4-5 متطابقات اضعاف الزاوية وتحويل ناتج الضرب الى مجموع

:: السابق

- لقد قمتَ بإثبات واستخدام متطابقات المجموع والفرق.

:: الحالي

1 استخدام متطابقات ضعف الزاوية واختصار الأس و نصف الزاوية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

:: لماذا؟

- يمكن وصف سرعة طيران إحدى الطائرات بواسطة عدد *الماخ*؛ وهو نسبة سرعة الطائرة إلى سرعة الصوت. ويؤدي تجاوز سرعة الصوت إلى إحداث موجة صادمة مخروطية الشكل خلف الطائرة. وترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس هذا المخروط بعدد الماخ ويصف الحرف M سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\frac{1}{M} = \frac{\theta}{2}$.

1 استخدام متطابقات اضعاف الزاوية

بافتراض أن α وβ كليهما مساوٍ لـــ θ في كل متطابقات مجموع الزوايا التي تعلمتَها في الدرس السابق، يمكنك اشتقاق متطابقات ضعف الزاوية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

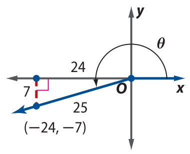
الإثبات متطابقة ضعف الزاوية لـــ sine

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$	$2\theta = \theta + \theta$
$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$	$\alpha = \beta = \theta$ متطابقة المجموع لـــ sine
$= 2\sin\theta\cos\theta$	بسّط

ستثبتُ متطابقات ضعف الزاوية لـــ cos ولـــ tan في التمارين 63-65.

مثال 1 إيجاد قيمة التعابير التي تتضمن أضعاف الزوايا

إذا كان $\sin\theta = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فأوجد sin 2θ و cos 2θ و tan 2θ.



بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فإن نقطة واحدة على ضلع الإنتهاء لـــ θ سيكون لها الإحداثي y-7 ومسافة 25 وحدة من الأصل، كما هو موضح. الإحداثي x لهذه النقطة هو $-\sqrt{25^2-7^2}$ أو **24−**. باستخدام هذه النقطة، سنجد أن

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ أو $-\frac{24}{25}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{7}{25}$.

استخدم هذه القيم ومتطابقات أضعاف الزاوية لـــ sin و لـــ cos لإيجاد sin 2θ و cos 2θ. ثم أوجد tan 2θ باستخدام أي من متطابقة ضعف الزاوية لـــ tan أو تعريف الـــ tan.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$ أو $\frac{336}{625}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)^2 - 1$ أو $\frac{527}{625}$

الطريقة 1

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\left(\frac{7}{24}\right)}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2}$ أو $\frac{336}{527}$

الطريقة 2

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \frac{\frac{336}{625}}{\frac{527}{625}}$ أو $\frac{336}{527}$

تمرين موجه

1. إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$ في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ فأوجد sin 2θ، cos 2θ، و tan 2θ. $\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; -\frac{24}{7}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-5 إثبات صحة متطابقات المجموع والفرق واستخدمها.

الدرس 4-5 استخدام متطابقات الزوايا المزدوجة واختصار الأس والزاوية النصفية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.
استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

بعد الدرس 4-5 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد نواتج الضرب ونواتج القسمة والأسس والجذور والأعداد المركبة في صورة قطبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

- ما الذي يجعل هذه المعادلة معادلة زوايا نصفية؟ يُقسَم قياس الزاوية على 2.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 264 12/15/2016 8:09:59 PM

مثال 2 حل معادلة باستخدام متطابقة أضعاف الزوايا

حل $\sin 2\theta - \sin \theta = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

استخدم متطابقة ضعف الزاوية لـــ sin لإعادة كتابة المعادلة بصفتها دالة لزاوية فردية.

$\sin 2\theta - \sin \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية sin

$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$ العامل.

$\sin \theta = 0$ أو $2 \cos \theta - 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\pi = 0 = \theta$ 　 $\frac{1}{2} = \cos \theta$ لذا، $\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \theta$.

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\theta = 0$. أو $\frac{\pi}{3}$، أو π؛ أو $\frac{5\pi}{3}$.

تمرين موجه حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

2A. $\cos 2\alpha = -\sin^2 \alpha$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

2B. $\tan 2\beta = 2 \tan \beta$ $0, \pi$

نصيحة دراسية

أكثر من متطابقة واحدة لاحظ وجود ثلاث متطابقات مرتبطة مع $\cos 2\theta$. بينما توجد متطابقات أخرى يمكن أن تكون مرتبطة أيضًا مع $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$، وتلك المرتبطة مع $\cos 2\theta$ يجب حفظها نظرًا لاستخدامها بمعدل أكثر شيوعًا.

يمكن استخدام متطابقات ضعف الزاوية لاشتقاق متطابقات اختصار الأس أدناه. تساهم هذه المتطابقات في تيسير تنفيذ عمليات للدوال مرتبطة بحساب التفاضل والتكامل مثل $y = \cos^2 x$ بدرجة أكبر.

المفهوم الأساسي متطابقات اختصار الأس

$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ 　 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ 　 $\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

الإثبات متطابقة اختصار الأس لـــ sine

$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \theta)}{2}$ متطابقة ضعف الزاوية لـــ cos

$= \frac{2\sin^2 \theta}{2}$ اطرح.

$= \sin^2 \theta$ بسّط

ستُثبت صحة متطابقات الاختصار الأسي لـــ cos و لـــ tan في التمرينين 82 و83.

الربط بتاريخ الرياضيات

فرانسوا فييت
(1540–1603)

وُلد في قرية تقع في غرب فرنسا، وقد تم استدعاؤه في باريس لفك شفرة رسائل للملك هنري الثالث. ونظرًا لمهارته الفائقة في استخدام المعادلات، استخدم متطابقات وضعف الزاوية لـــ sin and cos لاستخلاص متطابقات الزاوية الثلاثية والرباعية والخماسية.

مثال 3 استخدام متطابقة لاختصار الأس

أعد كتابة $\sin^4 x$ e في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1.

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ 　 $(\sin^2 x)^2 = \sin^4 x$

$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$ متطابقة الاختصار الأسي sin

$= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$ أوجد ناتج الضرب.

$= \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4}$ متطابقة اختصار أس cos

$= \frac{2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x}{8}$ مقام مشترك

$= \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$ عامل.

تمرين موجه

أعد كتابة كل تعبير بشرط عدم زيادة قيمة الأس عن 1.

3A. $\cos^4 x$ $\frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$

3B. $\sin^3 \theta$ $\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos 2\theta}{2}$

- بناء على استنتاجك السابق، ما العبارات الصحيحة بشأن معادلة الزوايا المزدوجة؟ يُضرب قياس الزاوية في 2.
- إذا كانت $\theta = 45$. فما عدد الماخ؟ $M \approx 2.61$

1 استخدام متطابقات الزوايا المتعددة

يوضح المثالان 1 و 2 طريقة إيجاد قيمة التعابير وحل المعادلات التي تحتوي على متطابقات مزدوجة الزوايا. **يوضح المثالان 3 و 4** طريقة استخدام متطابقات اختصار الأس لإيجاد قيمة التعابير الثلاثية وحل المعادلات التي بها أس. **يوضح المثالان 5 و 6** طريقة استخدام متطابقات الزاوية النصفية لإيجاد قيمة التعابير الثلاثية وحل المعادلات التي تحتوي على نصف زاوية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{4}$ على الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. أوجد قيمة $\sin 2\theta$، و $\cos 2\theta$، و $\tan 2\theta$. $\sin 2\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{8}$, $\tan 2\theta = -3\sqrt{7}$

2 أوجد حل $\cos 2\theta - \cos \theta = 2$ على الفترة $[0, 2\pi]$. π

3 أعد كتابة $\csc^4 \theta$ بدلالة جيب التمام لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من 1. $\frac{8}{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}$

مثال 4 حل معادلة باستخدام متطابقة اختصار أسي

أوجد حل $\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$.

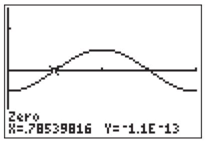
أوجد الحل جبريًا

$\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$	المعادلة الأصلية
$\frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos 2x = \frac{1}{2}$	متطابقة اختصار أس cos
$1 + \cos 2x - 2\cos 2x = 1$	اضرب كل طرف في 2.
$\cos 2x - 2\cos 2x = 0$	اطرح 1 من كل طرف.
$-\cos 2x = 0$	اطرح الحدود المتشابهة.
$\cos 2x = 0$	اضرب كل طرف في -1.
$2x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	حلول ضعف الزاوية في $[0, 2\pi]$
$x = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	اقسم كل حل على 2.

يتضمن التمثيل البياني لــ $y = \cos 2x$ دورة π. إذًا فإن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ أو $\frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لــ $y = \cos^2 x - \cos 2x - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ في الفترة $[0, \pi]$. ✓



$[0, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

تمرين موجه **أوجد حل كل معادلة.**

4A. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{5\pi}{6} + n\pi, \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

4B. $\sin^2 3\beta = \sin^2 \beta$

$n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

باستبدال θ بـــ $\frac{\theta}{2}$ في كل متطابقة من متطابقات اختصار الأس، يمكنك اشتقاق كل متطابقة نصف الزاوية مما يلي. تُحدَّد علامة كل متطابقة تتضمن الرمز $\pm$ بالتحقق من الربع الذي يقع فيه الضلع الطرفي $\frac{\theta}{2}$.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \qquad \tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \qquad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

انتبه!

تحديد العلامات لتحديد الإشارة المناسبة عند استخدام متطابقة نصف زاوية، تحقق من الربع الذي يقع فيه $\frac{\theta}{2}$، *وليس* الربع الذي يقع فيه θ.

الإثبات متطابقة نصف الزاوية لــ cosine

$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)}{2}}$	أعد كتابة θ بصيغة $\frac{\theta}{2} \times 2$.
$= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$	عوّض $x = \frac{\theta}{2}$.
$= \pm\sqrt{\cos^2 x}$	متطابقة اختصار أس cosine
$= \cos x$	بسّط
$= \cos \frac{\theta}{2}$	عوّض.

ستُثبت متطابقات نصف الزاوية لــ cos والــ tan في التمارين 66-68.

مثال إضافي

4 أوجد حل
$\sin^2 \theta + \cos 2\theta - \cos \theta = 0$

$2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التركيز على محتوى الرياضيات

المتطابقات تُستخدم متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع لكتابة تعبير يتضمن ناتج ضرب للتعابير الثلاثية في صورة تعبير مجموع أو فرق. تُستخدم متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لاختزال تعبير مجموع أو فرق إلى ناتج ضرب للتعابير المثلثية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو قسّم الصف الدراسي إلى مجموعات. خصص مسألة لكل مجموعة باستخدام متطابقة مزدوجة الزوايا أو زوايا نصفية مختلفة. اطلب من كل مجموعة عمل تسجيل فيديو يوضح كيفية تطبيق المتطابقة المناسبة لحل المعادلة.

أمثلة إضافية

5 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 22.5°$.
$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

6 أوجد حل $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$ على الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

مثال 5 إيجاد قيمة تعبير يتضمن نصف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 112.5°$.

لاحظ أن $112.5°$ تبلغ نصف $225°$. لذا، استخدم متطابقة نصف الزاوية لـ cosine. مع ملاحظة أنه بوقوع $112.5°$ في الربع الثاني، فإن cosine سيكون سالبًا.

$\cos 112.5° = \cos \frac{225°}{2}$ — $112.5° = \frac{225°}{2}$

$= -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية cosine (زاوية الربع الثاني)

$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ — اطرح ثم اقسم.

$= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ أو $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية

التحقق استخدم الآلة الحاسبة لدعم إثبات أن $112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos 112.5° \approx -0.3826834324$ و $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx -0.3826834324$ ✓

تمرين موجه 5A. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

5A. $\sin 75°$

5B. $\tan \frac{7\pi}{12}$ $-2-\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

متطابقات نصف زاوية الـ tan
عند إيجاد قيمة دالة tan لقيم نصف الزاوية، من الأسهل عادة استخدام نموذج متطابقة نصف زاوية tan
$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ نظرًا لأن المقام يتضمن حدًا واحدًا فقط.

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد حل للمعادلات. ويمكن استخدام متطابقات نصف الزاوية أيضًا لإيجاد حل للمعادلات.

مثال 6 حل معادلة باستخدام متطابقة نصف الزاوية

أوجد حل $\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ على الفترة $[0, 2\pi)$.

$\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2 x = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2$ — متطابقة نصف الزاوية cosine

$\sin^2 x = 2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$ — بسّط

$\sin^2 x = 1 + \cos x$ — أوجد ناتج الضرب.

$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$ — متطابقة فيثاغورس

$-\cos^2 x - \cos x = 0$ — اطرح 1 من كل طرف.

$\cos x(-\cos x - 1) = 0$ — حلل لإيجاد العوامل.

$\cos x = 0$ أو $-\cos x - 1 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ ، $\cos x = -1$; لذا . $x = \pi$. — حلول لـ $[0, 2\pi)$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي $x = \frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$ أو π.

تمرين موجه

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

6A. $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1 + \sin x$ $0, \pi$

6B. $8\tan \frac{x}{2} + 8\cos x \tan \frac{x}{2} = 1$ $7.2°, 172.8°$

2 استخدام متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

يشرح **المثال 7** طريقة استخدام متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع لكتابة تعبير مثلثي يتضمن حاصل ضرب في صورة مجموع أو فرق.
يوضح **المثالان 8 و 9** طريقة استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى حاصل ضرب لكتابة تعبير مثلثي يتضمن مجموعًا في صورة حاصل ضرب لإيجاد قيمة تعبير وحل معادلة.

