1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-4 إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

الدرس 4-4 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية.
استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.

بعد الدرس 4-4 استخدام متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

- كيف ترتبط الدوال المثلثية بترددات التلفاز والراديو؟ تنتقل هذه الترددات في موجات يمكن تمثيلها باستخدام الدوال المثلثية.

الدرس 4-4 متطابقات المجموع والفرق

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
• أوْجَدْت قيم الدوال المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.	1 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية. 2 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.	• عندما تكون الصورة على شاشة التليفزيون مشوّشة، أو عندما لا يعمل توليف محطة إذاعية على نحو صحيح، تكون المشكلة غالبًا بسبب *التداخل في الإشارات*. ويحدث هذا التداخل عندما تمر الموجات في الفراغ ذاته في نفس الوقت. يمكنك استخدام المتطابقات المثلّثية لتحديد نوع التداخل الذي يحدث.

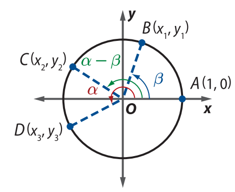
المفردات الجديدة

متطابقة اختزال
reduction identity

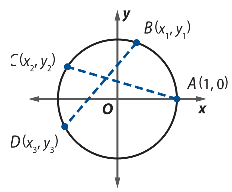
1 إيجاد قيمة الدوال المثلّثية

لقد استخدمتَ متطابقات أساسية تشتمل على متغير واحد فقط. لكن في هذا الدرس، سنستخدم متطابقات تشتمل على متغيرين. إحدى هذه المتطابقات متطابقة *الفرق* لـــ *cosine*.

حدّد مواقع للنقاط A و B و C و D على دائرة الوحدة، واجعل α و β زوايا في الفترة $[0, 2\pi]$، و$\alpha > \beta$ كما هو موضّح في الشكل 4.4.1. لأن كل نقطة لها موقع على دائرة الوحدة، فإن $x_1^2 + y_1^2 = 1$ و $x_2^2 + y_2^2 = 1$ و $x_3^2 + y_3^2 = 1$.
لاحظ أيضًا أن قياس $\text{arc } CD = \alpha - (\alpha - \beta)$ أو β وقياس $\text{arc } AB = \beta$.



الشكل 4.4.1



الشكل 4.4.2

بما أن arcs AB و CD لهما نفس القياس، إذًا يكون الوتران AC و BD الموضحان في الشكل 4.4.2 متطابقين.

$AC = BD$	الوتران AC و BD متطابقان.
$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2$	قم بتربيع كل ذات حدّين.
$(x_2^2 + y_2^2) - 2x_2 + 1 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_3^2 + y_3^2) - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	جمّع الحدود التربيعية المتشابهة.
$1 - 2x_2 + 1 = 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	التعويض
$2 - 2x_2 = 2 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اجمع.
$-2x_2 = -2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اطرح 2 من كل طرف.
$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$	اقسم كل طرف على -2.

في الشكل 4.4.1، لاحظ أنه وفقًا لتعريفات دائرة الوحدة لـــ sin and cos، فإن $x_1 = \cos\beta$ و $x_2 = \cos(\alpha - \beta)$ و $x_3 = \cos\alpha$ و $y_1 = \sin\beta$ و $y_3 = \sin\alpha$. وعند التعويض، فإن $x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$ تصبح $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. متطابقة الفرق لـــ cos

يمكننا الآن الحصول على متطابقة المجموع لـــ cosine.

$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$	$\cos(-\beta) = \cos(\beta), \sin\beta = -\sin(-\beta)$
$\cos[\alpha + \theta] = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$	اجعل $(-\beta) = \theta$

يمكن استخدام متطابقتي cosine هاتين لإثبات كل من متطابقات المجموع والفرق الأخرى المدرجة أدناه.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

متطابقات الفرق

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

سوف تُثبِت متطابقات المجموع والفرق لــ sin ولــ tan في التمارين 57–60.

من خلال كتابة قياسات الزاوية بصيغة مجاميع أو فروق قياسات خاصة للزاوية، يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق هذه لإيجاد قيم دقيقة للدوال المثلّثية للزوايا الأقل شيوعًا.

مثال 1 إيجاد قيمة تعبير مثلّثي

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\sin 15°$

اكتب 15° بصيغة مجموع أو فرق قياسات زاوية تعرفُ قيمة جيوبها.

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$	$45° - 30° = 15°$
$= \sin 45°\cos 30° - \sin 30°\cos 45°$	متطابقة الفرق لــ sin
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$	أوجد ناتج الضرب.
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	جمّع الكسور.

b. $\tan \frac{7\pi}{12}$

$\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$
$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$	متطابقة المجموع لــ tan
$= \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}(1)}$	$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ و $\tan\frac{\pi}{4} = 1$
$= \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$	بسّط
$= \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	طبّق إنطاق المقام (تخليصه من الجذر التربيعي).
$= \dfrac{\sqrt{3} + 1 + 3 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}$	أوجد ناتج الضرب.
$= \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{-2}$	بسّط

تمرين موجه

1A. $\cos 15°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

1B. $\sin \frac{5\pi}{12}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

نصيحة دراسية

تحقّق من إجابتك يمكنك التحقّق من إجاباتك عن طريق استخدام الحاسبة البيانية. في المثال 1a، إن $\sin 15° \approx 0.259$ و $0.259 \approx \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. تأكّد من أن الحاسبة في الإعداد الصحيح.

