4-3 حل المعادلات المثلثية

السابق..

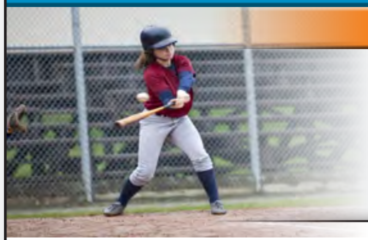
- لقد قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية.

الحالي..

1. حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
2. حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

لماذا؟..

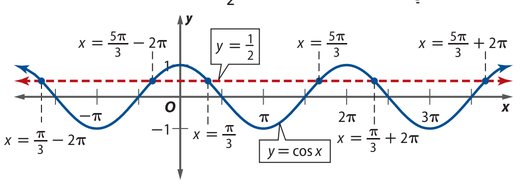
- كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بزاوية انطلاق θ وتعود إلى ارتفاع ضربها الإبتدائي بعد مسافة d من الأمتار. ولإيجاد سرعة v_0 للكرة بينما تنطلق من سطح المضرب، يمكنك حل المعادلة المثلثية $d = \frac{2{v_0}^2 \sin \theta \cos \theta}{9.8}$



1 استخدام الأساليب الجبرية للحل

في الدرس 4-2، قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية التي تكون صحيحة لجميع قيم المتغير في كلا الطرفين. وفي هذا الدرس، سندرس المعادلات المثلثية الشرطية والتي قد تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولكنها خاطئة عند القيم الأخرى.

فكّر في التمثيلات البيانية لكلا طرفي المعادلة المثلثية الشرطية $\cos x = \frac{1}{2}$



يوضح التمثيل البياني أن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلين بالفترة $[0, 2\pi)$، $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$. حيث إن دورة $y = \cos x$ هي 2π، فإن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلول لانهائية للفترة $(-\infty, \infty)$. يمكن إيجاد حلول إضافية بجمع مضاعفات الأعداد الصحيحة للفترات، بحيث يمكننا التعبير عن جميع الحلول كتابةً

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{و} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi،$$ حيث يكون n هو عدد صحيح.

لحل المعادلات المثلثية التي تضم تعبيرًا مثلثيًا واحدًا فقط، ابدأ بعزل هذا التعبير.

مثال 1 الحل بعزل التعابير المثلثية

حُل $2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$.

$2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$	المعادلة الأصلية
$\tan x - \sqrt{3} = 0$	اطرح $\tan x$ من كل طرف لعزل التعبير المثلثي
$\tan x = \sqrt{3}$	اجمع $\sqrt{3}$ على كل طرف

الدورة الخاصة بـــ tan هي π. لذا فأنت لا تحتاج إلا إيجاد الحلول بالفترة $[0, \pi)$. الحل الوحيد بهذه الفترة هو $x = \frac{\pi}{3}$. الحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ يتم إيجادها فيما بعد عن طريق جمع مضاعفات العدد الصحيح π. ولهذا، فالصيغة العامة للحل هي

$$x = \frac{\pi}{3} + n\pi،$$ حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

1. حُل $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-3 التحقق من المتطابقات المثلثية.

الدرس 4-3 حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
حل المعادلات المثلّثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

بعد الدرس 4-3 استخدام متطابقات المجموع والفرق لحل الدوال المثلّثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- في المعادلة المذكورة. ما الذي تمثله d؟ المسافة التي تقطعها الكرة بالمتر من وقت ضربها إلى أن تصل إلى نفس الارتفاع الذي ضربت عنده
- في المعادلة المذكورة. ما تأثير 2 على المعادلة؟ تُضرب زاوية الإطلاق في 2.

(يُتبع في الصفحة التالية)

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 245 12/15/2016 8:09:24 PM

- إذا كان كل من المسافة وزاوية الإطلاق معروفتين. فصِف الخطوات اللازمة لإيجاد السرعة الابتدائية. عوّض القيم المعطاة فيها لـ d و θ. ثم اضرب كلا الطرفين في 9.8. ثم احسب $\sin 2\theta$. واقسم كلا الطرفين على هذه القيمة. بعد ذلك استخدم الجذر التربيعي لكلا الطرفين.

1 استخدام الأساليب الجبرية لإيجاد الحل

المثال 1 يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق عزل التعبيرات المثلّثية. **والمثال 2** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق أخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين. **والمثال 3** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق تحليل العوامل. **والمثال 4** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية التي تتضمّن مضاعفات الزوايا.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حل $5 \cos x = 3 \cos x + \sqrt{3}$.

$\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$

2 أوجد حل $3 \tan^2 x - 4 = -3$.

$\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$

3 أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x$

$0, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}$

b. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

مثال 2 الحل بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

حُل $4 \sin^2 x + 1 = 4$.

$4 \sin^2 x + 1 = 4$	المعادلة الأصلية
$4 \sin^2 x = 3$	اطرح 1 من كل طرف
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$	اقسم كل طرف على 4
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	خُذ الجذر التربيعي لكل طرف

بالفترة $[0, 2\pi)$، $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حين يكون $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ وحين يكون $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.
بما أن دورة sin الزاوية هي 2π. فالحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ لها الصيغة العامة $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

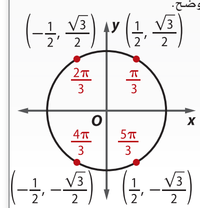
تمرين موجه

2. حُل $3 \cot^2 x + 4 = 7$. $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

نصيحة دراسية

إيجاد الحلول باستخدام دائرة الوحدة بما أن sin الزاوية يتوافق مع الإحداثي y بدائرة الوحدة.