مثال إضافي

7 أعد كتابة $\cos 6x \cos 3x$ في صورة مجموع أو فرق.
$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 9x$

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع

لاستخدام دوال مثل $y = \cos 5x \sin 3x$ في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى تطبيق إحدى المتطابقات التالية لتحويل ناتج الضرب لمجموع.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\qquad$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\qquad$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

الإثبات متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع لـــ $\sin \alpha \cos \beta$

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ الطرف الأكثر تعقيدًا في المتطابقة

$= \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$ متطابقات المجموع والفروق

$= \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \beta)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= \sin \alpha \cos \beta$ أوجد ناتج الضرب.

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل ناتج الضرب لمجموع في التمارين 84-86.

نصيحة دراسية
الإثباتات تذكّر العمل على حل الطرف الأكثر تعقيدًا أولاً عند إثبات هذه المتطابقات.

مثال 7 استخدام متطابقة لكتابة ناتج الضرب في صيغة مجموع أو فرق

أعد كتابة $\cos 5x \sin 3x$ في صيغة مجموع أو فرق.

$\cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x)]$ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ بسّط

$= \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x$ خاصية التوزيع

تمرين موجه أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق.

7A. $\sin 4\theta \cos \theta$ $\quad \frac{1}{2}\sin 5\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta$ $\qquad$ **7B.** $\sin 7x \sin 6x$ $\quad \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 13x$

تتوافق متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع هذه مع متطابقات تحويل المجموع لناتج الضرب.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل المجموع لناتج ضرب

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

الإثبات متطابقة تحويل المجموع لناتج ضرب لـــ $\sin \alpha + \sin \beta$

$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$= 2 \sin x \cos y$ استخدم التعويض في $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ و $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right\}$ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

$= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ استخدم التعويض وحوّل لأبسط صورة.

$= \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\beta}{2}\right)$ اجمع الكسور.

$= \sin \alpha + \sin \beta$ بسّط

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل المجموع لناتج الضرب في التمارين 87-89.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل يقدم هذا الدرس آخر ما في المتطابقات المثلثية لتلك الوحدة. اطلب من المجموعات الصغيرة إعداد بطاقات فهرسة لكل متطابقة وكتابة الطرف الأيسر لكل متطابقة على إحدى البطاقات والطرف الأيمن على بطاقة أخرى. وعندئذٍ ينبغي للمجموعات خلط البطاقات وجعل وجهها إلى الأسفل وممارسة لعبة مطابقة البطاقات بالاعتماد على الذاكرة.

مثال 8 استخدام متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى المجموع أو المجموع إلى ناتج الضرب

أوجد القيمة الدقيقة لــ $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) \cos \left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right)$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$ حوّل لأبسط صورة.

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$ بسّط

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

8A. $3 \cos 37.5° \cos 187.5°$ $\frac{-3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4}$

8B. $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

ويمكنك أيضًا استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لإيجاد الحل لبعض المعادلات المثلثية.

مثال 9 حل المعادلة باستخدام متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

أوجد حل $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

أوجد الحل جبريًا

$\cos 4x + \cos 2x = 0$ المعادلة الأصلية

$2 \cos \left(\frac{4x + 2x}{2}\right) \cos \left(\frac{4x - 2x}{2}\right) = 0$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب لــ cosine

$(2 \cos 3x)(\cos x) = 0$ بسّط

اجعل كل عامل يساوي صفرًا مع إيجاد حلول في الفترة $[0, 2\pi]$.

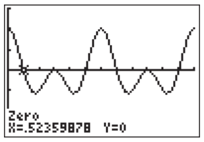
مجموعة العامل الثاني تساوي 0		مجموعة العامل الأول تساوي 0	
	$\cos x = 0$		$2 \cos 3x = 0$
حلول في $[0, 2\pi]$	$x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	اقسم كل طرف على 2.	$\cos 3x = 0$
		حلول أضعاف الزاوية *في $[0, 2\pi]$	$3x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
		اقسم كل حل على 3.	$x = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

الفترة الخاصة بــ $y = \cos 3x$ هي $\frac{2\pi}{3}$ ، إذًا الحلول هي

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n$ أو $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لــ $y = \cos 4x + \cos 2x$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{11\pi}{6}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{6}$ by $[-3, 3]$ scl: 1

9A. $\frac{2n\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

تمرين موجه

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

9A. $\sin x + \sin 5x = 0$

9B. $\cos 3x - \cos 5x = 0$ $\frac{n\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

انتبه

فترات الدوال المثلثية لزوايا متعددة تذكّر ما تعلمته من الدروس السابقة أن فترات $y = \sin kx$ و $y = \cos kx$ هي $\frac{2\pi}{k}$ ، وليس 2π.

أمثلة إضافية

8 أوجد القيمة الدقيقة لــ $\cos 255° + \cos 195°$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

9 أوجد حل $\sin 8x - \sin 2x = 0$

$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n; n \in \mathbb{Z}$

المتابعة

استكشف الطلاب إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام أساليب متنوعة.

اسأل:

- كيف تُحدد الأساليب التي ينبغي استخدامها عند إثبات صحة متطابقة مثلثية؟ الإجابة النموذجية: إذا أمكن، فحوّل أكثر أطراف المتطابقة تعقيدًا إلى أبسط صورة عن طريق التعويض بالمتطابقات المثلثية الأساسية. وعند التعامل مع متطابقة أكثر تعقيدًا، أوجد الحل لكل طرف على حدة للحصول على تعبير عام.

تمارين

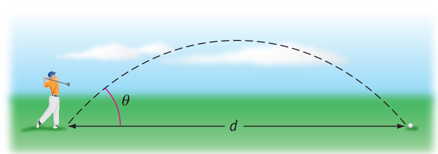
أوجد قيمة sin 2θ و cos 2θ و tan 2θ للقيمة والفترة الموضحتين. (مثال 1)

1. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, (270°, 360°) $-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; \frac{24}{7}$
2. $\tan\theta = \frac{8}{15}$, (180°, 270°) **2.** $\frac{240}{289}; \frac{161}{289}; \frac{240}{161}$
3. $\cos\theta = -\frac{9}{41}$, (90°, 180°) $-\frac{720}{1681}; -\frac{1519}{1681}; \frac{720}{1519}$
4. $\sin\theta = -\frac{7}{12}$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{7\sqrt{95}}{72}; \frac{23}{72}; -\frac{7\sqrt{95}}{23}$
5. $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{4}{3}$
6. $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}$
7. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; \frac{24}{7}$
8. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $\frac{120}{169}; -\frac{119}{169}; -\frac{120}{119}$

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 2)

9. $\sin 2\theta = \cos\theta$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
10. $\cos 2\theta = \cos\theta$ **10.** $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
11. $\cos 2\theta - \sin\theta = 0$ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
12. $\tan 2\theta - \tan 2\theta \tan^2\theta = 2$ **12.** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
13. $\sin 2\theta \csc\theta = 1$ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
14. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$ π

15. **رياضة الجولف** تم ضرب كرة جولف بسرعة مبدئية تبلغ 88 قدمًا في الثانية. ويتم قياس مسافة تحرك الكرة بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$، حيث يمثل v_0 المسافة الإبتدائية، بينما يمثل θ الزاوية التي يحدثها مسار الكرة في الملعب، و32 هي المسافة بالقدم المربع في الثانية. (مثال 2)



a. إذا تحركت الكرة مسافة 242 قدمًا. فما مقدار θ بالنسبة لأقرب زاوية؟ **45°**

b. استخدم متطابقةضعف الزاوية لإعادة كتابة المعادلة لـــ d. $d = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{16}$

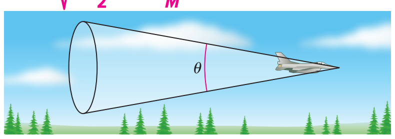
أعد كتابة كل تعبير في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1. (مثال 3) **16–23. انظر الهامش.**

16. $\cos^3\theta$
17. $\tan^3\theta$
18. $\sec^4\theta$
19. $\cot^3\theta$
20. $\cos^4\theta - \sin^4\theta$
21. $\sin^2\theta\cos^3\theta$
22. $\sin^2\theta - \cos^2\theta$
23. $\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 4) **24–27. n هو عدد صحيح.**

24. $1 - \sin^2\theta - \cos 2\theta = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi$
25. $\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta = 0$ $\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi$
26. $\sin^2\theta - 1 = \cos^2\theta$ $\frac{\pi}{2} + n\pi$
27. $\cos^2\theta - \sin\theta = 1$ $n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

28. **عدد الماخ** ترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس الموجة الصادمة مخروطية الشكل، التي أحدثتها إحدى الطائرات مخترقة الحاجز الصوتي، بعدد الماخ M والذي يصف سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$. (مثال 5) **a.** $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{M}$



a. عبّر عن عدد الماخ للطائرة استنادًا إلى cosine.

b. استخدم التعبير الموجود في الجزء a لإيجاد عدد الماخ لطائرة ما إذا كان $\cos\theta = \frac{4}{5}$. **≈3.2**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

29. $\sin 67.5°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
30. $\cos\frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
31. $\tan 157.5°$ $1 - \sqrt{2}$
32. $\sin\frac{11\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 6)

33. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$ $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
34. $\tan\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$ 0
35. $2\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta$ 0
36. $1 - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$

37–40. انظر الهامش.

أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق. (مثال 7)

37. $\cos 3\theta\cos\theta$
38. $\cos 12x \sin 5x$
39. $\sin 3x \cos 2x$
40. $\sin 8\theta \sin\theta$

41–48. انظر الهامش.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (مثال 8)

41. $2\sin 135°\sin 75°$
42. $\cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$
43. $\frac{2}{3}\sin 172.5°\sin 127.5°$
44. $\sin 142.5°\cos 352.5°$
45. $\sin 75° + \sin 195°$
46. $2\cos 105° + 2\cos 195°$
47. $3\sin\frac{17\pi}{12} - 3\sin\frac{\pi}{12}$
48. $\cos\frac{13\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 9) **49–54. انظر الهامش.**

49. $\cos\theta - \cos 3\theta = 0$
50. $2\cos 4\theta + 2\cos 2\theta = 0$
51. $\sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$
52. $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$
53. $3\cos 6\theta - 3\cos 4\theta = 0$
54. $4\sin\theta + 4\sin 3\theta = 0$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-54 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع غالبًا ما يواجه الطلاب مشكلات في اختيار المتطابقة الصحيحة لتطبيقها. في المسائل التي تحتوي على دوال جيب التمام للزوايا المتعددة مثل التمرينين 13 و 14. ذكّر الطلاب بأنه توجد ثلاث متطابقات مختلفة. وإذا واجهوا مشكلة عند استخدام متطابقة، فربما لا يستخدمون المتطابقة الصحيحة.

إجابات إضافية

16. $\frac{\cos\theta + \cos\theta\cos 2\theta}{2}$
17. $\frac{\tan\theta - \tan\theta\cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
18. $\frac{8}{3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}$
19. $\frac{\cot\theta + \cot\theta\cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta}$
20. $\cos 2\theta$
21. $\frac{\cos\theta - \cos\theta\cos 4\theta}{8}$
22. $-\cos 2\theta$
23. $\frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{4 + 4\cos 2\theta}$
37. $\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta$
38. $\frac{1}{2}\sin 17x - \frac{1}{2}\sin 7x$
39. $\frac{1}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x$
40. $\frac{1}{2}\cos 7\theta - \frac{1}{2}\cos 9\theta$
41. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 42. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
43. $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$ 44. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$
45. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 46. $-\sqrt{6}$
47. $-\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 48. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

49–54. n هو عدد صحيح.

49. $n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi$
50. $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{2} + n\pi$
51. $\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
52. $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}n, \pi + \frac{4\pi}{3}n, n\pi$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-54, 77-79, 82-108	1-53 فردي، 108-05	2-54 زوجي، 77-79، 82-105
OL ضمن المستوى	1-61 فردي، 62، 63-75 فردي، 77-79، 82-108	1-54, 105-108	55-75, 77-79, 82-105
BL أعلى من المستوى	55-108		

إجابات إضافية

53. $\frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n\pi$

54. $n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi$

57. $\frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)$

58. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

59. $\frac{1}{2}[\sin (2b + \theta + \pi) + \sin (\theta - \pi)]$

60. $-\frac{1}{2} \sin (2a - 2b)$

B حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

55. $\sqrt{\frac{1 + \cos 6x}{2}}$ $\pm\cos 3x$ **56.** $\sqrt{\frac{1 - \cos 16\theta}{2}}$ $\pm\sin 8\theta$

اكتب كل تعبير في صيغة مجموع أو فرق. 57–60. انظر الهامش.

57. $\cos (a + b) \cos (a - b)$ **58.** $\sin (\theta - \pi) \sin (\theta + \pi)$

59. $\sin (b + \theta) \cos (b + \pi)$ **60.** $\cos (a - b) \sin (b - a)$

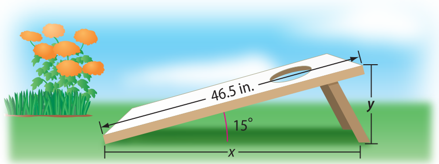
61. خرائط الإسقاط المركاتوري هو إسقاط مسطح للكرة الأرضية تزداد فيه المسافة بين خطوط العرض مع بُعدها عن خط الاستواء.