- اذكر بعض الطرق لمنع التداخل. الإجابات النموذجية: تغيير التردد؛ أغلق التردد المتداخل إذا كان المصدر يمكن تحديده.

1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

توضح الأمثلة 3-1 كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة للتعبير المثلثي. يوضح **المثال 4** كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعبير المثلثي في صورة تعبير جبري لا يتضمن دوال مثلثية. يوضح **المثالان 5 و 6** كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة ومتطابقات الانخفاض.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\cos 75°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b. $\tan \frac{11\pi}{12}$ $\quad -2 + \sqrt{3}$

نصيحة للمعلمين الجدد

الحلول الدقيقة رغم أن القيمة التقريبية لتعبيرات مثل $\sin 15°$ يمكن إيجادها بسرعة وبسهولة باستخدام الحاسبة، فذكّر الطلاب أن الحاسبة لا تعطي حلولاً دقيقة. وبالتالي يمكن استخدام متطابقات المجموع أو الفرق لإيجاد الحلول الدقيقة.

انتبه!

متطابقات المجموع والفرق أكّد على الطلاب ألا يعتقدوا فيما يتعلق بالدوال المثلثية أن $f(x + y) = f(x) + f(y)$. وبوجه عام، $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$, and $\tan(\alpha + \beta) \neq \tan\alpha + \tan\beta$.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 255 12/15/2016 8:09:43 PM

أمثلة إضافية

2 **الكهرباء** يمكن إيجاد قيمة التيار المتردد i بوحدة الأمبير في دائرة معينة بعد t ثانية باستخدام $i = 4\ (\sin 255)t$.

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين.
$i = 4 \sin (210 + 45)t$

b. استخدم متطابقة جيب المجموع لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.
$-\sqrt{2} - \sqrt{6}$ أمبير

3 **a.** أوجد القيمة الدقيقة لـ $\dfrac{\tan 78° - \tan 18°}{1 + \tan 78° \tan 18°}$. $\sqrt{3}$

b. حوّل sin لأبسط صورة $\dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{3} \sin \dfrac{\pi}{4}$. $\sin \dfrac{7\pi}{12}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر بعض الطلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة تطبيق المجموع والفرق لمتطابقات الزوايا.

غالبًا ما تُستخدم متطابقات المجموع والفرق لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متطابقة المجموع أو الفرق

الكهرباء **يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة بعينها بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 3\ (\sin 165)t$، حيث 165 هي قياس الدرجة.**

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين.

$i = 3 (\sin 165)t$ المعادلة الأصلية

$= 3 [\sin (120 + 45)]t$ $120 + 45 = 165$

b. استخدم متطابقة المجموع لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

$i = 3 [\sin (120 + 45)]t$ معادلة أعيدت كتابتها

$= 3 \sin (120 + 45)$ $t = 1$

$= 3[(\sin 120)(\cos 45) + (\cos 120)(\sin 45)]$ متطابقة المجموع لـ sin

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ عوّض.

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ أوجد ناتج الضرب.

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بسّط

التيار الدقيق بعد ثانية واحدة هو $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بوحدات الأمبير.

تمرين موجه

2. **الكهرباء** يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة أخرى بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 2\ (\sin 285)t$، حيث 285 هي قياس الدرجة. $2\ [\sin (315 - 30)]t$

A. أعد كتابة القاعدة بدلالة فرق قياسات زاويتين.

B. استخدم متطابقة الفرق لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة. $\dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ أمبير

مهن من الحياة اليومية

فني التوصيلات السلكية فنيو التوصيلات السلكية هم المسئولون عن إنشاء مرافق نقل وتوزيع القدرة الكهربائية وصيانتها. ويطلق هذا المصطلح أيضا على الفنيين الذين يقومون بتثبيت الهواتف وأجهزة التليفزيون الكبلي وخطوط الألياف الضوئية وصيانتها.

إذا كان التعبير المثلّثي له صيغة متطابقة المجموع أو الفرق، تستطيع حينها استخدام المتطابقة لإيجاد قيمة دقيقة أو لتحويل تعبير إلى أبسط صورة عن طريق إعادة كتابة التعبير بصفته دالة لزاوية واحدة.

مثال 3 إعادة الكتابة في صيغة تعبير مثلّثي واحد

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°}$.

$\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°} = \tan (32° + 13°)$ متطابقة المجموع لـ tan

$= \tan 45° = 1$ بسّط

b. حوّل لأبسط صورة: $\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x$.

$\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x = -(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)$ خاصيتا التوزيع والتبديل

$= -\cos (x + 3x) = -\cos 4x$ متطابقة المجموع لـ tan

تمرين موجه

3A. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\frac{7\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24}$. $-\dfrac{1}{2}$

3B. حوّل لأبسط صورة: $\frac{\tan 6x - \tan 7x}{1 + \tan 6x \tan 7x}$. $-\tan x$

256 | الدرس 4-4 | متطابقات المجموع والفرق

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة تعابير مثلّثية بصفتها تعابير جبرية.

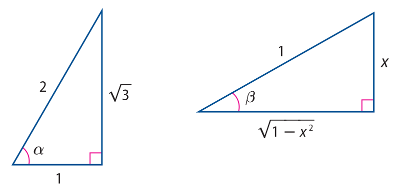
مثال 4 الكتابة بصيغة تعبير جبري

اكتب $\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x)$ بصيغة تعبير جبري لـ x بحيث لا يشتمل على دوال مثلّثية.

