الدرس 3-2 الدرجات والراديان

:: السابق

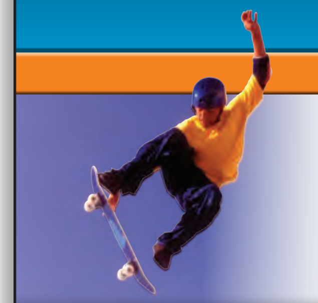
- لقد استخدمت قياسات الزوايا الحادة في المثلثات المعطاة درجاتها.

:: الحالي

- 1 حوّل قياسات الزوايا بالدرجات إلى قياسات راديان، والعكس بالعكس.
- 2 استخدم قياسات الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.

:: لماذا؟

- في الدرس 3-1، قمت بالعمل فقط على الزوايا الحادة. لكن يمكن أن تكون للزوايا أي قياس من عدد حقيقي. على سبيل المثال، في التزلج، 540 هي حيلة جوية يقوم المتزلج فيها بالدوران مع حول لوح التزلج بزاوية 540°، أو دورة كاملة ونصف، في الهواء.

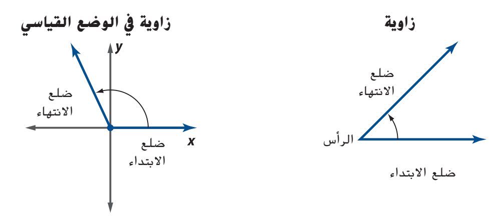


المفردات الجديدة

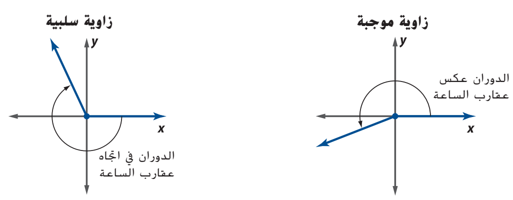
رأس (vertex)
ضلع الابتداء (initial side)
ضلع الانتهاء (terminal side)
الوضع القياسي (standard position)
راديان (radian)
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء (coterminal angles)
سرعة خطية (linear speed)
سرعة الزاوية (angular speed)
القطاع (sector)

1 الزوايا وقياساتها

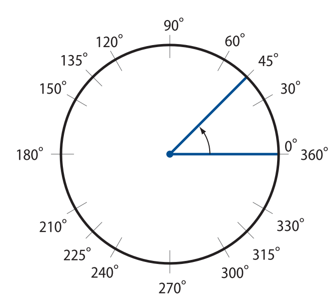
من الهندسة، ربما تتذكر أن الزاوية كانت تُعرّف بشعاعين غير متداخلين يشتركان في نقطة تعرف بـ **الرأس**. يمكن أن نفكر في الزاوية أيضًا باعتبارها تكونت من حركة دوران الشعاع حول نقطة الرأس. من وجهة النظر الديناميكية هذه، يكوّن موقع بداية الشعاع **ضلع الابتداء** للزاوية. بينما يكوّن موقع الشعاع بعد الدوران **ضلع الانتهاء** للزاوية. في المستوى الإحداثي، الزاوية التي يقع رأسها عند نقطة الأصل وضلع الابتداء على المحور الأفقي x يقال إنها في **وضع قياسي**.



يبين قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري للتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية. تنشأ *الزاوية الموجبة* عن الدوران عكس عقارب الساعة وتنشأ الزاوية السالبة عن الدوران في اتجاه عقارب الساعة.



أكثر وحدات قياس الزاوية شيوعًا هي *الدرجة* (°)، التي تساوي $\frac{1}{360}$ دورة كاملة (عكس عقارب الساعة) حول الرأس. من الرسم التخطيطي الموضّح، يمكنك أن ترى أن 360° تمثل 1 دورة كاملة، 180° تمثل $\frac{1}{2}$ دورة، 90° تمثل $\frac{1}{4}$ دورة. وهكذا، كما هو موضّح على محيط الدائرة.



149

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-2 استخدم مقاييس الزوايا الحادة بالدرجات في المثلثات المعطاة.

الدرس 3-2 حوّل مقاييس الزوايا بالدرجات إلى قياسات بالراديان، والعكس بالعكس.
استخدم مقاييس الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.

بعد الدرس 3-2 أوجد قيمة الدوال المثلثية لأي زاوية باستخدام دائرة الوحدة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا وقف طالب ووجهه ناحية الغرب، فكم درجة دوران ينبغي أن يدور الطالب ليتوجه بوجهه ناحية الشمال؟ الإجابة النموذجية: الدوران إلى اليمين بزاوية 90°.

(يُتبع في الصفحة التالية)

نصيحة دراسية

القاعدة 60 يرجع مفهوم قياس الدرجة إلى البابليين القدمًاء، الذين قاموا بحسابات فلكية مبكرة باستخدام نظامهم الرقمي، والذي بُني على نظام ستيني(60) بدلاً من النظام العشري (10) الذي نستخدمه اليوم.

يمكن أيضًا التعبير عن قياس الدرجة باستخدام صيغة الدرجة العشرية أو الدرجة والدقيقة والثانية (DMS) حيث تنقسم فيها كل درجة إلى 60 دقيقة (′) وكل دقيقة تقسم إلى 60 ثانية (″).

مثال 1 التحويل بين صيغة DMS والدرجة العشرية

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

a. 56.735°

أولًا، حوّل 0.735° إلى دقائق وثوانٍ.

$$56.735^\circ = 56^\circ + 0.735^\circ\left(\frac{60'}{1^\circ}\right) \qquad 1^\circ = 60'$$
$$= 56^\circ + 44.1' \qquad \text{بسّط}$$

ثم، حوّل 0.1′ إلى ثوانٍ.

$$56.735^\circ = 56^\circ + 44' + 0.1'\left(\frac{60''}{1'}\right) \qquad 1' = 60''$$
$$= 56^\circ + 44' + 6'' \qquad \text{بسّط}$$

إذًا، 56.735° يمكن كتابتها في صورة 56° 44′ 6″.

b. 32° 5′ 28″

كل دقيقة عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدرجة وكل ثانية عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدقيقة. إذًا كل ثانية تمثل $\frac{1}{3600}$ من الدرجة.

$$32^\circ\, 5'\, 28'' = 32^\circ + 5'\left(\frac{1^\circ}{60'}\right) + 28''\left(\frac{1^\circ}{3600''}\right) \qquad 1' = \frac{1}{60}(1^\circ) \text{ و } 1'' = \frac{1}{3600}(1^\circ)$$
$$\approx 32^\circ + 0.083 + 0.008 \qquad \text{بسّط}$$
$$\approx 32.091^\circ \qquad \text{اجمع}$$

إذًا، 32° 5′ 28″ يمكن أن تكتب 32.091° تقريبًا.

تمرين موجه

1A. 213.875° 213° 52′ 30″

1B. 89° 56′ 7″ 89.935°

تلميح تقني

صيغة DMS يمكنك استخدام بعض الحاسبات لتحويل قيم الدرجة العشرية إلى درجات ودقائق وثوانٍ باستخدام دالة DMS أسفل قائمة Angle.