تتضمن عملية احتساب نقطة ما على الإسقاط المركاتوري التعبير $\tan \left(45° + \frac{\ell}{2}\right)$، حيث يمثل ℓ خط عرض النقطة.

a. اكتب التعبير بدلالة $\sin \ell$ و $\cos \ell$. **61a.** $\frac{1 + \cos \ell + \sin \ell}{1 + \cos \ell - \sin \ell}$

b. أوجد قيمة هذا التعبير إذا كان $\ell = 60°$. $2 + \sqrt{3}$

62. لعبة التصويب BEAN BAG TOSS قام علي بإعداد هيكل للعبة التصويب كما هو موضح في الصورة أدناه.



a. كم سيبلغ المقدار الدقيق لبُعد الحافة الخلفية للوحة عن الأرضية؟ $23.25\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ in.

b. كم سيستغرق الإعداد بالضبط؟ $23.25\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ in.

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة. 63–68. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

63. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ **64.** $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

65. $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ **66.** $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

67. $\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$ **68.** $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

اثبت صحة كل متطابقة باستخدام متطابقات الاختصار الأسي ثم تأكد مجددًا باستخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع. 69–70. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

69. $2 \cos^2 5\theta - 1 = \cos 10\theta$

70. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$

أعد كتابة كل تعبير بدلالة cosine لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من 1. 71–74. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

71. $\sin^6 \theta$ **72.** $\sin^8 \theta$

73. $\cos^7 \theta$ **74.** $\sin^4 \theta \cos^4 \theta$

75. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستعمل على استكشاف كيفية استخدام التمثيلات البيانية للدالات لإيجاد المتطابقات. a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

C

a. **التمثيل البياني** استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x) = 4(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4})$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

b. **التحليل** اكتب h(x) كدالة sin تعبّر عن التمثيل البياني لـ f(x). ثم اثبت صحة $f(x) = h(x)$ جبريًا.

c. **التمثيل البياني** استخدم حاسبة بيانية لتمثيل $g(x) = \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

d. **التحليل** اكتب k(x) كدالة cos تعبّر عن التمثيل البياني لـ g(x). ثم اثبت صحة $g(x) = k(x)$ جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

76. **تحدّ** اثبت صحة المتطابقة التالية.

$$\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta = \sin \theta$$

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

التبرير فكّر في وجود زاوية داخل دائرة الوحدة. حدد في أي ربع ستقع فيه ضعف الزاوية ونصف الزاوية إذا كان ضلع الإنتهاء للزاوية في كل ربع. 78. III، IV أو بين I و III، IV

77. I I، II أو بين I و II، I **78.** II **79.** III I، II، أو بين I و II، II

تحدّ اثبت صحة كل متطابقة.

80. $\sin 4\theta = 4 \sin \theta \cos \theta - 8 \sin^3 \theta \cos \theta$

81. $\cos 4\theta = 1 - 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ 80–89. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

82. $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

83. $\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

84. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$

85. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$

86. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)]$

87. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

88. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

89. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

90. **الكتابة في الرياضيات** صف الخطوات التي قد تستخدمها لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos 8\theta$ إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

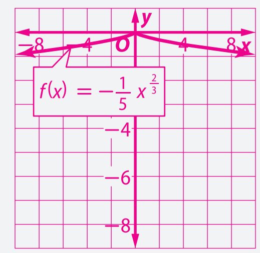
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطلب من كل طالب كتابة أي نوع من المتطابقات التي قد يستخدمها لإيجاد قيمة $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$. متطابقة الزاوية النصفية

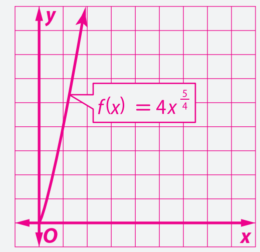
إجابات إضافية

102.



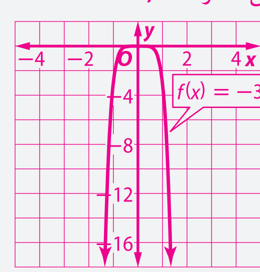
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$؛
التقاطع عند المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ؛
متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$. متناقصة على الفترة $(0, \infty)$

103.



$D = [0, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛
التقاطع مع المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ؛ متصلة على الفترة $[0, \infty)$؛
متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

104.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$؛
التقاطع مع المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ؛
مستمرة لجميع الأعداد الحقيقية؛ تتزايد عند النقطة $(-\infty, 0)$ تتناقص عند النقطة $(0, \infty)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلثي مما يلي.

91. $\cos \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
92. $\cos \frac{19\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
93. $\sin \frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$
94. $\sin \frac{13\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
95. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
96. $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

97. **زراعة الحدائق** تنتظر رنا اليوم الأول من فصل الربيع حيث ستكون ساعات النهار 14 ساعة من أجل بدء زراعة حديقة الزهور. يمكن تمثيل عدد ساعات النهار H في بلدتها بالصيغة $H = 11.45 + 6.5 \sin(0.0168d - 1.333)$، حيث يمثل d يوم من أيام العام. و$d = 1$ يمثل 1 يناير، و$d = 2$ يمثل 2 يناير وهكذا. في أي الأيام ستبدأ رنا في زراعة الحديقة؟ **اليوم 104 من العام، أو 14 أبريل تقريبًا**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن دالة مُعرَّفة فاكتب غير مُعرَّفة.

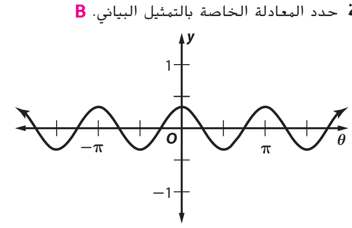
98. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
99. $\tan 210°$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
100. $\sin \frac{19\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
101. $\cos(-3780°)$ -1

مثِّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، و فترات تزايد أو تناقص الدالة. **102–105. انظر الهامش.**

102. $f(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{2}{3}}$
103. $f(x) = 4x^{\frac{5}{4}}$
104. $f(x) = -3x^6$
105. $f(x) = 4x^5$

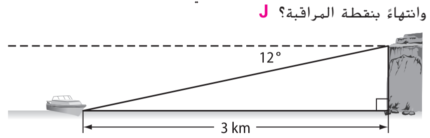
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

106. **مراجعة** حدد المعادلة الخاصة بالتمثيل البياني. **B**



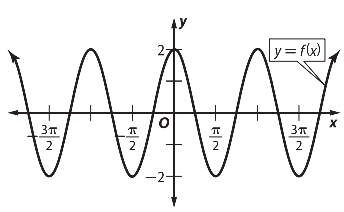
A $y = 3\cos 2\theta$
B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$
C $y = 3\cos \frac{1}{2}\theta$
D $y = \frac{1}{3}\cos \frac{1}{2}\theta$

107. **مراجعة** من نقطة مراقبة على كهف موجود أعلى البحيرة. تبلغ زاوية الانخفاض لقارب على المياه 12°. وعلمًا بأن القارب يبعُد عن الشاطئ بمقدار 3 كيلومترات أدنى المنحدر الصخري مباشرة. فما ارتفاع المنحدر الصخري بدءًا من سطح المياه وانتهاءً بنقطة المراقبة؟ **J**



F $\frac{3}{\sin 12°}$
G $\frac{3}{\tan 12°}$
H $\frac{3}{\cos 12°}$
J $3\tan 12°$

108. **إجابة حرة** استخدم التمثيل البياني للإجابة على كل مما يلي.



a. اكتب دالة بالصيغة $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ تتوافق مع التمثيل البياني. **$f(x) = 2\cos 2x$**
b. أعد كتابة $f(x)$ كدالة sin. **$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$**
c. أعد كتابة $f(x)$ كدالة cos لزاوية فردية. **108c. $f(x) = 4\cos^2 x - 2$**
d. إيجاد جميع حلول $f(x) = 0$. **$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$**
e. كيف ترتبط الحلول التي وجدتها في الجزء d بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$؟ **حلول $f(x)$ تمثل التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$.**

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب اختيار كتابة متطابقتين لدوال قاطع التمام أو القاطع أو ظل التمام: متطابقات الزوايا المزدوجة أو اختصار الأس أو الزوايا النصفية أو تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو تحويل المجموع إلى حاصل ضرب.

الإجابات النموذجية:

$$\csc 2x = \frac{1}{2}\csc x \sec x;\ \sec 2x = \frac{\sec^2 x \csc^2 x}{\csc^2 x - \sec^2 x};\ \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x};$$
$$\sec^2 x = \frac{2}{1 + \cos 2x};\ \csc^2 x = \frac{2}{1 - \cos 2x};\ \cot^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 272 12/15/2016 8:10:17 PM

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية بعد كل كلمة إلى المكان الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

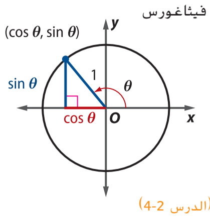
الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدرس 4-1)

- المتطابقات المثلثية هي متطابقات تتضمن دوال مثلثية ويمكن استخدامها لإيجاد قيم مثلثية.
- يمكن تحويل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة بكتابة التعبير بدلالة إحدى الدوال المثلثية أو بدلالة sine and cosine.
- أكثر متطابقة مثلثية شيوعًا هي متطابقة فيثاغورس $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الدرس 4-2)

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأسهل.
- استخدم المتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، أو إعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فروق، أو إيجاد ناتج ضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل مقام بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$ إلى حد فردي باستخدام متطابقة المُرافق وفيثاغورس الخاصة به.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير مشترك.

حل معادلات مثلثية (الدرس 4-3)

- تقنيات جبرية يمكن استخدامها لحل معادلات مثلثية تتضمن عزل التعبير المثلثي، والحصول على الجذر التربيعي لكلا الطرفين، وتحليل العوامل.
- يمكن استخدام متطابقات مثلثية لحل معادلات مثلثية بواسطة كتابة المعادلة باستخدام دالة مثلثية فردية أو بواسطة تربيع كل طرف للحصول على المتطابقة.

متطابقات المجموع والفروق (الدرس 4-4)

- يمكن استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد القيمة الدقيقة للدوال المثلثية لزوايا غير معروفة.
- يمكن أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفروق لإعادة كتابة تعابير مثلّثية في صورة تعبير جبري.

متطابقات اضعاف الزوايا ومتطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع (الدرس 4-5)

- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم التعابير التي لا يمكن إيجاد قيمتها بطريقة أخرى.

المفردات الأساسية

الدالة متساوية القيمة (cofunction)
متطابقة الفرق (difference identity)
متطابقة ضعف الزاوية (double-angle identity)
متطابقة نصف الزاوية (half-angle identity)
متطابقة (identity)
متطابقة فردية-زوجية (odd-even identity)
متطابقة اختصار الأس (power-reducing identity)
متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع (product-to-sum identity)
متطابقة فيثاغورس (Pythagorean identity)
متطابقة ناتج القسمة (quotient identity)
متطابقة عكسية/معكوسة (reciprocal identity)
متطابقة اختزال (reduction identity)
متطابقة المجموع (sum identity)
متطابقة مثلثية (trigonometric identity)
إثبات صحة المتطابقة (verify an identity)

10. $\cos\alpha\cos\beta$؛ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

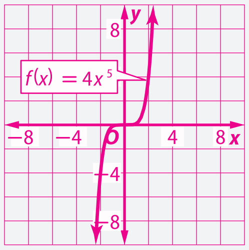
مراجعة المفردات

أكمل كل متطابقة بإكمال الفراغات. ثم قم بتسمية المتطابقة.

1. $\sec\theta =$ ______ $\frac{1}{\cos\theta}$ ؛ متطابقة عكسية
2. ______ $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $-\tan\theta$؛ متطابقة فردية-زوجية
3. ______ $+ 1 = \sec^2\theta$ $\tan^2\theta$؛ متطابقة فيثاغورس
4. $\cos(90° - \theta) =$ ______ $\sin\theta$؛ متطابقة متساوية القيمة
5. $\tan(-\theta) =$ ______ $\tan\theta$؛ متطابقة ناتج القسمة
6. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha$ ______ $+ \cos\alpha$ ______ $\cos\beta, \sin\beta$؛ متطابقة مجموع
7. ______ $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha$؛ متطابقة زوايا مزدوجة
8. ______ $= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ $\cos\frac{\theta}{2}$؛ متطابقة زاوية نصفية
9. $\frac{1-\cos 2\theta}{2} =$ ______ $\sin^2\theta$؛ متطابقة الاختصار الأسي
10. ______ $= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

إجابات إضافية (الدرس 4-5)

105. $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع مع المحور y: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 273
12/15/2016 8:10:18 PM

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

4-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

11–16. انظر الهامش.

11 sec θ and cos θ, $\tan \theta = 3$, $\cos \theta > 0$

12. cot θ and sin θ; $\cos \theta = -\frac{1}{5}$; $\tan \theta < 0$

13. csc θ and tan θ; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\sin \theta < 0$

14. cot θ and cos θ; $\tan \theta = \frac{2}{7}$; $\csc \theta > 0$

15. sec θ and sin θ; $\cot \theta = -2$, $\csc \theta < 0$

16. cos θ and sin θ, $\cot \theta = \frac{3}{8}$, $\sec \theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$ **1**

18. $\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x$ **$\csc^2 x$**

19. $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos(-x)}$ **$\sec x$**

20. $\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 1}$ **1**

21. $\frac{1}{1 - \sin x}$ **$\sec^2 x + \tan x \sec x$**

22. $\frac{\cos x}{1 + \sec x}$ **$\cot^2 x - \cot^2 x \cos x$**

مثال 1

إذا كانت $\sec \theta = -3$ و$\sin \theta > 0$، **فأوجد** $\sin \theta$.