فيمكنك إيجاد حلول sin بالفترة $[0, 2\pi]$ هي $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ باستخدام دائرة الوحدة كما هو موضح.



أي زاوية تشترك في ضلع الإنتهاء مع هذه الزوايا ستكون أيضًا حلاً للمعادلة.

حين لا يمكن جمع الدوال المثلثية على أحد طرفي معادلةٍ ما، جرّب طريقة التحليل الى العوامل وتطبيق خاصية ناتج الضرب الصفري. إذا كانت للمعادلة صيغة تربيعية، فحلل الى العوامل إن أمكن. وإذا تعذّر ذلك، فطبّق الصيغة التربيعية.

مثال 3 الحل باستخدام التحليل الى العوامل

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $\cos x \sin x = 3 \cos x$

$\cos x \sin \theta = 3 \cos x$		المعادلة الأصلية
$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$		اعزل التعبير المثلثي
$\cos x (\sin x - 3) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos x = 0$ أو	$\sin x - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$	$\sin x = 3$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi]$

المعادلة $\sin x = 3$ ليس لها حل حيث إن القيمة العظمى التي يمكن لدالة الــ Sine الزاوية الحصول عليها هي 1.
ولهذا، في الفترة $[0, 2\pi)$. إن حلول المعادلة الأصلية هي $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$.

b. $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$

$\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$		المعادلة الأصلية
$(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x - 2 = 0$		اكتب بالصيغة التربيعية
$(\cos^2 x + 2)(\cos^2 x - 1) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos^2 x + 2 = 0$ أو	$\cos^2 x - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\cos^2 x = -2$	$\cos^2 x = 1$	حُل لإيجاد $\cos^2 x$
$\cos x = \pm\sqrt{-2}$	$\cos x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف

المعادلة $\cos x = \pm\sqrt{-2}$ ليست لها حلول حقيقية. في الفترة $[0, 2\pi)$، المعادلة $\cos x = \pm 1$ لها حلان هما 0 و π.

تمرين موجه

3A. $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

3B. $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$ $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

انتبه!

القسمة على العوامل المثلثية لا تقسم $\cos x$ في المثال 3a. وإذا كنت ستفعل ذلك، فلاحظ أنك قد تستنتج أن المعادلة لم يكن لها حل، في حين أنها في الواقع لها حلان بالفاصل $[0, 2\pi)$.

مثال إضافي

4 المقذوفات أُطلق مقذوف بسرعة ابتدائية v_0 تبلغ 350 m/s وتجاوز سورًا على بعد 3000 m. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الابتدائي للمقذوف. إذا كانت المسافة التي قطعها المقذوف يعبّر عنها بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، فأوجد فاصل زوايا الإطلاق المحتملة لتجاوز السور.
$7.0° \le \theta \le 83.1°$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة في مدونة الصف، ينبغي على الطلاب كتابة مداخلة عن كيفية حل المعادلات المثلّثية. اطلب منهم وصف أوجه التشابه والاختلاف بين هذه العملية وحل الأنواع الأخرى من المعادلات.

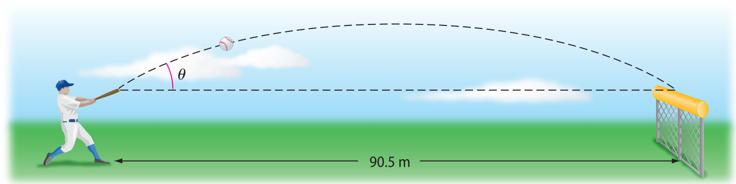
تشتمل بعض المعادلات المثلثية على دوال لأضعاف زوايا، مثل $\cos 2x = \frac{1}{2}$. ولحل هذه المعادلات، عليك أولاً حل أضعاف الزاوية.

نصيحة دراسية

الحلول الدقيقة مقابل الحلول التقريبية أثناء حل المعادلات المثلثية التي ليست في سياق من الحياة اليومية، اكتب إجاباتك باستخدام القيم الدقيقة بدلاً من التقريبات العشرية. فعلى سبيل المثال، الحلول العامة للمعادلة $\tan x = 2$ ينبغي التعبير عنها كما يلي $x = \tan^{-1} 2 + n\pi$ أو $x = \arctan 2 + n\pi$.

مثال 4 من الحياة اليومية الدوال المثلثية لأضعاف الزوايا

البيسبول كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بسرعة إبتدائية تبلغ 30 مترًا بالثانية وتتجاوز سورًا على بعد 90.5 مترًا. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الإبتدائي للكرة المضروبة. فإذا كانت المسافة التي قطعتها الكرة متمثلة في $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، حيث وحدة 9.8=متراً لكل ثانية مربعة. فأوجد فترة لزوايا الإطلاق المحتملة للكرة.