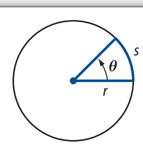
قياس الزوايا بالدرجات يكون ملائمًا عندما تطبق حساب المثلثات لتحل العديد من المسائل من الحياة اليومية، مثل تلك الخاصة بالمسح والملاحة. ولغيرها من التطبيقات على الدوال المثلثية، يتسبب استخدام زاوية مقاسة بالدرجات في مشكلة كبيرة. لا توجد للدرجة علاقة بأي قياس خطي؛ أي أن درجات بوصية أو $\frac{\text{بوصة}}{\text{درجة}}$ ليس لها معنى. قياس الزوايا بواسطة **الراديان** يوفر حلاً لهذه المشكلة.

المفهوم الأساسي قياس الراديان

الشرح القياس θ بقياس الراديان للزاوية المركزية للدائرة يساوي نسبة طول القوس المحصور s لنصف القطر r للدائرة.

الرموز $\theta = \frac{s}{r}$، حيث إن θ قيست بالراديان

مثال يساوي قياس الزاوية المركزية 1 راديان إذا تقاطعت مع قوس بطول نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1$ راديان عندما تكون $s = r$.

لاحظ أنه طالما كان طول القوس s ونصف القطر r معروف قياسهما باستخدام الوحدات الخطية نفسها، فالنسبة $\frac{s}{r}$ كمية لابعدية. لهذا السبب فإن كلمة *راديان* أو اختصارها *rad* تحذف غالبًا عند كتابة قياس الراديان لزاوية.

- هل هناك أكثر من طريقة يمكن أن يستخدمها الطالب للاستدارة بحيث يستقر في النهاية في الموضع نفسه ووجهه للشمال؟ الإجابة النموذجية: نعم، الاستدارة لليسار بزاوية 270°.
- لو استمر الطالب في الاستدارة في الاتجاه نفسه، فهل سيعود إلى موضعه ووجهه للشمال؟ نعم
- كم عدد مرات تكرار موضع الشمال من حيث درجات الاستدارة؟ كل 360°

1 الزوايا والقياسات

مثال 1 يبين كيفية تحويل قياسات الزوايا بين صيغة درجة ودقيقة وثانية (DMS) وصيغة الدرجة العشرية. **مثال 2** يبين كيفية التحويل بين الدرجات والراديان. **مثال 3** يبين كيفية تعريف الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها.

التقويم التكويني

استخدم تمرينات التطور الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب كل مقياس درجة كسر عشري في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة كسر عشري لأقرب جزء من الألف.

a. 329.125° 329° 7′ 30″

b. 35° 12′ 7″ 35.202°

التدريس المتمايز AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب مد أذرعهم اليمنى لتمثيل الشعاع الأولي في الزاوية. أعطهم زاوية الاستدارة واطلب منهم تحريك أذرعهم اليسرى إلى الموضع التقريبي لشعاع الانتهاء.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 150 12/15/2016 11:39:46 PM

مثال إضافي

2 اكتب قياس كل درجة بالراديان كمضاعف لـــ π وكل قياس راديان بالدرجات.

a. $135°$ $\frac{3\pi}{4}$

b. $-30°$ $-\frac{\pi}{6}$

c. $\frac{2\pi}{3}$ $120°$

d. $-\frac{3\pi}{4}$ $-135°$

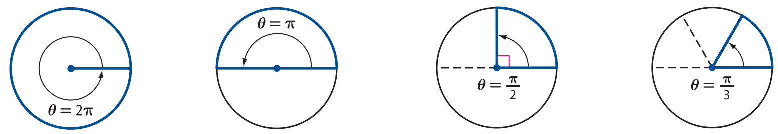
تمثل الزاوية المركزية دورة كاملة واحدة عكس عقارب الساعة حول الرأس بما يتماثل مع طول القوس المساوي لمحيط الدائرة، $2\pi r$. لهذا، يمكنك الحصول على قياسات راديان الآتية:

1 دوران $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$

$\frac{1}{2}$ دوران $= \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \text{ rad}$

$\frac{1}{4}$ دوران $= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$\frac{1}{6}$ دوران $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$



نصيحة دراسية

العلاقة بين الدرجة و الراديان من المسألة الكلامية المعروضة، يمكنك أن تتبين أن $1° \approx 0.017 \text{ rad}$ و $1 \text{ rad} \approx 57.296°$.

بما أن 2π راديان و$360°$ كلاهما يماثل دورة واحدة كاملة، يمكنك كتابة $360° = 2\pi$ راديان أو $180° = \pi$ راديان. تقود المعادلة الأخيرة إلى التعابير المكافئة الآتية:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ راديان} \quad \text{و} \quad 1 \text{ راديان} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

باستخدام هذه العبارات، يمكننا الحصول على قواعد التحويل التالية:

قراءة في الرياضيات

قياس الزاوية إذا لم يتم تحديد وحدة قياس الزاوية، يتم استخدام قياس الراديان. إذا استُخدم قياس الدرجة، فلا بد من استخدام رمز الدرجة (°).

المفهوم الأساسي قواعد التحويل بين قياس الدرجة والراديان

1. للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

2. للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

مثال 2 التحويل بين قياسي الدرجة والراديان

حول كل قياس من الدرجات إلىالراديان كمضاعف لـــ π وبالعكس.

a. $120°$

$120° = 120°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= \frac{2\pi}{3} \text{ راديان} = \frac{2\pi}{3}$ بسّط

b. $-45°$

$-45° = -45°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= -\frac{\pi}{4} \text{ راديان} = -\frac{\pi}{4}$ بسّط

c. $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ راديان}$ اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= \frac{5\pi}{6} \text{ راديان} \left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = 150°$ بسّط

d. $-\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \text{ راديان}$ اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= -\frac{3\pi}{2} \text{ راديان} \left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = -270°$ بسّط

تمرين موجه

2A. $210°$ $\frac{7\pi}{6}$ **2B.** $-60°$ $-\frac{\pi}{3}$ **2C.** $\frac{4\pi}{3}$ $240°$ **2D.** $-\frac{\pi}{6}$ $-30°$

التدريس المتمايز AL OL

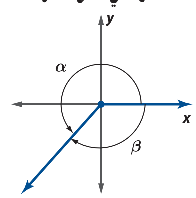
المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب استخدام طريقة بديلة للتحويل بين الراديان والدرجات باستخدام النسبة $\frac{\pi \text{ راديان}}{180 \text{ درجة}} = \frac{x \text{ راديان}}{y \text{ درجة}}$.

قراءة في الرياضيات

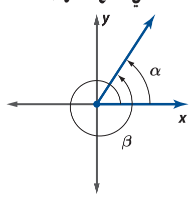
تسمية الزوايا في علم حساب المثلثات، عادة ما تسمى الزوايا بحروف يونانية، مثل α (ألفا)، β (بيتا)، وθ (ثيتا).

بتعريف الزوايا من حيث الدوران حول الرأس، يصبح بإمكان زاويتين أن يكون لهما نفس ضلعي الابتداء والانتهاء ولكن تختلف قياساتهم. تلك الزويا تدعى **الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء**. في الأشكال بالأسفل، الزاويتان α وβ مشتركتان في ضلع الانتهاء

زوايا موجبة وسلبية مشتركة في ضلع الانتهاء



زوايا موجبة مشتركة في ضلع الانتهاء



الزاويتان الموجبتان المشتركتان في ضلع الانتهاء الموضحتان تختلفان في استدارة كاملة واحدة. أي زاوية تحتوي على عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء التي يمكن إيجادها بجمع أو طرح المضاعفات الصحيحة العدد لـ$360°$ أو 2π راديان.