عند تطبيق متطابقة المجموع لـ sin ، نجد أن

$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$.

إذا فرضنا أن $\alpha = \arctan\sqrt{3}$ و $\beta = \arcsin x$، إذًا تكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ارسم مثلّثًا قائم الزاوية بزاوية حادة α وآخر بزاوية حادة β. قم بتسمية الأضلاع على أن يكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ثم استخدم مبرهنة فيثاغورس للتعبير عن طول كل ضلع ثالث.



باستخدام هذين المثلثين، نجد أن $\sin(\arctan\sqrt{3}) = \sin\alpha$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos(\arctan\sqrt{3}) = \cos\alpha$ أو $\frac{1}{2}$ أو $\cos(\arcsin x) = \cos\beta$ or $\sqrt{1-x^2}$ و $\sin(\arcsin x) = \sin\beta$ أو x.

الآن قم بالتعويض وحوّل لأبسط صورة.

$$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x+\sqrt{3-3x^2}}{2}$$

تمرين موجه

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري.

4A. $\cos(\arcsin 2x + \arccos x)$ **4A.** $x\sqrt{1-4x^2} - 2x\sqrt{1-x^2}$

4B. $\sin\left(\arctan x - \arccos\frac{1}{2}\right)$ **4B.** $\frac{x-\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+3}}{2x^2+2}$

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات الأخرى.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة

اثبت صحة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$ — متطابقة الفرق لـ sin

$= 1(\cos x) - 0(\sin x)$ — $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \cos x$ ✔ — أوجد ناتج الضرب.

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق. 5A–B. انظر الهامش.

5A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

5B. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

قراءة في الرياضيات

الدوال المثلّثية و تمامها(co) متساوية القيمة كلمة "co" هنا تعني "تمام". ولـذا تعدّ دوال **sine and cosine, tan and cotan, secant and cosecant** أزواج دوال متساوية القيمة لزوايا متتامة.

أمثلة إضافية

4 اكتب $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos x\right)$ في صورة تعبير جبري للقيمة x التي لا تتضمن دوال مثلثية.

$\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2}$ or $\frac{x-\sqrt{3-3x^2}}{2}$

5 أثبت صحة $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}\cos(-\theta) &= \cos(0-\theta)\\ &= \cos 0\cos\theta + \sin 0\sin\theta\\ &= 1\cos\theta + 0\sin\theta\\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

التركيز على محتوى الرياضيات

متطابقات المجموع والفرق إذا كان الطلاب على علم بضرب المصفوفة 2 × 2، فإنه يمكن كتابة قواعد جيب الزاوية وجيب التمام في شكل مصفوفة، كما هو موضح.

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A. $$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x\\ &= 0(\cos x) + 1(\sin x)\\ &= \sin x\end{aligned}$$

5B. $$\begin{aligned}\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\\ &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}\\ &= \frac{1}{(1)\cos\theta - (0)\sin\theta}\\ &= \frac{1}{\cos\theta}\\ &= \sec\theta\end{aligned}$$

التدريس المتمايز AL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي من الصعوبات التي يواجهها الطلاب في تعلم الرياضيات هي تفسير الرموز. اطلب من الطلاّب تدوين كل متطابقة في هذا الدرس باستخدام المفردات بدلاً من الترميز الرياضي.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 257 12/15/2016 8:09:45 PM

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعبيرات المثلّثية التي تكون إحدى الزوايا بها مضاعف 90° أو $\frac{\pi}{2}$ بمقياس الزاوية النصف قطرية (راديان). تسمى المتطابقة الناتجة **متطابقة اختزال** لأنها تختزل صعوبة التعبير.

مثال 6 إثبات صحة متطابقات الاختزال

اثبت صحة كل متطابقة اختزال.

a. $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{3\pi}{2}$ قانون المجموع لـ sin

$= \sin\theta(0) + \cos\theta(-1)$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ و $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$= -\cos\theta$ ✔ بسّط

b. $\tan(x - 180°) = \tan x$

$\tan(x - 180)° = \frac{\tan x - \tan 180°}{1 + \tan x \tan 180°}$ متطابقة المجموع لـ tan

$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x(0)}$ $\tan 180° = 0$

$= \tan x$ ✔ بسّط

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة.

6A. $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

6A. $\cos(360° - \theta)$
$= \cos 360° \cos\theta +$
$\sin 360° \sin\theta$
$= 1(\cos\theta) +$
$0(\sin\theta)$
$= \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$= \sin\frac{\pi}{2}\cos x +$
$\cos\frac{\pi}{2}\sin x$
$= 1(\cos x) +$
$0(\sin x)$
$= \cos x$

2 حل المعادلات المثلّثية

حل المعادلات المثلّثية يمكنك حل المعادلات المثلّثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق ونفس الطرق التي استخدمتها في الدرس 4-3.

مثال 7 حل معادلة مثلّثية

أوجد حلول $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ المعادلة الأصلية

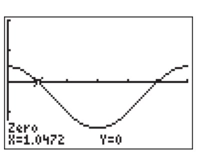
$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$ متطابقات المجموع و الفرق لـ cos

$\frac{1}{2}(\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) + \frac{1}{2}(\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) = \frac{1}{2}$ عوّض.