$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية
$90.5 = \frac{30^2 \sin 2\theta}{9.8}$	$d = 90.5$ و $v_0 = 30$
$90.5 = \frac{900 \sin 2\theta}{9.8}$	بسّط
$886.9 = 900 \sin 2\theta$	اضرب كل طرف في 9.8
$\frac{886.9}{900} = \sin 2\theta$	اقسم كل طرف على 900
$\sin^{-1} \frac{886.9}{900}$	تعريف Sin^{-1}

تعلمت سابقاً أن مدى دالة Sin^{-1} مقصور على الزوايا الحادة لـــ θ في الفترة $[-90°, 90°]$. بما أننا نوجِد Sin^{-1} الخاص بـــ 2θ بدلاً من θ، فنحن بحاجة إلى التفكير في الزوايا الموجودة في الفترة $[-2(90°), 2(90°)]$ أو $[-180°, 180°]$. استخدم حاسبتك لإيجاد علاقة الزاوية الحادة وزاوية المرجع $\sin \theta = \sin(180° - \theta)$ لإيجاد الزاوية المنفرجة.

$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} = 2\theta$	تعريف Sin^{-1}
$80.2° = 99°.8 = 2\theta$	$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} \approx 80.2°$ و $\sin(180° - 80.2°) = \sin 99.8°$
$40.1° = 49°.9 = \theta$	اقسم على 2

الفترة هي $[40°.1, 49°.9]$. ستتجاوز الكرة السور إذا كانت الزاوية بين 40°.1 و49°.9.

التحقق عوّض عن قياسات الزاوية في المعادلة الأصلية لتأكيد الحل.

$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية	$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$
$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 49.9°)}{9.8}$	$\theta = 40.1°$ أو $\theta = 49.9°$	$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 40.1°)}{9.8}$
$90.5 \approx 90.497$ ✓	استخدم حاسبة	$90.5 \approx 90.497$ ✓

نصيحة دراسية

الزاوية المثالية بتجاهل مقاومة الريح والعوامل الأخرى، ستقطع كرة البيسبول أطول مسافة حين تُضرب بزاوية °45. وهذا لأن $\sin 2(45) = 1$، والتي تزيد من مدى صيغة المسافة لأقصى حد في المثال.

تمرين موجه

4. **البيسبول** أوجد فترة زوايا الإطلاق المحتملة المطلوبة لتجاوز السور، إذا:
   A. تزايدت السرعة الإبتدائية لتصل إلى 35 مترًا بالثانية. **8.66° و23.2°**
   B. ظلت السرعة الإبتدائية كما هي، ولكن المسافة نحو السور كانت 80 مترًا. **7.59° و30.3°**

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التمرين الشخصي اطلب من الطلاب ابتكار عدد من المعادلات المثلّثية وإيجاد حلول لكل منها. اقترح عليهم إضافة مسألة جديدة للمجموعة كل يوم على مدار عدة أيام قادمة.

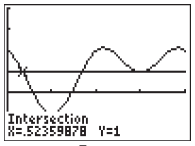
2 استخدام المتطابقات المثلثية للحل يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية مع الطرق الجبرية لحل المعادلات المثلثية.

مثال 5 الحل بإعادة الكتابة باستخدام دالة مثلثية واحدة

أوجد كل حلول $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ بالفترة $[0, 2\pi)$.

$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$	متطابقة فيثاغورس
$2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	اضرب
$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$	بسّط
$-1(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$	حلل العوامل
$2\sin x - 1 = 0 \quad = \quad \sin x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -1$	حُل لإيجاد $\sin x$
$x = \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi]$

التحقق التمثيلات البيانية التي تخص $Y_1 = 2\cos^2 x - \sin x$ و$Y_2 = 1$ تتقاطع في $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و$\frac{3\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi]$ كما هو موضح ✔

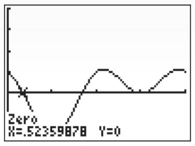


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

نصيحة دراسية

طريقة بديلة هناك طريقة بديلة للتحقق من المثال 5 وهي التمثيل البياني لما يلي $y = 2\cos^2 x - \sin x - 1$.

تتضمن أصفارًا $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

تمرين موجه

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

5A. $1 - \cos x = 2\sin^2 x$ $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

5B. $\cot^2 x \csc^2 x + 2\csc^2 x - \cot^2 x = 2$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ويمكنك أحيانًا الحصول على معادلة في دالة مثلثية واحدة من خلال تربيع كل طرف، ولكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى الوصول لحلول غير مترابطة.

مثال 6 الحل باستخدام التربيع

أوجد كل حلول $\csc x - \cot x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc x = 1 + \cot x$	اجمع $\cot x$ على كل طرف
$(\csc x)^2 = (1 + \cot x)^2$	قم بتربيع كل طرف
$\csc^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	اضرب
$1 + \cot^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2\cot x$	اطرح $1 + \cot^2 x$ من كل طرف
$0 = \cot x$	اقسم كل طرف على 2
$x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x على $[0, 2\pi]$

التحقق

$\csc x - \cot x = 1$	$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc \frac{3\pi}{2} - \cot \frac{3\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	$\csc \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	استبدل
$-1 - 0 \neq 1$ ✗	$1 - 0 = 1$ ✓	بسّط

ولهذا، فالحل المتاح الوحيد هو $\frac{\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi]$.

تمرين موجه

6A. $\sec x + 1 = \tan x$ π

6B. $\cos x = \sin x - 1$ $\pi, \frac{\pi}{2}$

2 استخدام المتطابقات المثلّثية لإيجاد الحل

المثال 5 يوضّح كيفية حل معادلة مثلّثية عن طريق إعادة كتابتها بدلالة دالة مثلّثية فردية. **المثال 6** يوضّح كيفية حل معادلة مثلّثية عن طريق تربيع كلا طرفي المعادلة.