المفهوم الأساسي الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

الدرجات	الراديان
إذا كان α هو قياس الزاوية بالدرجات، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 360n°$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.	إذا كانت α هي قياس الزاوية بالراديان، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 2n\pi$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.

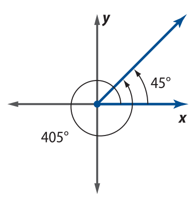
مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

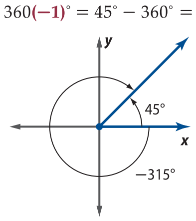
a. $45°$

كل الزوايا ذات القياس $45° + 360n°$ مشتركتان في ضلع الانتهاء مع زاوية ذات قياس $45°$. افترض أن $n = 1$ ،-1.

$$45° + 360(1)° = 45° + 360° = 405°$$



$$45° + 360(-1)° = 45° - 360° = -315°$$

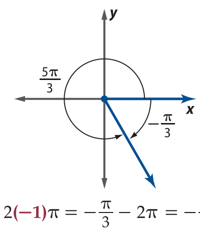


b. $-\frac{\pi}{3}$

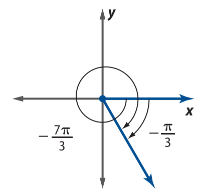
كل الزوايا ذات القياس $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

افترض أن $n = 1$ ،-1.

$$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$



$$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$$



تمرين موجه **3A–B. انظر الهامش.**

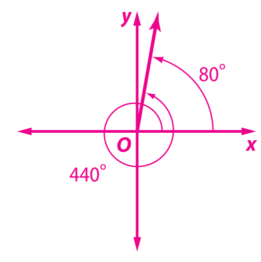
3A. $-30°$ **3B.** $\frac{3\pi}{4}$

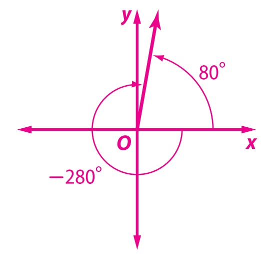
مثال إضافي

3 حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

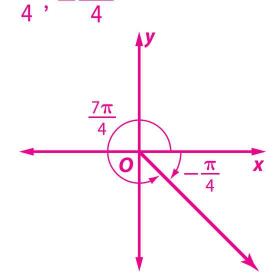
3a–b. n عدد صحيح.

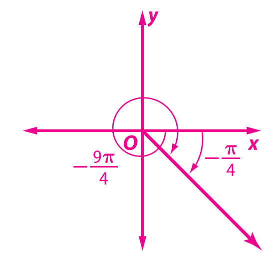
a. $80°$ $80° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $440°, -280°$





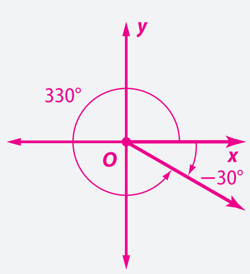
b. $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$

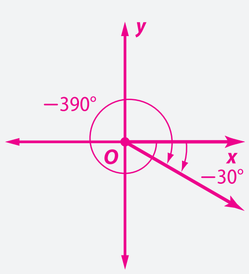


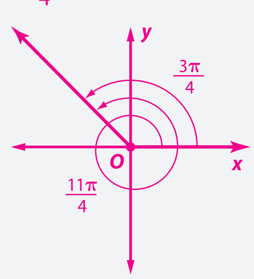


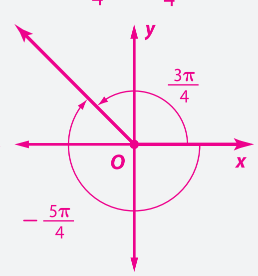
إجابات إضافية (تمرين موجه) 3A–B. n عدد صحيح.

3A. $-30° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $330°$؛ $-390°$ **3B.** $\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{11\pi}{4}$؛ $-\frac{5\pi}{4}$









إرشاد للمعلمين الجدد

التحقق من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء. الطريقة السريعة للتحقق من أن الزوايا مشتركة في ضلع الانتهاء هي التحقق من أن الفارق بينها رقم صحيح من مضاعفات الدرجة $360°$. على سبيل المثال،

$$180° - (-540°) = 720° = 2 \times 360°.$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 152 12/15/2016 11:39:48 PM

2 تطبيقات باستخدام قياس الزاوية

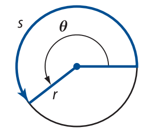
حل $\theta = \frac{s}{r}$ لطول القوس s يعطينا صيغة معادلة لإيجاد طول قوس في دائرة.

المفهوم الأساسي طول القوس

إذا كانت θ هي الزاوية المركزية في دائرة نصف قطرها r إذًا فطول القوس المحصور s يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$s = r\theta$$

حيث إن θ قياسها بالراديان.

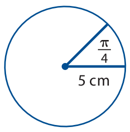


عند قياس θ بالدرجات، يمكنك أيضًا استخدام المعادلة $s = \frac{\pi r\theta}{180}$ والتي تحتوي بالفعل على تحويل الدرجة–الراديان.

مثال 4 إيجاد طول القوس

أوجد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{4}, r = 5$ cm



$s = r\theta$ طول القوس

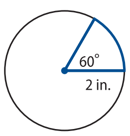
$= 5\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = 5$

$= \frac{5\pi}{4}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{5\pi}{4}$ أو حوالي 3.9 سنتيمتر.

b. $60°, r = 2$ in

الطريقة 1 حوّل $60°$ إلى قياس الراديان، ثم استخدم $s = r\theta$ لإيجاد طول القوس.



$60° = 60°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

$= \frac{\pi}{3}$ بسّط

باستخدام التعويض $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$s = r\theta$ طول القوس

$= 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

الطريقة 2 استخدم $s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ لإيجاد طول القوس.

$s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ طول القوس

$= \frac{\pi(2)(60°)}{180°}$ $\theta = 60°$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{2\pi}{3}$ أو حوالي 2.1 بوصة.

تمرين موجه

4A. $\frac{2\pi}{3}, r = 2$ m **أو حوالي $\frac{4\pi}{3}$ 4.2 m**

4B. $135°, r = 0.5$ ft **أو حوالي $\frac{3\pi}{8}$ 1.2 ft**

نصيحة دراسية

استخدام الراديان لاحظ في المثال 4a أنه عندما تكون $r = 5$ سنتيمترات و راديان $\theta = \frac{\pi}{4}$. $s = \frac{5\pi}{4}$ سنتيمتر، وليس سنتيمتر–راديان $\frac{5\pi}{4}$. هذا لأن الراديان نسبة لابُعْدِيَّة.

2 تطبيقات قياس الزاوية

مثال 4 يبين كيفية إيجاد طول القوس لقياس زاوية مركزية مُعينة. **مثال 5** يبين كيفية تحديد السرعة الزاوية والسرعة الخطية لجسم يدور. **مثال 6** يبين كيفية إيجاد مساحة قطاع من دائرة.

مثال إضافي

4 أوجد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{3}, r = 4$ in. 4.2 in.

b. $125°, r = 7$ cm 15.3 cm

التركيز على محتوى الرياضيات

السرعة الزاوية تُعرف السرعة الخطية بالصيغة $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس و t هو الزمن. ويمكن أيضًا كتابة السرعة الخطية باستخدام السرعة الزاوية ω. ويبدأ الانحراف بإيجاد قيمة $\theta = \frac{s}{r}$ بالنسبة لـــ $s: s = r\theta$. وعند قسمة كل طرف على t ينتج $\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}$. عند إحلال السرعة الخطية v محل $\frac{s}{t}$ و ω محل $\frac{\theta}{t}$ تنتج معادلة للسرعة الخطية باستخدام السرعة الزاوية: $v = r\omega$.

