3-3 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

السابق
- تجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة باستخدام الدوال في المثلثات القائمة الزاوية.

الحالي
1. إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
2. إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

لماذا؟
- ضغط الدم 120 على 80، يتم قياسه بملّيمترات من الزئبق، يعني أن ضغط دم الشخص يتذبذب أو يدور بين 20 ملّيمتر فوق وتحت ضغط 100 ملّيمتر من الزئبق؛ لوقت محدد t بالثواني. تستغرق الدائرة الكاملة لهذا التذبذب حوالي ثانية واحدة.

إذا كان ضغط الدم عندما كان الزمن $t = 0.25$ ثانية هو 120 ملّيمترًا من الزئبق، ثم عندما كان الزمن $t = 1.25$ ثانية كان الضغط أيضا 120 ملّيمترًا من الزئبق.

المفردات الجديدة
زاوية ربعية quadrantal angle
زاوية إسناد reference angle
دائرة الوحدة unit circle
دالة دائرية circular function
دالة دورية periodic function
فترة period

1 الدوال المثلثية لأي زاوية

في الدرس 3-1، كانت تعريفات الدوال المثلثية الست مقيدة بالزوايا الحادة الموجبة. في هذا الدرس، تتسع هذه التعريفات لتشمل *أي* زاوية.

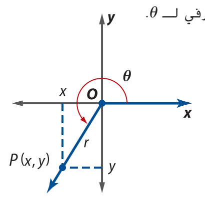
المفهوم الأساسي الدوال المثلثية لأي زاوية

افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على الضلع الطرفي لــ θ.
افترض أن r يمثل البعد غير الصفري عن P بالدالة لنقطة الأصل.
هذا معناه، افترض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. من ثم تكون الدوال المثلثية لــ θ كالتالي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$

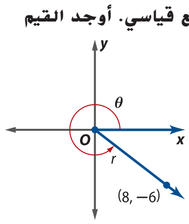
$\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\qquad \sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$

$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$ $\qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$



مثال 1 إيجاد قيمة المعادلات المثلثية بنقطة معطاة

افترض أن $(8, -6)$ هي نقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية لزاوية θ في وضع قياسي. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لــ θ.



استخدم قيم x وy لإيجاد r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$ $x = 8$ و$y = -6$

$$= \sqrt{100} = 10$$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = 8$، $y = -6$ و$r = 10$ لكتابة الدوال المثلثية الست.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$ $\qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\qquad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$ $\qquad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ $\qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

تمرين موجه

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. أوجد قيم الدوال المثلثية الست لــ θ.

1A. $(4, 3)$ **1B.** $(-2, -1)$

1A. $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$, $\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = \frac{5}{4}$, $\cot \theta = \frac{4}{3}$

1B. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$, $\csc \theta = -\sqrt{5}$, $\sec \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot \theta = 2$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-3 أوجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة باستخدام النسب في المثلثات القائمة الزاوية.

الدرس 3-3 أوجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.أوجد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

بعد الدرس 3-3 مثِّل بيانيًا تحويلات دالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام. مثِّل بيانيًا دالة الظل ودالة المقلوب المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

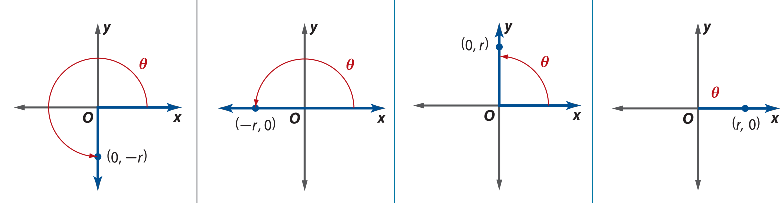
اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤالين التاليين:
- تكون الدالة دورية إذا كانت تظهر لفترة من الزمن. هل يُعد ضغط الدم دوريًا؟ نعم
- ما مدى قيم ضغط الدم المعطاة؟ 40 mm

في المثال 1، وجدت قيم الدوال المثلثية للدالة θ دون معرفة قياس θ. سنناقش حاليًا طرق إيجاد قيم هذه الدالة عندما تكون θ وحدها معروفة. لاحظ الدوال المثلثية للزوايا الربعية. عندما يكون ضلع الإنتهاء لزاوية θ تتّخذ الوضع القياسي واقعًا على أحد محاور الإحداثي، فإن الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.

نصيحة دراسية
الزوايا الربعية يوجد عدد لا نهائي من الزوايا الربعية التي تشترك في ضلع الانتهاء مع الزوايا الربعية المبينة على اليسار. قياس زاوية ربعية هو ضعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية المشتركة



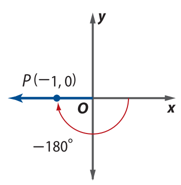
$\theta = 0° = 0$ راديان
$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ راديان
$\theta = 180° = \pi$ راديان
$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان

يمكنك الوصول لقيم الدوال المثلثية للزوايا الربعية عن طريق اختيار نقطة على الضلع الجانبي للزاوية، وإيجاد قيمة الدالة عند هذه النقطة. يمكنك اختيار أي نقطة. رغم ذلك، من أجل التحويل لأبسط صورة، اختر النقطة التي يكون r فيها يساوي 1.

مثال 2 إيجاد قيمة الدوال المثلثية للزوايا الربعية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية، إذا كانت معرفة. إذا لم تكن معرفة فاكتب غير معرفة.

a. $\sin(-180°)$

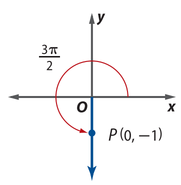


ضلع الإنتهاء للزاوية $-180°$ في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي السالب x. اختر نقطة P على ضلع الإنتهاء للزاوية. النقطة المناسبة هي $(-1, 0)$ لأن $r = 1$.

$\sin(-180°) = \frac{y}{r}$ دالة الـ Sine

$= \frac{0}{1} = 0$ $\quad y = 0$ و $r = 1$

b. $\tan \frac{3\pi}{2}$

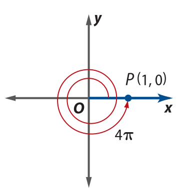


ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ في وضع قياسي يقع على المحور الرأسي السالب y. اختر نقطة $P(0, -1)$ على ضلع الإنتهاء للزاوية لأن $r = 1$.

$\tan \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x}$ دالة الـ tan

$= \frac{-1}{0} =$ غير معرفة $\quad y = -1$ و $x = 0$

c. $\sec 4\pi$



ضلع الإنتهاء للزاوية 4π في وضع قياسي يقع على المحور الأفقي الموجب x. النقطة $(1, 0)$ مناسبة لأن $r = 1$.

$\sec 4\pi = \frac{r}{x}$ دالة الـ Sec

$= \frac{1}{1} = 1$ $\quad x = 1$ و $r = 1$

تمرين موجه

2A. $\cos 270°$ 0 **2B.** $\csc \frac{\pi}{2}$ 1 **2C.** $\cot(-90°)$ 0

1 الدوال المثلثية لأي زاوية

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية إيجاد قيمة الدوال المثلثية عند معرفة نقطة على الضلع الطرفي لزاوية ما في وضع قياسي وعند معرفة زاوية واقعة على محور تماثل في الوضع القياسي. **المثالان 3 و 4** يوضحان كيفية إيجاد زوايا الإسناد المستخدمة في إيجاد قيم مثلثية محددة. **المثال 5** يوضِّح كيفية استخدام قيمة دالة مثلثية معلومة في حل بقية الدوال المثلثية.

المثال 6 يوضِّح كيفية إيجاد إحداثيات نقطة بمعرفة نصف القطر والزاوية التي تأخذ الوضع القياسي.

- إذا كان ضغط الدم $t = 0.5$ ثوان يساوي 110 ملليمترات من الزئبق. (فما التعبير العام الذي يُمكن) استخدامه لوصف جميع الأوقات التي يصل فيها ضغط الدم إلى 110 مليمترات من الزئبق؟ $0.5 + n$ حيث $n = \mathbb{Z}$
- ما الظواهر الأخرى التي يُمكننا تمثيلها باستخدام الدوال الدورية؟ الإجابة النموذجية: مدارات الكواكب، وحركة المد والجزر في المحيطات، وفصول السنة

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بفرض أن $(-4, 3)$ هي نقطة على الضلع الطرفي لزاوية θ في وضع قياسي. أوجد القيم الدقيقة للدوال الست المثلثية لـ θ. $\sin \theta = \frac{3}{5}$,

$\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = -\frac{3}{4}$,

$\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = -\frac{5}{4}$

$\cot \theta = -\frac{4}{3}$

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية. إذا كانت محدّدة. وإذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير محدّدة.

a. $\cos \pi$ $\;-1$

b. $\tan 450°$ غير محددة

c. $\cot \frac{7\pi}{2}$ 0

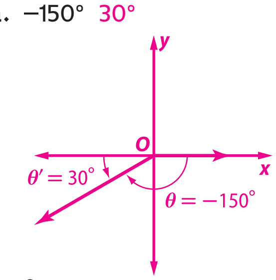
التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال المثلثية لأي زاوية يُمكن تعريف الدوال المثلثية لأي زاوية بالنقطة (x, y). ويُمكن تحديد المسافة r من نقطة الأصل إلى الزوج المرتب (x, y) باستخدام نظرية فيثاغورس، حيث. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ لإيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا غير الحادة وغير الزوايا الربعية يجب إيجاد زوايا الإسناد. إذا كانت الزاوية في الوضع القياسي، فإن زاوية الإسناد ستكون هي الزاوية الحادة التي تكونت من الضلع الطرفي للزاوية والمحور الأفقي x.