أمثلة إضافية

5 أوجد جميع حلول $\sin^2 x - \sin x + 1 = \cos^2 x$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

6 أوجد جميع حلول $\sin x - \cos x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{2}, \pi$

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المعادلات الأساليب الجبرية ذاتها التي تُستخدم في حل المعادلات الأخرى، مثل استخدام خواص التساوي وخاصية التوزيع وتحليل العوامل والتمثيل البياني وتربيع كلا الطرفين، يمكن أن تُستخدم لحل المعادلات المثلّثية. لاحظ أنه قد يكون من الأسهل تحديد الأساليب الجبرية التي ستستخدمها عن طريق تعويض متغير لتعبير مثلّثي وحل المعادلة الناتجة ذات الصلة. وتعدّ المتطابقات المثلّثية أداة إضافية لحل هذه المعادلات. وبما أن الدوال المثلّثية دورية، فقد يكون هناك العديد من الحلول لهذه المعادلات.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 30 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يجد الطلاب صعوبة في تحليل عوامل التعابير التربيعية ذات القيم المثلّثية مثل تلك الموجودة في التمرين 13 ومن 16 إلى 18. إذا كان الأمر كذلك، فاطلب من الطلاب تحليل العوامل عن طريق تبديل الدالة المثلّثية بمتغير، ثم تحليل عوامل المعادلة، ثم إعادة الدالة المثلّثية إلى الصيغة محلَّلة العوامل للمعادلة.

إجابات إضافية

1–12. n هو عدد صحيح.

1. $\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$
2. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$
3. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$
4. $\frac{\pi}{4} + n\pi$
5. $\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi$
6. $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$
7. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$
8. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$
9. $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi$
10. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
11. $\frac{\pi}{3} + n\pi$
12. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$

تمارين

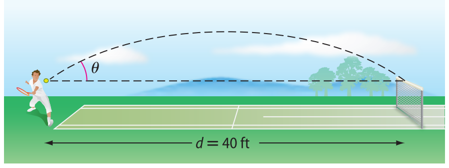
حُل كل معادلة لجميع قيم x. (المثالان 1 و2) **1–12. انظر الهامش.**

1. $5 \sin x + 2 = \sin x$
2. $5 = \sec^2 x + 3$
3. $2 = 4 \cos^2 x + 1$
4. $4 \tan x - 7 = 3 \tan x - 6$
5. $9 + \cot^2 x = 12$
6. $2 - 10 \sec x = 4 - 9 \sec x$
7. $3 \csc x = 2 \csc x + \sqrt{2}$
8. $11 = 3 \csc^2 x + 7$
9. $6 \tan^2 x - 2 = 4$
10. $9 + \sin^2 x = 10$
11. $7 \cot x - \sqrt{3} = 4 \cot x$
12. $7 \cos x = 5 \cos x + \sqrt{3}$

أوجد جميع حلول كل معادلة في $[0, 2\pi]$. (مثال 3)

13. $\sin^4 x + 2 \sin^2 x - 3 = 0$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
14. $-2 \sin x = -\sin x \cos x$ $0, \pi$
15. $4 \cot x = \cot x \sin^2 x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
16. $\csc^2 x - \csc x + 9 = 11$ $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
17. $\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 1$ $0, \pi$
18. $2 \sin^2 x = \sin x + 1$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

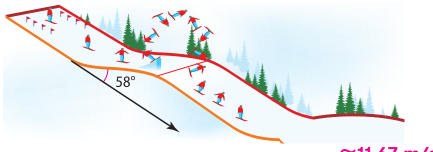
19. التنس كرة تنس تنطلق من سطح المضرب وتتجه نحو شبكة على بعد 40 قدمًا. وارتفاع الشبكة هو نفس الارتفاع الإبتدائي لكرة التنس. (مثال 4)



a. فإذا ضُربت الكرة بسرعة 50 قدمًا بالثانية، وبتجاهل مقاومة الهواء، فاستخدم $d = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$ لإيجاد فترة الزوايا المحتملة التي تحتاجها الكرة لعبور الشبكة. **[6.74° و 15.4°]**

b. أوجد θ إذا ظلت السرعة الإبتدائية كما هي ولكن المسافة نحو الشبكة كانت 50 قدمًا. **1.70° و 19.9°**

20. التزحلق على الجليد في المنافسة الأولمبية لرياضة التزحلق الهوائي على الجليد، يُسرع المتزحلقون نزولاً على منحدر يُطلقهم في الهواء، كما هو موضح. وأقصى ارتفاع يمكن للمتزحلق تحقيقه مُمثل فيما يلي $h_{peak} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث يكون g هو تسارع الجاذبية و تساوي 9.8 أمتار بالثانية المربعة. (مثال 4)



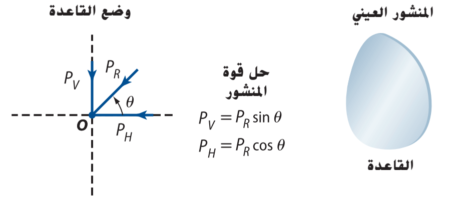
a. إذا حقق متزحلق ارتفاع 5 أمتار أعلى نهاية المنحدر، فماذا كانت سرعته الإبتدائية؟ **≈11.67 m/s**

b. استخدم إجابتك من الجزء **a** لتحديد الزمن الذي يستغرقه المتزحلق ليصل لأقصى ارتفاع إذا كانت $t_{peak} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$. **≈1.0 s**

