1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-5 تحليل الرسوم البيانية للدوال المثلثية.

الدرس 3-5 التمثيل البياني لدوال الظل والمقلوب المثلثية.
تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيًا.

بعد الدرس 3-5 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

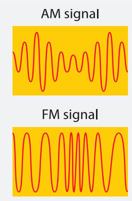
اسأل:

- عند أي نوع من موجات الراديو تتغير سعة الموجة الحاملة؟ **AM**
- عند أي نوع من موجات الراديو يثبت تردد الموجة الحاملة؟ **AM**

(يُتبع في الصفحة التالية)

الدرس 3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• تم تحليل التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.	• 1 التمثيل البياني لدالة الـ tan ومقلوب الدوال المثلثية. 2 تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيًا.	• هناك نوعان من موجات الراديو. الأولى تُعرف بالموجات معدلة السعة (AM)، والثانية تُعرف بالموجات معدلة التردد (FM). عندما يرسل الصوت باستخدام موجة راديو معدلة السعة (AM). يطلق على سعة الموجة الجيبية موجة *حاملة*. وتتغير لإخراج الصوت. أما الموجة معدلة التردد (FM). فينتج عنها تغير تردد الموجة الحاملة. ستعرف أكثر عن التمثيلات البيانية لتلك الموجات، التي تُعرف باسم *موجات التضاؤل* في هذا الدرس.



المفردات الجديدة

دالة مثلثية متضائلة (damped trigonometric function)

عامل التضاؤل (damping factor)

تذبذب متضائل (damped oscillation)

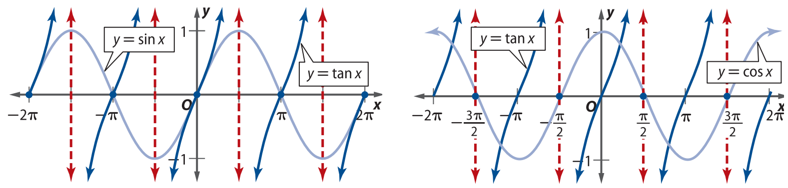
موجة متضائلة (damped wave)

الحركة التوافقية المتضائلة (damped harmonic motion)

1 دالة الـ tan ودوال المقلوب المثلثية

في الدرس 3-4، مثلتَ دوال الـ sine و cosine بيانيًّا على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام الأساليب نفسها في التمثيل البياني لدالة الـ tangent ودوال المقلوب المثلثية، وهي دالة cotan و secant وcosecant.

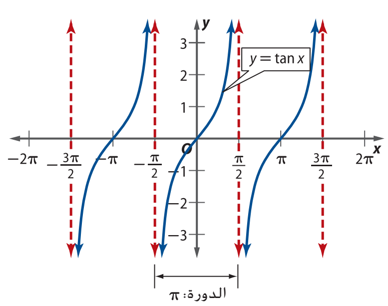
بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. فان دالة الـ tan تكون غير معرفة عندما تكون $\cos x = 0$. لذلك، فإن دالة tan الزاوية لها خط مقارب عمودي كلما كانت $\cos x = 0$. وبالمثل، فإن دوال tan الزاوية و sin الزاوية لها نقاط صفر عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـ π لأن $\tan x = 0$ عندما تكون $\sin x = 0$.



وفيما يلي ملخص خصائص دوال الـ sine ودوال الـ cosine.

المفهوم الأساسي خصائص دالة tan

المجال:	$x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
المدى:	$(-\infty, \infty)$
التقاطعات مع المحور الأفقي x:	$n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التقاطع مع المحور الرأسي y:	0
الاتصال:	انفصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
خطوط المقارب:	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التناظر	الأصل (دالة فردية)
قيم قصوى:	لا يوجد
السلوك الطرفي:	$\lim_{x \to -\infty} \tan x$ و $\lim_{x \to \infty} \tan x$ غير موجود. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



- بالنظر إلى الرسم البياني لإشارة الراديو من النوع AM. كيف يمكنك تحديد الطول الموجي للموجة الحاملة؟ بقياس المسافة بين القمم المتعاقبة

1 دوال الـ Cosine للزاوية والمقلوب

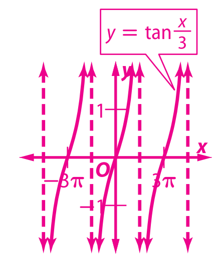
الأمثلة 1–4 توضح كيفية تمثيل دوال الـ Tan و الـ Cot و الـ Sec و الـ Csc.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ثم مثّل بيانيًا الآتي $y = \tan \frac{x}{3}$.



التركيز على محتوى الرياضيات

السعة مثل العديد من الدوال الدورية، تمتلك الرسوم البيانية لدوال جيب الزاوية وجيب التمام سعة. لا تمتلك الرسوم البيانية الخاصة بالدوال المثلثية الأخرى سعة لأن الحد الذي تقترب عنده من قيم x– معينة هو $\pm\infty$.