بما أن $\sin \theta > 0$ و$\sec \theta < 0$، إذًا θ يجب أن تكون في الربع الثاني. لإيجاد $\sin \theta$، قم أولاً بإيجاد $\cos \theta$ باستخدام المتطابقة العكسية لـ $\sec \theta$ و$\cos \theta$.

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \quad \text{متطابقة عكسية}$$

$$= -\frac{1}{3} \quad \sec \theta = -3$$

يمكنك الآن استخدام متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\sin \theta$ و$\cos \theta$ لإيجاد $\sin \theta$.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \quad \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \quad \text{أوجد ناتج الضرب.}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9} \quad \text{اطرح.}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{بسّط}$$

4-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

23–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

23. $\frac{\sin}{1 - \cos \theta} + \frac{}{1 + \cos \theta} = 2 \csc \theta$

24. $\frac{\cos \theta}{\sec \theta} + \frac{\sin \theta}{\csc \theta} = 1$

25. $\frac{\cot \theta}{1 + \csc \theta} + \frac{1 + \csc \theta}{\cot \theta} = 2 \sec \theta$

26. $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

27. $\frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = \csc \theta - 1$

28. $\frac{\sec \theta}{\tan \theta} + \frac{\csc \theta}{\cot \theta} = \sec \theta + \csc \theta$

29. $\frac{\sec \theta + \csc \theta}{1 + \tan \theta} = \csc \theta$

30. $\cot \theta \csc \theta + \sec \theta = \csc^2 \theta \sec \theta$

31. $\frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{1 + \tan \theta}$

32. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta}$

مثال 2

اثبت صحة $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا. لذا عليك البدء بذلك التعبير.

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + 2\cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin \theta}$$

$$= 2 \csc \theta$$

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

11. $\sec \theta = \sqrt{10}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

12. $\cot \theta = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$,

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

13. $\csc \theta = -\frac{5}{4}$, $\tan \theta = -\frac{4}{3}$

14. $\cot \theta = \frac{7}{2}$, $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{7\sqrt{53}}{53}$

15. $\sec \theta = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

16. $\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{73}} = -\frac{3\sqrt{73}}{73}$,

$\sin \theta = -\frac{8}{\sqrt{73}} = -\frac{8\sqrt{73}}{73}$

المراجعة التابعة للدرس

4-3 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

33. $2 \sin x = \sqrt{2}$ $\frac{\pi}{4}$؛ $\frac{3\pi}{4}$
34. $4 \cos^2 x = 3$

34. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

35. $\tan^2 x - 3 = 0$
36. $9 + \cot^2 x = 12$
37. $2 \sin^2 x = \sin x$ $0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
38. $3 \cos x + 3 = \sin^2 x$ π

35. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم x. 39–44. n هو عدد صحيح.

39. $\sin^2 x - \sin x = 0$ $n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi$
40. $\tan^2 x = \tan x$ $n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi$
41. $3 \cos x = \cos x - 1$ $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$
42. $\sin^2 x = \sin x + 2$ $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
43. $\sin^2 x = 1 - \cos x$ $2n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi$
44. $\sin x = \cos x + 1$ $\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \pi + 2n\pi$

36. $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

مثال 3

حل المعادلة $\sin \theta = 1 - \cos \theta$ لجميع قيم θ.

$\sin \theta = 1 - \cos \theta$	المعادلة الأصلية.
$\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2$	أوجد تربيع كل طرف.
$\sin^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$	اكتب الصيغة الموسعة.
$1 - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta$	اطرح.
$0 = 2 \cos \theta(\cos \theta - 1)$	حلل إلى العوامل.

أوجد حل x في $[0, 2\pi]$.

$\cos \theta = 1$ أو $\cos \theta = 0$

$\theta = \cos^{-1} 1$ $\qquad$ $\theta = \cos^{-1} 0$

$\theta = 0$ $\qquad$ $\theta = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

يوضح التحقق أن $\frac{3\pi}{2}$ هو حل غير مقبول. إذًا، فإن الحل هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $\theta = 0 + 2n\pi$.

4-4 متطابقات المجموع والفروق

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي. 45–50. انظر الهامش.

45. $\cos 15°$
46. $\sin 345°$
47. $\tan \frac{13\pi}{12}$
48. $\sin \frac{7\pi}{12}$
49. $\cos -\frac{11\pi}{12}$
50. $\tan \frac{5\pi}{12}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

51. $\dfrac{\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{\pi}{9}}{1 - \tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{8\pi}{9}}$ 0
52. $\cos 24° \cos 36° - \sin 24° \sin 36°$ $\frac{1}{2}$
53. $\sin 95° \cos 50° - \cos 95° \sin 50°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
54. $\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} + \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي. 55–58. انظر الهامش.

55. $\cos(\theta + 30°) - \sin(\theta + 60°) = -\sin \theta$
56. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$
57. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \theta$
58. $\tan\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{23\pi}{12}$

$\tan \frac{23\pi}{12} = \tan\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{23\pi}{12} = \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$
$= \dfrac{\tan \frac{5\pi}{4} + \tan \frac{2\pi}{3}}{1 - \tan \frac{5\pi}{4} \tan \frac{2\pi}{3}}$	متطابقة المجموع
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})}$	إيجاد قيمة tan
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	بسّط
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	طبّق عملية إنطاق المقام (تخليصه من الجذور).
$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 3}$	اضرب.
$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$	بسّط

إجابات إضافية

45. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

46. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

47. $2 - \sqrt{3}$

48. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

49. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

50. $2 + \sqrt{3}$

55. $\cos(\theta + 30°) - \sin(\theta + 60°)$
$= \cos \theta \cos 30° - \sin \theta \sin 30° - (\sin \theta \cos 60° + \cos \theta \sin 60°)$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$
$= -\sin \theta$

56. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$
$= \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$

57. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
$= \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} + \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}$
$= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$
$= \cos \theta$

58. $\tan\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)$
$= \dfrac{\tan \theta + \tan \frac{3\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{3\pi}{4}}$
$= \dfrac{\tan \theta - 1}{1 - \tan \theta \cdot (-1)}$
$= \dfrac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

4-5 متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل ناتج الضرب لمجموع

59–62. انظر الهامش.

أوجد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

59. $\cos\theta = \frac{1}{3}, (0°, 90°)$ **60.** $\tan\theta = 2, (180°, 270°)$

61. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **62.** $\sec\theta = \frac{13}{5}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

63. $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

64. $\cos \frac{11\pi}{12}$ $\quad -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

65. $\tan 67.5°$ $\quad \sqrt{2}+1$

66. $\cos \frac{3\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

67. $\sin \frac{15\pi}{8}$ $\quad -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

68. $\tan \frac{13\pi}{12}$ $\quad 2-\sqrt{3}$

مثال 5

أوجد قيم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ إذا كان θ في الربع الرابع و $\sin\theta = -\frac{24}{25}$.

يوجد θ في الربع الرابع. إذًا $\cos\theta = \frac{7}{25}$ و $\sin\theta = -\frac{24}{25}$.

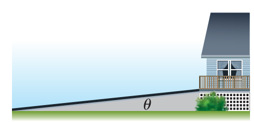
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{24}{25}\right)\frac{7}{25} = -\frac{336}{625}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\frac{527}{625}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{24}{7}\right)}{1-\left(-\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{48}{7}}{-\frac{527}{49}} = \frac{336}{527}$$

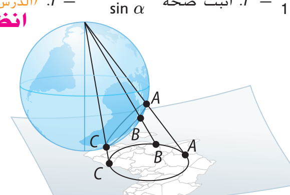
التطبيقات وحل المسائل

69. **الإنشاء** أوجد $\tan\theta$ التي يحدثها المنحدر مع سطح الأرض إذا كان $\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$ و$\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$. $\frac{1}{12}$ (الدرس 4-1)



70. **الإضاءة** يمكن حساب شدة الضوء المنبعث من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$، حيث يكون I_0 شدة الضوء الداخل للنظام، بينما θ فتكون زاوية محور العدسة الثانية مع العدسة الأولى. اكتب معادلة لشدة الضوء مستخدمًا $\tan\theta$ فقط. (الدرس 4-1) $I = I_0 - I_0\left(\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

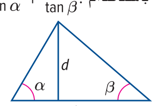
71. **الإسقاطات الخرائطية** يُستخدم الإسقاط المُجسّم من أجل إسقاط الخطوط المحيطة بشكل كروي ثلاثي الأبعاد على خريطة ثنائية الأبعاد. وترتبط النقاط الموجودة على الشكل الكروي بالنقاط الموجودة على الخريطة باستخدام الصيغة r . $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$. اثبت صحة $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 4-2) **انظر الهامش.**



72. **حركة المقذوف** ستبقى كرة ما تُرمى بسرعة إبتدائية v_0 بزاوية θ وتتحرك بمسافة أفقية d في الهواء لمدة t ثانية، حيث $t = \frac{d}{v_0\cos\theta}$. افترض أن الكرة رُميت بسرعة مبدئية تبلغ 50 قدمًا في الثانية، وتحركت لمسافة 100 قدم وبقيت في الهواء لمدة 4 ثوانٍ. أوجد الزاوية التي ستُرمى الكرة منها. (الدرس 4-3) $60°$ **انظر الهامش.**

73. **الإذاعة** يحدث تداخل عندما تمر موجتان في الفراغ ذاته في نفس الوقت. ويكون هذا التداخل مشوّشًا، إذا كانت سعة مجموع الموجتين أقل من سعة الموجات الفردية. حدد ما إذا كان التداخل مشوشًا عند تمثيل الموجتين بواسطة الجمع بين $y = 20\sin(3t + 45°)$ و $y = 20\sin(3t + 225°)$. (الدرس 4-4) **نعم**

74. **التثليث** *التثليث* هو عملية قياس مسافة ما d باستخدام الزاويتين α وβ والمسافة ℓ باستخدام $\ell = \frac{d}{\tan\alpha} + \frac{d}{\tan\beta}$. (الدرس 4-5) **انظر الهامش.**



a. حل القاعدة لإيجاد d.

b. اثبت أن $d = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$.

c. اثبت أن $d = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

d. وضّح ما إذا كان $\alpha = \beta$، ثم $d = 0.5\ell\tan\alpha$.

إجابات إضافية

59. $\frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

60. $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}$

61. $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

62. $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{120}{119}$

71.
$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\times\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

74a. $d = \frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}}$

74b.
$$\frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}$$

74c.
$$\frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

74d.
$$\frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha)} = \frac{\ell\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\ell\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\ell\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\ell}{2}\tan\alpha$$

الوحدة 4 تمرين على الاختبار

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

1. $\sin\theta$ and $\cos\theta$; $\csc\theta = -4$, $\cos\theta < 0$ $-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}$

2. $\csc\theta$ and $\sec\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{5}$; $\csc\theta < 0$ $-\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3. $\frac{\sin(90° - x)}{\tan(90° - x)}$ $\csc\theta$

4. $\frac{\sec^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$ $\sin^2 x$

5. $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$ $\sin x$

اثبت صحة كل متطابقة. 6–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

6. $\frac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} + \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = 1$

7. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

8. $\frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta} = 2\csc^2\theta$

9. $-\sec^2\theta \sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

10. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

11. **اختيار من متعدد** أي التعابير غير صحيح؟ **D**

A $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

B $\tan(-\theta) = \frac{1}{\cot(-\theta)}$

C $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

D $\tan(-\theta) + 1 = \sec(-\theta)$

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

12. $\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$ $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

13. $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$ $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ.

14. $\tan^2\theta - \tan\theta = 0$ $n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

15. $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$ $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

16. $\frac{1}{\sec\theta - 1} - \frac{1}{\sec\theta + 1} = 2$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$

17. $\sec\theta - 2\tan\theta = 0$ $\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

18. **التيار الكهربائي** يتم احتساب التيار الكهربائي المنتج بواسطة مولّد التيار من خلال الصيغة $I = 40\sin 135\pi t$، حيث I هي قياس التيار بالأمبير، بينما t هو الوقت بالثانية. في أي وقت t سيبلغ التيار 20 أمبيرًا لأول مرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. **0.0012 s**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي.