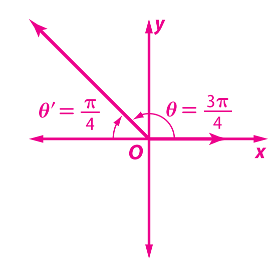
مثال إضافي

3 ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد الخاصة بها.

a. $-150°$ $30°$



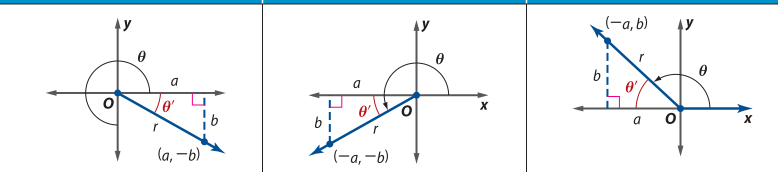
b. $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب اسأل الطلاب عن علامة إحدى الدوال المثلثية (الـ Sine و الـ Cosine و الـ Tan للزاوية) في ربع محدد. استخدم الرمز A *للموجب* واستخدم الرمز B *للسالب*.

لإيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا غير حادة أو ربعية، لاحظ الحالات الثلاث التالية، التي بها a وb أعداد حقيقية موجبة. قارن قيم: sin و Cosine و tan للزوايا θ وθ'.



الربع II		الربع III		الربع IV	
$\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = \frac{b}{r}$	$\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$	$\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$
$\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$	$\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$	$\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = \frac{a}{r}$
$\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = -\frac{b}{a}$	$\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = \frac{b}{a}$	$\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = -\frac{b}{a}$

هذه الزاوية θ'، تسمى **زاوية مرجع**، يمكن استخدامها لإيجاد القيم المثلثية لأي زاوية θ.

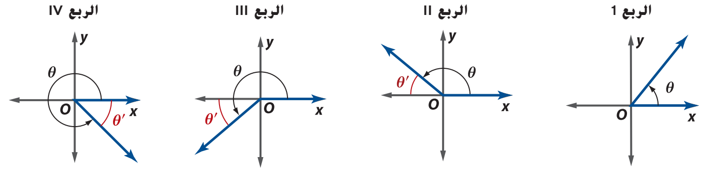
نصيحة دراسية

زوايا الإسناد لاحظ أنه في بعض الحالات، القيم الثلاث المثلثية للزوايا θ وθ' (اقرأ *عوامل ثيتا الأولية*) تكون متطابقة. في حالات أخرى، تختلف في الإشارة فقط.

المفهوم الأساسي قواعد زاوية مرجع

إذا كانت θ هي زاوية في الوضع القياسي، وزاوية المرجع لها θ' هي زاوية حادة شكّلها ضلع الإنتهاء لـــ θ والمحور الأفقي x. زاوية المرجع θ' لأي زاوية $0° < \theta < 360°$,θ أو $0 < \theta < 2\pi$. يتم تعريفها كما يلي.

الربع 1	الربع II	الربع III	الربع IV
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$



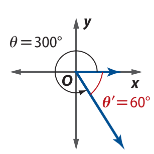
لإيجاد زاوية مرجع للزوايا خارج الفترة الفاصلة $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. أوجد أولاً زاوية متناظرة مشتركة في ضلع الانتهاء داخل هذه الفترة الفاصلة.

مثال 3 إيجاد زوايا الإسناد

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية المرجع.

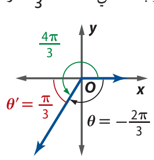
a. $300°$

ضلع الإنتهاء للزاوية $300°$ يقع في الربع IV. ومن ثم، فزاوية المرجع $\theta' = 360° - 300°$ أو $60°$.



b. $-\frac{2\pi}{3}$

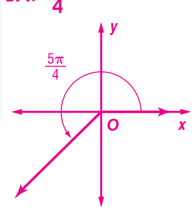
الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هي $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$. ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ يقع في الربع III. ومن ثم، فزاوية مرجعه هي $\frac{4\pi}{3} - \pi$ أو $\frac{\pi}{3}$.



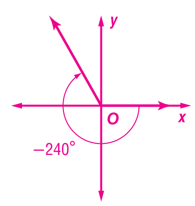
تمرين موجه

3A. $\frac{5\pi}{4}$ **3B.** $-240°$ **3C.** $390°$

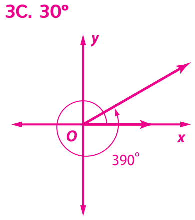
3A. $\frac{\pi}{4}$



3B. $60°$



3C. $30°$



بما أن القيم المثلثية لزاوية تتساوى مع زاوية إسنادها أو تختلف عنها فقط في الإشارة، يمكنك استخدام الخطوات التالية

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال المثلثية لأي زاوية في الدرس 3-1، تم تحديد النسب المثلّثية في مثلث قائم الزاوية؛ وبذلك يكون قد تم تحديدها للزوايا الحادة فقط. يُمكن إيجاد قيمة الدوال المثلثية لأي زاوية باستخدام زوايا الإسناد. لاحظ أن جميع زوايا الإسناد هي زوايا حادة.

مثال إضافي

4 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin \frac{4\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\sec \frac{15\pi}{4}$ $\sqrt{2}$

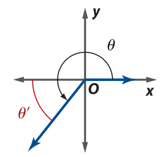
لإيجاد قيمة الدالة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية

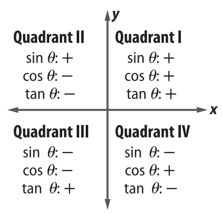
الخطوة 1 أوجد قياس زاوية الإسناد θ'.

الخطوة 2 أوجد قيمة الدالة المثلثية لـــ θ'.

الخطوة 3 استخدم الربع حيث يقع ضلع الإنتهاء لـــ θ في تحديد إشارة قيمة الدالة المثلثية θ.



يمكنك تحديد الإشارات الخاصة بالدوال المثلثية في كل ربع باستخدام تعريفات الدالة المقدَّمة في صفحة 242.
على سبيل المثال، بما أن $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ، فمن ثم تكون $\sin \theta$ سالبة عندما تكون $y < 0$، والتي تقع في الربعين III وIV.
باستخدام هذا المنطق نفسه، يمكنك التأكد من كل إشارة من إشارات $\sin \theta$، $\cos \theta$، و$\tan \theta$ المبينتين في الرسم التخطيطي.
لاحظ أن هذه القيم تعتمد فقط على x وy لأن r دائما سالب.



بما أنك تعرف القيم المثلثية الدقيقة للزوايا 30° و45° و60°. فبإمكانك إيجاد القيم المثلثية الدقيقة *لكل* الزوايا والتي تمثل لها هذه الزوايا زوايا إسناد. تتضمن هذه القائمة القيم الخاصة بـــ θ بكل من الدرجات الراديان.

θ	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

تذكر القيم المثلثية لتذكر القيم الدقيقة لـــ Sine الزاوية بالدالة للزوايا 0° و30° و45° و60° و90°، لاحظ النمط التالي.

$\sin 0° = \frac{\sqrt{0}}{2}, = 0$

$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2}, = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 90° = \frac{\sqrt{4}}{2}, = 1$

يوجد نمط مشابه لدالة لـــ Cosine، ما عدا القيم التي لها ترتيب عكسي.

مثال 4 استخدام زوايا الإسناد لإيجاد القيم المثلثية

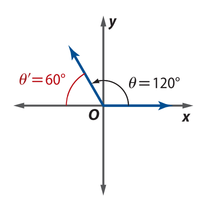
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\cos 120°$

بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع II.
زاوية الإسناد θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$.