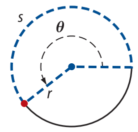
يمكن استخدام قاعدة طول القوس لتحليل حركة دائرية. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى **السرعة الخطية**. معدل دوران الجسم حول نقطة ثابتة يسمى **سرعة الزاوية**. السرعة الخطية تقاس بوحدات كالأميال لكل ساعة، بينما تقاس السرعة الزاوية بوحدات كالدورات لكل دقيقة.

المفهوم الأساسي السرعة الخطية والزاوية

لنفترض أن جسمًا تحرك بسرعة ثابتة على ممر دائري نصف قطره r.

إذا كانت s هي طول القوس الذي يقطعه الجسم في حركته خلال الزمن t،
إذًا فسرعة الجسم *الخطية* v يتم إيجادها بالمعادلة $v = \frac{s}{t}$.

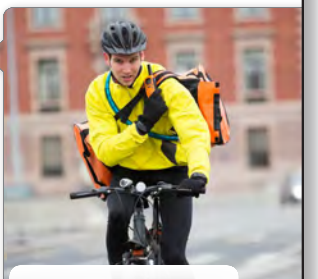
إذا كانت θ هي سرعة الدوران (بالراديان) التي يتحرك الجسم فيها خلال الزمن t،
فإن *السرعة الزاوية* ω للجسم يتم إيجادها بالمعادلة $\omega = \frac{\theta}{t}$.



قراءة في الرياضيات

أوميجا الحرف اليوناني الصغير أوميجا ω يستخدم عادة للدلالة على السرعة الزاوية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد السرعات الزاوية والخطية

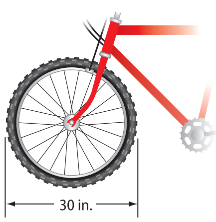


الربط بالحياة اليومية

في بعض مدن الولايات المتحدة، يمكن للساعي أن يقود بمعدل 30 إلى 35 ميلًا في اليوم، بينما يقوم بتوصيل 30 إلى 45 طردًا.

المصدر: جمعية سعاة الدراجات بنيويورك

ركوب الدراجة **يقود الساعي دراجة كما هو مبين.**



a. خلال عملية توصيل واحدة، تدور الإطارات بمعدل 140 دورة في الدقيقة. أوجد السرعة الزاوية للإطارات في الدقيقة بقياس راديان.

بما أن قياس كل دورة 2π راديان، فإن 140 دورة تماثل زاوية الدوران θ هي $140 \times 2\pi$ أو 280π راديان.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{سرعة زاوية}$$

$$= \frac{280\pi \text{ راديان}}{1 \text{دقيقة}} \quad \theta = 280\pi \text{ راديان} \text{ و } t = 1 \text{ دقيقة}$$

ومن ثم، تكون السرعة الزاوية للإطار 280π أو حوالي 879.6 راديان لكل دقيقة.

b. في جزء من الطريق خلال مهمة التوصيل التالية، يدور الإطار بمعدل ثابت بمقدار 2.5 دورة لكل ثانية. أوجد السرعة الخطية للإطار بمعدل ميل لكل ساعة.

يماثل الدوران 2.5 دورة زاوية دوران θ لـــ $2.5 \times 2\pi$ أو 5π.

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{سرعة خطية}$$

$$= \frac{r\theta}{t} \quad s = r\theta$$

$$= \frac{15(5\pi) \text{ بوصة}}{1 \text{ ثانية}} = \frac{75\pi \text{بوصة}}{1 \text{ ثانية}} \quad r = 15 \text{ بوصة، } \theta = 5\pi \text{ راديان، و } t = 1 \text{ ثانية}$$

استخدم التحليل البعُدي لتحويل هذه السرعة من بوصة لكل ثانية إلى ميل لكل ساعة.

$$\frac{75\pi \cancel{\text{بوصة}}}{1 \cancel{\text{ثانية}}} \times \frac{60 \cancel{\text{ثانية}}}{1 \cancel{\text{دقيقة}}} \times \frac{60 \cancel{\text{دقيقة}}}{1 \text{ ساعة}} \times \frac{1 \cancel{\text{قدم}}}{12 \cancel{\text{بوصة}}} \times \frac{1 \text{ ميل}}{5280 \cancel{\text{قدمًا}}} \approx \frac{13.4 \text{ ميل}}{\text{ساعة}}$$

ومن ثم، فالسرعة الخطية للإطار حوالي 13.4 ميل لكل ساعة.

تمرين موجه

الوسائط **لاحظ جهاز DVD المبين.**

5A. أوجد السرعة الزاوية لجهاز DVD بالراديان لكل ثانية إذا كان القرص يدور بمعدل 3.5 دورة في الثانية. 7π أو حوالي 22.0 rad/s

5B. إذا كان مشغل DVD قد سخن بشدة وبدأ دوران القرص يبطئ بمعدل 3 دورة في الثانية، فأوجد السرعة الخطية للقرص بالمتر لكل دقيقة. حوالي 67.9 m/min

مثال إضافي

5 **أسطوانات الموسيقى** يصل قطر دائرة أسطوانة الفينيل الكلاسيكية إلى 30 cm. عند تشغيلها على جهاز الأسطوانات، تدور الأسطوانة بسرعة $33\frac{1}{3}$ لفة في الدقيقة.

a. أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة عند تشغيلها بوحدة الراديان في الدقيقة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 209.4 راديان في الدقيقة

b. أوجد السرعة الخطية عند الحافة الخارجية للأسطوانة عند دورانها، بوحدة السنتيمتر في الثانية. 52.35 cm/s تقريبًا

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مُشغل الموسيقى المحمول تستخدم العديد من أجهزة مُشغل الموسيقى المحمول محركات أقراص ثابتة صغيرة جدًا تدور بسرعات عالية. اطلب من الطلاب استخدام الإنترنت للبحث عن مواصفات مُشغل موسيقى معين. واطلب منهم استخدام السرعة الزاوية وحجم القرص المغناطيسي في إيجاد قيمة السرعة الخطية للقرص عند الحافة الخارجية. إذا تعذر العثور على مواصفات القرص الثابت، يمكن للطلاب قياس مُشغل الموسيقى وإيجاد قيمة قطر الدائرة، ثم يقومون بالحسابات.

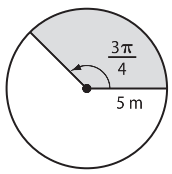
التدريس المتمايز BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي تتدرب ليلى ومها للمشاركة في مسابقة الجري الدولية. تجري ليلى دورة واحدة على المضمار الخارجي لمضمار دائري قطره 1000 قدم. معدل سرعتها الثابت هو 12 mi/h. وتجري مها دورة واحدة على المضمار الخارجي لمضمار شبه دائري قطره 1125 قدمًا. وتجري أيضًا بسرعة 12 mi/h. أوجد بالدقائق الزمن الذي تحتاجه كل منهما لإنهاء دورة واحدة. وقارن كل زمن بنصف قطر المضمار. يبلغ الزمن الذي تستغرقه ليلى 2.97 دقيقة تقريبًا. ويبلغ الزمن الذي تستغرقه ليلى 3.35 دقيقة تقريبًا. النسبة بين الزمنين تساوي النسبة بين نصف قطر المضمارين.