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (المثالان 5 و6)

21. $1 = \cot^2 x + \csc x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
22. $\sec x = \tan x + 1$ 0
23. $\tan^2 x = 1 - \sec x$ $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
24. $\csc x + \cot x = 1$ $\frac{\pi}{2}$
25. $2 - 2 \cos^2 x = \sin x + 1$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
26. $\cos x - 4 = \sin x - 4$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
27. $3 \sin x = 3 - 3 \cos x$ $\frac{\pi}{2}, 0$
28. $\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x = 9$ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
29. $\sec^2 x - 1 + \tan x - \sqrt{3} \tan x = \sqrt{3}$ $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$
30. $\sec^2 x \tan^2 x + 3 \sec^2 x - 2 \tan^2 x = 3$ $0, \pi$

31. فحص البصر يضم أخصائيو فحص البصر أحيانًا منشورين منحرفين أو مائلين لتصحيح الرؤية. القوة الانكسارية الناتجة P_R عن ضم منشورين منحرفين يمكن حسابها عن طريق تحليل كل منشور إلى مكوناته الأفقية والرأسية، P_H وP_V. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$



باستخدام المعادلات أعلاه، حدد قيم θ التي يكون فيها كلٌّ من P_V وP_H متساويين.

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

32. $\frac{\tan^2 x}{\sec x} + \cos x = 2$
33. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = -4$
34. $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x} + \frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cos x$ **لا يوجد حل**
35. $\cot x \cos x + 1 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{\sin x}{\tan^2 x}$

الحاسبة البيانية حُل كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi]$ عن طريق التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزء من مائة.

36. $3 \cos 2x = e^x + 1$ **0.33**
37. $\sin \pi x + \cos \pi x = 3x$ **0.41**
38. $x^2 = 2 \cos x + x$ **1.34**
39. $x \log x + 5x \cos x = -2$ **1.84, 4.49**

خيارات الواجبات المنزلي المتمايزة OL BL AL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–30, 57, 60–78	1–29 فردي، 75–78	2–30 زوجي، 57، 60–74
OL ضمن المستوى	1–39 فردي، 40، 41–55 فردي، 56، 57، 60–78	1–30, 75–78	31–57, 60–74
BL أعلى من المستوى	31–78		

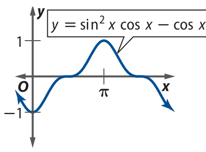
40. **الأرصاد الجوية** متوسط درجة الحرارة اليومية لإحدى المدن بدرجات الفهرنهايت يمكن تمثيله بما يلي $t = 8.05 \cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 66.95$، حيث تكون x دالة عن الزمن، وتمثل $x = 1$ يوم 15 يناير، وتمثل $x = 2$ يوم 15 فبراير وهكذا. **61.3°**

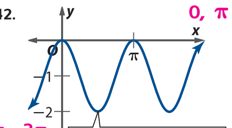
a. استخدم حاسبة بيانية لتقدير درجة الحرارة يوم 31 يناير.

b. قرّب عدد الشهور التي يكون فيها متوسط درجة الحرارة أكبر من 70 درجة على مدار الشهر. **3**

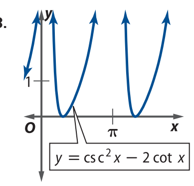
c. قدّر أعلى درجة حرارة في العام والشهر الذين تحدث فيهما.
75°، يونيو

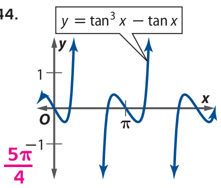
أوجد التقاطع مع المحاور الأفقية x لكل تمثيل بياني بالفترة $[0, 2\pi]$.

41. 

42. **0, π**


$\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$

43. 

44. 

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$

$0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

أوجد جميع حلول كل معادلة بالفترة $[0, 4\pi]$.
45–48. انظر الهامش.

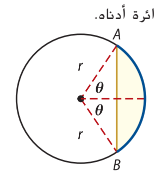
45. $4 \tan x = 2 \sec^2 x$

46. $2 \sin^2 x + 1 = -3 \sin x$

47. $\csc x \cot^2 x = \csc x$

48. $\sec x + 5 = 2 \sec x + 3$

49. **الهندسة** فكّر في الدائرة أدناه.



a. طول s للقوس AB يتمثل في $s = r(2\theta)$ حيث يكون $0 \le \theta \le \pi$. حين يكون $s = 18$ و$AB = 14$، فنصف القطر هو $r = \frac{7}{\sin\theta}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس 2θ بالراديان.

2.39 راديان

b. مساحة المنطقة المظللة تتمثل في $A = \frac{r^2(\theta - \sin\theta)}{2}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس θ بالراديان إذا كان نصف القطر هو 5 بوصات والمساحة هي 36 بوصة مربعة. قرّب إلى أقرب جزء من المئة. **3.01 راديان**

حل كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi)$. **50–55. انظر الهامش**

50. $1 > 2 \sin x$

51. $0 < 2 \cos x - \sqrt{2}$

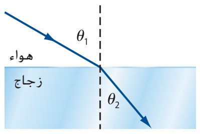
52. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

53. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \le \tan x \cot x$

54. $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\sqrt{2} \sin x - 1 < 0$

56. **انكسار الضوء** حين ينتقل الضوء من وسط شفاف لوسطٍ آخر شفاف فإنه ينحني أو ينكسر، كما هو موضح.