نصيحة دراسية

السعة لا تنطبق سعة الحد على دوال الـ tan ودوال cotan؛ لأن أقصى ارتفاعات لهذه الدوال ليست لها نهاية.

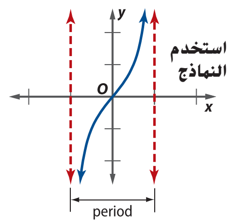
ويكون الشكل العام لدالة الـ tan، التي تشبه دوال الـ sin، هو $y = a \tan(bx + c) + d$، حيث a ينتج عنه امتداد أو ضغط رأسي b يؤثر في دورة الدالة، وc ينتج إزاحة طور، وd ينتج عنه إزاحة رأسية؛ ولا تكون قيمة a أو b تساوي 0.

المفهوم الأساسي دورة دالة الـ tan

الكلمات دورة دالة tan الزاوية هي المسافة بين أي مقاربين عمودين متتاليين.

الرموز لإيجاد قيمة $y = a\tan(bx + c)$، حيث $b \neq 0$، الدورة $= \frac{\pi}{|b|}$.

استخدم النماذج



المقاربان الرأسيان المتتاليان لإيجاد قيمة $y = \tan x$ هما $x = -\frac{\pi}{2}$ و$x = \frac{\pi}{2}$. يمكنك إيجاد مقاربين عموديين متتاليين لدالة tan الزاوية للشكل $y = a\tan(bx + c) + d$ عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و$bx + c = \frac{\pi}{2}$.

يمكنك تمثيل دالة الـ tan بيانيًا عن طريق تخطيط خطوط مقارب رأسية، على التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط بين خطوط مقارب والتقاطع مع المحور الأفقي x.

المثال 1 تغيير الأبعاد الأفقية بمقياس التمثيل البياني لدالة الـ tan

حدد الخطوط المقاربة العموية، ثم مَثل بيانيًا $y = \tan 2x$.

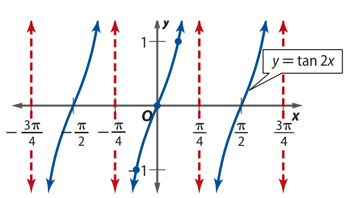
التمثيل البياني لـ $y = \tan 2x$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ مضغوطًا أفقيًا. وتكون الدورة $\frac{\pi}{|2|}$ أو $\frac{\pi}{2}$.
أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

	معادلات مقارب tan	
$bx + c = \frac{\pi}{2}$		$bx + c = -\frac{\pi}{2}$
$2x + 0 = \frac{\pi}{2}$	$b = 2, c = 0$	$2x + 0 = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{4}$	بسّط	$x = -\frac{\pi}{4}$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين الخطين المقاربين الرأسيين عند $x = -\frac{\pi}{4}$ و$x = \frac{\pi}{4}$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{4}$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة.
ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار الفترة $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$
ودائرة عن يمين الفترة $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.



تمرين موجه

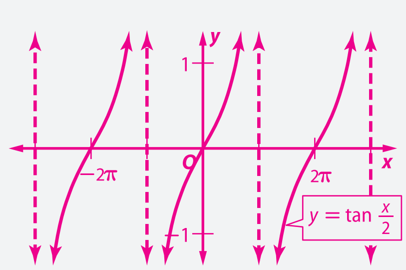
حَدد الخطوط المُقاربة الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة. 1A–B. انظر الهامش.

1B. $y = \tan\frac{x}{2}$

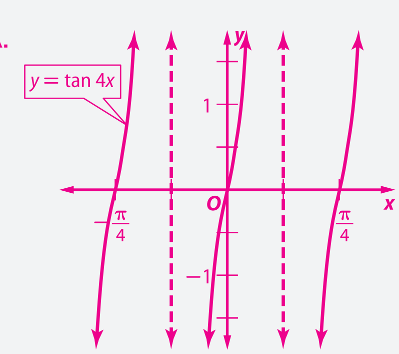
1A. $y = \tan 4x$

إجابات إضافية (تمرين موجه)

1B.



1A.