19. $\tan 165°$ **19–23. انظر الهامش.**

20. $\cos -\frac{\pi}{12}$

21. $\sin 75°$

22. $\cos 465° - \cos 15°$

23. $6\sin 675° - 6\sin 45°$

24. **اختيار من متعدد** ما المتطابقة الصحيحة؟ **H**

F $\cos(\theta + \pi) = -\sin\pi$

G $\cos(\pi - \theta) = \cos\theta$

H $\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\theta$

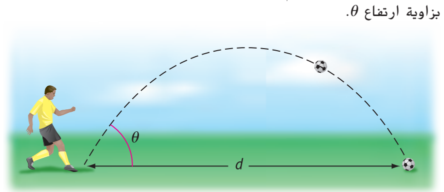
J $\sin(\pi + \theta) = \sin\theta$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$ **0**

26. $\frac{\tan 135° - \tan 15°}{1 + \tan 135° \tan 15°}$ $-\sqrt{3}$

27. **الفيزياء** رُكلت كرة قدم من مستوى أرضية الملعب بسرعة إبتدائية v بزاوية ارتفاع θ.



a. يمكن تحديد المسافة الأفقية d التي ستتحركها الكرة باستخدام $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$، حيث g هي التسارع بسبب الجاذبية. اثبت صحة أن هذا التعبير مماثل للصيغة $\frac{2}{g}v^2(\tan\theta - \tan\theta\sin^2\theta)$. **انظر الهامش.**

b. يمكن تحديد الحد الأقصى للارتفاع h الذي يمكن للعنصر بلوغه باستخدام الصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. أوجد نسبة الارتفاع القصوى المحققة إلى المسافة الأفقية المقطوعة. $\frac{1}{4}\tan\theta$

أوجد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

28. $\tan\theta = -3, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

29. $\cos\theta = \frac{1}{5}, (0°, 90°)$ $\frac{4\sqrt{6}}{25}, -\frac{23}{25}, -\frac{4\sqrt{6}}{23}$

30. $\cos\theta = \frac{5}{9}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{20\sqrt{14}}{81}; -\frac{31}{81}; -\frac{20\sqrt{14}}{31}$

277

إجابات إضافية

19. $-2 + \sqrt{3}$

20. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

21. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

22. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

23. $-6\sqrt{2}$

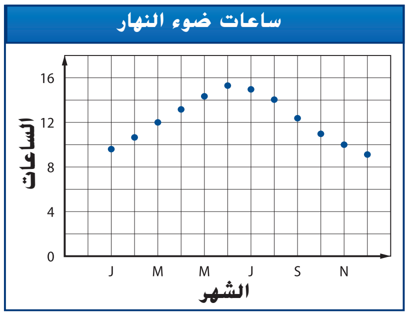
27a.
$$\frac{2}{g}v^2(\tan\theta - \tan\theta\sin^2\theta)$$
$$= \frac{2}{g}v^2\tan\theta(1 - \sin^2\theta)$$
$$= \frac{2}{g}v^2\tan\theta\cos^2\theta$$
$$= \frac{2}{g}v^2\sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

الوحدة 4
الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
معدلات التغير لــ sine و cosine الزاوية

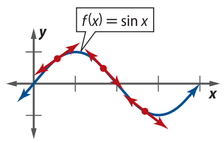
الهدف:

- تقريب معدلات التغير لدوال sine و cosine الزاوية باستخدام ناتج قسمة الفرق.

لقد تعلمتَ أن العديد من المواقف في الحياة اليومية تتضمن سلوك متكررًا على مدار الوقت، وبالتالي يمكن تمثيلها بواسطة دوال منحنى الــ sine. ومن الممكن استخدام تحويلات الدوال الرئيسية sin x وcos x ونماذج مثلثية لتمثيل البيانات وتحليل الاتجاهات وتوقع القيم المستقبلية.



بينما يمكنك تمثيل مواقف من الحياة اليومية باستخدام تمثيلات بيانية لــ sine و cosine الزاوية. فيمكن استخدام حساب التفاضل لتحديد معدل تغير النموذج في أي نقطة زمنية. إن معرفتك بناتج قسمة الفرق، ومتطابقات المجموع لــ sine الزاوية و الــ cosine، وإيجاد قيمة الحدود يتيح لك الآن اكتشاف معدلات تغير هذه الدوال في أي نقطة زمنية.



نشاط 1 الحساب التقريبي لمعدل التغير

قرّب معدل تغير $f(x) = \sin x$ لعدة نقاط. **الخطوة 3-2. انظر الهامش.**

الخطوة 1 عوّض عن $f(x) = \sin x$ في ناتج قسمة الفرق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow m = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$. افترض أن $h = 0.1$ و0.01 و0.001 و0.0001.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 عندما $x = 0$ و$x = \pi$.

تحليل النتائج **2-1. انظر الهامش.**

1. استخدم خطوط المماس والتمثيل البياني لــ $f(x) = \sin x$ لتوضيح القيم الموجودة في الخطوتين 2 و3.
2. ما الذي سيحدث لمعدل تغير $f(x)$ كلما زاد x؟

على عكس الدالة الأسية للأساس الطبيعي $g(x) = e^x$ والمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية $h(x) = \ln x$، فإن تعبير تمثيل معدل تغير $f(x) = \sin x$ في أي نقطة سيكون غير واضح. ورغم ذلك، يمكننا تعويض $f(x)$ في ناتج قسمة الفرق ثم تحويل التعبير لأبسط صورة.

$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	ناتج قسمة الفرق
$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$	$f(x) = \sin x$
$= \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$	متطابقة مجموع الــ sine الزاوية
$= \frac{(\sin x \cos h - \sin x) + \cos x \sin h}{h}$	اجمع الحدود مع $\sin x$.
$= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$	حلل الى العوامل في $\sin x$ و$\cos x$

1 التركيز

الهدف تقريب معدّلات التغير لدوال جيب الزاوية وجيب التمام باستخدام ناتج قسمة الفرق.

نصيحة للتدريس

في حساب التفاضل والتكامل، يطلق على استخدام ناتج قسمة الفرق لإيجاد معدّل التغيّر عند نقاط متعدّدة في الدالة مصطلح "التفاضل". ويطلق على قياس هذا التغيّر مصطلح "المشتق".

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. اطلب من الطلاب إكمال النشاط 1 والنشاط 2.

- ذكّر الطلاب بأن ناتج قسمة الفرق $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ يمكن استخدامه لإيجاد معدّل التغيّر عند نقطة فردية في الدالة عندما توجد قيمة النهاية عندما تقترب h من صفر.
- ذكّر الطلاب بأن ناتج قسمة الفرق يحدّد ميل الخط المماس لتلك النقطة في الدالة.
- يمكن للطلاب الرجوع إلى صفحة 255 في الدرس 4-4 إذا واجهوا صعوبة في تذكّر متطابقات المجموع والفرق لجيب الزاوية وجيب التمام.

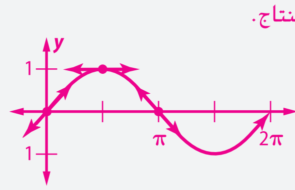
إجابات إضافية

نشاط 1

الخطوة 2 $h = 0.1, m \approx -0.0500$; $h = 0.01, m \approx -0.0050$; $h = 0.001, m \approx -0.0005$; $h = 0.0001, m \approx -0.00005$

الخطوة 3 $x = 0$: $h = 0.1, m \approx 0.9983$; $h = 0.01, m \approx 1.0000$; $h = 0.001, m \approx 1.0000$; $h = 0.0001, m \approx 1.0000$
$x = \pi$: $h = 0.1, m \approx -0.9983$; $h = 0.01, m \approx -1.0000$; $h = 0.001, m \approx -1.0000$; $h = 0.0001, m \approx -1.0000$

1. الإجابة النموذجية: توضّح القيم أن معدل تغيّر $f(x)$ عند $\frac{\pi}{2}$ هو 0، و عند 0 هو 1، وعند π هو -1. وينبغي أن يكون هذا هو ميل خطوط المماس لــ $f(x)$ عند تلك القيم لــ x. التمثيل البياني لــ $f(x)$ وخطوط المماس تثبت صحة هذا الاستنتاج.



2. الإجابة النموذجية: من خلال تحليل التمثيل البياني للدالة $f(x)$. يبدو أنه كلما تزيد x عن 2π. يتكرر معدل التغيّر. فعلى سبيل المثال، سيكون معدّل التغيّر نفس معدّل $x = 0$ التغيّر عند $x = 2\pi$ و 4π. ففترة معدّل التغيّر هي 2π.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 278 12/15/2016 8:10:31 PM

تمرين اطلب من الطلاب إكمال تمارين تحليل النتائج 1-4 وتمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم تمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 5 لتقويم مدى استيعاب الطلاب لكيفية استخدام متطابقات المجموع لجيب الزاوية وجيب التمام لإيجاد تعابير معدّل التغيّر عند أي نقطة في دالة جيب الزاوية أو دالة جيب التمام.

من العملي إلى النظري

اسأل:

- هل من الممكن حساب معدّل التغيّر للصيغة $f(x) = \tan x$ عند نقطة x؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فما التعبير الذي يعبّر عن معدّل التغيير هذا؟ نعم، $m = \sec^2 x$

إجابات إضافية

3. بالنسبة للصيغة $x = \frac{3\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = 2\pi$. معدّل التغيير هو 1. بالنسبة للصيغة $x = \frac{5\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 0.

4. الإجابة النموذجية: يشير كون الدوال المثلّثية دورية إلى أن متوسط معدلات التغيير لهذه الدوال ستكون دورية أيضًا. إذًا، أنواع الدوال التي يمكنها تمثيل هذا السلوك الدوري هي الدوال المثلّثية فقط.

5a. $m = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$

5b. $m = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$

5c. $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0;\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$

f5. بالنسبة للصيغة $x = 0$. معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = \frac{\pi}{2}$، معدّل التغيير هو -1. بالنسبة للصيغة $x = \pi$، معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = \frac{3\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 1.

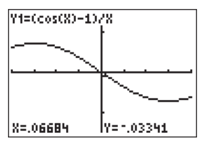
لدينا الآن تعبيران يتضمنان $\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$ و $\sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$ للحصول على تقريب دقيق لمعدل تغير $f(x)$ عند إحدى النقاط، سيلزم تقريب h من 0 قدر الإمكان. سابقًا، كان بمقدورنا التعويض عن $h = 0$ في تعبير لإيجاد القيمة الدقيقة لميل إحدى الدوال عند نقطة ما. ورغم ذلك، كلا التعابير الكسرية غير محددة عند $h = 0$.

	تعابير أصلية	
$\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$		$\sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$
$= \cos x\left(\frac{\sin 0}{0}\right)$	$h = 0$	$= \sin x\left(\frac{\cos 0 - 1}{0}\right)$
غير محددة		غير محددة

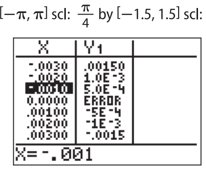
يمكننا تقريب القيمة للتعبيرين بواسطة إيجاد حد كل منهما كلما اقترب h من 0 وذلك باستخدام أساليب تمت مناقشتها في إحدى الدروس السابقة.

نشاط 2 حساب معدل التغير

أوجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \sin x$.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1



X	Y1
-.0030	.00150
-.0020	1.0E-3
-.0010	5.0E-4
0.0000	ERROR
.00100	-5E-4
.00200	-1E-3
.00300	-.0015

X=-.001

الخطوة 1 استخدم الحاسبة البيانية لتقدير . $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$ **0**

الخطوة 2 اثبت صحة القيمة الموجودة في الخطوة 1 باستخدام الخاصية TABLE بالآلة الحاسبة.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 لتقدير. $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ **1**

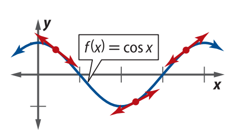
الخطوة 4 عوّض عن القيم الموجودة في الخطوة 2 والخطوة 3 في معادلة الميل $m = (0)\sin x + (1)\cos x$
$m = \sin x\left(\frac{\cos h \quad 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right).$

الخطوة 5 حوّل التعبير الموجود في الخطوة 4 لأبسط صورة. $m = \cos x$

تحليل النتائج 3-4. انظر الهامش.

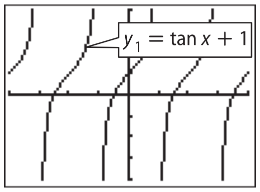
3. أوجد معدل تغير $f(x) = \sin x$ عند $x = \frac{3\pi}{2}$، 2، و $\frac{5\pi}{2}$.
4. خمّن لماذا يلزم تمثيل معدلات التغير لجميع الدوال المثلثية بدوال مثلثية أخرى.

التمثيل والتطبيق

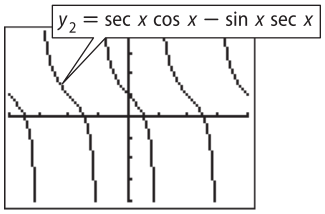


5. في هذه المسألة، ستجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \cos x$ عند أي نقطة x.
a–c, f. انظر الهامش.
   a. عوّض عن $f(x) = \cos x$ في ناتج قسمة الفرق.
   b. حوّل التعبير من الجزء **a** لأبسط صورة.
   c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حد تعبيري الكسور كلما اقترب h من 0.
   d. عوّض عن القيم الموجودة في الجزء **c** داخل معادلة الميل الموجودة في الجزء **b**. d. $m = \cos x\,(0) - \sin x\,(1)$
   e. حوّل معادلة الميل في الجزء **d** لأبسط صورة. $m = -\sin x$
   f. أوجد معدل تغير $f(x) = \cos x$ عند $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi = \frac{3\pi}{2}$.

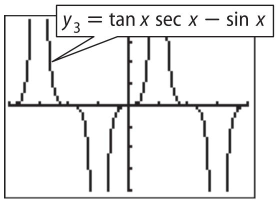
55b.



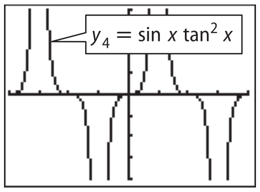
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

55d. نعم؛

$$y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x = \frac{1}{\cos x}\cos x - \sin x \frac{1}{\cos x} = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \tan x = -\tan x + 1$$

وحيث إن $y_2 = -\tan x + 1$، و $-\tan x + 1 \neq \tan x + 1$ للمجال الكامل لكل دالة. $y_1 \neq y_2$.

$$y_4 = \sin x \tan^2 x = \sin x(\sec^2 x - 1) = \sin x \sec^2 x - \sin x$$
$$= \sin x \times \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} - \sin x$$
$$= \tan x \sec x - \sin x$$

وحيث إن $y_4 = \tan x \sec x - \sin x = y_3$. $y_3 = y_4$ للمجال الكامل لكل دالة.