$\cos x = \frac{1}{2}$ بسّط

في الفترة $[0, 2\pi]$، $\cos x = \frac{1}{2}$ حيث $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

التحقّق التمثيل البياني لـ $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✔



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{3}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

تمرين موجه

7. أوجد حلول $\cos(x + \pi) - \sin(x - \pi) = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

تلميح تقني

نافذة العرض عند التحقّق من إجابتك على الحاسبة البيانية تذكّر أن الفترة الواحدة لـ $y = \sin x$ أو $y = \cos x$ تكون 2π والسعة تكون 1. وهذا سيساعدك على تحديد نافذة العرض.

مثال إضافي

6 أثبت صحة كل متطابقة انخفاض.

a. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}$
$= \cos\theta\,(0) + \sin\theta\,(1)$
$= \sin\theta$

b. $\tan(x - 360°) = \tan x$

$\tan(x - 360°)$
$= \frac{\tan x - \tan 360°}{1 + \tan x \tan 360°}$
$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x\,(0)} = \tan x$

2 حل المعادلات المثلثية

يوضح المثال 7 طريقة استخدام متطابقات المجموع والفرق، بالإضافة إلى الأساليب الجبرية، لحل المعادلات المثلثية.

مثال إضافي

7 أوجد حلول

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

في الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

تمارين

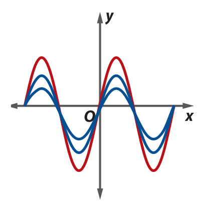
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي. (مثال 1)

1. $\cos 75^\circ$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2. $\sin(-210^\circ)$ $\frac{1}{2}$
3. $\sin \frac{11\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\cos \frac{17\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
5. $\tan \frac{23\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$
6. $\tan \frac{\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

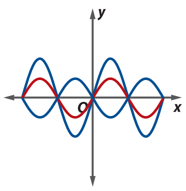
7. الجهد الكهربائي يتضمن تحليل الجهد الكهربائي في مجفّف الشعر حدودًا بصيغة $\sin(nwt - 90^\circ)$، حيث تكون n عددًا صحيحًا موجبًا و w تردد الجهد و t الزمن. استخدم متطابقة لتحويل هذا التعبير لأبسط صورة. (مثال 2) $-\cos nwt$

8. **البَثّ** عندما يكون مجموع سعات موجتين أكبر من مجموع سعات الموجات المتراكبة، ينتج عن ذلك *تداخل ملائم*. وعندما تتجمّع الموجات المتراكبة لتكون لها سعة أصغر، يحدث *تداخل مشوّش*.

تداخل ملائم



تداخل مشوّش



افترض أن هناك إشارتين ممثّل لهما بـ $y = 10 \sin(2t + 30^\circ)$ و $y = 10 \sin(2t + 210^\circ)$. (مثال 2)

a. أوجد مجموع الدالتين. **0**

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تجتمع الإشارتان الممثّل لهما بالمعادلتين؟ **انظر الهامش.**

9. **الطقس** يمكن تمثيل درجات الحرارة المرتفعة شهريًا في دبي بالصيغة $f(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث x تمثّل الشهور والتي يكون فيها يناير = 1، وفبراير = 2، وهكذا.
ويمكن تمثيل درجات الحرارة المنخفضة شهريًا في دبي بالصيغة $g(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$. (مثال 2) **a–b. انظر الهامش.**

a. اكتب دالة جديدة $h(x)$ عن طريق جمع الدالتين وقسمة الناتج على 2.

b. ما الذي تمثّله الدالة التي كتبتها في الجزء *a*؟

10. **التكنولوجيا** تَستخِدم أجهزة مساعدة المكفوفين على الحركة نفسَ فكرة السونار بالنسبة للخفّاش؛ وذلك لتمكين ذوي الإعاقة البصرية من اكتشاف الأشياء حولهم. ويمكن تمثيل الموجة الصوتية التي تنبعث من الجهاز لمريض بعينه بالصيغة $b = 30\,(\sin 195^\circ)t$، حيث t تمثّل الوقت بالثواني و b تمثّل ضغط الهواء بالباسكال. (مثال 2) **a–b. انظر الهامش.**

a. أعد كتابة القانون بدلالة فرق قياسات زاويتين. $b = 30\,[\sin(240^\circ - 45^\circ)]t$

b. ما قياس الضغط بعد ثانية واحدة؟ **-7.8 باسكال**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. (مثال 3)

11. $\frac{\tan 43^\circ - \tan 13^\circ}{1 + \tan 43^\circ \tan 13^\circ}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
12. $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
13. $\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$ 1
14. $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
15. $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$ $\frac{1}{2}$
16. $\frac{\tan 48^\circ + \tan 12^\circ}{1 - \tan 48^\circ \tan 12^\circ}$ $\sqrt{3}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 3)

17. $\frac{\tan 2\theta - \tan \theta}{1 + \tan 2\theta \tan \theta}$ $\tan \theta$
18. $\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x$ $\sin x$
19. $\sin 3y \cos y + \cos 3y \sin y$ $\sin 4y$
20. $\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x$ $-\sin x$
21. $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$ $\cos x$
22. $\frac{\tan 5\theta + \tan \theta}{\tan 5\theta \tan \theta - 1}$ $-\tan 6\theta$

23. **العلوم** تحتوي الدائرة الكهربائية على مكثّف ومستحث ومقاوم. يتم تحديد هبوط الجهد الكهربائي في المستحث بالصيغة $V_L = IwL \cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$، حيث I هو التيار الذروي، و w هو التردد، و L هو المحاثة، و t هو الوقت. استخدم متطابقة المجموع لـ cos للتعبير عن V_L بصيغة دالة $\sin wt$. (مثال 3) $V_L = -IwL \sin wt$

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري. (مثال 4)
25-31. انظر الهامش.