مثال إضافي

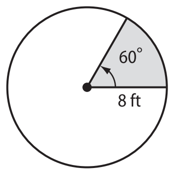
6 أوجِد مساحة قطاع الدائرة.

a.



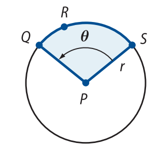
$\frac{75\pi}{8}$ أو تقريبًا $29.5\ m^2$

b.



$\frac{32\pi}{3}$ أو تقريبًا $33.5\ ft^2$

تذكر من مادة الهندسة أن **قطاع** الدائرة هو منطقة محاطة بالزاوية المركزية وقوسها المحصور. على سبيل المثال، المنطقة المظللة في الشكل هي قطاع الدائرة P. ونسبة مساحة القطاع إلى مساحة الدائرة بالكامل يساوي نسبة طول القوس المقابل إلى محيط الدائرة. افترض أن A تمثل مساحة القطاع.



$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\text{طول } \widehat{QRS}}{2\pi r}$$

طول $\widehat{QRS}$ هو $r\theta$.

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r}$$

حل A.

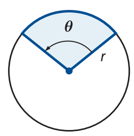
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

المفهوم الأساسي مساحة القطاع

المساحة A من قطاع دائرة لها نصف قطر r وزاوية مركزية θ

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

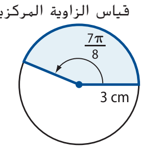
حيث إن θ قياسها بالراديان.



المثال 6 إيجاد مساحات القطاعات

a. أوجِد مساحة قطاع الدائرة.

قياس الزاوية المركزية للقطاع θ هو $\frac{7\pi}{8}$، ونصف قطره 3 سم.

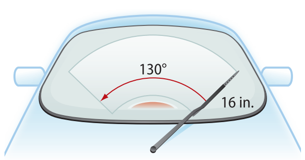


$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ — مساحة القطاع

$= \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{63\pi}{16}$ — $\theta = \frac{7\pi}{8}$ و $r = 3$

ومن ثم، مساحة القطاع $\frac{63\pi}{16}$ أو حوالي 12.4 سنتيمتر مربع.

b. الماسحات أوجِد المساحة التقريبية التي مسحتها شفرة المسّاحة المبينة، إذا كان طول مسّاحة الزجاج الأمامي كله 26 بوصة.



المساحة الممسوحة بشفرة المسّاحة هي الفرق بين مساحات القطاعات ونصف قطر 26 بوصة و $16 - 26$ أو 10 بوصة.

حوّل قياس الزاوية المركزية إلى الراديان.

$$130° = 130°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right) = \frac{13\pi}{18}$$

ثم استخدم نصف قطر كل قطاع لإيجاد المساحة الممسوحة. افترض أن A_1 = مساحة القطاع بنصف قطر 26 بوصة. وافترض أن A_2 = مساحة القطاع بنصف قطر 10 بوصات.

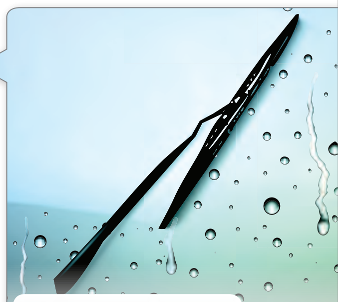
$A = A_1 - A_2$ — المساحة الممسوحة

$= \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$ — مساحة القطاع

$= \frac{2197\pi}{9} - \frac{325\pi}{9}$ — بسّط.

$= 208\pi \;=\; 653.5$ تقريبًا — بسّط.

ومن ثم، فالمنطقة الممسوحة حوالي 653.5 بوصة مربعة.



الربط بالحياة اليومية

تبلغ زاوية المسح القياسية لمسّاحة الزجاج الأمامي في السيارة حوالي 67°. وبشكل عام، فإن طول شفرات مسّاحات الزجاج الأمامي يتراوح بين 12 إلى 30 بوصة.

المصدر: مجلة Car and Driver

تمرين موجه

أوجد مساحة قطاع الدائرة بواسطة الزاوية المركزية المعطاة θ ونصف القطر r.

6A. $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = 1.5$ ft حوالي $2.65\ ft^2$

6B. $\theta = 50°$, $r = 6$ m حوالي $15.7\ m^2$

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية. واطلب من كل طالب أن يكتب مسألة تُعطي زاوية مركزية بالدرجات وطول نصف القطر، وتطلب مساحة القطاع وطول القوس. ثم اطلب من الطلاب تبادل المسائل وحلها، مع ذكر تفسير كل خطوة.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 155 12/15/2016 11:39:53 PM

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 50 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد ينسى الطلاب في التمارين من 27 إلى 32 تضمين الوحدات الخطية لطول القوس. ذكّر الطلاب بأنّ الطول يحتاج إلى وحدة لتعريف قيمته. وبالمثل، ينبغي للطلاب في التمارين من 43 إلى 48 تضمين وحدات مربعة، لأنهم يقيسون المساحة.

إجابات إضافية

27. 1.3 m
28. 6.3 in.
29. 5.2 yd
30. 33.4 cm
31. 3.9 mi
32. 206.8 mm
40a. 3-in. saw: 17,592.9 rad/s; 26,389.4 in./s
5-in. saw: 34,557.5 rad/s; 86,393.8 in./s
$5\frac{1}{2}$-in. saw: 28,274.3 rad/s; 77,754.4 in./s
$6\frac{1}{8}$-in. saw: 34,557.5 rad/s; 105,832.4 in./s
$7\frac{1}{4}$-in. saw: 31,415.9 rad/s; 113,882.7 in./s

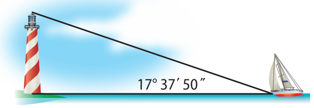
تمارين

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة. (المثال 1)

1. $11.773°$ **11° 46′ 23″**
2. $58.244°$ **58° 14′ 38″**
3. $141.549°$ **141° 32′ 56″**
4. $273.396°$ **273° 23′ 46″**
5. $87° 53' 10''$ **87.886°**
6. $126° 6' 34''$ **126.109°**
7. $45° 21' 25''$ **45.357°**
8. $301° 42' 8''$ **301.702°**

9. **الملاحة** يستخدم عاشق للإبحار آلة السدس، وهي آلة يمكنها قياس الزاوية بين جسمين بدقة تصل إلى أقرب 10 ثوان. لقياس الزاوية بين مركب الصيد خاصته والفنار. فإذا كانت قراءته $17° 37' 50''$، فما القياس بصيغة الدرجة العشرية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة. (المثال 1)

17.63°



اكتب كل قياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π وكل قياس راديان بالدرجات. (المثال 2)

10. $30°$ $\frac{\pi}{6}$
11. $225°$ $\frac{5\pi}{4}$
12. $-165°$ $-\frac{11\pi}{12}$
13. $-45°$ $-\frac{\pi}{4}$
14. $\frac{2\pi}{3}$ **120°**
15. $\frac{5\pi}{2}$ **450°**
16. $-\frac{\pi}{4}$ **−45°**
17. $-\frac{7\pi}{6}$ **−210°**

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة. (المثال 3)