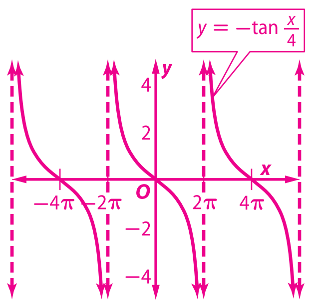


UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 188 12/15/2016 11:40:56 PM

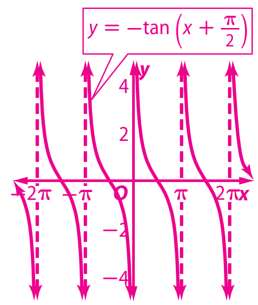
مثال إضافي

2 حدد الخطوط المقاربة الرأسية. ومثّل كل دالة بيانيًا.

a. $y = -\tan \frac{x}{4}$



b. $y = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



إرشاد للمعلمين الجدد

فترات الدوال قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تذكر فترة كل دالة مثلثية. ذكّر الطلاب أن الدورة هي المسافة على طول المحور الأفقي للرسم البياني لإكمال دورة واحدة. يكون لدالتي الـ Tan و الـ Cot الزاوية الدورة π، بينما يكون للدوال المثلثية الأخرى دورات من 2π.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر طالبًا لإنشاء جدول من النقاط الرئيسة والخصائص من الرسم البياني، بما فيها الخطوط المقاربة الرأسية والتقاطعات مع المحور x والدورة والنقاط الوسيطة.

المثال 2 التمثيل البياني لانعكاسات دالة الـ tan وانسحاباتها

حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = -\tan \frac{x}{2}$

التمثيل البياني لـ $y = -\tan \frac{x}{2}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ ممتدة أفقيًّا، ثم منعكسة على المحور الأفقي x.
الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ أو 2π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

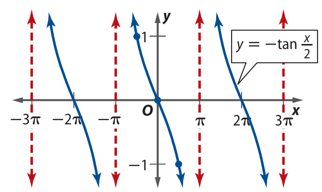
$\frac{x}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ $b = \frac{1}{2}, c = 0$ $\frac{x}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$x = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أو $-\pi$ بسّط $x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أو π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين الخطين المقاربين عند $x = -\pi$ و $x = \pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, -1-\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = -\tan \frac{x}{2}$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرّر هذا الأمر لرسم دائرة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



b. $y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

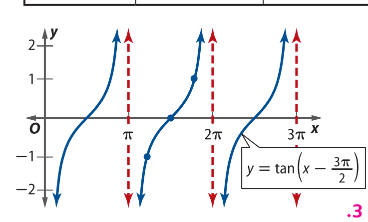
التمثيل البياني لـ $y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني $y = \tan x$ بإزاحة مقدارها $\frac{3\pi}{2}$ وحدات إلى اليمين.
الدورة هي $\frac{\pi}{|1|}$ أو π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

$x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $b = 1, c = -\frac{3\pi}{2}$ $x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ أو π بسّط $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ أو 2π

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = \pi$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$	$x = 2\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجه 2A–B. انظر ملحق إجابات الفصل 3.

2A. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

2B. $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

نصيحة دراسية

طريقة بديلة عند تمثيل الدالة فقط بيانيًّا بالإزاحة الأفقية c، يمكنك إيجاد النقاط الرئيسية عن طريق إضافة c لكل من إحداثيات X للنقاط الرئيسية للدالة الأم.

التدريس المتمايز OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب أن يوضحوا لزملائهم عملية الخطوة بخطوة المستخدمة لتمثيل دالة ظل الزاية من اختيار أحد الزملاء بيانيًا.

تكون دالة cotan هي مقلوب دالة الـــ tan، ويطلق عليها $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
وكما هو الحال في دالة الـــ tan، تكون أيضًا صيغة دورة دالة cotan $y = a \cot (bx + c) + d$ ويمكن إيجادها عن طريق حساب $\frac{\pi}{|b|}$. كما يمكن إيجاد خطين مقاربين عمودين متتاليين عن طريق حل المعادلات $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$. وفيما يلي ملخص خصائص دالة cotan.

المفهوم الأساسي خصائص دالة الـــ tan

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

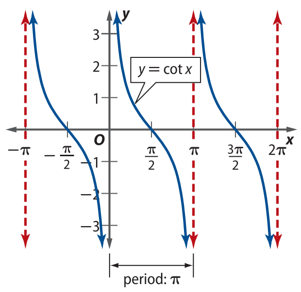
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \cot x$ و $\lim_{x \to \infty} \cot x$ غير موجودة.
تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



يمكنك تمثيل دالة cotan بيانيًا بالأساليب التي استخدمتها في تمثيل دالة الـــtan.

المثال 3 تمثيل دالة الـــcotan بيانيًّا

حدد المقارب العمودي، ثم مثل بيانيًّا الآتي $y = \cot \frac{x}{3}$.

التمثيل البياني لـــ $y = \cot \frac{x}{3}$ هو التمثيل البياني لـــ $y = \cot x$ متمددًا أفقيًّا. الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}$ أو 3π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين عن طريق حل $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$.

