قياس الزاوية من الدرجات الى الزوايا نصف القطرية بدلالة π وبالعكس.

76. 660° $\frac{11\pi}{3}$

77. 570° $\frac{19\pi}{6}$

78. 158° $\frac{79\pi}{90}$

79. $\frac{29\pi}{4}$ 1305°

80. $\frac{17\pi}{6}$ 510°

81. 9 $\frac{1620}{\pi} \approx 515.7°$

حُل كلاً من المتباينات التالية. 82. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$ 83. $(-7, 4)$ 84. $[-1, 5]$

82. $x^2 - 3x - 18 > 0$

83. $x^2 + 3x - 28 < 0$

84. $x^2 - 4x \leq 5$

85. $x^2 + 2x \geq 24$ $(-\infty, -6] \cup [4, \infty)$

86. $-x^2 - x + 12 \geq 0$ $[-4, 3]$

87. $-x^2 - 6x + 7 \leq 0$ $(-\infty, -7] \cup [1, \infty)$

88. **الطعام** يفحص مدير مخبز عشوائيًا قِطَع من الكعك الذي أعدّه العاملون لضمان الطعم الصحيح والمضبوط في كل قِطعة. وينبغي أن تحتوي كل قطعة بوزن 12 أوقية على كريمة نصفها بطعم الشوكولاتة ونصفها بطعم الفانيليا. يمكن تمثيل كمية الشوكولاتة التي تختلف فيها كل شريحة بالصيغة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$. صِف التحوّلات في الدالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. **SAT/ACT**

$a, b, a, b, b, a, b, b, b, a, b, b, b, b, a, \ldots$

إذا استمرت المتتالية على هذه الوتيرة، فكم عدد حروف b الموجودة بين المرة الرابعة والأربعين والسابعة والأربعين لظهور الحرف a؟ B

A 91
B 135
C 138
D 182
E 230

90. أي تعبير يمكن استخدامه لتكوين متطابقة فيها $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{1 + \tan\theta}$ حين تكون $\tan\theta \neq -1$؟ J

F $\sin\theta$
G $\cos\theta$
H $\tan\theta$
J $\csc\theta$

91. **مراجعة** أيٌّ مما يلي لا يساوي $\cos\theta$ عندما يكون $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ D

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$
B $\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$
C $\cot\theta \sin\theta$
D $\tan\theta \csc\theta$

92. **مراجعة** أيٌّ مما يلي يساوي $\sin\theta + \cot\theta \cos\theta$؟ G

F $2\sin\theta$
G $\frac{1}{\sin\theta}$
H $\cos^2\theta$
J $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta}$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب إكمال التمرين 63 بمفرده ثم بالتعاون مع زميل آخر. وينبغي أن يتبادل كل طالب المتطابقات المكتملة مع زميله ويرى إن كان بإمكان كل طالب إثبات صحة متطابقات الآخر أم لا. اطلب منهم التعاون للقيام بالشيء ذاته مع المتطابقة $\cot x$ بدلاً من $\frac{\cot x}{\sin x}$.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 244 12/15/2016 8:09:22 PM