18. $120°$
19. $-75°$
20. $225°$
21. $-150°$
22. $\frac{\pi}{3}$
23. $-\frac{3\pi}{4}$
24. $-\frac{\pi}{12}$
25. $\frac{3\pi}{2}$

18–25. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

26. **برنامج اللعب** تدير خديجة عجلة في برنامج اللعب. توجد 20 قيمة في فراغات متساوية الحجم على محيط العجلة. القيمة التي تحتاج إليها خديجة لتفوز تقع على بعد فراغين أعلى الفراغ الذي تبدأ عنده دورتها، ويجب أن تقوم العجلة بدورة كاملة واحدة على الأقل ليتم احتسابها. صِف الدورة التي ستكفل لخديجة نتيجة الفوز بالدرجات. (المثال 3) **الإجابة النموذجية: 396°**

أوجد طول القوس المحصور بقياس الزاوية المركزية المعطاة في دائرة وبنصف القطر المعطى. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 4) **27–32. انظر الهامش.**

27. $\frac{\pi}{6}, r = 2.5$ m
28. $\frac{2\pi}{3}, r = 3$ in.
29. $\frac{5\pi}{12}, r = 4$ yd
30. $105°, r = 18.2$ cm
31. $45°, r = 5$ mi
32. $150°, r = 79$ mm

33. **حديقة الملاهي** تدور لعبة دوامة الخيل في حديقة ملاهي 3024° في الجولة. (المثال 4)

a. كم سيدور راكب يجلس على بعد 13 قدمًا من مركز اللعبة في خلال الجولة؟ **نحو 686 ft**

b. كم سيدور راكب آخر جالس على بعد 18 قدمًا من مركز العجلة أكثر من الراكب الأول في الجزء **a** خلال الجولة؟ **نحو 264 ft**

أوجد عدد اللفات في كل دورة لكل دقيقة بمعلومية سرعة الزاوية وأوجد نصف القطر بمعلومية السرعة الخطية ومعدل الدوران. (المثال 5)

34. $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s **20 rev/min**
35. $\omega = 135\pi$ rad/h **1.125 rev/min**
36. $\omega = 104\pi$ rad/min **52 rev/min**
37. $v = 82.3$ m/s, 131 rev/min **6 m**
38. $v = 144.2$ ft/min, 10.9 rev/min **2.1 ft**
39. $v = 553$ in./h, 0.09 rev/min **16.3 in.**

40. **التصنيع** تصنع شركة العديد من المناشير الدائرية، حيث أقطار النصول وسرعات المحرك موضحة بالأسفل. (المثال 5)

قطر النصل (in.)	سرعة الموتور (rps)
3	2800
5	5500
$5\frac{1}{2}$	4500
$6\frac{1}{8}$	5500
$7\frac{1}{4}$	5000

a. أوجد سرعة الزاوية والسرعة الخطية للنصول في كل منشار. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. **انظر الهامش.**

b. ما معدل السرعة الخطية للمنشار ذي النصل البالغ $6\frac{1}{8}$ بوصات عن المنشار ذي النصل البالغ 3 بوصات؟ **79,443 in. s**

41. **سيارات** على امتداد الطريق السريع، تدور إطارات إحدى المركبات بمدى 646 و840 دورة في الدقيقة. قطر كل إطار 26 بوصة. (المثال 5)

a. أوجد مدى قيم السرعات الزاوية للإطارات بالراديان لكل دقيقة. **1292π rad/min إلى 1680π rad/min**

b. أوجد مدى قيم السرعات الخطية للإطارات بالميل لكل ساعة. **50 mi/h إلى 65 mi/h**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–50, 73, 75–100	1–49 فردي، 97–100	2–50 زوجي، 73, 75–96
OL ضمن المستوى	1–61 فردي، 62–65, 67–71 فردي، 72, 73, 75–100	1–50, 97–100	51–73, 75–96
BL أعلى من المستوى	51–100		

انتبه!

خطأ شائع قد يجد الطلاب صعوبة في التمرين 42 عند تطبيق التحليل البُعدي. ذكّرهم أنه يمكن كتابة أي علاقة تساوي، مثل 1 ساعة = 60 دقيقة، كمعاملي تحويل محتملين، $\frac{\text{1 ساعة}}{\text{60 دقيقة}}$ و $\frac{\text{60 دقيقة}}{\text{1 ساعة}}$. وينبغي هنا أن يضربوا في معامل التحويل الذي يلغي الوحدة المعلومة وينتج الوحدة المطلوبة (غير المعلومة).

إجابات إضافية

42a. ساعة: $\frac{\pi}{6}$ rad/h; 1.26 in./h

دقيقة: 2π rad/h; 20.1 in./h

ثانية: 120π rad/h; 1281.8 in./h

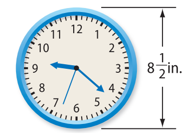
55a. الربع I: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

55b. الربع II: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

55c. الربع III: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

55d. الربع IV: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

42. **الوقت** محيط قطر ساعة حائط يساوي $8\frac{1}{2}$ بوصة. طول عقرب الساعات يساوي 2.4 بوصة، بينما طول عقرب الدقائق يساوي 3.2 بوصة، وطول عقرب الثواني يساوي 3.4 بوصة. (المثال 5)

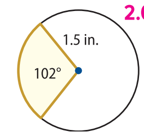


a. أوجد سرعة الزاوية بالراديان في الساعة والسرعة الخطية بالبوصة في الساعة لكل عقرب. **انظر الهامش.**

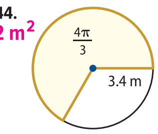
b. إذا كانت السرعة الخطية لعقرب الثواني تساوي 20 بوصة في الدقيقة، فهل تعمل الساعة بسرعة أم ببطئ؟ كم من الوقت سيزيد أو ينقص في اليوم؟ **حوالي 1.53 hr**

هندسة أوجد مساحة كل قطاع. (مثال 6)

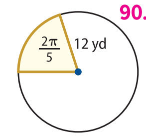
43. **$2.0\ in^2$**



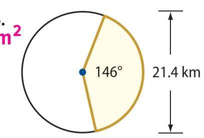
44. **$24.2\ m^2$**



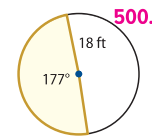
45. **$90.5\ yd^2$**



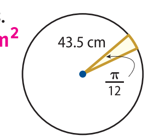
46. **$145.9\ km^2$**



47. **$500.5\ ft^2$**



48. **$247.7\ cm^2$**



49. **ألعاب** لوحة الأسهم المبينة مقسمة إلى عشرين قطاعًا متساويًا. إذا كان قطر اللوحة 18 بوصة، فما المساحة التي يغطيها كل قطاع على اللوحة؟ (المثال 6)

$12.7\ in^2$

50. **رعاية الحديقة** تروي مرشة مساحة تشكّل ثلث دائرة. إذا كان التيار المتدفق من المرش يصل إلى 6 أقدام، فما مساحة العشب التي يرويها المرش؟ (المثال 6) **$37.7\ ft^2$**

B **مساحة قطاع الدائرة وقياس زاوية مركزها معطيان. أوجد نصف قطر الدائرة.**

51. $A = 29\ ft^2, \theta = 68^\circ$ **7 ft**

52. $A = 808\ cm^2, \theta = 210^\circ$ **21 cm**

53. $A = 377\ in^2, \theta = \frac{5\pi}{3}$ **12 in.**

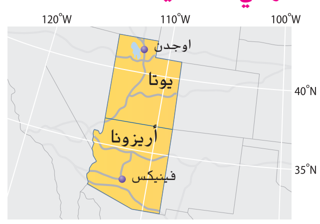
54. $A = 75\ m^2, \theta = \frac{3\pi}{4}$ **8 m**