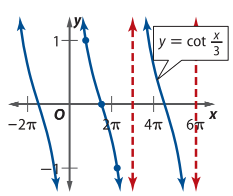
$\frac{x}{3} + 0 = 0$ $b = \frac{1}{3}, c = 0$ $\frac{x}{3} + 0 = \pi$

$x = 3(0)$ أو 0 بسّط $x = 3(\pi)$ أو 3π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به التقاطع مع المحور الأفقي x، الذي يقع بين الخطين المقاربين عند $x = 0$ و $x = 3\pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \cot x$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$	$x = \pi$
$y = \cot \frac{x}{3}$	$x = 0$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{9\pi}{4}, -1\right)$	$x = 3\pi$

ثم اتبع الإرشادات التي استخدمتها في رسم دالة الـــ tan. مع رسم منحنى من خلال النقاط الرئيسية المحددة التي تجدها. ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجه

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًّا كل دالة. **3A–B. انظر الهامش.**

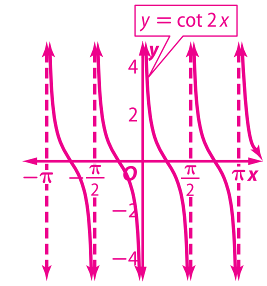
3A. $y = -\cot 3x$ 3B. $y = 3 \cot \frac{x}{2}$

نصيحة تقنية

التمثيل البياني لدالة cotan
عند استخدام الحاسبة البيانية لتمثيل دالة cotan بيانيًّا، أدخل مقلوب الـــtan، $y = \frac{1}{\tan x}$. الحاسبات البيانية قد تنتج خطوطًا متصلة عند حدوث الخطوط المقاربة. وسيؤدي تعيين النمط على DOT إلى إخفاء الخط.

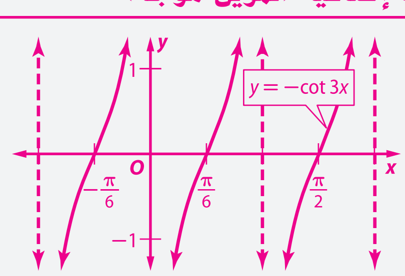
مثال إضافي

3 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ثم مثّل بيانيًّا $y = \cot 2x$.

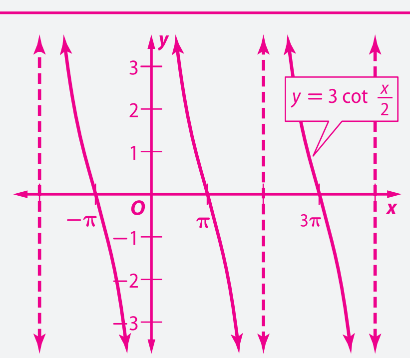


إجابات إضافية (تمرين موجه)

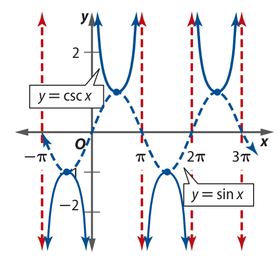
3A.

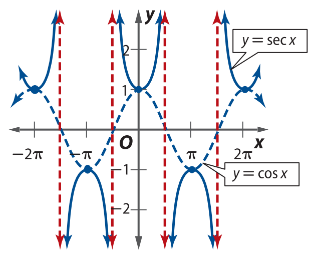


3B.



يطلق على مقلوب $\sin x$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ويطلق على مقلوب $\cos x$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. كما هو موضح.





وتحتوي دالة csc على خطوط مقاربة عندما تكون $\sin x = 0$. عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـــ π. كذلك، تحتوي دالة sec على خطوط مقاربة عندما تقع $\cos x = 0$ عند مضاعفات الأعداد الفردية لـــ $\frac{\pi}{2}$. لاحظ أيضًا أن التمثيل البياني لـــ $y = \csc x$ له حد أدنى نسبي لكل نقطة قصوى في منحنى sin، وحد أقصى نسبي لكل نقطة دنيا على منحنى sin. وينطبق الشيء نفسه على التمثيلات البيانية لـــ $y = \sec x$ و $y = \cos x$.

وفيما يلي ملخص خصائص دوال sec ودوال csc.

المفهوم الأساسي خصائص دوال cosecant و دوال secant

دالة cosecant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

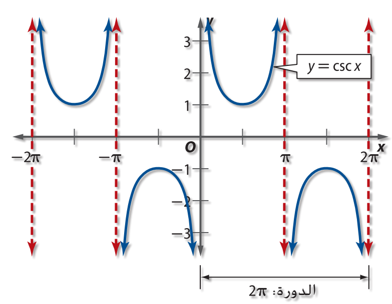
التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: الأصل (دالة فردية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \csc x$ و $\lim_{x \to \infty} \csc x$ غير موجودتين.
تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



دالة secant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

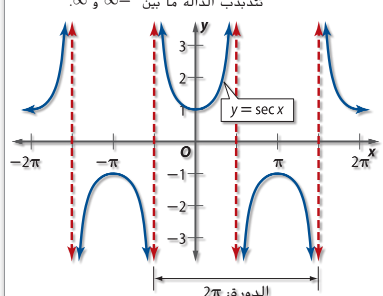
التقاطع مع المحور الرأسي y: 1

الاتصال: انقطاع الاتصال عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: محور رأسي y (الدالة الزوجية)

السلوك: $\lim_{x \to -\infty} \sec x$ و $\lim_{x \to \infty} \sec x$ غير موجودتين.
تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



نصيحة تقنية

التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني لدوال csc ودوال sec على الحاسبة البيانية التمثيل البياني لدالة tan التمام. أدخل مقلوب دوال الـــ sin ودوال الــcosine.