$\cos 120° = -\cos 60°$ في الربع II، $\cos \theta$ سالبة

$= -\frac{1}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

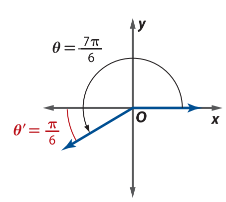


b. $\tan \frac{7\pi}{6}$

بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع III.
فزاوية الإسناد θ' هي $\frac{7\pi}{6} - \pi$ أو $\frac{\pi}{6}$.

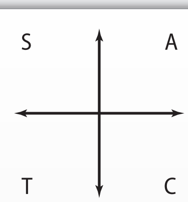
$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6}$ في الربع III، $\tan \theta$ موجبة

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون السمعيون/الموسيقيون ضع الطلاب في مجموعات من ستة طلاب. استخدم الرسم التخطيطي. اطلب من كل مجموعة كتابة نشيد للدالة المثلثية يصف علامة هذه الدالة في أرباع مختلفة. لاحظ أنه يُمكن للأناشيد أن تركز على القيم السالبة أو القيم الموجبة. اطلب من المجموعات قراءة الأناشيد أو إنشادها أمام الصف. نموذج للنشيد: علامات القواطع ليست رتيبة – فهي موجبة في الأرباع من الأول إلى الرابع.



S=sin(csc) الكل = A

T = tan (cot) C = cos (sec)

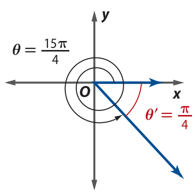
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 163 12/15/2016 11:40:06 PM

مثال إضافي

5 بفرض أن $\sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{5}$ حيث $\sin\theta > 0$. أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمس المثلثية المتبقية لـ θ.

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\tan\theta = \frac{2}{5}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\cot\theta = \frac{5}{2}$

c. $\csc\frac{15\pi}{4}$



الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء لـ θ هي $\frac{15\pi}{4} - 2\pi$ أو $\frac{7\pi}{4}$، والتي تقع في الربع IV. إذًا، فزاوية إسناد θ' هي $2\pi - \frac{7\pi}{4}$ أو $\frac{\pi}{4}$. لأن sine الزاوية و Sec عبارة عن دوال مقلوبة و$\sin\theta$ سالبة تقع في الربع IV، فهذا يجعل $\csc\theta$ سالبة أيضًا في الربع IV.

$$\csc\frac{15\pi}{4} = -\csc\frac{\pi}{4} \quad \text{في الربع IV، } \csc\theta \text{ سالبة.}$$
$$= -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad -\sqrt{2} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

$\csc\frac{15\pi}{4} \approx -1.414$ ✓

$-\sqrt{2} \approx -1.414$ ✓

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

4A. $\tan\frac{5\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$ **4B.** $\sin\frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$ **4C.** $\sec(-135°)$ $-\sqrt{2}$

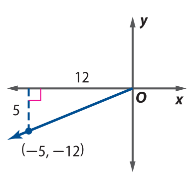
إذا كانت قيمة واحدة أو أكثر من الدوال المثلثية معروفة وكذلك الربع الذي يقع ضلع الإنتهاء لـ θفيه معروفًا، فقيم الدالة المتبقية يمكن اكتشافها.

مثال 5 استخدام قيمة مثلثية واحدة لإيجاد القيم الأخرى

افترض أن $\tan\theta = \frac{5}{12}$، حيث $\sin\theta < 0$. أوجد القيم الدقيقة للخمسة نسب المثلثية المتبقية للزاوية θ.

لإيجاد قيم الدالة الأخرى، يجب أن تجد الإحداثيات لنقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ. أنت تعلم أن $\tan\theta$ موجبة، وأن $\sin\theta$ سالبة. إذًا θ يجب أن تقع في الربع III. هذا يعني أن كلاً من x و y سالبتان.

لأن $\tan\theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{12}$. استخدم النقطة $(-12, -5)$ لإيجاد r.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$
$$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \quad x = -12 \text{ و } y = -5$$
$$= \sqrt{169} = 13 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي الموجب.}$$

استخدم $x = -12$، $y = -5$، و$r = 13$ لكتابة الدوال المثلثية الخمس المتبقية.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5}$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$

تمرين موجه

أوجد القيم الدقيقة للنسب الخمسة المثلثية المتبقية للزاوية θ.

5A. $\sec\theta = \sqrt{3}$, $\tan\theta < 0$ **5B.** $\sin\theta = \frac{5}{7}$, $\cot\theta > 0$

5A. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\theta = -\sqrt{2}$, $\cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5B. $\csc\theta = \frac{7}{5}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\sec\theta = \frac{7\sqrt{6}}{12}$, $\tan\theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

انتبه!
إنطاق المقام تأكد من إنطاق المقام، في حالة الضرورة.

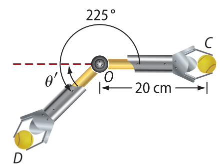
الربط بالحياة اليومية

الروبوكب (RoboCup) هي إحدى البطولات العالمية التي تتنافس فيها الفرق في سلسلة من مباريات الكرة. بناء على حجم وذكاء آلاتهم. هدف المشروع هو تحسين الذكاء الصناعي وأبحاث تطبيقات الإنسان الآلي.

المصدر: RoboCup

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد الإحداثيات بمعرفة نصف القطر وزاوية

تطبيقات الإنسان الآلي كجزء من فئة مدى الحركة في مسابقة المدرسة الثانوية حول تطبيقات الإنسان الآلي، برمج أحد الطلاب ذراعًا آليًّا بطول 20 سنتيمترًا ليلتقط شيئًا عند نقطة C ويدور بزاوية 225° بالضبط ليضع الشيء في حاوية عند النقطة D. أوجد وضع الشيء عند النقطة D، بالدالة للنقطة المحورية O.



مع وجود النقطة المحورية في نقطة الأصل والزاوية التي يدور بها الذراع في وضع قياسي، تتخذ النقطة C الإحداثيات $(20, 0)$.
زاوية الإسناد θ' لـ 225° هي $180° - 225°$ أو 45°.

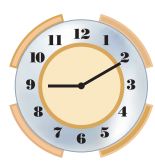
لنفترض أن لوضع النقطة D الإحداثيات (x, y). تعريفات الدالة sine و cosine يمكن استخدامها لإيجاد قيم x وy. r هي 20 سنتيمترًا، هو طول الذراع الآلي. بما أن D تقع في الربع III، فإن الدالة sine و cosine للزاوية 225° سالبين.

دالة الـ Sine		دالة الـ Cosine	
دالة الـ Sine	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	دالة الـ Cosine	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\sin 225° = \frac{y}{20}$	$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\cos 225° = \frac{x}{20}$
$\sin 225° = -\sin 45°$	$-\sin 45° = \frac{y}{20}$	$\cos 225° = -\cos 45°$	$-\cos 45° = \frac{x}{20}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{20}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{20}$
حل y.	$-10\sqrt{2} = y$	حل x.	$-10\sqrt{2} = x$

الإحداثيات الدقيقة لـ D هي $(-10\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$. بما أن $10\sqrt{2}$ حوالي 14.14، فالشيء على بعد حوالي 14.14 سنتيمترًا على يسار النقطة المحورية وحوالي 14.14 سنتيمترًا أسفل النقطة المحورية.

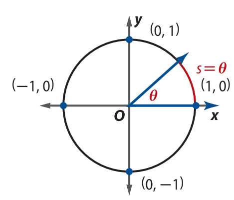
تمرين موجه **عقرب الدقائق على بعد 2.6 بوصة على اليمين و1.5 بوصة أعلى نقطة المحور.**

6. **آلية الساعة** عقرب الدقائق بطول 3 بوصة يشير إلى الساعة إلا 45 دقيقة. ما الوضع الجديد لطرف عقرب الدقائق بالدالة للنقطة المحورية عندما تمر 10 دقائق على الساعة التالية؟



2 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها 1 متمركز على نقطة الأصل. لاحظ أنه على دائرة وحدة، مقياس راديان لزاوية مركزية $\theta = \frac{s}{1}$ أو s. إذًا فطول قوس تقطعه θ يتطابق تمامًا مع مقياس راديان للزاوية. هذا يتيح طريقة لتخطيط مدخل قيمته عدد حقيقي لدالة مثلثية إلى مخرج قيمته عدد حقيقي.

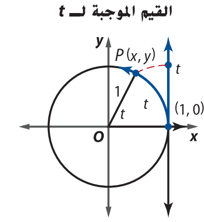


نصيحة دراسية

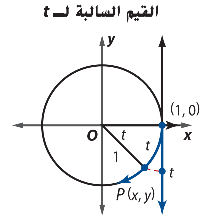
دالة الالتفاف ارتباط نقطة على خط الأعداد بنقطة على الدائرة يسمى *دالة الالتفاف*, $w(t)$. على سبيل المثال، إذا كانت $w(t)$ تربط نقطة t على خط الأعداد بنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة، فبالتالي $w(\pi) = (-1, 0)$ و$w(2\pi) = (1, 0)$.