يوصف انكسار الضوء بما يلي $n_2 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2$، حيث يكون n_1 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يدخله الضوء، ويكون n_2 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يخرج منه الضوء، ويكون θ_1 هو زاوية السقوط، ويكون θ_2 هو زاوية الانكسار.

المادة	معامل الانكسار
الزجاج	1.52
الجليد	1.31
البلاستيك	1.50
المياه	1.33

a. أوجد θ_2 لكل مادة موضحة إذا كانت زاوية السقوط هي 40° ومعامل انكسار الهواء هو 1.00.

b. إذا تضاعفت زاوية السقوط لتصل إلى 80°، فهل ستكون زوايا الانكسار الناتجة أكبر بمرتين من تلك الزوايا الموجودة في الجزء a؟ **لا**

56a. الزجاج = 0.25°، والجليد = 4.29°، والبلاستيك = 4.25°، والمياه = 9.28°

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **تحليل الخطأ** يحاول عامر وطارق حل ما يلي $\tan^2 x - \tan x + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan x$. يظن عامر أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$، و$x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$، و $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$، و $x = \frac{4\pi}{3} + n\pi$. ويظن طارق أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. هل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

58. $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

تحدٍّ **حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.**

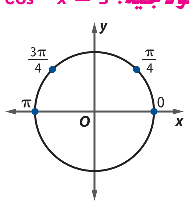
58. $16 \sin^5 x + 2 \sin x = 12 \sin^3 x$

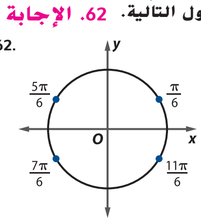
59. $4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3$

59. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

60. **التبرير** هل الحلان $\csc x = \sqrt{2}$ و $\cot^2 x + 1 = 2$ متساويان؟ إذا كانتا كذلك، فتحقق من صحة إجابتك جبريًا. وإذا لم تكونا متساويتين، فاشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

مسألة ذات إجابة مفتوحة **اكتب معادلة مثلثية بها كل حل من الحلول التالية.** **62. الإجابة النموذجية: $4 \cos^2 x = 3$**

61. 

62. 

الإجابة النموذجية:

63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق في الأساليب التي تُستخدم أثناء حل المعادلات والتحقق من صحة المتطابقات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

إجابات إضافية

45. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$

46. $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}, \frac{23\pi}{6}$

47. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

48. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 250 12/15/2016 8:09:34 PM

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة. 64-66. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

64. $\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta-1}$

65. $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

66. $\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\csc^2\theta}=1$

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

67. $\tan\theta$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta>0$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

68. $\csc\theta$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\csc\theta<0$ $-\frac{5}{4}$

69. $\sec\theta$, $\tan\theta=-1$, $\sin\theta<0$ $\sqrt{2}$

70. **تعداد الأحياء** يمكن تمثيل تعداد نوع معين من الغزلان بالدالة $p=30000+20000\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$، حيث p هو التعداد و t هو الزمن بالأعوام.

a. ما سعة الدالة؟ ما الذي تمثله؟ **a. 2,0000؛ تختلف قيمة التعداد لمقدار أكثر من 30,000 وأقل منه**

b. ما دورة الدالة؟ ما الذي تمثله؟ **b. 20 عامًا؛ يعود التعداد إلى مقداره الأصلي بعد 20 عامًا.**

c. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

بفرض أن $f(x)=2x^2-5x+3$ و $g(x)=6x+4$، أوجد كلاً مما يلي.

71. $(f-g)(x)$ $(f-g)(x)=2x^2-11x-1$

72. $(f\times g)(x)$ $(f\times g)(x)=12x^3-22x^2-2x+12$

73. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

74. **الأعمال التجارية** ينبغي على صاحب شركة صغيرة توظيف عمال موسميين حسب تزايد حاجته للعمال. توضح القائمة التالية عدد الموظفين الذين يتم توظيفهم شهريًا لمدة 5 شهور.

الشهر	عدد الموظفين الإضافيين
أغسطس	5
سبتمبر	14
أكتوبر	6
نوفمبر	8
ديسمبر	12

فإذا كان متوسط هذه البيانات هو 9، فما الانحراف المعياري للتعداد لهذه البيانات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **3.5**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** بالنسبة لكل القيم الموجبة لـ m وn، إذا كان $\frac{3x}{m-nx}=2$, then $x=$ **D**

A $\frac{2m-2n}{3}$

B $\frac{3+2n}{2m}$

C $\frac{2m-3}{2n}$

D $\frac{2m}{3+2n}$

E $\frac{3}{2m-2n}$

76. إذا كان $\cos x=-0.45$، فما هي $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$؟ **H**

F -0.55

G -0.45

H 0.45

J 0.55

77. أيّ مما يلي ليس حلّا لما يلي: $\sin\theta+\cos\theta\tan^2\theta=0$؟ **D**

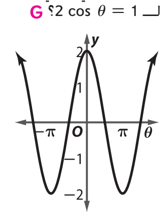
A $\frac{3\pi}{4}$

B $\frac{7\pi}{4}$

C 2π

D $\frac{5\pi}{2}$

78. **مراجعة** فيما يلي التمثيل البياني الذي يخص $y=2\cos\theta$. أيّ مما يلي هو حل لـ $2\cos\theta=1$؟ **G**



F $\frac{8\pi}{3}$

G $\frac{10\pi}{3}$

H $\frac{13\pi}{3}$

J $\frac{15\pi}{3}$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطرح المسألة التالية.