ومثل دوال الـــ sin، يمكن إيجاد دورة دالة الـــ sec للشكل $y = a\sec(bx + c) + d$ أو دالة csc للشكل $y = a\csc(bx + c) + d$ عن طريق حساب $\frac{2\pi}{|b|}$. يمكن إيجاد المقاربين العموديين لدالة sec عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$ وإيجاد مقاربين رأسيين لدالة csc عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$.

191

لتمثيل دالة cosecant أو دالة secant بيانيًا، ضع خطوط المقاربة للدالة، ثم أوجد الحد الأدنى النسبي المطابق والنقاط الدنيا.

المثال 4 تمثيل دوال الـــ cosecant و الـــ secant بيانيًا

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

التمثيل البياني لـــ $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني لـــ $y = \csc x$ بإزاحة الوحدات بمقدار $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار.
وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π. ويوجد المقاربان الرأسيان عندما يكون $bx + c = -\pi$ و$bx + c = \pi$. لذا، فإن المقاربين هما $x + \frac{\pi}{2} = -\pi$ أو $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x + \frac{\pi}{2} = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{2}$.

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به الحد الأدنى النسبي والحد الأقصى، اللذان يقعان بين الخطين المقاربين عند $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

الدالة	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط مقارب رأسي
$y = \csc x$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.1.

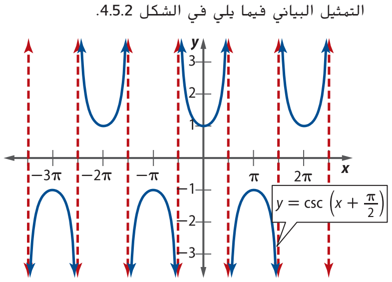
b. $y = \sec\frac{x}{4}$

التمثيل البياني لـــ $y = \sec\frac{x}{4}$ هو التمثيل البياني لـــ $y = \sec x$ ممتدًّا أفقيًّا. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}$ أو 8π. ويوجد المتقاربان الرأسيان عندما $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$. لذا، فإن المقاربين هما $\frac{x}{4} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ أو $x = -2\pi$ و $\frac{x}{4} + 0 = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = 6\pi$.

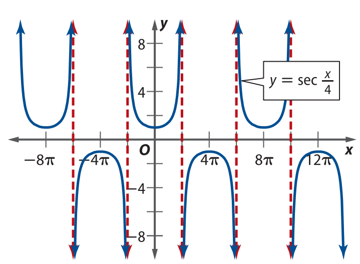
أنشئ جدولاً، وضع فيه النقاط الرئيسية الموجودة بين المقاربين عند $x = -2\pi$ و$x = 6\pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط مقارب رأسي
$y = \sec x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$	$(\pi, -1)$	$x = \frac{3\pi}{2}$
y=secx_4	$x = -2\pi$	$(0, 1)$	$x = 2\pi$	$(4\pi, -1)$	$x = 6\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.2.



الشكل 3.5.1



الشكل 3.5.2

تمرين موجه 4A–B. انظر الهامش.

4A. $y = \csc 2x$

4B. y - sec (x+π)

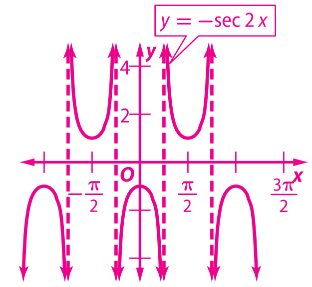
نصيحة دراسية

العثور علي خطوط المقاربة والنقاط الرئيسية يمكنك الاستعانة بالطبيعة الدورية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية في إيجاد خطوط المقاربة والنقاط الرئيسية. في المثال 4a، لاحظ أن المقارب العمودي $x = -\frac{\pi}{2}$ على مسافة واحدة من الخطوط المقاربة المحسوبة، $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

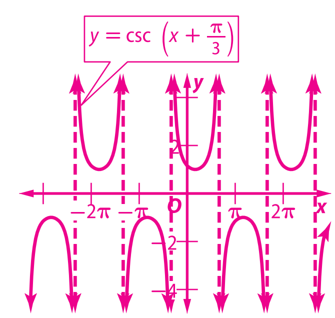
مثال إضافي

4 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًّا.