62. $A = \frac{1}{2}bc \sin A$

$$A^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 A$$
$$A = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 A}$$
$$A = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 A)}$$
$$A = \sqrt{\left[\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)\right]\left[\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)\right]}$$

بواسطة قانون جيب التمام؛ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. إذًا، $\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$. أعد كتابة كل عامل أسفل الجذر باستخدام هذه القيمة لـ $\cos A$.

$$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)$$
$$= \frac{1}{2}bc\left(1 + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)$$
$$= \frac{bc}{2} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4}$$
$$= \frac{-a^2 + b^2 + 2bc + c^2}{4}$$
$$= \frac{-a^2 + (b + c)^2}{4}$$
$$= \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{4}$$
$$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$$

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)$$
$$= \frac{1}{2}bc\left(1 - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)$$
$$= \frac{bc}{2} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4}$$
$$= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4}$$
$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4}$$
$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4}$$
$$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$$

أعد كتابة كل تعبير من هذه التعابير بدلالة s

إذا كان $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)$$
$$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$$
$$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{(a + b + c) - 2a}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\left[\frac{1}{2}(a + b + c) - a\right]$$
$$= s(s - a)$$

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)$$
$$= \frac{a - b + c}{2} \times \frac{a + b - c}{2}$$
$$= \frac{(a + b + c) - 2b}{2} \times \frac{(a + b + c) - 2c}{2}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(a + b + c) - b\right] \times \left[\frac{1}{2}(a + b + c) - c\right]$$
$$= (s - b)(s - c)$$

بالتعويض،

$$A = \sqrt{\left[\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)\right]\left[\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)\right]}$$
$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

2. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

$$=\frac{\cos x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}+\frac{\cos x\,(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x-\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}+\frac{\cos x+\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=2\sec x$$

3. $\dfrac{\tan x}{\sec x+1}=\dfrac{\tan x}{\sec x+1}\times\dfrac{\sec x-1}{\sec x-1}$

$$=\frac{\tan x\,(\sec x-1)}{\sec^2 x-1}$$

$$=\frac{\tan x\,(\sec x-1)}{\tan^2 x}$$

$$=\frac{\sec x-1}{\tan x}$$

$$=\frac{\sec x}{\tan x}-\frac{1}{\tan x}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}-\frac{1}{\tan x}$$

$$=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}$$

$$=\csc x-\cot x$$

الدرس 4-2

1. $(\sec^2\theta-1)\cos^2\theta=(\tan^2\theta)\cos^2\theta$

$$=\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta$$

2. $\sec^2\theta\,(1-\cos^2\theta)=\sec^2\theta-\sec^2\theta\cos^2\theta$

$$=\sec^2\theta-1$$

$$=\tan^2\theta$$

3. $\sin\theta-\sin\theta\cos^2\theta=\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$

$$=\sin\theta\sin^2\theta$$

$$=\sin^3\theta$$

4. $\csc\theta-\cos\theta\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\sin\theta$$

5. $\cot^2\theta\csc^2\theta-\cot^2\theta=\cot^2\theta\,(\csc^2\theta-1)$

$$=\cot^2\theta\cot^2\theta$$

$$=\cot^4\theta$$

.63 مهيا.

$$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{1-(1-\cos^2 x)}{(1-\cos^2 x)-\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}$$

64. $\csc x=\dfrac{1}{\sin x},\ \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x},$

$$\sec x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin^2 x},\ \tan x=\pm\frac{\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin^2 x},$$

$$\cot x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$$

65. $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x},\ \csc x=\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos^2 x},$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x},$$

$$\cot x=\pm\frac{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos^2 x}$$

66. $\sin x=\pm\dfrac{\tan x\sqrt{1+\tan^2 x}}{1+\tan^2 x},\ \csc x=\pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x},$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{1+\tan^2 x},\ \sec x=\pm\sqrt{1+\tan^2 x},\ \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

.69 وفقًا لنظرية فيثاغورس، $x^2+y^2=r^2$. عند قسمة كل جانب من المعادلة على x^2 $1+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{r^2}{x^2}$.
بما أن $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ و $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$، $1+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{r^2}{x^2}$ تتساوى مع $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ أو $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$.

.70 وفقًا لنظرية فيثاغورس، $x^2+y^2=r^2$. عند قسمة كل جانب من المعادلة على y^2، $\dfrac{x^2}{y^2}+1=\dfrac{r^2}{y^2}$.
بما أن $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$ و $\csc\theta=\dfrac{r}{y}$، $\dfrac{x^2}{y^2}+1=\dfrac{r^2}{y^2}$ يساوي $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$ أو $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

الدرس 4-2 (تمرين موجه)

1A. $\sec^2\theta\cot^2\theta-1=\dfrac{1}{\cancel{\cos^2}\theta}\times\dfrac{\cancel{\cos^2}\theta}{\sin^2\theta}-1$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}-1$$

$$=\csc^2\theta-1$$

$$=\cot^2\theta$$

1B. $\sec\alpha\csc\alpha\tan\alpha-1=\dfrac{1}{\cos\alpha}\times\dfrac{1}{\sin\alpha}\times\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

$$=\sec^2\alpha-1$$

$$=\tan^2\alpha$$

11. $\frac{1}{1-\tan^2\theta}+\frac{1}{1-\cot^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\frac{1}{1-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\frac{1}{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\frac{1}{\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\frac{-1}{-1}\times\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$=1$

12. $\frac{1}{\csc\theta+1}+\frac{1}{\csc\theta-1}$

$=\frac{\csc\theta-1}{\csc\theta-1}\times\frac{1}{\csc\theta+1}+\frac{\csc\theta+1}{\csc\theta+1}\times\frac{1}{\csc\theta-1}$

$=\frac{\csc\theta-1}{\csc^2\theta-1}+\frac{\csc\theta+1}{\csc^2\theta-1}$

$=\frac{2\csc\theta}{\csc^2\theta-1}$

$=\frac{2\csc\theta}{\cot^2\theta}$

$=\frac{2\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\frac{2}{\sin\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\left(\frac{2}{\cos^2\theta}\right)\sin\theta$

$=2\sec^2\theta\sin\theta$

13. $(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)=\csc^2\theta-\cot^2\theta$
$=1$

14. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos a^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

15. $\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1}{1+\sin\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\frac{1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta$

6. $\tan\theta\csc^2\theta-\tan\theta=\tan\theta(\csc^2\theta-1)$

$=\tan\theta\cot^2\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

7. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

8. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}+\frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+1-2\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2-2\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$

9. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

10. $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\sin\theta+\cos\theta$

22. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\times\dfrac{1-\cos^2\theta}{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{-1+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\times\dfrac{1-\cos^2\theta}{1-2\cos^2\theta}$

$=\dfrac{-(1-2\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta(1-2\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}$

23. $\dfrac{1+\csc\theta}{\sec\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sin\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{1}$

$=\dfrac{\sin\theta\cos\theta+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\cos\theta+\cot\theta$

24. $(\csc\theta-\cot\theta)^2=\csc^2\theta-2\csc\theta\cot\theta+\cot^2\theta$

$=\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{2}{\sin\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

16. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos\theta}$

$=2\sec\theta$

17. $\csc^4\theta-\cot^4\theta$

$=(\csc^2\theta-\cot^2\theta)(\csc^2\theta+\cot^2\theta)$

$=[\csc^2\theta-(\csc^2\theta-1)][\csc^2\theta+(\csc^2\theta-1)]$

$=2\csc^2\theta-1$

$=2(\cot^2\theta+1)-1$

$=2\cot^2\theta+2-1$

$=2\cot^2\theta+1$

18. $\dfrac{\csc^2\theta+2\csc\theta-3}{\csc^2\theta-1}=\dfrac{(\csc\theta+3)(\csc\theta-1)}{(\csc\theta+1)(\csc\theta-1)}$

$=\dfrac{\csc\theta+3}{\csc\theta+1}$

20. $(\csc\theta+\cot\theta)(1-\cos\theta)$

$=\csc\theta-\csc\theta\cos\theta+\cot\theta-\cot\theta\cos\theta$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}-\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)\cos\theta+\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$=\sin\theta$

21. $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-(\sin^2\theta)\left(\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\sin^2\theta\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=\sin^2\theta\tan^2\theta$

25. $$\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\frac{1}{2\cos^2\theta-1}$$

26. $$\tan^2\theta\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta$$
$$=\sin^2\theta$$
$$=1-\cos^2\theta$$

27. $$\sec\theta-\cos\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\tan\theta\sin\theta$$

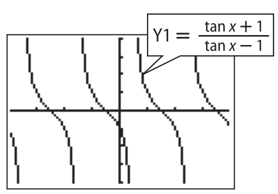
28. $$1-\tan^4\theta=(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)$$
$$=[1-(\sec^2\theta-1)](\sec^2\theta)$$
$$=\left(2-\sec^2\theta\right)(\sec^2\theta)$$
$$=2\sec^2\theta-\sec^4\theta$$

29. $$(\csc\theta-\cot\theta)^2=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

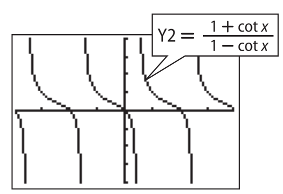
30. $$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

31. $$\frac{2+\csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta}=\frac{2}{\csc\theta\sec\theta}+1$$
$$=2\times\frac{1}{\csc\theta}\times\frac{1}{\sec\theta}+1$$
$$=2\sin\theta\cos\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

34.



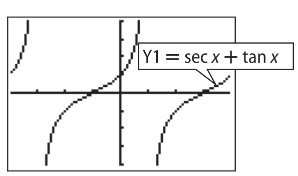
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



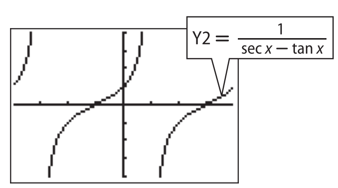
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

عندما تكون $x = \pi$، $Y1 = -1$ و $Y2$ غير محددة؛ فعندئذ لا تمثل المعادلة متطابقة.

35.



$-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

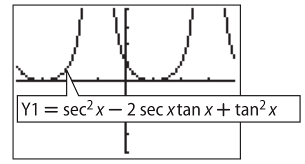


$-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

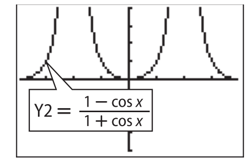
$$\frac{1}{\sec x-\tan x}=\frac{1}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\sec x+\tan x$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 5 12/15/2016 8:10:35 PM

36.



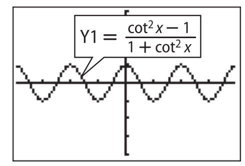
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



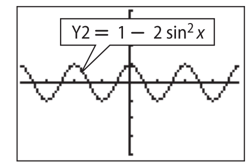
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

عندما تكون $x = 0$، $Y1 = 1$ و $Y2 = 0$؛ إذًا، لا تكون المعادلة متطابقة.

37.



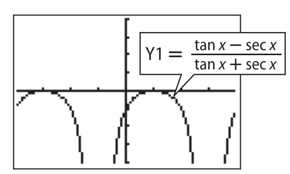
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



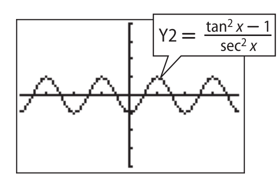
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$$\frac{\cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\cot^2 x - 1}{\csc^2 x}$$
$$= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 1}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

38.



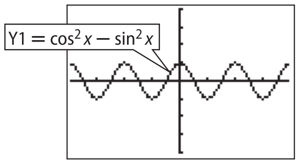
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



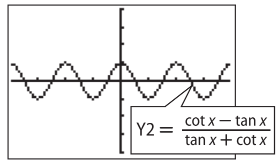
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

في حالة $x = \frac{\pi}{4}$، $Y1 \approx -0.17$ و $Y2 = 0$؛ إذًا، لا تكون المعادلة متطابقة.