في المعادلة $\frac{a}{2}+d=d+a\sin(bx+c)$، حيث تكون $a\neq0, c, d$ أي أعداد حقيقية. وتكون b عددًا صحيحًا موجبًا. فكم عدد الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi)$؟ $2b$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 57. على الطلاب إدراك أن الإجابتين متماثلتان حيث $n=1, \frac{\pi}{4}+n\pi$ تساوي $\frac{3\pi}{4}$. الحلّان صحيحان.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من كل طالب أن يخبر زميله أو أن يكتب خطوات حل $2\sin^2x+2=3$.

الإجابة النموذجية: اعزل الدالة المثلّثية في طرف واحد من المعادلة، ثم استخدم معكوس الجيب لإيجاد قيمة المتغير.

إجابات إضافية

50. $0\le x<\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$

51. $0\le x<\frac{\pi}{4}$ أو $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$

52. $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$

53. $0\le x<2\pi$

54. $\frac{5\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$

55. $0\le x<\frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}<x<2\pi$

57. كلاهما. الإجابة النموذجية: حلول عامر صحيحة، لكن صيغتها ليست في أبسط صورة. فعلى سبيل المثال. حلوله لـ $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ و $x=\frac{5\pi}{4}+n\pi$ يمكن أن تكون ببساطة $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ حيث إن $n=1$. $\frac{\pi}{4}+n\pi$ تساوي $\frac{5\pi}{4}$.

60. لا. الإجابة النموذجية: حلول $\csc x=\sqrt{2}$ هي $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ باستخدام متطابقة فيثاغورس. $\cot^2x+1=2$ تحوّل لأبسط صورة إلى $\csc^2x=2$ أو $\csc x=\pm\sqrt{2}$. إذًا هناك إجابتان إضافيتان حيث $\frac{7\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$: $\csc x=-\sqrt{2}$.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 251 12/15/2016 8:09:35 PM

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المتباينات المثلّثية.

نصيحة للتدريس

تأكّد من أن حاسبات الطلاب تعمل على وضع الراديان (الزاوية نصف قطرية).

أكّد على الطلاب أنهم يبحثون عن الفترة؛ مما يعني أنهم يستطيعون استخدام خاصية التقاطع لإيجاد نقطة البداية ونقطة النهاية لكل فترة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. واطلب منهم إكمال النشاط والتمرين 1.

تحقّق من أن الطلاب يجدون التقاطعات التي تحدّد المناطق المظلّلة الداكنة للغاية. قد يحتاجون إلى التمرير بجانب واحدة من الدوال ليقتربوا من نقطة التقاطع.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 2 إلى 6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 3 و 4 لتقييم قدرة الطلاب على استخدام التمثيلات البيانية للمتباينات لتحديد الحل.

التوسع

4-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المتباينات المثلّثية

الهدف:

- استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية.

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية. مثّل كل متباينة بيانيًا. ثم حدّد موقع نقاط نهاية كل تقاطع على التمثيل البياني لإيجاد الفواصل التي تكون المتباينة فيها صحيحة.

نشاط 1 تمثيل متباينة مثلّثية بيانيًا

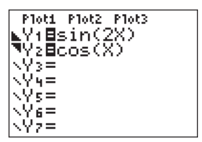
مثّل بيانيًا وأوجد حل $\sin 2x \geq \cos x$.

الخطوة 1 استبدل كل طرف من هذه المتباينة بالمتغير y لصياغة المتباينات الجديدة.

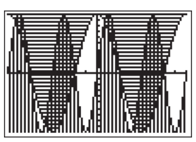
$Y_1 \geq \sin 2x$ و $\cos x \geq Y_2$

الخطوة 2 مثّل كل متباينة بيانيًا. واجعل لكل متباينة رمزًا بالانتقال إلى يسار علامة التساوي واختيار ENTER إلى أن تومض المثلّثات المظلّلة. يمثّل المثلّث العلوي أكبر من، ويمثّل المثلّث السفلي أقل من (الشكل 4.3.1). في القائمة MODE اختر RADIAN.

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة. استخدم مجال ومدى كل دالة مثلّثية كدليل (الشكل 4.3.2).



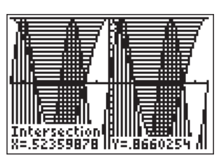
الشكل 4.3.1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الشكل 4.3.2

الخطوة 4 تشير المنطقة المظلّلة بلون داكن لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم CALC: intersect لتحديد مواقع هذه التقاطعات. حرّك المؤشر فوق التقاطع واختر ENTER ثلاث مرات.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الخطوة 5 يحدث التقاطع الأول عندما تكون $y = 0.866$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$. وبما أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$، يكون التقاطع عند $x = \frac{\pi}{6}$. ويكون التقاطع التالي عند $x = \frac{\pi}{2}$. إذًا، إحدى فترات الحل هي $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. والفترة الأخرى هي $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$. هناك عدد لا نهائي من الفترات، وإذًا تكون حلول كل قيم x هي $\left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ و$\left[\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

تمارين

مثّل كل متباينة بيانيًا وأوجد حلًا لها. **1-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1. $\sin 3x < 2 \cos x$
2. $3 \cos x \geq 0.5 \sin 2x$
3. $\sec x < 2 \cos x$
4. $\csc 2x > \sin 8x$
5. $2 \tan 2x < 3 \sin 2x$
6. $\tan x \geq \cos x$

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلّموه بشأن المتباينات المثلّثية. اطلب منهم ذكر أمثلة.