a. $y = -\sec 2x$

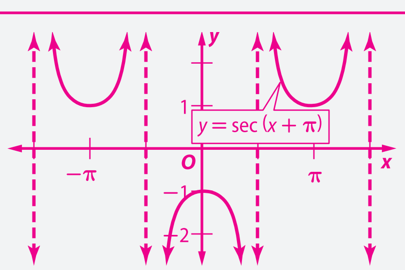


b. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

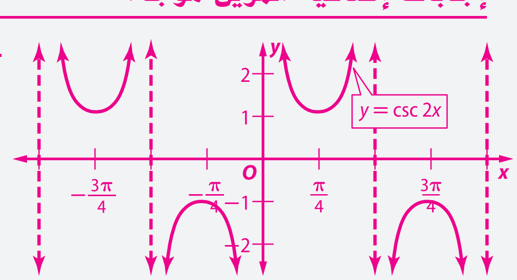


إجابات إضافية (تمرين موجه)

4B.



4A.



192 | الدرس 3-5 | التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 192 12/15/2016 11:41:05 PM

2 الرسوم البيانية للدوال المثلثية المتضائلة

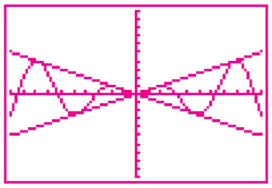
المثال 5 وضح كيفية التعرف على عامل التضاؤل بدالة مثلثية متضائلة وكيفية تحليل الرسم البياني لها. **المثال 6** يوضح كيفية تمثيل الحركة التوافقية المتضائلة لوتر "جيتار" مهتز.

مثال إضافي

5 حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم حاسبة التمثيل البياني في رسم التمثيلات البيانية لــ $f(x)$. $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني.

a. $y = \frac{x}{2} \sin x$

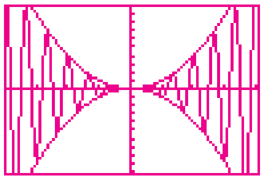
$f(x) = \frac{x}{2}$؛ تقل سعة الدالة عند اقتراب x من 0 من كلا الاتجاهين.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

b. $y = x^2 \cos 3x$

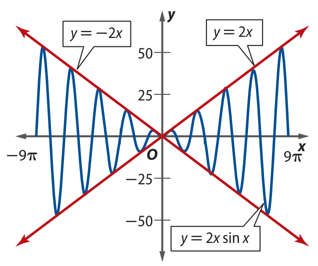
$f(x)=x^2$؛ تقل سعة الدالة عند اقتراب x من 0 من كلا الاتجاهين.



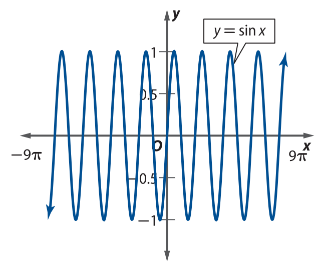
[−4π, 4π] scl: π by [−100, 100] scl: 10

2 الدوال المثلثية المتضائلة

عندما تكون دالة الــ sin مضروبة بدالة أخرى $f(x)$، يكون التمثيل البياني للناتج مترددًا بين التمثيلات البيانية لــ $y = f(x)$ و$y = -f(x)$. عندما يقلل هذا الناتج سعة موجة دالة الــ sin الأصلية، يطلق عليه **تذبذب متضائل** ، وينتج عن الدالتين ما يُعرَف باسم **الدالة المثلثية المتضائلة**. يمكن رؤية هذا التغير في الذبذبات في الأشكال 3.5.3 و3.5.4 للتمثيلات البياني للدالة $y = \sin x$ و $y = 2x \sin x$.



الشكل 3.5.4



الشكل 3.5.3

نصيحة دراسية
دوال التضاؤل الدوال المثلثية التي تتضاعف بالثوابت لا تتعرض للتضاؤل. ويؤثر الثابت في سعة الدالة.

وتأخذ الدالة المثلثية المتضائلة الشكل $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$. حيث $f(x)$ هو **عامل التضاؤل**.

ويحدث التذبذب المتضائل عندما يقترب x من $\pm\infty$ أو عندما يقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

الربط بتاريخ الرياضيات
كاثلين سينج مورافيتس
(1923–)
درست مورافيتس، كندية الأصل، تشتت الصوت والموجات المغناطيسية. ثم أثبت بعد ذلك النتائج المتعلقة بمعادلة الموجة غير الخطية.