24. $\sin(\arcsin x + \arccos x)$ 1
25. $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} 2x)$
26. $\cos\left(\sin^{-1} x - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
27. $\sin\left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \tan^{-1} x\right)$
28. $\cos(\arctan \sqrt{3} - \arccos x)$
29. $\tan(\cos^{-1} x + \tan^{-1} x)$
30. $\tan\left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \cos^{-1} x\right)$
31. $\tan\left(\sin^{-1} x + \frac{\pi}{4}\right)$

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق واحدة أو أكثر. (مثال 5) **32–34. ملحق إجابات الوحدة 4.**

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$
34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-45, 57-61, 65-82	1-45 فردي, 79-82	2-44 زوجي, 57-61, 65-78
OL ضمن المستوى	1-53 فردي, 55-61, 65-82	1-45, 79-82	46-61, 65-78
BL أعلى من المستوى	46-82		

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-45 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع فيما يتعلق بالتمارين 24-31. يمكن للطلاب رسم مثلث قائم الزاوية وتحديد الأضلاع بناء على المعطيات لتجنب الأخطاء.

إجابات إضافية

8b. تداخل هدّام

9a. $h(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 42.65$

9b. الدالة الجديدة $h(x)$ تمثل متوسط ارتفاع درجات الحرارة وانخفاضها لكل شهر.

25. $2x\left(\sqrt{1-x^2}\right) - x\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$

26. $\frac{\sqrt{3-3x^2}+x}{2}$

27. $\frac{\left(\sqrt{3}-x\right)\sqrt{x^2+1}}{2x^2+2}$

28. $\frac{x+\sqrt{3-3x^2}}{2}$

29. $\frac{1+\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}{x^3}$

30. $\frac{\sqrt{3}-4x\sqrt{1-x^2}}{4x^2-1}$

31. $\frac{-x^2+1+\left(2x-2x^3\right)\sqrt{1-x^2}}{2x^4-3x^2+1}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 259 12/15/2016 8:09:48 PM

إجابة إضافية

35. $\cos(\pi - \theta)$
$= \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta$
$= -1(\cos \theta) + 0(\sin \theta)$
$= -\cos \theta$

اثبت صحة كل متطابقة اختزال. (مثال 6)

35–39. انظر الهامش.

35. $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

36. $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$

37. $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

38. $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$

39. $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$

أوجد حل كل تعبير في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 7)

40. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$ **$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$**

41. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi + x) = 1$ **$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$**

42. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ **$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$**

43. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$ **$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$**

44. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2$ **0**

45. $\tan(\pi + x) + \tan(\pi + x) = 2$ **$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$**

46–49. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

اثبت صحة كل متطابقة.

B

46. $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$

47. $\cot \alpha - \tan \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$

48. $\frac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \frac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

49. $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

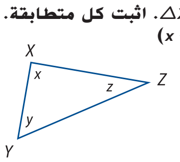
الحاسبة البيانية مثّل كل دالة بيانيًا، وخمّن بناءً على التمثيل البياني. اثبت صحة فرضيتك جبريًا. **50–51. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

50. $y = \frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

51. $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

52–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اعتبر أن $\triangle XYZ$. اثبت كل متطابقة. (*تلميح:* $x + y + z = \pi$)



52. $\cos(x + y) = -\cos z$

53. $\sin z = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

54. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$

55. **حساب التفاضل والتكامل** يعبّر عن ناتج قسمة الفرق بواسطة $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

C

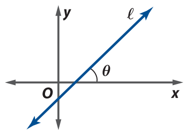
a. افترض أن $f(x) = \sin x$. اكتب تعبيرًا لناتج قسمة الفرق واكتب صيغة موسعة منه. **انظر الهامش.**

b. اجعل إجابتك من الجزء a مساويةً لـ y. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل دالة القيم التالية لـ h بيانيًا: 2 و 1 و 0.1 و 0.01.

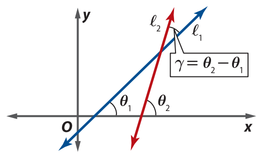
c. ما الدالة التي يشابهها التمثيل البياني في الجزء b حيث h تقترب من الصفر؟ **$\cos x$** **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

56. **زاوية الميل** إن *زاوية الميل* θ للمستقيم هي الزاوية التي تتكون بين المحور الأفقي x الموجب والمستقيم، حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

a. اثبت أن الميل m للمستقيم ℓ الموضّح جهة اليسار تحدّده الصيغة $m = \tan \theta$.



b. افترض أن المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 أدناه بميل m_1 و m_2 على التوالي. اشتق قاعدة للزاوية γ التي يكوّنها المستقيمان.



c. استخدم القاعدة التي توصلت إليها في الجزء b لإيجاد الزاوية التي يكوّنها $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y = x$. **15°**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

57. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ **57–60. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

58. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

59. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

60. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

61. **التبرير** استخدم متطابقة المجموع لـ sin من أجل اشتقاق متطابقة لـ $\sin(x + y + z)$ بدلالة sin and cos.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

تحدٍّ إذا كانت $x = -\frac{2}{3}$ وكانت $\cos y = \frac{1}{3}$، فأوجد كلاًّ مما يلي إذا كان x في الربع الرابع و y في الربع الأول.