الدروس من 4-1 إلى 4-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقييم تقدّم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بإجابات خاطئة، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

الوحدة 4 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 4-1 إلى 4-3

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (الدرس 4-1)

.1 $\sin\theta$ و $\cos\theta > 0$, $\cot\theta = 4$, $\cos\theta$ $\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}$

.2 $\sec\theta$ و $\csc\theta > 0$, $\tan\theta = -\frac{2}{3}$, $\sin\theta$ $-\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13}$

.3 $\tan\theta$ و $\sin\theta > 0$, $\cos\theta = \frac{1}{4}$, $\csc\theta$ $\sqrt{15}, \frac{4\sqrt{15}}{15}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 4-1)

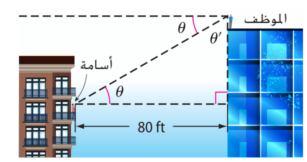
4. $\frac{\sin(-x)}{\tan(-x)}$ $\cos x$

5. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$ $\tan^2 x$

6. $\frac{\sin(90° - x)}{\cot^2(90° - x) + 1}$ $\cos^3 x$

7. $\frac{\sin x}{1 + \sec x}$ $\cot x - \cot x \cos x$

.8 **زاوية الانخفاض** يستطيع أسامة أن يرى من نافذة شقّته قمة مبنى البنك في الجهة المقابلة من الشارع من زاوية ارتفاع θ، كما هو موضّح أدناه. (الدرس 4-1)



.a إذا نظر موظّف بالبنك من أعلى المبنى إلى الأسفل ناحية شقّة أسامة، فما المتطابقة التي يمكن استخدامها لاستنتاج أن $\sin\theta = \cos\theta'$؟ $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$

.b إذا نظر أسامة إلى الأسفل ناحية إحدى النوافذ السفلية للبنك من زاوية انخفاض 35°، فكم سيكون بُعد نافذة البنك أسفل شقّته؟ حوالي 56 ft

9 **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية لا يساوي $\csc\theta$؟ (الدرس 4-1) D

A $\sec(90° - \theta)$

B $\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

C $\frac{1}{\sin\theta}$

D $\frac{1}{\sin(90° - \theta)}$

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 4-2) 10–15. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

10. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta = 0$

12. $\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} = \csc\theta$

13. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

14. $\frac{\csc\theta}{\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{\cos\theta} = \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\csc\theta}{1 - \sin\theta}$

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (الدرس 4-3)

16. $4\sec\theta + 2\sqrt{3} = \sec\theta$ $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

17. $2\tan\theta + 4 = \tan\theta + 5$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

18. $4\cos^2\theta + 2 = 3$ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

19. $\cos\theta - 1 = \sin\theta$ $0, \frac{3\pi}{2}$

.20 **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية يُمثل مجموعة حل $\cos\theta\tan\theta - \sin^2\theta = 0$؟ (الدرس 4-3) J

F $\frac{\pi}{2}n$، حيث يكون n عددًا صحيحًا

G $\frac{\pi}{2} + n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا

H $\pi + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا

j $n\pi$حيث يكون n عددًا صحيحًا

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ. (الدرس 4-3)

21. $3\sin^2\theta + 6 = 2\sin^2\theta + 7$ $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

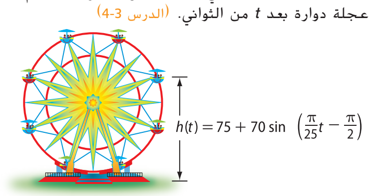
22. $\sin\theta + \cos\theta = 0$ $\frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

23. $\sec\theta + \tan\theta = 0$ لا يوجد حل

24. $3 - 3\cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta$ $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

.25 **حركة المقذوف** إن المسافة d بالقدم التي تقطعها كرة تمّ ركلها بتسارع 32 قدمًا في الثانية المربّعة موضحة من خلال $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$، حيث v_0 هي السرعة المبدئية للجسم وθ هي الزاوية التي تم إطلاق الجسم منها. إذا تمّ ركل الكرة بسرعة مبدئية تبلغ 82 قدمًا في الثانية، وقطعت 185 قدمًا، فأوجد الزاوية (الزوايا) الممكنة التي تم إطلاق الكرة منها. (الدرس 4-3) 30.8°, 59.2°

.26 **العجلة الدوارة** فيما يلي أدناه موضح ارتفاع h بالقدم لراكب على عجلة دوارة بعد t من الثواني. (الدرس 4-3)



.a إذا كانت العجلة الدوارة تبدأ عند $t = 0$ ، فكم سيكون الارتفاع الإبتدائي للراكب؟ 5 ft

.b متى سيصل الراكب أول مرة للحد الأقصى للارتفاع عند 145 قدمًا؟ 25 ثانية

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 253 12/15/2016 8:09:39 PM