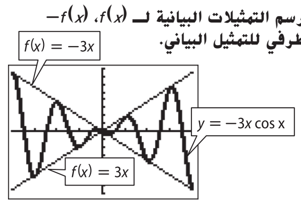
المثال 5 رسم الدوال المثلثية المتضائلة

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لــ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. $y = -3x \cos x$

دالة $y = -3x \cos x$ هي ناتج الدوال $y = -3x$ و $y = \cos x$. إذًا $f(x) = -3x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

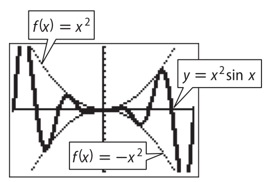


[−4π, 4π] scl: π by [−40, 40] scl: 5

b. $y = x^2 \sin x$

الدالة $y = x^2 \sin x$ هي ناتج ضرب الدوال $y = x^2$ و $y = \sin x$. لذا، فإن عامل التضاؤل هو $f(x) = x^2$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

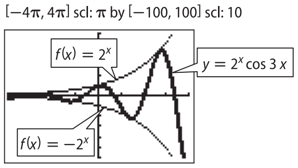


[−4π, 4π] scl: π by [−100, 100] scl: 10

c. $y = 2^x \cos 3x$

الدالة $y = 2^x \cos 3x$ هي ناتج ضرب الدالتين $y = \cos 3x$ و $y = 2^x$ لذا فإن $f(x) = 2^x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من $-\infty$.



[−π, π] scl: $\frac{\pi}{4}$ by [−6, 6] scl: 1

تمرين موجه 5A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

5A. $y = 5x \sin x$

5B. $y = \frac{1}{x} \cos x$

5C. $y = 3^x \sin x$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 193 12/15/2016 11:41:07 PM

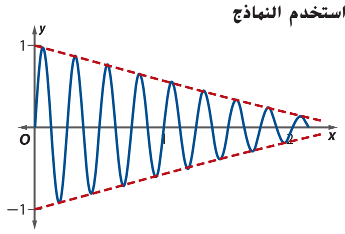
عندما تقل سعة حركة جسم مع الزمن نتيجة الاحتكاك، يطلق على تلك الحركة الحركة التوافقية التضاؤلية.

المفهوم الأساسي الحركة التوافقية التضاؤلية

الكلمات يكون الجسم في حالة **حركة توافقية تضاؤلية** عندما تحدد سعته بالدالة $a(t) = ke^{-ct}$.

الرموز بالنسبة لـ $y = ke^{-ct} \sin \omega t$ و$y = ke^{-ct} \cos \omega t$، حيث $c > 0$، k هو الإزاحة، c ثابت التضاؤل، t هو الزمن، وω هي الفترة.

استخدم النماذج



ويكون أكبر ثابت تضاؤل c أسرع كلما اقتربت السعة من الصفر. ويتوقف مقدار c على حجم الجسم والمواد التي يتألف منها.

مثال 6 من الحياة اليومية الحركة التوافقية المتضائلة

الموسيقى: أدى سحب وتر جيتار مسافة 0.8 سنتيمتر أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 2.1، وتردد الملاحظة الناتجة 175 دورة في الثانية

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

ويحدث الحد الأقصى لإزاحة الوتر عندما يكون $t = 0$. لذا فإن الدالة $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ يمكن أن تمثل حركة الوتر؛ لأن التمثيل البياني للدالة $y = \cos t$ يتقاطع مع المحور الرأسي y بدلاً من 0.

وتحدث الإزاحة القصوى عند سحب الوتر لمسافة 0.8 سنتيمتر. وتكون قيمة الإزاحة الكلية هي ناتج طرح الإزاحة القصوى من M الإزاحة الدنيا m، لذا فإن

$k = M - m = 0.8 - 0$ أو 0.8 cm.

ويمكنك استعمال قيمة التردد لإيجاد قيمة ω.

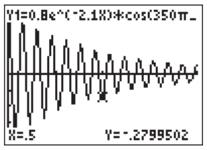
التردد $= \frac{|\omega|}{2\pi}$ $\qquad \frac{|\omega|}{2\pi} = 175$

وبضرب الطرفين في 2π. $\qquad |\omega| = 350\pi$

اكتب دالة مستعينًا بقيم ω، k، وc.

وتكون $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ هي إحدى النماذج التي تمثل حركة الوتر.

b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.28 \le y \le 0.28$.



[0, 1] scl: 0.5 by [−0.75, 0.75] scl: 0.25

باستخدام الحاسبة البيانية، حدد قيمة t عندما يكون التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ is يتذبذب بين $y = -0.28$ و$y = 0.28$.

ومن التمثيل البياني، ترى أن التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ يستغرق تقريبًا 0.5 ثانية ليتذبذب خلال الفترة $-0.28 \le y \le 0.28$.

تمرين موجه

6. **الموسيقى** بفرض وجود وتر جيتار آخر، تم سحبه لمسافة 0.5 سنتيمتر أعلى موضع سكونه بتردد 98 دورة في الثانية، وثابت تضاؤل 1.7.

A. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. **الإجابة النموذجية** $y = 0.5e^{-1.7t} \cos 196\pi t$

B. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.15 \le y \le 0.15$.