62. $\cos(x + y)$ 63. $\sin(x - y)$ 64. $\tan(x + y)$

62–64. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

65. **التبرير** فكّر في $\sin 3x \cos 2x = \cos 3x \sin 2x$.

a. أوجد حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$ جبريًا.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

b. دعّم إجابتك بالتمثيل البياني.

66–67. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اثبت كلًّا من متطابقات ناتج قسمة الفرق.

66. $\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \frac{\sin h}{h}$

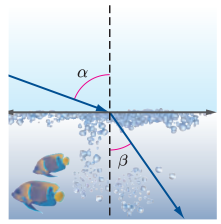
67. $\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x \frac{\sin h}{h}$

68. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن استخدام متطابقات المجموع أو الفرق لـ tan لحل أي من قواعد الانخفاض لـ tan؟ اشرح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

260 | الدرس 4-4 | متطابقات المجموع والفرق

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 260 12/15/2016 8:09:50 PM

مراجعة شاملة



.69 **الفيزياء** وفقًا لقانون سنيل (Snell)، ترتبط زاوية دخول الضوء إلى المياه α بزاوية انتقال الضوء في المياه β بالعلاقة $\sin \alpha = 1.33 \sin \beta$. بأي زاوية تدخل حزمة ضوء إلى المياه إذا كانت تنتقل عبر المياه بزاوية 23°؟ **≈31.3°**

اثبت صحة كل متطابقة. 70–71. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

70. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \sec \theta$

71. $\dfrac{\sec \theta}{\sin \theta} - \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \cot \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

72. $\sin^{-1}(-1)$ **$-\frac{\pi}{2}$**

73. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **$\frac{\pi}{3}$**

74. $\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$ **$\frac{3}{4}$**

.75 **المال** افترض أنك أودعت مبلغًا أساسيًا يقدّر بـــ P من الدراهم في حساب بنكي يدفع نسبة مرابحة مركّبة. إذا كانت نسبة المرابحة السنوية r (التي يعبّر عنها في صورة عدد عشري) ويُقدِّم البنك مدفوعات الفائدة لعدد n مرات كل عام، فإن مبلغ المال A الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام تحدّده الصيغة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. إذا كان المبلغ الأساسي ونسبة المرابحة وعدد مدفوعات الفائدة معلومة، فما نوع الدالة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؟ اشرح استنتاجك.

b. اكتب معادلة مبينًا مبلغ المال الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام إذا أودعت AED 1000 في حساب يدفع 4% نسبة مرابحة سنوية مركبة كل ثلاثة أشهر (أربع مرات في العام). **$A(t) = 1000(1.01)^{4t}$**

c. أوجد رصيد الحساب بعد 20 عامًا. **AED 2216.72**

.75a الأسيّة – يكون الأساس، $1 + \frac{r}{n}$، ثابتًا، لكن الأس، nt، متغير حيث إن الوقت t يمكن أن يختلف.

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها أصفارًا، إن وجدت.

76. $p(x) = x^4 + x^3 - 11x - 5x + 30$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30; -3, 2$

77. $d(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1$
$\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm1; \frac{1}{2}$

78. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$، لا توجد أصفار نسبية

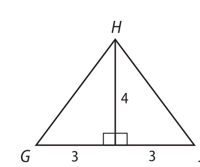
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.79 **SAT/ACT** توجد 16 كرة زجاجية خضراء، وكرتان زجاجيتان حمراوتان، و 6 كرات زجاجية صفراء في وعاء. كم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تحتاج إلى إضافتها في الوعاء لمضاعفة احتمالية اختيار كرة زجاجية صفراء؟ **D**

A 4   C 8   E 16

B 6   D 12

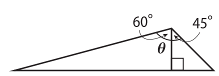
.80 **مراجعة** انظر الشكل الموضح أدناه. أي معادلة يمكن استخدامها لإيجاد $m\angle G$؟ **H**



F $\sin G = \frac{3}{4}$ H $\cot G = \frac{3}{4}$

G $\cos G = \frac{3}{4}$ I $\tan G = \frac{3}{4}$

.81 أوجد القيمة الدقيقة لـــ $\sin \theta$. **A**



A $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

B $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

C $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

D $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$

.82 مراجعة أي مما يلي يساوي $\dfrac{\cos \theta(\cot^2 \theta + 1)}{\csc \theta}$؟ **G**

F $\tan \theta$

G $\cot \theta$

H $\sec \theta$

J $\csc \theta$

انتبه!

خطأ شائع غالبًا ما يجد الطلاب بعض، وليس كل، الحلول للمعادلات المثلثية بطريقة صحيحة. فعند حل المعادلات المثلثية، تأكد من أن الطلاب يراعون جميع الحلول الممكنة للفترة المحددة. غالبًا ما توجد حلول متعددة.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة اسم ومثال على إحدى المتطابقات الواردة في الدرس.