فكّر في خط الأعداد الحقيقية الذي يمس أفقيًا دائرة الوحدة عند $(1, 0)$ كما هو موضح بالأسفل. إذا كان هذا الخط ملتفًّا حول الدائرة في كلا الاتجاهين: الموجب (عكس عقارب الساعة) أو السالب (مع عقارب الساعة)، فإن كل نقطة t على الخط ستكون مرتبطة بنقطة فريدة $P(x, y)$ على الدائرة. لأن $r = 1$، يمكننا تعريف الدوال المثلثية للزاوية t بمجرد معرفة x وy.

القيم الموجبة لـ t

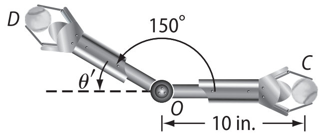


القيم السالبة لـ t



مثال إضافي

6 **تطبيقات الإنسان الآلي** قام طالب ببرمجة ذراع إنسان آلي يبلغ طولها 10 بوصات لالتقاط جسم عند النقطة C. ثم الدوران بزاوية 150° لتحرير الجسم داخل وعاء عند النقطة D. أوجد موقع الجسم عند النقطة D بالنسبة إلى النقطة المحورية O.



إحداثيات النقطة D بدقة هي $(-5\sqrt{3}, 5)$. يقع الجسم على بُعد 8.66 بوصات يسار النقطة المحورية، و5 بوصات أعلى النقطة المحورية.

2 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

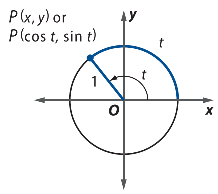
المثالان 7 و 8 يوضحان كيفية إيجاد القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

إرشاد للمعلمين الجدد

مدى الدوال المثلثية عند العمل على دائرة الوحدة، ذكِّر الطلاب بأن دوال الزوايا Sine , Cosine دائمًا ما يتراوح مداها بين -1 و 1 بشكل شامل، بينما لا تكون الدوال المثلثية الأربع الأخرى كذلك.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

افترض أن t هي أي عدد حقيقي على خط الأعداد وافترض أن $P(x, y)$ هي النقطة على t عندما يلتف خط الأعداد على دائرة الوحدة. من ثم، تكون الدوال المثلثية لـــ t كالتالي:



$\sin t = y$ $\quad$ $\cos t = x$ $\quad$ $\tan t = \frac{y}{x},\ x \neq 0$

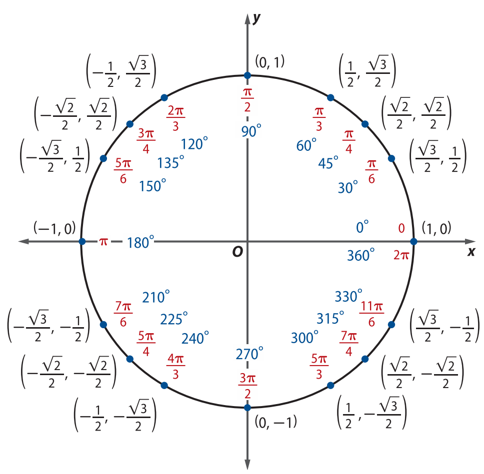
$\csc t = \frac{1}{y},\ y \neq 0$ $\quad$ $\sec t = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ $\quad$ $\cot t = \frac{x}{y},\ y \neq 0$

وهكذا، فإحداثيات P تطابق الزاوية t ويمكن كتابتها هكذا $P(\cos t, \sin t)$.

لاحظ أن قيمة المدخل في كل من التعريفات السابقة يمكن أن تعد مقياسًا للزاوية أو عددًا حقيقيًا t. عندما يتم تعريفها كدوال نظام الأعداد الحقيقية باستخدام دائرة الوحدة، تسمى الدوال المثلثية غالبًا **الدوال الدائرية**.

باستخدام زوايا المرجع أو الزوايا الربعية، ينبغي أن تكون الآن قادرًا على إيجاد قيم المعادلة المثلثية لكل مضاعفات الأعداد الصحيحة لـــ $30°$، أو $\frac{\pi}{6}$راديان، و $45°$، أو $\frac{\pi}{4}$راديان. تلتف هذه القيم الخاصة على 16 نقطة خاصة على دائرة الوحدة، كما هو موضح فيما يلي:

دائرة وحدة عليها 16 نقطة



نصيحة دراسية

دائرة الوحدة ذات 16 نقطة أنت بالفعل تتذكر هذه القيم في الربع الأول. القيم المتبقية يمكن تحديدها باستخدام المحورين الأفقي x والرأسي y، وتناظر نقطة الأصل لدائرة الوحدة مع إشارات x وy في كل ربع.

باستخدام الإحداثيات (x, y) مع دائرة الوحدة ذات 16 نقطة والتعريفات في مربع المفاهيم الأساسية أعلى الصفحة، يمكنك إيجاد القيم الخاصة بالدوال المثلثية لقياسات الزاوية المشتركة. من المفيد تذكر هذه القيم الدقيقة للدالة حتى تتمكن من أداء الحسابات التي تتضمنهم سريعًا.

مثال 7 إيجاد القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب *غير مُعرَّفة*.

a. $\sin \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\sin t = y$ $\quad$ تعريف $\sin t$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندما $t = \frac{\pi}{3}$.

مثال إضافي

7 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. إذا لم تكن مُحددة، فاكتب غير مُحددة.

a. $\sin \frac{7\pi}{6}$ $\quad -\frac{1}{2}$

b. $\cos \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{1}{2}$

c. $\tan \frac{4\pi}{3}$ $\quad \sqrt{3}$

d. $\sec 270°$ غير مُحددة

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 166 12/15/2016 11:40:13 PM

b. cos 135°

$135°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\cos t = x$ تعريف $\cos t$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = -.$ عندما $t = 135°$

c. tan 270°

$270°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = (0, -1)$ على دائرة الوحدة.

$\tan t = \frac{y}{x}$ تعريف $\tan t$

$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ $y = -1$ و $x = 0$ عندما، $t = 270°$

وهكذا تكون $\tan 270°$ غير مُعرَّفة.

d. $\csc \frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\csc t = \frac{1}{y}$ تعريف $\csc t$

$\csc \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$ $y = -\frac{1}{2}$ عندما $t = \frac{11\pi}{6}$

$= -2$ بسّط

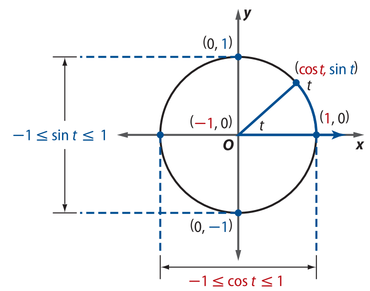
تمرين موجه

7A. $\cos \frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **7B.** $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **7C.** $\cot 210°$ $\sqrt{3}$ **7D.** $\sec \frac{7\pi}{4}$ $\sqrt{2}$

كما هو معرّف من خلال التفاف خط الأعداد حول دائرة الوحدة، فإن مجال دوال الــ Sine, Cosine هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها $(-\infty, \infty)$. مع أن خط الأعداد يمتد لا نهائيًا في كلا الاتجاهين، فيمكن أن يلتف عدة مرات حول دائرة الوحدة، مرتبطًا بأكثر من قيمة t للنقطة نفسها $P(x, y)$ مع كل التفاف، موجبًا كان أو سالبًا.

نصيحة دراسية

الراديان مقابل الدرجة بينما يمكننا أيضًا مناقشة إحدى الالتفافات وهي تتطابق مع زاوية قياسها $360°$. فإن هذا القياس لا علاقة له بمسافة. على دائرة الوحدة، تتطابق إحدى الالتفافات مع قياس الزاوية 2π والمسافة 2π حول الدائرة.



لأن $\cos t = x, \sin t = y$. والتفافًا واحدًا يناظر مسافة 2π.

$\sin (t + 2n\pi) = \sin t$ و $\cos (t + 2n\pi) = \cos t$.

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t.

نصيحة دراسية
الدوال الدورية الدوال الدائرية الثلاث الأخرى دورية أيضًا. ستتم مناقشة فترات هذه الدوال في الدرس 4-5.

ولذلك، تقع قيم دالة **sin** و **cos** ضمن الفترة $[-1, 1]$ وتتكرر لكل عدد صحيح من مضاعفات 2π على خط الأعداد. الدوال التي لها قيم تتكرر على فترات فاصلة منتظمة تسمى **دوال دورية**.