39.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$$\frac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$
$$= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}}$$
$$= \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}}$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

40. $$\sqrt{\frac{\sin x \tan x}{\sec x}} = \sqrt{\frac{\sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\frac{1}{\cos x}}}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}}$$
$$= \sqrt{\sin^2 x}$$
$$= |\sin x|$$

41. $$\sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} \times \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x - 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(\sec x - 1)^2}{\sec^2 x - 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(\sec x - 1)^2}{\tan^2 x}}$$
$$= \left|\frac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$$

42. $$\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc x - \cot x| = \ln|\csc^2 x - \cot^2 x|$$
$$= \ln|1|$$
$$= 0$$

43. $$\ln|\cot x| + \ln|\tan x \cos x| = \ln\left|\frac{\cos x}{\sin x}\right| + \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x\right|$$
$$= \ln\left|\frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x\right|$$
$$= \ln|\cos x|$$

44. $$\sec^4 \theta - \tan^4 \theta = (\sec^2 \theta + \tan^2 \theta)(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)$$
$$= \sec^2 \theta + \tan^2 \theta$$

45. $$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta - 1 = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 1$$
$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 1$$
$$= 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - 1$$
$$= -2\cos^2 \theta$$

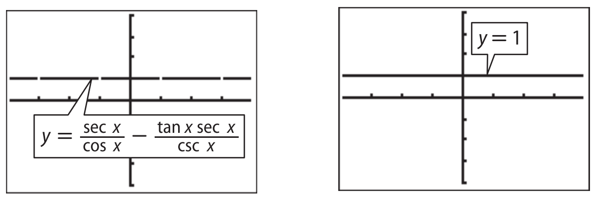
54. $\cosh(-x) = \frac{1}{2}[e^{-x} + e^{-(-x)}]$

$= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$

$= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

$= \cosh x$

55.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 $\quad$ $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

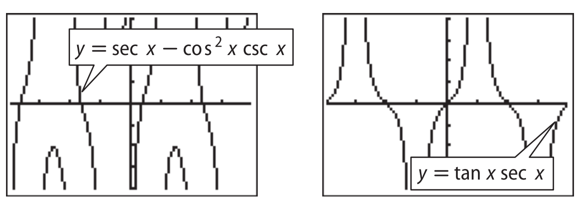
$$\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x \sec x}{\csc x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} - \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}}$$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x - \tan^2 x$

$= 1$

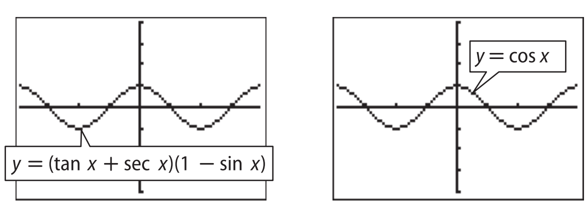
56.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 $\quad$ $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$\sec x - \cos^2 x \csc x \neq \tan x \sec x$

57.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 $\quad$ $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$(\tan x + \sec x)(1 - \sin x)$

$= \tan x - \tan x \sin x + \sec x - \sec x \sin x$

$= \tan x - \frac{\sin x}{\cos x} \times \sin x + \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \times \sin x$

$= \tan x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} - \tan x$

$= \frac{1}{\cos x} + \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$

$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos x}$

$= \cos x$

46. $\sec^4 \theta - (\tan^4 \theta + \sec^2 \theta)$

$= (\sec^4 \theta - \tan^4 \theta) - \sec^2 \theta$

$= (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)(\sec^2 \theta + \tan^2 \theta) - \sec^2 \theta$

$= \sec^2 \theta + \tan^2 \theta - \sec^2 \theta$

$= \tan^2 \theta$

$= \sec^2 \theta \sin^2 \theta$

47. $\sec^6 \theta - \tan^6 \theta = (\sec^3 \theta - \tan^3 \theta)(\sec^3 \theta + \tan^3 \theta)$

$= (\sec \theta - \tan \theta)(\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta + \tan^2 \theta) \cdot$
$(\sec \theta + \tan \theta)(\sec^2 \theta - \sec \theta \tan \theta + \tan^2 \theta)$

$= (\sec^2 - \tan^2 \theta)[(1 + \tan^2 \theta) + \sec \theta \tan \theta + \tan^2 \theta] \cdot$
$[(1 + \tan^2 \theta) - \sec \theta \tan \theta + \tan^2 \theta]$

$= (1 + 2\tan^2 \theta + \sec \theta \tan \theta)(1 + 2\tan^2 \theta - \sec \theta \tan \theta)$

$= (1 + 2\tan^2 \theta)^2 - (\sec \theta \tan \theta)^2$

$= 1 + 4\tan^2 \theta + 4\tan^4 \theta - \sec^2 \theta \tan^2 \theta$

$= 1 + \tan^2 \theta\,(4 + 4\tan^2 \theta - \sec^2 \theta)$

$= 1 + \tan^2 \theta\,[4 + 4(\sec^2 \theta - 1) - \sec^2 \theta]$

$= 1 + \tan^2 \theta\,(4 + 4\sec^2 \theta - 4 - \sec^2 \theta)$

$= 1 + \tan^2 \theta\,(3\sec^2 \theta)$

$= 1 + 3\tan^2 \theta \sec^2 \theta$

$= 3\sec^2 \theta \tan^2 \theta + 1$

48. $1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x = 1 + 2(\sec^2 x - 1) + (\sec^2 x - 1)^2$

$= 1 + 2\sec^2 x - 2 + \sec^4 x - 2\sec^2 x + 1$

$= \sec^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = (\tan^2 x + 1)\csc^2 x$

$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$

$= \sec^2 x + \csc^2 x$

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^2$

$= \frac{1}{4}[e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})]$

$= \frac{1}{4}(4)$

$= 1$

52. $\sinh(-x) = \frac{1}{2}[e^{-x} - e^{-(-x)}]$

$= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$

$= \frac{1}{2}(-e^{x} + e^{-x})$

$= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$= -\sinh x$

53. $1 - \tanh^2 x = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

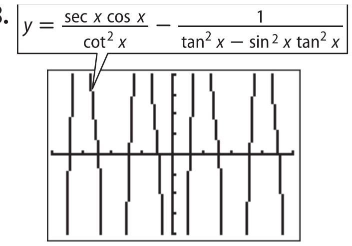
$= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

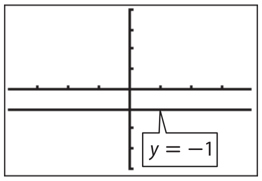
$= \frac{1}{\cosh^2 x}$

$= \operatorname{sech}^2 x$

.58



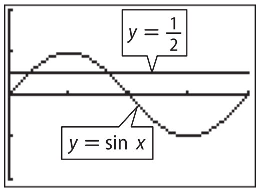
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

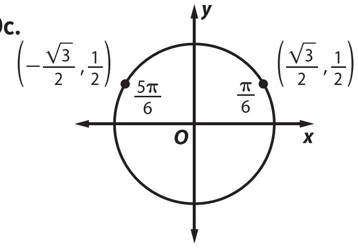
$$\frac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} \neq -1$$

.59b التمثيلات البيانية لـ $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ لوغاريتم عند $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على الفترة $[0, 2\pi)$.

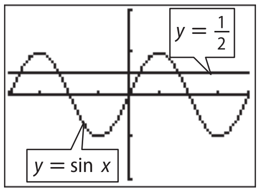


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

.59c



.59d التمثيلات البيانية لـ $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ تتقاطع عند $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على $(-2\pi, 2\pi)$.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

.59e الإجابة النموذجية: بما أن جيب الزاوية دالة دورية. فإن حلول $\sin x = \frac{1}{2}$ هي $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

.60 الإجابة النموذجية: يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة *ليست* متطابقة. رغم ذلك، لا يمكن استخدام هذه الطريقة لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة، لعدم وجود وسيلة للبرهنة على أن المتطابقة صحيحة للمجال بالكامل.

.61 استخدام قانون الجيب، $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$. إذًا $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$،

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$
$$A = \frac{1}{2}a\left(\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}\right) \sin \gamma$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin [180° - (\beta + \gamma)]}$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$$

.62 الإجابة النموذجية: وفقًا لخاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات، فإن مجموع لوغاريتمات الدوال المثلثية الأساسية يتساوى مع لوغاريتم ناتج الضرب. بما أن ناتج ضرب القيم المطلقة للدوال هو 1، فإن مجموع اللوغاريتمات هو $\ln 1$ أو 0.

.63 الإجابات النموذجية: $\tan x \sin x + \cos x = \sec x$ و $\sin x + \cot x \cos x = \csc x$

$$\tan x \sin x + \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \sin x + \cos x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} + \cos x$$
$$= \frac{1}{\cos x} - \cos x + \cos x$$
$$= \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x$$

$$\sin x + \cot x \cos x = \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \times \cos x$$
$$= \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$
$$= \sin x + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}$$
$$= \sin x + \frac{1}{\sin x} - \sin x$$
$$= \frac{1}{\sin x}$$
$$= \csc x$$

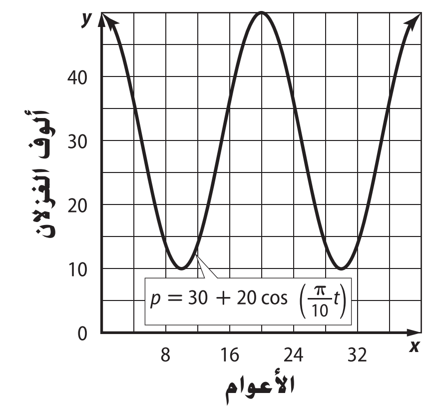
.64 نعم؛ الإجابة النموذجية: إذ كانت α و β زاويتين متتامتين، فإن
$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 (90° - \alpha) =$
$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

.65 الإجابة النموذجية: يمكنك البدء على الجانب الأيسر من المتطابقة وتحويلها لأبسط صورة بأكبر قدر ممكن. ثم يمكنك الانتقال إلى الجانب الأيمن والتحويل لأبسط صورة حتى تتطابق مع الجانب الأيسر.

66. $\dfrac{1}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\csc^2\theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

70c. عدد الغزلان



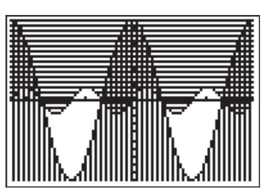
التوسع 4-3

1. 

$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$

by $[-2, 2]$ scl: 0.2

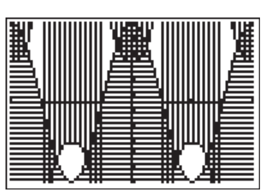
$-1.26 + n\pi < x < 1.88 + n\pi$

2. 

$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$

by $[-3, 3]$ scl: 0.3

$-\frac{\pi}{2} + n\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + n\pi$

3. 

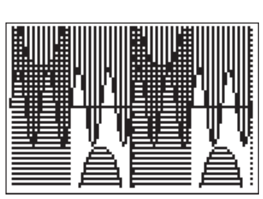
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$

by $[-2, 2]$ scl: 0.2

$-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi;$

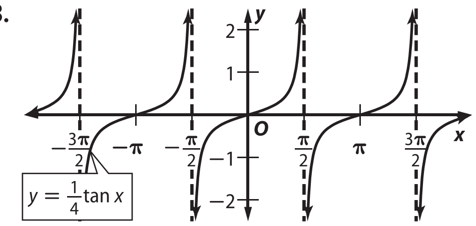
$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi;$

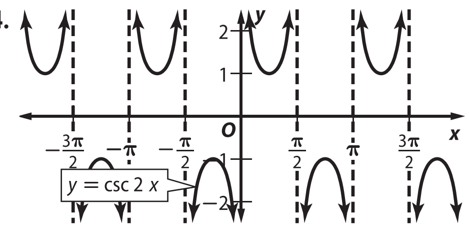
$\frac{5\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

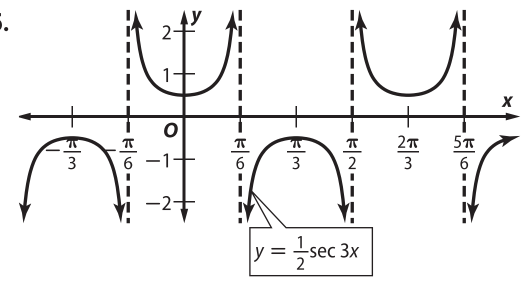
4. 

$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.2

$0 + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$

73. 

74. 

75. 

الدرس 4-3

63. الإجابة النموذجية: عند حل معادلة، ستستخدم خواص المعادلة لاستخدام كل جانب من المعادلة لعزل متغير. عند إثبات صحة المتطابقة؛ فإنك تحوّل إحدى التعبيرات الموجودة على أحد جوانب المتطابقة إلى التعبير الموجود على الجانب الآخر من خلال عدة خطوات جبرية.

64. $\dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1} = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1} \cdot \dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta + 1}$

$= \dfrac{\cot^2\theta(\csc\theta + 1)}{\csc^2\theta - 1}$

$= \dfrac{\cot^2\theta(\csc\theta + 1)}{\cot^2\theta}$

$= \csc\theta + 1$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}$

65. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \dfrac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

13. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta - \tan\theta$

14. $\dfrac{\csc\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cot\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin\theta} + \dfrac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \csc^2\theta + \csc\theta$

$= \cot^2\theta + 1 + \csc\theta$

$= \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$= \dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{\csc\theta}{1-\sin\theta}$

الدرس 4-4

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

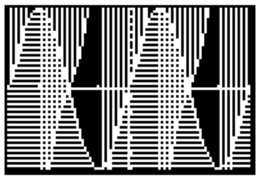
$= \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x}$

$= \dfrac{1(\cos x) - 0(\sin x)}{0(\cos x) + 1(\sin x)}$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \cot x$

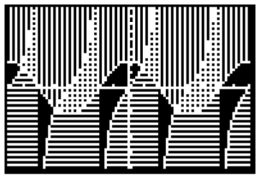
5.



$[-\pi,\ \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3,\ 3]$ scl: 0.3

$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$

6.



$[-2\pi,\ 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3,\ 3]$ scl: 0.3

$0.67 + 2n\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $2.48 + 2n\pi \le x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

اختبار نصف الوحدة

10. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} - \dfrac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta\,(1-\sin\theta) - \cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta - \cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= -\dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= -\dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$= -\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$= -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta$

$= \csc^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cot^2\theta)$

$= \csc^2\theta - (1 + \cot^2\theta)$

$= \csc^2\theta - \csc^2\theta$

$= 0$

12. $\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \dfrac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$

$= \sin\theta + \cos\theta \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \sin\theta + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

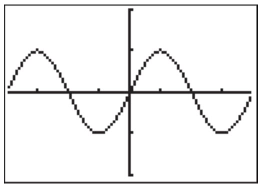
$= \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

50.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

يبدو أن الدالة متساوية مع $y = \sin x$.