إجابات إضافية

36. $\cos(2\pi + \theta)$
$= \cos 2\pi \cos \theta - \sin 2\pi \sin \theta$
$= 1(\cos \theta) - 0(\sin \theta)$
$= 1(\cos \theta) - 0$
$= \cos \theta$

37. $\sin(\pi - \theta)$
$= \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta$
$= 0(\cos \theta) - (-1)(\sin \theta)$
$= \sin \theta$

38. $\sin(90° + \theta)$
$= \sin 90° \cos \theta + \cos 90° \sin \theta$
$= 1(\cos \theta) + 0(\sin \theta)$
$= \cos \theta$

39. $\cos(270° - \theta)$
$= \cos 270° \cos \theta + \sin 270° \sin \theta$
$= 0(\cos \theta) + (-1)(\sin \theta)$
$= -\sin \theta$

55a. $\dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

التدريس المتمايز BL

التوسع استخدم المتطابقة لإيجاد حل $\sin(x + y)$ من أجل صياغة متطابقة لإيجاد حل $\sin(x + y + z)$.
$\sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 261 12/15/2016 8:09:52 PM

4-4 مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقة الاختزال

الهدف:

- استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لمتطابقات الاختزال.

تتضمن متطابقة انخفاض أخرى مجموع أو فرق قياسات إحدى الزوايا وزاوية ربعية. ويمكن توضيح ذلك بمقارنة التمثيل البياني للدوال الموجودة في دائرة الوحدة بتقنية التمثيل البياني.

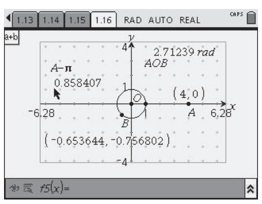
نشاط 1 استخدام دائرة الوحدة

استخدم دائرة الوحدة لتوضيح متطابقة الاختزال بيانيًا.

الخطوة 1 أضف صفحة Graphs (التمثيلات البيانية). اختر Zoom-Trig من القائمة Window. ثم اختر Show Grid (عرض شبكي) من القائمة View (عرض). من القائمة File (ملف) ضمن Tools (أدوات)، اختر Document Settings (إعدادات الملفات). ثم اضبط Display Digits (عرض رقمي) على Float 2 (غير مفيد 2). وفي النهاية تأكد من أن قياس الزاوية بالراديان.

الخطوة 2 اختر Points & Lines (نقاط وخطوط) ثم Point (نقطة) من القائمة. حدد النقطتين عند (1, 0). بعد ذلك، اختر Shapes (أشكال)، ومن ثم Circle (دائرة) من القائمة. لرسم دائرة متمركزة عند نقطة الأصل من خلال (1, 0). انقر على الشاشة وحدد نقطة المركز عند نقطة الأصل. حرّك المؤشر بعيدًا عن المركز. وستظهر الدائرة. توقف عندما تحصل على نصف قطر بمقدار 1 ووقوع (1, 0) في الدائرة.

الخطوة 3 حدد نقطة تجاه يمين الدائرة على المحور الأفقي x ثم قم بتسميتها بالحرف A. اختر Actions (إجراءات). ثم Coordinatesand Equations (إحداثيات ومعادلات). من القائمة وبعد ذلك انقر مرتين على النقطة لعرض إحداثياتها. من القائمة Construction (إنشاء). اختر Measurement transfer (تحويل القياس). اختر الإحداثي x لـ A والدائرة والنقطة عند (1, 0). قم بتسمية النقطة المنشأة على الدائرة بالحرف B ثم اعرض إحداثياتها.

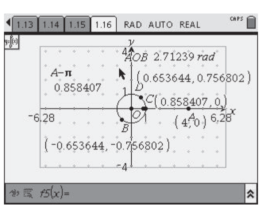


الخطوة 4 مع اعتبار أن O تمثل نقطة الأصل. قم باحتساب وكتابة قياس $\angle AOB$. اختر Text (نص) من القائمة Actions لكتابة التعبير $\pi - a$. ثم اختر Calculate (احسب) من القائمة Actions لاحتساب فرق الإحداثي x لكل من A وπ.

موقع A	$m\angle AOB$ (بالراديان)
(4, 0)	2.7124
(3, 0)	3.0708
(2, 0)	2.5708
(5, 0)	2.2123
(−2, 0)	0.5708

الخطوة 5 حرّك A بمحاذاة المحور الأفقي x. ولاحظ تأثير قياس $\angle AOB$.

الخطوة 6 من القائمة Construction، اختر Measurement transfer. اختر المحور الأفقي x وقيمة $\pi - a$.
قم بتسمية النقطة بالحرف C ثم اعرض إحداثياتها.
باستخدام Measurement transfer مجددًا. اختر الإحداثي x للنقطة C والدائرة والنقطة عند (1, 0).
قم بتسمية النقطة بالحرف D ثم اعرض إحداثياتها.



نصيحة دراسية

قياس الزاوية لا تساعد تقنية التمثيل البياني إلا في قياس الزوايا بين 0 و π.

تحليل النتائج

1A. في الخطوة 5. ما وجه ارتباط موقع A وقياس $\angle AOB$؟

1B. بمراعاة مواقع النقطتين B و D. ما متطابقة أو متطابقات الإختزال الصحيحة المقترحة من خلال هذه العلاقة؟ $\cos(x - \pi) = -\cos x$، $\sin(x - \pi) = -\sin x$

1C. **التخمين** في حالة تغيير التعبير $\pi - a$ إلى $a + \pi$. فما متطابقات الإختزال التي تعتقد بأنها ستكون النتيجة؟

1A. الإحداثي xA **يمثل قيمة** $m\angle AOB$.

1C. الإجابة النموذجية: $\cos(x + \pi) = -\cos x$، $\sin(x + \pi) = -\sin x$

1 التركيز

الهدف استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لاختزال المتطابقات.