المفهوم الأساسي الدوال الدورية

تكون الدالة $y = f(t)$ دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب c بحيث $f(t + c) = f(t)$ لكل قيم t في مجال f.

العدد الأصغر c الذي تكون f بالدالة له دورية يسمى **دورة الدالة f**.

دوال **sin** و **cos** دورية. حيث تكرر القيم بعد 2π. ومن ثم فترة هذه الدوال هي 2π. يمكن توضيح أن قيم دالة **tan** تتكرر بعد مسافة π على خط الأعداد. ومن ثم فدالة **tan** لها دورة طولها π و

$$\tan t = \tan (t + n\pi)$$

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t. ما لم تكن كل من $\tan t$ و $\tan (t + n\pi)$ غير معرفتين. بإمكانك استخدام الطبيعة الدورية لدوال **sin** و **con** و **tan** لإيجاد قيمة تلك الدوال.

مثال 8 استخدام الطبيعة الدورية للدوال الدائرية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\cos \frac{11\pi}{4}$

$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)$ — أعد كتابة $\frac{11\pi}{4}$ كمجموع لعدد و2π. — $(\cos \frac{11\pi}{4} = \cos (\frac{3\pi}{4} + 2\pi$

$= \cos \frac{3\pi}{4}$ — $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ مرتبطة بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة. — $\cos \frac{3\pi}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $t = \frac{3\pi}{4}$ عند $\cos t = x$ و $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 2(-1)\pi\right)$ — أعد كتابة $-\frac{2\pi}{3}$ كمجموع عدد ومضاعف العدد الصحيح 2π. — $(\sin (- \frac{}{3} + 2(-1)\pi$

$= \sin \frac{4\pi}{3}$ — $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3} - 2(-1)\pi$ يرتبط بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة — $\sin =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — $t = \frac{4\pi}{3}$ عند $\sin t = y$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\tan \frac{19\pi}{6}$

$\tan \frac{19\pi}{6} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + 3\pi\right)$ — أعد كتابة $\frac{19\pi}{6}$ كمجموع عدد ومضاعف عدد صحيح π. — $(\tan \frac{19\pi}{6} = \tan (\frac{\pi}{6} + 3\pi$

$= \tan \frac{\pi}{6}$ — $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} + 3\pi$ مرتبط بالنقطة نفسها على دائرة الوحدة بقيم ظل الزاوية نفسها. — $\tan \frac{\pi}{6} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — $t = \frac{\pi}{6}$ عند $\tan t = \frac{y}{x}$ و $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$

تمرين موجه

8A. $\sin \frac{13\pi}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8B. $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ $-\frac{1}{2}$

8C. $\tan \frac{15\pi}{6}$ غير محدد

تذكر من الدرس 2-1 أن دالة f تكون زوجية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$ وفردية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. بإمكانك استخدام دائرة الوحدة لتتحقق من كون دالة **cos** زوجية وأن دالة **sin** و **tan** فردية. بمعنى،

$$\cos (-t) = \cos t \qquad \sin (-t) = -\sin t \qquad \tan (-t) = -\tan t$$

مثال إضافي

8 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos \frac{9\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin (-300°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\tan \frac{29\pi}{6}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

إجابات إضافية

1. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3},$ $\csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ $\tan \theta = -1, \csc \theta = \sqrt{2},$ $\sec \theta = -\sqrt{2}, \cot \theta = -1$

3. $\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5},$ $\tan \theta = \frac{3}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3},$ $\sec \theta = -\frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{4}{3}$

4. $\sin \theta = 0, \cos \theta = 1, \tan \theta = 0,$ $\csc \theta$ غير مُحددة، $\sec \theta = 1, \cot \theta$ غير مُحددة.

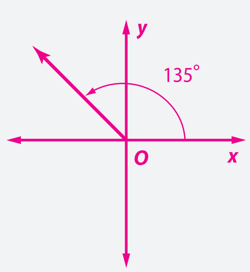
5. $\sin \theta = -\frac{8\sqrt{65}}{65}, \cos \theta = \frac{\sqrt{65}}{65},$ $\tan \theta = -8, \csc \theta = -\frac{\sqrt{65}}{8},$ $\sec \theta = \sqrt{65}, \cot \theta = -\frac{1}{8}$

6. $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos \theta = \frac{5\sqrt{34}}{34},$ $\tan \theta = -\frac{3}{5}, \csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{3},$ $\sec \theta = \frac{\sqrt{34}}{5}, \cot \theta = -\frac{5}{3}$

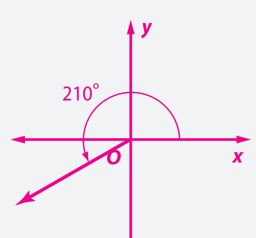
7. $\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17},$ $\tan \theta = -\frac{15}{8}, \csc \theta = \frac{17}{15},$ $\sec \theta = -\frac{17}{8}, \cot \theta = -\frac{8}{15}$

8. $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5},$ $\tan \theta = 2, \csc \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2},$ $\sec \theta = -\sqrt{5}, \cot \theta = \frac{1}{2}$

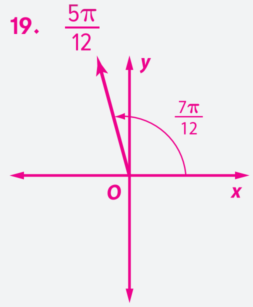
17. 45°



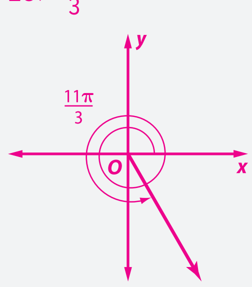
18. 30°



19. $\frac{5\pi}{12}$



20. $\frac{\pi}{3}$



AL

OL

BL

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 168 12/15/2016 11:40:16 PM

تمارين

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. أوجد قيم الدوال المثلثية الست لــ θ. (المثال 1)
1-8. انظر الحاشية.

1. $(3, 4)$
2. $(-6, 6)$
3. $(-4, -3)$
4. $(2, 0)$
5. $(1, -8)$
6. $(5, -3)$
7. $(-8, 15)$
8. $(-1, -2)$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية. إذا كانت مُعرَّفة. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة. (المثال 2)

9. $\sin \frac{\pi}{2}$ **1**
10. $\tan 2\pi$ **0**
11. $\cot (-180°)$ **غير مُعرَّفة**
12. $\csc 270°$ **-1**
13. $\cos (-270°)$ **0**
14. $\sec 180°$ **-1**
15. $\tan \pi$ **0**
16. $\sec \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **غير مُعرَّفة**

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. (المثال 3)
17-24. انظر الحاشية.

17. $135°$
18. $210°$
19. $\frac{7\pi}{12}$
20. $\frac{11\pi}{3}$
21. $-405°$
22. $-75°$
23. $\frac{5\pi}{6}$
24. $\frac{13\pi}{6}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (المثال 4)

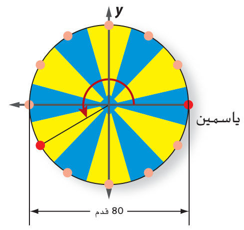
25. $\cos \frac{4\pi}{3}$ **$-\frac{1}{2}$**
26. $\tan \frac{7\pi}{6}$ **$\frac{\sqrt{3}}{3}$**
27. $\sin \frac{3\pi}{4}$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**
28. $\cot (-45°)$ **-1**
29. $\csc 390°$ **2**
30. $\sec (-150°)$ **$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$**
31. $\tan \frac{11\pi}{6}$ **$-\frac{\sqrt{3}}{3}$**
32. $\sin 300°$ **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

33-40. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمسة المثلثية المتبقية لــ θ. (المثال 5)

33. $\tan \theta = 2$, حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta > 0$
34. $\csc \theta = 2$, حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$
35. $\sin \theta = -\frac{1}{5}$, حيث $\cos \theta > 0$
36. $\cos \theta = -\frac{12}{13}$, حيث $\sin \theta < 0$
37. $\sec \theta = \sqrt{3}$, حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$
38. $\cot \theta = 1$, حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$
39. $\tan \theta = -1$, حيث $\sin \theta < 0$
40. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, حيث $\sin \theta > 0$

41. **لعبة دوامة الخيل** ركبت ياسمين لعبة دوامة الخيل في الكرنفال. قطر اللعبة 80 قدمًا. أوجد مكان مقعدها من مركز اللعبة بعدما دارت 210°. (المثال 6) **$(-20\sqrt{3}, -20)$ أو $(-34.6, -20)$**