$\frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

$= \frac{1}{2}[(\sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi) +$

$(\sin x \cos 2\pi - \cos x \sin 2\pi)]$

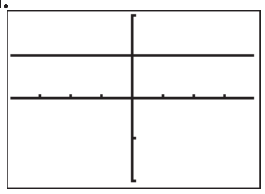
$= \frac{1}{2}(2 \sin x \cos 2\pi)$

$= \sin x \cos 2\pi$

$= \sin x\,(1)$

$= \sin x$

51.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

يبدو أن الدالة متساوية مع $y = 1$.

$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 +$

$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2$

$= \frac{1}{2}\cos^2 x - \sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x +$

$\sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x$

$= \cos^2 x + \sin^2 x$

$= 1$

52. $\cos(x + y) = \cos(\pi - z)$

$= \cos \pi \cos z + \sin \pi \sin z$

$= -1(\cos z) + 0$

$= -\cos z$

53. $\sin z = \sin[\pi - (x + y)]$

$= \sin \pi \cos(x + y) - \cos \pi \sin(x + y)$

$= 0 \times \cos(x + y) - [(-1) \sin(x + y)]$

$= \sin(x + y)$

$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$

33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \dfrac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x}$

$= \dfrac{1}{0(\cos x) + 1(\sin x)}$

$= \dfrac{1}{\sin x}$

$= \csc x$

34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x}{\sin \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \sin x}$

$= \dfrac{0(\cos x) + 1(\sin x)}{1(\cos x) - 0(\sin x)}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

46. $\dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y}$

$= \dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin y}{\cos y}$

$= \tan x - \tan y$

47. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$

$= \dfrac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} - \dfrac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$

$= \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \dfrac{\sin \beta}{\cos \beta}$

$= \cot \alpha - \tan \beta$

48. $\dfrac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \dfrac{\frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v}}{\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v}}$

$= \dfrac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin v \cos u}{\cos u \cos v}}{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} + \frac{\sin v \cos u}{\cos u \cos v}}$

$= \dfrac{\sin u \cos v - \sin v \cos u}{\sin u \cos v + \sin v \cos u}$

$= \dfrac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

49. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$

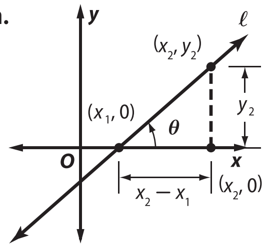
$= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$= 2 \sin a \cos b$

$2 \sin a \cos b =$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 11 12/15/2016 8:10:37 PM

56a.



$$\ell = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ميل}$$
$$= \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{y_2}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \theta}{\text{الضلع المجاور لـ } \theta}$$
$$= \tan \theta$$

56b. $\tan \theta_1 = m_1$, $\tan \theta_2 = m_2$

$$\tan \gamma = \tan (\theta_2 - \theta_1)$$
$$\tan \gamma = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1}$$
$$\tan \gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$
$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

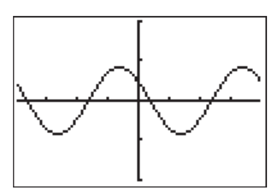
57. $$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

58. $$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta)}$$
$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

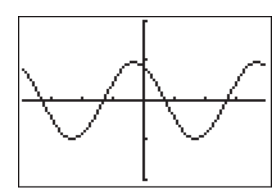
54. $\tan x + \tan y + \tan z$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$$
$$= \frac{\sin x \cos y \cos z}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin y \cos x \cos z}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z (\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z (\cos x \cos y - \sin x \sin y + \sin x \sin y)}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [\cos (x + y) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (\pi - z)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [\cos (\pi - z) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z (\sin \pi \cos z - \cos \pi \sin z)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [(\cos \pi \cos z + \sin \pi \sin z) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z [0 \times \cos z - (-1) \sin z]}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z\{[(-1) \cos z + 0 \times \sin z] + \sin x \sin y\}}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin z - \cos z \sin z + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \tan x \tan y \tan z$$

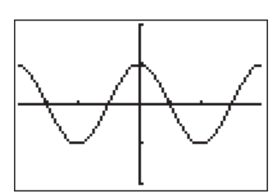
55b.



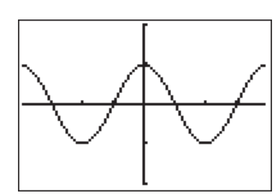
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 12 12/15/2016 8:10:38 PM

59. $\sin(\alpha+\beta) = \cos[90° - (\alpha+\beta)]$

$= \cos[(90° - \alpha) - \beta]$

$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

60. $\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha + (-\beta)]$

$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

61. $\sin(x+y+z)$

$= \sin[(x+y)+z]$

$= \sin(x+y)\cos z + \cos(x+y)\sin z$

$= (\sin x\cos y + \cos x\sin y)\cos z +$
$(\cos x\cos y - \sin x\sin y)\sin z$

$= \sin x\cos y\cos z + \cos x\sin y\cos z +$
$\cos x\cos y\sin z - \sin x\sin y\sin z$

62. $\dfrac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$

63. $\dfrac{-2-2\sqrt{10}}{9}$

64. $\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

65a. $\sin 3x\cos 2x = \cos 3x\sin 2x$

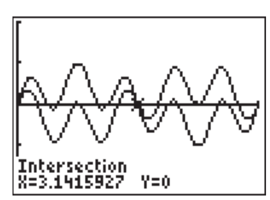
$\sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x = 0$

$\sin(3x - 2x) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0$ و $x = \pi$

65b.



$[-0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

66. $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$= \dfrac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$

$= \dfrac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h}$

$= \sin x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)$

67. $\dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \dfrac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$

$= \dfrac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h}$

$= \cos x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)$

68. لا. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام متطابقة ظل المجموع أو الفرق لحل صيغة انخفاض لدالة الظل طالما أن الزاوية ليست أحد مضاعفات $\frac{\pi}{2}$ راديان. لأن $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجود.

70. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \sec\theta$

71. $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot\theta$

الدرس 4-5

63. $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

64. $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$= 2\cos^2\theta - 1$

65. $\tan 2\theta = \tan(\theta+\theta)$

$= \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$

$= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

66. افترض أن $x = \frac{\theta}{2}$

$\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{2}}$

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$

$= \pm\sqrt{\sin^2 x}$

$= \sin x$

$= \sin\dfrac{\theta}{2}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 13 12/15/2016 8:10:38 PM

70. i. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) - \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta$$
$$= \cos 4\theta$$

ii. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta \sin 2\theta$

$$= \frac{1}{2}[\cos(2\theta - 2\theta) + \cos(2\theta + 2\theta)]$$
$$- \frac{1}{2}[\cos(2\theta - 2\theta) - \cos(2\theta + 2\theta)]$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 0 + \cos 4\theta) - \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 4\theta)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$$
$$= \cos 4\theta$$

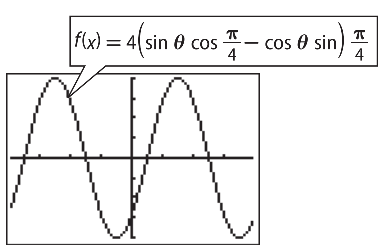
71. $\frac{1}{16}[5 - 7\cos 2\theta + 3\cos 4\theta - \cos 2\theta \cos 4\theta]$

72. $\frac{1}{128}(35 - 48\cos 2\theta + 28\cos 4\theta + \cos 8\theta - 16\cos 2\theta \cos 4\theta)$

73. $\frac{1}{16}(5\cos\theta + 7\cos\theta\cos 2\theta + 3\cos\theta\cos 4\theta + \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta)$

74. $\frac{1}{128}(3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)$

75a.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

.75b $h(x) = 4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$:

$4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$، متطابقة جيب زاوية الفرق

.67 افترض أن $x = \frac{\theta}{2}$.

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$$
$$= \pm\sqrt{\tan^2 x}$$
$$= \tan x$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

.68 افترض أن $x = \frac{\theta}{2}$.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - (1-\cos^2 x)}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= \tan x$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

69. i. $2\cos^2 5\theta - 1 = 2\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 10\theta)\right] - 1$

$$= 1 + \cos 10\theta - 1$$
$$= \cos 10\theta$$

ii. $2\cos^2 5\theta - 1 = 2\cos 5\theta\cos 5\theta - 1$

$$= 2\left\{\frac{1}{2}[\cos(5\theta - 5\theta) + \cos(5\theta + 5\theta)]\right\} - 1$$
$$= (\cos 0 + \cos 10\theta) - 1$$
$$= 1 + \cos 10\theta - 1$$
$$= \cos 10\theta$$

84. $\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
$= \frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta +$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$
$= \frac{1}{2}(2\cos\alpha\cos\beta)$
$= \cos\alpha\cos\beta$

85. $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
$= \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$
$= \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta$

86. $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] = \frac{1}{2}[\sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)]$
$= \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta)$
$= \frac{1}{2}(2\cos\alpha\sin\beta)$
$= \cos\alpha\sin\beta$

87. افترض أن $x = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cos x\cos y$
$= 2\left\{\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\right\}$
$= \cos(x+y)+\cos(x-y)$
$= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$= \cos\alpha+\cos\beta$

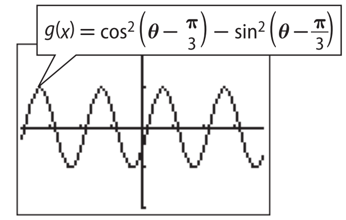
88. افترض أن $x = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cos x\sin y$
$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\right\}$
$= \sin(x+y)-\sin(x-y)$
$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$= \sin\alpha-\sin\beta$

89. افترض أن $x = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2\sin x\sin y$
$= -2\left\{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\right\}$
$= -\cos(x-y)+\cos(x+y)$
$= -\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$= -\cos\beta+\cos\alpha$
$= \cos\alpha-\cos\beta$

75c.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

75d. $k(x) = \cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$;
$\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$= \cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

76. $\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta$
$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta - (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$
$= 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta(1-2\sin^2\theta)$
$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta(1-\sin^2\theta)$
$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta - \sin\theta + 2\sin^3\theta$
$= \sin\theta$

80. $\sin 4\theta = \sin 2(2\theta)$
$= 2\sin 2\theta\cos 2\theta$
$= 2(2\sin\theta\cos\theta)(1-2\sin^2\theta)$
$= 2(2\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)$
$= 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

81. $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$
$= 1-2\sin^2 2\theta$
$= 1-2(\sin 2\theta)(\sin 2\theta)$
$= 1-2(2\sin\theta\cos\theta)(2\sin\theta\cos\theta)$
$= 1-8\sin^2\theta\cos^2\theta$

82. $\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1+(2\cos^2\theta-1)}{2}$
$= \frac{2\cos^2\theta}{2}$
$= \cos^2\theta$

83. $\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$= \frac{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$
$= \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

الوحدة 4 ملحق الإجابات

27. $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{(1+\csc\theta)(1-\csc\theta)}$

$= \frac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{1-\csc^2\theta}$

$= \frac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{-\cot^2\theta}$

$= -(1-\csc\theta)$

$= \csc\theta - 1$

28. $\frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \csc\theta + \sec\theta$

29. $\frac{\sec\theta+\csc\theta}{1+\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

30. $\cot\theta\csc\theta + \sec\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \csc^2\theta\sec\theta$

31. $\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$

32. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2 + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= (1)\times\frac{1}{\sec^2\theta}(1-\tan^2\theta)$

$= \frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

90. الإجابة النموذجية: بما أن $2(4\theta) = 8\theta$، فاستخدم متطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ لإيجاد تعبير لــ $\cos 8\theta$. ثم، بما أن $4\theta = 2(2\theta)$ تستخدم المتطابقة ذاتها مزدوجة الزوايا لإيجاد تعبير لــ $\cos 4\theta$. أخيرًا، استخدم المتطابقة ذاتها مزدوجة الزوايا لاستبدال التعبير مزدوج الزوايا ذاته $\cos 2\theta$. النتيجة ستكون تعبيرًا بدلالة $\cos\theta$ فقط. قم بتعويض $\frac{\sqrt{2}}{5}$ لإيجاد $\cos\theta$ في هذا التعبير وحوّل لأبسط صورة.

دليل الدراسة والمراجعة

23. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{2}{\sin\theta}$

$= 2\csc\theta$

24. $\frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\csc\theta} = \cos\theta\cos\theta + \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

25. $\frac{\cot\theta}{1+\csc\theta} + \frac{1+\csc\theta}{\cot\theta}$

$= \frac{\cot^2\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)} + \frac{(1+\csc\theta)^2}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \frac{\cot^2\theta + (1+\csc\theta)^2}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \frac{\csc^2\theta - 1 + 1 + 2\csc\theta + \csc^2\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \frac{2\csc^2\theta + 2\csc\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \frac{2\csc\theta\,(\csc\theta+1)}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \frac{2}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{2}{\cos\theta}$

$= 2\sec\theta$

26. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

الوحدة 4 ملحق الإجابات

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 16 12/15/2016 8:10:39 PM

تمرين على الاختبار

6. $$\frac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} + \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \frac{\cot^2\theta}{\csc^2\theta} + \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$$
$$= \frac{\cot^2\theta}{\frac{1}{\sin^2\theta}} + \frac{\tan^2\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \times \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$

7. $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)} + \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

8. $$\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta} + \frac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{2}{\sin^2\theta}$$
$$= 2\csc^2\theta$$

9. $$-\sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta\,(-\sin^2\theta)$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin^2\theta)$$
$$= \frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

10. $$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= (\sin^2 x - \cos^2 x) \times 1$$
$$= [\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)]$$
$$= \sin^2 x - 1 + \sin^2 x$$
$$= 2\sin^2 x - 1$$

الوحدة 4 ملحق الإجابات

ملاحظات