55. صِف قياس الراديان بين 0 و 2π لزاوية θ تقع في وضع قياسي ويقع ضلعها الطرفي في:

a. الربع I
b. الربع II
c. الربع III
d. الربع IV

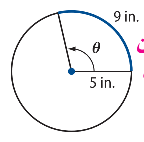
56. عندما يكون الضلع الطرفي لزاوية تتخذ الوضع القياسي واقعًا على أحد المحاور الإحداثية، فإن الزاوية تسمى *زاوية ربعية*. قدّم قياسات الراديان لأربع زوايا ربعية. **الإجابة النموذجية: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$**

57. **الجغرافيا**
تقع فينيكس وأريزونا واوجدن ويوتا جغرافيًّا على خط الطول نفسه، وهو ما يعني أن اوجدن تقع مباشرة شمال فينيكس. خط طول فينيكس هو 33° 26′ N، وخط طول اوجدن هو 41° 12′ N. إذا كان نصف قطر الأرض تقريبًا 3963 ميلاً، فكم تبعد المدينتين عن بعضهما؟ **حوالي 537 ميلاً**

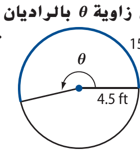


أوجد قياس زاوية θ بالراديان والدرجات.

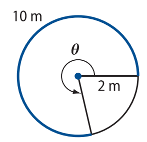
58. **1.8 راديان أو حوالي 103.1°**



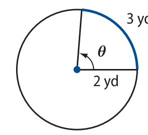
59. **3.3 راديان أو حوالي 191°**



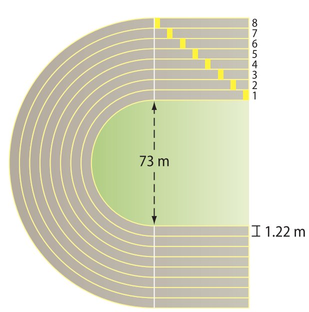
60. **5 راديان أو حوالي 286.5°**



61. **1.5 راديان أو حوالي 85.9.5°**



62. **طريق منحنى** طريق قياسي له 8 حارات هو طريق دائري كما هو موضح.



a. ما طول الحافة الخارجية للحارة 4 في المنحنى؟ **حوالي 130 m**

b. كم يكون فرق الطول بين الحافة الداخلية للحارة 7 والحافة الداخلية للحارة 3 في المنحنى؟ **حوالي 15.3 m**

المتابعة

لقد استكشف الطلاب كيفية كتابة قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.

اسأل:

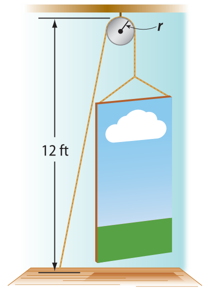
- فيمَ تفيد كتابة قياسات الزاوية بطرق مختلفة؟ الإجابة النموذجية: تفيد كتابة قياسات الزاوية بالدرجات عند حل المسائل بدون القياسات الخطية، بينما تفيد كتابة قياسات الزاوية بالراديان عند حل المسائل ذات القياسات الخطية.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 157 12/15/2016 11:39:56 PM

63. **دراما** بكرة قطرها r تستخدم في رفع جزء من ديكور المسرح في أثناء الاستراحة. ارتفاع البكرة 12 قدمًا. **حوالي 18.8 in.**

a. إذا كان نصف قطر البكرة 6 بوصات وتدور °180، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟

b. إذا كان نصف قطر البكرة 4 بوصات وتدور °900، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟ **حوالي 5.2 ft**



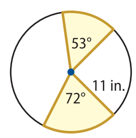
64. **الهندسة** تُستخدم بكرة كالتي في التمرين 63 في رفع صندوق في مستودع. حدد أي السيناريوهات التالية يمكن أن يستخدم في رفع الصندوق لمسافة 19 قدمًا أسرع. اشرح كيف توصلت لاستنتاجك. **انظر الهامش.**

I. نصف قطر البكرة 5 بوصات يدور 65 دورة في الدقيقة.

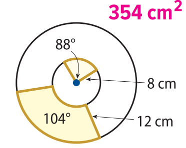
II. نصف قطر البكرة 4.5 بوصات يدور 70 دورة في الدقيقة.

III. نصف قطر البكرة 6 بوصات يدور 60 دورة في الدقيقة.

الهندسة الرياضية **أوجد مساحة كل منطقة مظللة.**

65. 

132 in^2

66. 

354 cm^2

67. **سيارات** عداد السرعة المبين يقيس سرعة سيارة بالميل في الساعة.

a. إذا كانت الزاوية بين 25 mi/h و 60 mi/h هي °81.1، فنحو كم ميلًا في الساعة تمثله كل درجة؟ **حوالي 0.43 mi/h**

b. إذا كانت زاوية عداد السرعة تتغير بمقدار °95، فكم زادت سرعة السيارة؟ **حوالي 41 mi/h**

C

أوجد المتممة والمكملة لكل زاوية إذا أمكن. إذا لم يمكن، فاشرح استنتاجك. **68–71. انظر الهامش.**

68. $\frac{2\pi}{5}$ 69. $\frac{5\pi}{6}$ 70. $\frac{3\pi}{8}$ 71. $-\frac{\pi}{3}$

72. **التزلج** يقوم فصل يدرس الفيزياء بتجربة لاختبار ثلاثة أحجام مختلفة من العجلات على لوحة تزلج بسرعة زاوية ثابتة. **a–c. انظر الهامش.**

a. اكتب معادلة السرعة الخطية للوح التزلج بما يتضمن نصف القطر والسرعة الزاوية. اشرح استنتاجك.

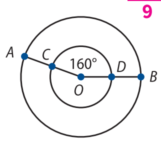
b. باستخدام المعادلة التي كتبتها في الجزء **a**، توقع السرعة الخطية بالمتر في الثانية للوح التزلج بسرعة زاوية قدرها 3 دورات في الثانية لكل قطر من أقطار العجلات 52, 56, 60 mm.

c. بناء على نتائجك في الجزء **b**، كيف تظن أن حجم العجلة يؤثر على السرعة الخطية؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الأخطاء** قيل لرنا وخديجة أن محيط القطاع في دائرة يساوي 10 أضعاف طول نصف قطرها. تظن رنا أن قياس قطاع الزاوية المركزية بالراديان هو 8 راديان. تظن خديجة أنه لا توجد معلومات كافية لحل المسألة. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

74. **تحدٍ** الدائرتان المبينتان متحدتي المركز. إذا كان طول القوس من A إلى B قياسه 8π بوصة و $DB = 2$ بوصة. فأوجد طول القوس من C إلى D بدلالة π. **$\frac{56\pi}{9}$ in.**



الاستنتاج **صف كيف يمكن للسرعة الخطية أن تتغير بالنسبة لكل معامل مما يلي. اشرح.** **75–77. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

75. نقص نصف القطر

76. نقص وحدة الزمن

77. زيادة السرعة الزاوية

78. **البرهان** إذا كانت $\frac{s_2}{r_2} = \frac{s_1}{r_1}$، فأثبت أن $\theta_1 = \theta_2$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

79. **التبرير** أي أثر تسببه مضاعفة نصف قطر الدائرة على القياسات الآتية؟ اشرح استنتاجك.

a. محيط قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

b. مساحة قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان. **a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

80. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قياس الدرجة والراديان. ثم ابتكر رسمًا تخطيطيًا يشبه الموجود في الصفحة 231. وضّح الرسم التخطيطي باستخدام قياس الدرجات داخل الدائرة وقياس الراديان خارجها. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

إجابات إضافية

64. سيناريو III: الإجابة النموذجية: تبلغ السرعة الخطية 2042 in./min تقريبًا في السيناريو I. و 1979 in./min تقريبًا في السيناريو II. و 2262 in./min تقريبًا في السيناريو III. تحدث أقصى سرعة خطية للبكرة في السيناريو III. وبهذا، يكون سيناريو III هو أفضل طريقة تُتبع لرفع الصندوق مسافة 15 قدمًا بأقصى سرعة.