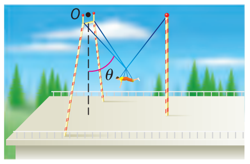
42. **أنبوب القطعة المعدنية** سقطت القطعة المعدنية في أنبوب؛ حيث أخذت تدور في دوائر أصغر حجمًا حتى سقطت في قاع الصندوق. قطر الدائرة الأولى التي صنعتها القطعة المعدنية 24 سنتيمترًا. قبل دورانها مسافة دائرة كاملة، تدور القطعة °150 وتسقط. ما هو المكان الجديد للقطعة المعدنية بالدالة لمركز الأنبوب؟ (المثال 6) **$(-6\sqrt{3}, 6)$ أو $(-10.4, 6)$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إن لم تكن معرّفة، اكتب غير معرّفة. (المثالان 7 و8)

43. $\sec 120°$ **-2**
44. $\sin 315°$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**
45. $\cos \frac{11\pi}{3}$ **$\frac{1}{2}$**
46. $\tan \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ **-1**
47. $\csc 390°$ **2**
48. $\cot 510°$ **$-\sqrt{3}$**
49. $\csc 5400°$ **غير مُعرَّفة**
50. $\sec \frac{3\pi}{2}$ **غير مُعرَّفة**
51. $\cot \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ **$\sqrt{3}$**
52. $\csc \frac{17\pi}{6}$ **2**
53. $\tan \frac{5\pi}{3}$ **$-\sqrt{3}$**
54. $\sec \frac{7\pi}{6}$ **$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$**
55. $\sin \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**
56. $\cos \frac{7\pi}{4}$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**
57. $\tan \frac{14\pi}{3}$ **$-\sqrt{3}$**
58. $\cos \left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

59. **قطارات الملاهي** يركب مازن وأيوب قطار حديقة الملاهي. بعد الأرجحات الأولى العديدة، كانت الزاوية التي صنعها القطار مع الزاوية الرأسية تمثلها $\theta = 22 \cos \pi t$. حيث θ مقدرة بالراديان وt مقدرة بالثواني. حدد مقياس الزاوية مُقدّرًا بالراديان بالدالة لــ $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ و2.5. (المثال 8)

انظر ملحق إجابات الوحدة 3.



3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-59 للتحقق من عملية الفهم.

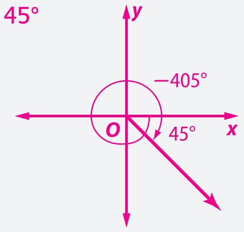
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

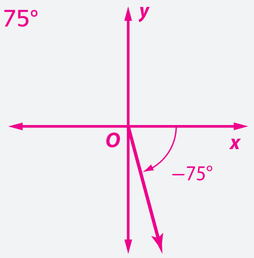
خطأ شائع قد يتجاهل الطلاب القيم السالبة للدوال المثلثية في الربع الثاني والربع الثالث والربع الرابع. ذكّر الطلاب بأن الربع الأول هو الربع الوحيد الذي تكون فيه الدوال المثلثية موجبة.

إجابات إضافية

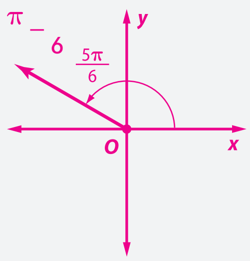
21. 45°



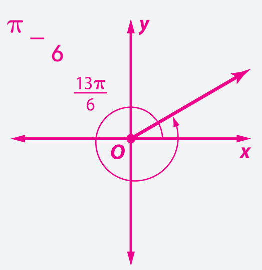
22. 75°



23. $\frac{\pi}{6}$



24. $\frac{\pi}{6}$



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-59, 80-106	1- 59 فردي، 103- 106	2-58 زوجي، 80-102
OL ضمن المستوى	1-65 فردي، 66, 71-75 76-78 فردي، 80-106	1-59, 103-106	60-78, 80-102
BL أعلى من المستوى	60-106		

أكمل كل تعبير مثلثي مما يلي. B

60. $\cos 60^\circ = \sin$ ___

61. $\tan \frac{\pi}{4} = \sin$ ___

62. $\sin \frac{2\pi}{3} = \cos$ ___

63. $\cos \frac{7\pi}{6} = \sin$ ___

64. $\sin(-45^\circ) = \cos$ ___

65. $\cos \frac{5\pi}{3} = \sin$ ___

60–65. انظر الحاشية.

66. **المثلجات** تقدر المبيعات الشهرية لمحل أحمد للمثلجات بآلاف الدراهم. ويمكن تمثيلها بالآتي: $y = 71.3 + 59.6 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$ ؛ حيث $t = 1$ تمثل يناير، $t = 2$ تمثل فبراير. وهكذا.

a. **قدّر مبيعات يناير ومارس ويوليو وأكتوبر.**
يناير، 11.7؛ مارس، 41.5؛ يوليو، 130.9؛ أكتوبر، 71.3

b. **اشرح لماذا يمكن تمثيل مبيعات محل المثلجات من خلال دالة مثلثية.**
الإجابة النموذجية: يأكل الناس المثلجات في الصيف أكثر من الشتاء.

استخدم القيم المقدمة لإيجاد حل الدوال المثلثية.

67. $\cos(-\theta) = \frac{8}{11}$; $\cos\theta = ?$; $\sec\theta = ?$ **$\frac{8}{11}, \frac{11}{8}$**

68. $\sin(-\theta) = \frac{5}{9}$; $\sin\theta = ?$; $\csc\theta = ?$ **$-\frac{5}{9}, -\frac{9}{5}$**

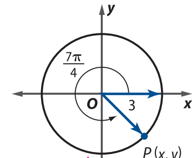
69. $\sec\theta = \frac{13}{12}$; $\cos\theta = ?$; $\cos(-\theta) = ?$ **$\frac{12}{13}, \frac{12}{13}$**

70. $\csc\theta = \frac{19}{17}$; $\sin\theta = ?$; $\sin(-\theta) = ?$ **$\frac{17}{19}, -\frac{17}{19}$**

71. **التمثيلات البيانية** بافتراض أن الضلع الجانبي لزاوية θ في وضع قياسي يقع في المكان نفسه للتمثيل البياني لـ $y = 2x$ في الربع III. أوجد قيم الدوال الست المثلثية لـ θ.
انظر الحاشية.

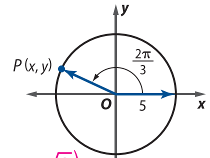
أوجد إحداثيات P لكل دائرة باستخدام نصف القطر المعطى وقياس الزاوية.

72.



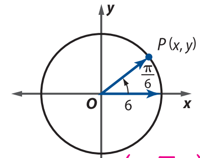
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

73.



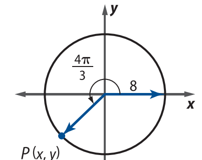
$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

74.



$(3\sqrt{3}, 3)$

75.



$(-4, -4\sqrt{3})$

76. $\sin\theta_1 = -\sin\theta_2$

76. **مقارنة** بافتراض أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ_1 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(7, -8)$. وضلع الإنتهاء للزاوية الثانية θ_2 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(-7, 8)$. قارن قيمة sin في كل من θ_1 وθ_2.

C

77. **المد والجزر** عمق المد والجزر y مقدرًا بالمتر على الشاطئ يختلف باختلاف دالة Sine x الساعة في اليوم. في يوم معين، كانت الدالة $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ يتطابق مع 12:00 منتصف الليل، 1:00 A.M.، 2:00 A.M.، ...، 12:00 منتصف الليل في الليلة التالية.

a. **ما أقصى عمق، أو ارتفاع للمد والجزر، في ذلك اليوم؟** **11 m**

b. **في أي وقت (أوقات) حدث ارتفاع المد والجزر؟**
7:00 A.M. و 7:00 P.M.

78. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الفترة المتعلقة بدالة الـ sine.

a. **الجدولي** انسخ وأكمل جدولاً مشابهًا للموجود أمامك. واجعله يتضمن قياسات الزوايا 16 كلها من دائرة الوحدة.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	2π
$\sin\theta$						
$\sin 2\theta$						
$\sin 4\theta$						

b. **اللفظي** بعد أي قيم لـ θ تقوم $\sin\theta$, $\sin 2\theta$, $\sin 4\theta$ بتكرار قيم مداها؟ بكلمات أخرى. ما الفترات لهذه الدوال؟

c. **اللفظي** خمّن كيف تأثرت الفترة $y = \sin n\theta$ بقيم مختلفة لـ n.

78a-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. **تحدي** صف في كل عبارة مما يلي n.

a. $\cos\left(n \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$ **n عدد فردي صحيح.**

b. $\csc\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$ غير معرّفة **n عدد زوجي صحيح.**

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك. **80–81. انظر الحاشية.**

80. إذا كانت $\cos\theta = 0.8$ و $\sec\theta - \cos(-\theta) = 0.4$

81. بما أن $\tan(-t) = -\tan t$. يكون tan الزاوية السالبة عدد سالب.

82. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يمكن تمثيل عدد الحضور في متنزه على مدار العام بواسطة دالة دورية. أي المشكلات أو الأحداث يمكن أن تقع على مدار الزمن لتغير هذا التمثيل الزمني؟ **انظر الحاشية.**

التبرير **استخدم دائرة الوحدة للتحقق من كل علاقة.**

83. $\sin(-t) = -\sin t$

84. $\cos(-t) = \cos t$

85. $\tan(-t) = -\tan t$

83–85. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

86. **الكتابة في الرياضيات** خمّن دورة دوال secant و cosecant و cotangent. اشرح استنتاجك.
انظر الحاشية.

إجابات إضافية

60. 30° أو 150°

61. $\frac{\pi}{2}$

62. $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

63. $\frac{4\pi}{3}$ أو $\frac{5\pi}{3}$

64. 135° أو 225°

65. $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 170 12/15/2016 11:40:20 PM

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب قسِّم الصف إلى أربع مجموعات. خصص لكل مجموعة أحد الأرباع. اطلب من الطلاب رسم المحور x والمحور y وزاوية إسناد حادة للأرباع الخاصة بهم.

إجابات إضافية

71. $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta = 2$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$

80. صواب. الإجابة النموذجية: إذا كان $\cos\theta = 0.8$، فإن $\sec\theta - \cos(-\theta) = \frac{1}{0.8} - 0.8$ أو 0.45.

81. خطأ. الإجابة النموذجية: التعبير $\tan(-t) = -\tan t$ يعني أن ظل الزاوية هو دالة فردية. ويعتمد ظل الزاوية على الربع الذي يقع فيه الضلع الطرفي.

82. الإجابة النموذجية: يزيد عدد الأفراد الذين يرتادون مدينة الملاهي في فصل الربيع والصيف لأن الطلاب يكونون في إجازة ويقضي الأفراد مزيدًا من العطلات. وخلال فترة الشتاء، يكون عدد الأفراد الذين يرتادون المدينة أقل لأن عددًا أقل من الأفراد يقضون عطلات. يتغير عدد الأفراد كل عام، وغالبًا ما ستكون فترة الدالة هي عام. قد يتغير هذا التصور إذا استضافت مدينة الملاهي أحداثًا في فصل الشتاء تجذب الأفراد أو إذا قضى الأفراد فترات عطلات أطول في فصل الشتاء.

86. الإجابة النموذجية: سوف تصبح فترة دالة الـ Sec 2π نظرًا لأنها مقلوب دالة جيب التمام. أما فترة دالة الـ Cosine فهي 2π. سوف تصبح فترة الدالة الـ Csc 2π نظرًا لأنها مقلوب دالة الـ Sine. أما فترة دالة Sine فهي 2π. سوف تصبح فترة دالة Cot π نظرًا لأنها مقلوب دالة tan الزاوية. أما فترة دالة tan الزاوية فهي π.

مراجعة شاملة

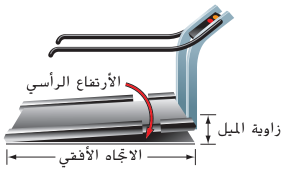
اكتب قياس كل درجة عشرية في صيغة وحدات الدرجات والدقائق والثواني (DMS) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

87. $168.35°$ $168° 21'$

88. $27.465°$ $27° 27' 54''$

89. $14° 5' 20''$ $14.089°$

90. $173° 24' 35''$ $173.410°$



91. **تمرين** تدريب مبرمج مسبقًا على جهاز الركض يتكون من فترات فاصلة للركض، بمختلف المعدلات وزوايا الميل. 1% من الميل يعني وحدة ارتفاع رأسي واحدة لكل 100 وحدة من الاتجاه الأفقي.
   a. في أي زاوية، بالدالة للاتجاه الأفقي، يقع قاع جهاز الركض عندما يتم ضبطه بميل 10%؟ قرّب إلى أقرب درجة. $6°$
   b. إذا كان طول قاع جهاز الركض 40 بوصة، فما الارتفاع الرأسي عندما يتم ضبطه بميل 8% بوصة؟ حوالي 3.2 in.

أوجد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

92. $\log_8 64$ 2

93. $\log_{125} 5$ $\frac{1}{3}$

94. $\log_2 32$ 5

95. $\log_4 128$ 3.5

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ $\pm1, \pm2; 1$

97. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ $\pm1, \pm3; -3$

98. $h(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ $\pm1; 1$

99. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}; -3, \frac{1}{2}, 1$

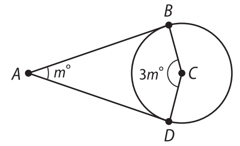
100. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x - 3$ $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}$

101. $g(x) = 4x^3 + x^2 + 8x + 2$ $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$

102. **الملاحة** يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) الأقمار الصناعية ليتيح للمستخدم تحديد موقعه على الأرض. يعتمد النظام على إشارات الأقمار الصناعية التي تنعكس من وإلى جهاز الإرسال المحمول. الوقت الذي تستغرقه الإشارة في الانعكاس يُستخدم في تحديد مكان جهاز الإرسال. موجات الراديو تسافر خلال الهواء بسرعة 299,792,458 متر في الثانية. والدالة، $d(t) = 299{,}792{,}458t$ تربط الزمن t مقدرًا بالثواني بالمسافة المقطوعة $d(t)$ مقدرة بالمتر.
   a. أوجد المسافة التي ستسافرها موجة الراديو في 0.05, 0.2, 1.4,5.9 ثانية. 14,989,622.9 m; 59,958,491.6 m; 419,709,441.2 m; 1,768,775,502 m
   b. إذا تم استقبال إشارة من القمر الصناعي الخاص بنظام تحديد المواقع العالمي على جهاز إرسال في 0.08 ثانية. فكم يبعد هذا القمر الصناعي عن جهاز الإرسال؟ 23,983,396.64 m

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

103. **SAT/ACT** في الشكل، $\overline{AB}$ و$\overline{AD}$ كل منهما مماس للدائرة C. ما قيمة m؟ $45°$



104. لنفترض أن θ زاوية في وضع قياسي مع $\sin\theta > 0$. في أي ربع (أرباع) يمكن أن يقع ضلع الإنتهاء للزاوية θ؟ B

A I فقط	C I و III
B I و II	D I و IV

105. **مراجعة** أوجد السرعة الزاوية مقدرة بالراديان لكل ثانية لنقطة على إطار دراجة إذا أتمت دورتين في 3 ثوان. J

F $\frac{\pi}{3}$

G $\frac{\pi}{2}$

H $\frac{2\pi}{3}$

J $\frac{4\pi}{3}$

106. **مراجعة** أي الزوايا لها tan و Cosine سالبين؟ A

A $110°$

B $180°$

C $210°$

D $340°$

التدريس المتمايز BL

التوسع ما النقاط التي يتقاطع عندها المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مع دائرة الوحدة؟ وضِّح كيف يُمكنك استخدام هذه النقاط في إيجاد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$. يتقاطع المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مع دائرة الوحدة عند $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وذلك نظرًا لأن النقاط على دائرة الوحدة لها الإحداثيات $(\cos\theta, \sin\theta)$، $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة جيب الزاوية ومعكوسها بيانيًّا.

نصيحة للتدريس

تعبر المعادلة الوسيطية عن قيمة المعادلة كدالة زمنية t. بالنسبة لمعادلة في صيغة $y = f(x)$، يتم تحويل المعادلة إلى معادلة وسيطية لتكون $y = f(t)$ حيث $t = x$.

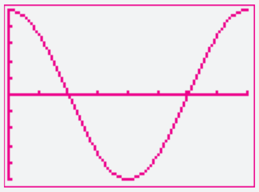
2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلبة في الصف إلى مجموعات ثنائية. ينفذ الصف بأكمله النشاط 1. ثم اطلب من الطلاب التعاون مع زملائهم في إكمال التمرينات من 1 إلى 6.

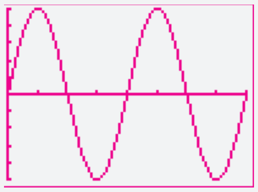
إجابات إضافية

1.



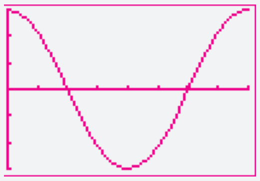
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{12}$

2.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{24}$

3.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3, 3]$ scl: 1
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{12}$

3-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل دالة الـ sine بيانيًّا باستخدام المعادلات الوسيطية

الهدف:

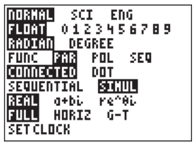
- استخدام الحاسبة البيانية والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة الـ sine ومعكوسها بيانيًّا.