نصيحة للتدريس

قد يكون من المفيد أن تطلب من الطلاب تمثيل الدوال الآتية بيانيًا على نفس الشاشة.

$$y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$y = \sin(\pi - x)$$

ناقش أوجه تشابه واختلاف هذه الدوال.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

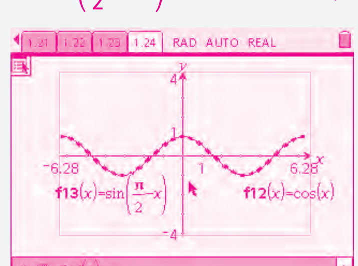
اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. اطلب من المجموعات إكمال النشاط 1 والنشاط 2 وتمارين تحليل النتائج من 1A إلى 2C.

اسأل:

- لماذا تسمّى متطابقات الانخفاض بهذا الاسم؟ أي المتطابقات يمكن استخدامها لاشتقاق هذه المتطابقات؟ يمكن استخدامها لتصغير الدوال المثلثة للزوايا الكبيرة – الموجبة والسالبة – إلى زوايا في الربع الأول. يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لاشتقاقها.

إجابات إضافية (تحليل النتائج)

2A. الإجابة النموذجية: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



2B. الإجابة النموذجية: $\cos x = -\cos(x - \pi)$

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 1 إلى 10.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1 و 3 و 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستطيعون استخدام الأدوات المتاحة مع تقنية التمثيل البياني لتحديد متطابقات الانخفاض الصحيحة للتعبيرات المذكورة.

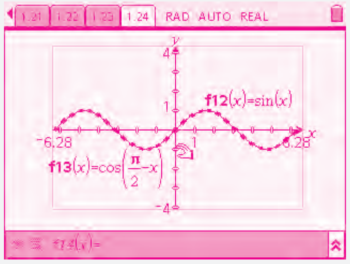
من العملي إلى النظري

اسأل:

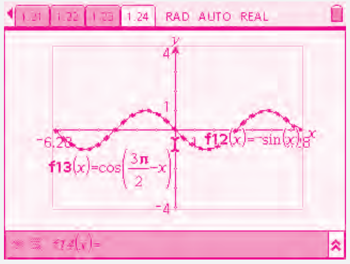
- ما مزايا استخدام الأدوات المتوفّرة في حاسبة التمثيل البياني لتحديد هذه المتطابقات؟ الإجابة النموذجية: إنها تقدّم التمثيل البياني في صورة تمثيل بصري للمتطابقة.

إجابات إضافية

1. $\cos(90° - x) = \sin x$



2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

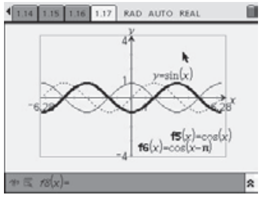


نشاط 2 استخدام التمثيلات البيانية

استخدم تمثيلات بيانية لتحديد الدوال المثلثية المتساوية.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) جديدة. اختر Zoom-Trig من القائمة Window.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا $f(x) = \cos x$، $f(x) = \cos(x - \pi)$، و $f(x) = \sin x$. باستخدام خاصية Attributes (سمات) من القائمة Actions (إجراءات)، مع ضبط سمك الخط $f(x) = \cos(x - \pi)$ إلى متوسط ونمط الخط $f(x) = \sin x$ إلى مُنَقّط.



الخطوة 3 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد لتحويل $f(x) = \sin x$ بحيث تتطابق التمثيلات البيانية مع $f(x) = \cos x$. اختر التمثيل البياني ثم اسحبه على $f(x) = \cos x$. وأثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

الخطوة 4 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد لتحويل $f(x) = \cos(x - \pi)$ وبالتالي تتطابق التمثيلات البيانية مع التمثيلين البيانيين الآخرين. مجددًا، أثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

2C. الإجابة النموذجية: يوضح الانعكاس أن إحدى المتطابقات يمكن كتابتها بواسطة استخدام معكوس إحدى الدوال. توضح الإزاحة أنه سيلزم إزاحة إحدى التمثيلات البيانية بواسطة أحد مضاعفات $\frac{\pi}{2}$.

تحليل النتائج 2A–B. انظر الهامش.

2A. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـــ $f(x) = \sin x$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2B. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـــ $f(x) = \cos(x - \pi)$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2C. **التخمين** ما الذي يقترحه انعكاس التمثيل البياني لغرض تطوير متطابقة؟ إزاحة؟

تمارين

استخدم دائرة الوحدة لكتابة متطابقة تنتمي إلى التعابير المعطاة. تحقق من صحة متطابقتك بالتمثيل البياني. 1-2. انظر الهامش.

1. $\cos(90° - x), \sin x$
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \sin x$

اكتب الدالة المثلثية التي تكمل كل متطابقة.

3. $\cos x =$ ________ $\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ **sin**
4. $\cot x =$ ________ $(x + 90°)$ **−tan**
5. $\sec x =$ ________ $(x - 180°)$ **−sec**
6. $\csc x =$ ________ $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **−sec**

استخدم التحويلات لإيجاد قيمة a لكل تعبير مما يلي.

7. $\sin ax = 2 \sin x \cos x$ **2**
8. $\cos 4ax = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\frac{1}{2}$
9. $a \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ **2**
10. $1 + \cos 6ax = 2\cos^2 x$ $\frac{1}{3}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 263 12/15/2016 8:09:56 PM