68. متمم: $\frac{\pi}{10}$، مكمل: $\frac{3\pi}{5}$

مراجعة شاملة

استخدم قيمة الدالة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد القيم الدقيقة لقيم النسب الخمس المثلثية المتبقية لـ θ. 81–83. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

81. $\sin \theta = \frac{8}{15}$

82. $\sec \theta = \frac{4\sqrt{7}}{10}$

83. $\cot \theta = \frac{17}{19}$

84. **المعاملات البنكية** ربح الحساب الذي فتحته جدة وفاء في 1955 الفائدة المركبة بشكل مستمر. يوضح الجدول أرصدة الحساب من 1955 إلى 1959.

	التاريخ	الرصيد
1	1 يناير 1955	AED 2137.52
2	1 يناير 1956	AED 2251.61
3	1 يناير 1957	AED 2371.79
4	1 يناير 1985	AED 2498.39
5	1 يناير 1959	AED 2631.74

$y = 2137.5192(1.0534)^x$

a. استخدم خط الانحدار لإيجاد الدالة التي تمثل المبلغ الموجود في الحساب. استخدم عدد الأعوام بعد 1 يناير 1955 كمتغير مستقل.

b. اكتب المعادلة من الجزء a بدلالة قاعدة e. $y = 2137.5192e^{0.052x}$

c. ما معدل الفائدة المتوقع في الحساب لو لم توجد أي ودائع أو سحوبات خلال الفترة المذكورة في السؤال؟ 5.2%

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 2 و ln 5.

85. $\ln \frac{25}{16}$ $2 \ln 5 - 4 \ln 2$

86. $\ln 250$ $\ln 2 + 3 \ln 5$

87. $\ln \frac{10}{25}$ $\ln 2 - \ln 5$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

88. $f(x) = x^4 - x^3 - 12x - 144$ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm16, \pm18, \pm24, \pm36, \pm48, \pm72, \pm144; -3, 4$

89. $g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20; -2, 2, 5$

90. $g(x) = 6x^4 + 35x^3 - x^2 - 7x - 1$ $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

صِف السلوك الطرفي لكل دالة.

91. $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x - 1$ $f(x) \to -\infty$ as $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$

92. $g(x) = -x^6 + x^4 - 5x^2 + 4$ $g(x) \to -\infty$ as $x \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$ as $x \to \infty$

93. $h(x) = -\frac{1}{x^3} + 2$ $h(x) \to 2$ as $x \to -\infty$, $h(x) \to 2$ as $x \to \infty$

اكتب كل مجموعة باستخدام ترميز بناء المجموعة وترميز الفترات، إن أمكن.

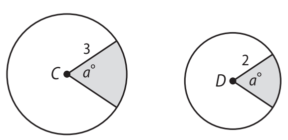
94. $n > -7$ $\{n \mid n > -7, n \in \mathbb{R}\}; (-7, \infty)$

95. $-4 \leq x < 10$ $\{x \mid -4 \leq x < 10, x \in \mathbb{R}\}; [-4, 10)$

96. $y < 1$ or $y \geq 11$ $\{y \mid y < 1 \text{ or } y \geq 11, y \in \mathbb{R}\}; (-\infty, 1) \cup [11, \infty)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

97. **SAT/ACT** في الشكل، C و D مركزي الدائرتين لهما نصف القطر 3 و 2 على التوالي. إذا كانت للمنطقة المظللة الأكبر مساحة 9. فما مساحة المنطقة المظللة الأصغر؟ B



ملاحظة: الشكل ليس مرسومًا لأخذ قياساته.

A 3   B 4   C 5   D 7   E 8

98. **مراجعة** إذا كانت $\cot \theta = 1$. فأوجد $\tan \theta =$ H

F -1 G 0 H 1 J 3

99. **مراجعة** إذا كانت $\sec \theta = \frac{25}{7}$ و θ حادة. فإن $\sin \theta =$ B

A $\frac{7}{25}$

B $\frac{24}{25}$

C $-\frac{24}{25}$

D $\frac{25}{7}$

100. أي من قياسات الراديان التالية يساوي °56؟ H

F $\frac{\pi}{15}$ G $\frac{7\pi}{45}$ H $\frac{14\pi}{45}$ J $\frac{\pi}{3}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 73. ينبغي أن يرى الطلاب أنه يمكن تمثيل قيمتين في علاقة طول القوس المتقاطع باستخدام x. ويسمح هذا بالوصول إلى الحل: نصف القطر $x =$ و $s = 10x$. بإحلال هذه القيم في $s = r\theta$ تنتج إجابة رنا.

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب ذكر كيفية تحويل قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان.

الإجابة النموذجية: اضرب قياس الدرجة في معامل التحويل $\frac{\pi}{180}$.

إجابات إضافية

69. ليس للزاوية متمم لأنها أكبر من $\frac{\pi}{2}$ أو 90°؛ مكمل: $\frac{\pi}{6}$

70. متمم: $\frac{\pi}{8}$؛ مكمل: $\frac{5\pi}{8}$

71. المتممات والمكملات ليست معرفة للزوايا السالبة.

72a. $v = r\omega$؛ الإجابة النموذجية: يتم الحصول على السرعة الخطية باستخدام $v = \frac{s}{t}$. لأن $s = r\theta$ و $\omega = \frac{\theta}{t}$، يمكن أيضًا كتابة معادلة السرعة الخطية باستخدام نصف القطر والسرعة الزاوية بالشكل $v = r\omega$.

72b. 52 mm: 0.49 $\frac{m}{s}$; 56 mm: 0.53 $\frac{m}{s}$; 60 mm: 0.57 $\frac{m}{s}$

72c. الإجابة النموذجية: نظرًا لأن قطر العجلة يزيد، فستزيد السرعة الخطية أيضًا.

73. رنا؛ الإجابة النموذجية: صيغة طول القوس المتقاطع هي $s = r\theta$. ومن ثم، فإن محيط القطاع يساوي مجموع طول القوس المتقاطع وضعفي نصف القطر، أو $P = r\theta + 2r$. نظرًا لأن $P = 10r$، وباستخدام الإحلال، $10r = r\theta + 2r$. وعند التحويل لأبسط صورة، تصبح $\theta = 8$ راديان.

التدريس المتمايز BL

التوسّع إذا كانت الأرض تدور حول محورها مرة كل 24 ساعة، فما المدة التي تستغرقها الأرض للدوران بزاوية °300؟ وبزاوية $\frac{2\pi}{3}$ راديان؟

20 ساعة، 8 ساعات