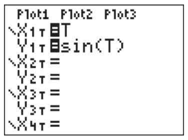
باستخدام نظام الأعداد الحقيقية، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية على المستوى الإحداثي، وتطبيق التحليل البياني نفسه الذي قمت به للدوال في درس سابق. كما سبق في التوسع 7-1، ستُستخدَم المعادلات الوسيطية في تمثيل دالة الـ sine

النشاط 1 تمثيل المعادلة الوسيطية بيانيًّا $y = \sin x$

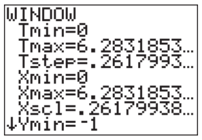
مثِّل بيانيًّا $x = t$، $y = \sin t$.

الخطوة 1 تعيين المنوال. من القائمة MODE، اختر RADIAN، PAR، وSIMUL. يتيح هذا تمثيل المعادلات بيانيًّا على الفور. بعد ذلك، قم بإدخال المعادلات الوسيطية. في صيغة وسيطية. X,T,θ,n سيتم استخدام t بدلًا من x.

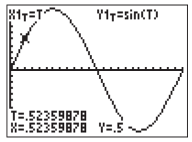




الخطوة 2 قم بإعداد قيم t و x للمدى من 0 إلى 2π. قم بإعداد مقياس Tstep و على x على $\frac{\pi}{12}$. قم بإعداد y على $[-1, 1]$ scl: 0.1. تقوم الحاسبة تلقائيًّا بالتحويل إلى صيغة عشرية.



الخطوة 3 تمثيل المعادلة بيانيًّا. تتبَّع الدالة لتحديد النقاط على التمثيل البياني. اختر TRACE واستخدم السهم الأيمن للتحرك على المنحنى.

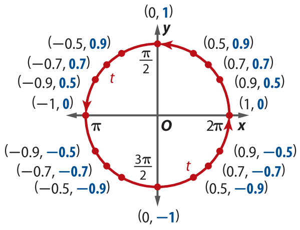


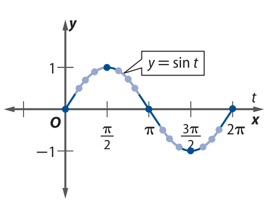
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1
t: $[0, 2\pi]$; $t$step $\frac{\pi}{12}$

سجِّل القيم المتناظرة لكل من x و y.

الخطوة 4 يوضح الجدول قياس الزوايا من 0° إلى 180°، أو من 0 إلى π، والقيم المتناظرة لـ $\sin t$ على دائرة الوحدة. الأشكال التالية تمثل العلاقة بين التمثيل البياني ودائرة الوحدة.

الدرجات	180	150	135	120	90	60	45	30	0
الراديانات	3.14	2.618	2.356	2.094	1.571	1.05	0.79	0.52	0
$y = \sin t$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0





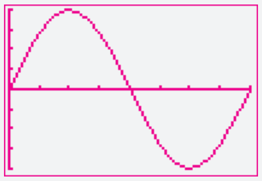
نصيحة دراسية

المعادلات العشرية فيما يلي المعادلات العشرية لقيم مثلثية مشتركة.

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

4.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-4, 4]$ scl: 1
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{12}$

5.

$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{12}$

6.

$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5
t: $[0, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{12}$

تمارين

مثِّل كل دالة على $[0, 2\pi]$. **1–6. انظر الحاشية.**

1. $x = t, y = \cos t$
2. $x = t, y = \sin 2t$
3. $x = t, y = 3 \cos t$
4. $x = t, y = 4 \sin t$
5. $x = t, y = \cos (t + \pi)$
6. $x = t, y = 2 \sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

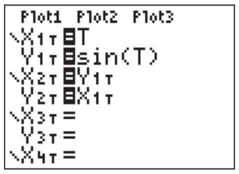
بالتعريف يكون $\sin t$ هو الإحداثي y للنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة؛ حيث يلتف العدد الحقيقي t حول خط الأعداد. كما هو مبين في الرسم التخطيطي بالصفحة السابقة، فإن التمثيل البياني لـــ $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y في النقطة التي تحددها t وهي تتحرك عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.

التمثيل البياني لدالة الـــ sine يسمى منحنى الـــ *sine*. تعلمت من الدرس 3-4 أن دالة الـــ sine هي دالة زمنية لها دورة 2π. هذا معناه أن منحنى الـــ sine الممثل بيانيًّا من 0 إلى 2π سيُكرَّر كل مسافة قدرها 2π في أي من الاتجاهين، الموجب والسالب. يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل معكوس دالة الـــ sine بيانيًّا.

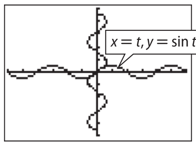
النشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا

مثِّل بيانيًّا $x = t$، $y = \sin t$ ومعكوسها. ثم حدِّد المجال الذي يجعل $y = \sin t$ بدالة واحد إلى واحد.

الخطوة 1 يتم إيجاد المعكوسات بتبديل x و y. قم بإدخال المعادلات المعطاة كالتالي: X_{1T} و Y_{1T}. لتمثيل المعكوس بيانيًّا، قم بإعداد $Y_{2T} = X_{1T}$ و $X_{2T} = Y_{1T}$. وهذه توجد في VARS القائمة. اختر Y-VARS، المعادلة الوسيطية، Y_{1T}. كرِّر بالدالة لـــ X_{1T}.



الخطوة 2 تمثيل المعادلة بيانيًّا. عدِّل النافذة حتى يتضح كل من الرسمين البيانيين، كما هو موضح. ربما تحتاج إلى تعيين بقيمة صغرى حتى تحصل على منحنى بياني متجانس.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-10, 10]$ scl: 2

$t: [-3\pi, 3\pi]$; tstep $\frac{\pi}{12}$

نصيحة دراسية

Tstep إذا اتضح أن التمثيل البياني منكسر، يمكنك تغيير قيمة Tstep إلى قيمة صغرى حتى تحصل على منحنى متجانس.

الخطوة 3 بسبب أن منحنى الـــ sine دوري، هناك عدد لانهائي من المجالات سيجتاز بسببها المنحنى اختبار الخط الأفقي، بدالة واحد إلى واحد. أحد هذه المجالات مثلاً $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

تمارين

مثِّل كل دالة ومعكوسها. ثم حدِّد مجالًا تكون نسبته إلى كل دالة واحدًا إلى واحد. **7–12. انظر الحاشية.**

7. $x = t, y = \cos 2t$
8. $x = t, y = -\sin t$
9. $x = t, y = 2 \cos t$
10. $x = t + \frac{\pi}{4}, y = \sin t$
11. $x = t, y = 2 \cos (t - \pi)$
12. $x = t - \frac{\pi}{6}, y = \sin t$

تدريب اطلب من الطلاب إكمال النشاط 2 والتمرينات من 7 إلى 15

3 التقويم

التقويم التكويني

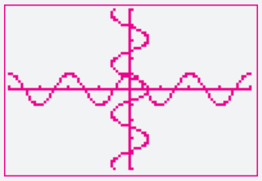
استخدم التمرين 8 لتقويم قدرة الطلاب على رسم معادلة وسيطية ومعكوسها على حاسبة التمثيل البياني.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه حول التمثيل البياني للدوال المثلثية ومعكوساتها. واطلب منهم تفسير كيفية تحديد ما إذا كانت الدالتان المرسومتان بيانيًّا معكوستين أم لا.

إجابات إضافية

7.

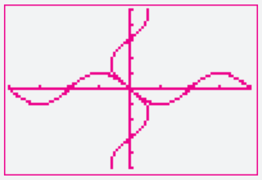


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-2\pi, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

8.

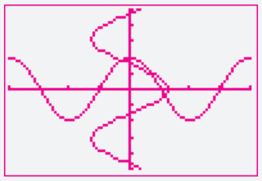


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-2\pi, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

9.

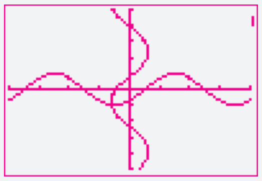


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-2\pi, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = [0, \pi]$

10.



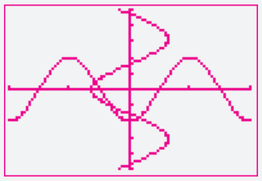
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-3\pi, 3\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية:

$D = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

11.



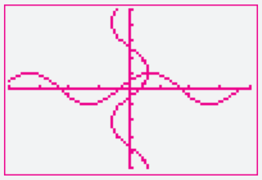
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-2\pi, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية:

$D = [0, \pi]$

12.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1

$t: [-2\pi, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{24}$

الإجابة النموذجية:

$D = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 173 12/15/2016 11:40:26 PM