قرابة 0.64 ثانية

الربط بالحياة اليومية

يمتد كل وتر في الجيتار إلى طول معين ونسبة شد معينة. وتلك العوامل، جنبًا إلى جنب مع وزن ونوع الخيط، تؤدي إلى حدوث اهتزاز مع تردد مميز أو نغمة تسمى بترددها الأساسي، وهي التي تُنتِج النوتة الموسيقية التي نسمعها.

المصدر: *كيف تجري الأمور*

مثال إضافي

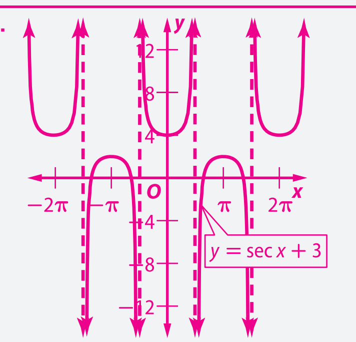
6. **الموسيقى** أدى سحب وتر جيتار على مسافة 0.95 سنتيمتر أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 1.3، وتردد الملاحظة الناتجة 200 دورة في الثانية.

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.
الإجابة النموذجية: $y = 0.95e^{-1.3t} \cos 400\pi t$

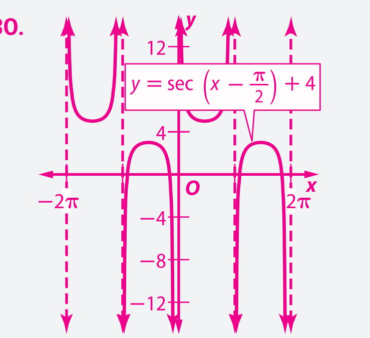
b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.38 \le y \le 0.38$. قرابة 0.7 ثانية

إجابات إضافية

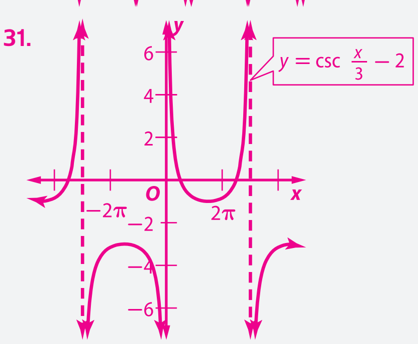
29.



30.



31.



التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون السمعيون/الموسيقيون اطلب من الطلاب توضيح الاهتزازات التوافقية المتضائلة باستخدام أوتار مسحوبة على آلات مختلفة مثل باس أو تشيلو أو الجيتار أو البيانو أو صوت الرنين من الأجراس أو الصناج. باستخدام ساعة توقيت، قِس المدة الزمنية لكلّ صوت من شدته الأعلى الأولية حتى درجة ألا يعود بالإمكان سماعه. باستخدام معادلة الحركة التوافقية المتضائلة، يجب على الطلاب كتابة المعادلات التي تمثل الأصوات.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-28 للتحقق من عملية الفهم.

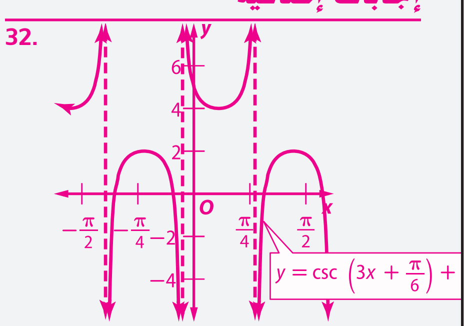
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

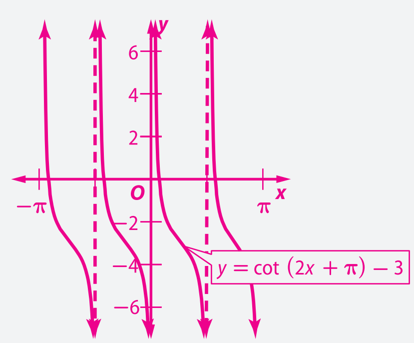
خطأ شائع في التمارين 1-8، ذكّر الطلاب بأن دورة دوال Tan ___ الـ و Cot ___ الـ هي الزاوية $\frac{\pi}{|b|}$.

إجابات إضافية

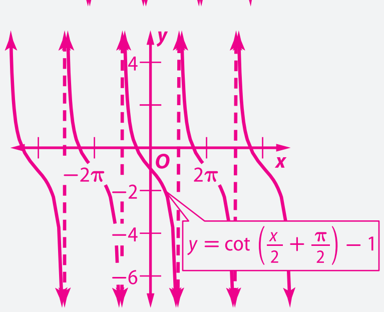
32.



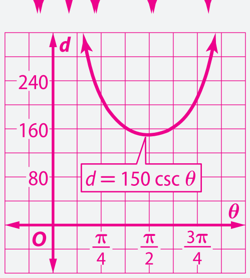
33.



34.



35b.



تمارين

1–16. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًا كل دالة. (الأمثلة 1-4)

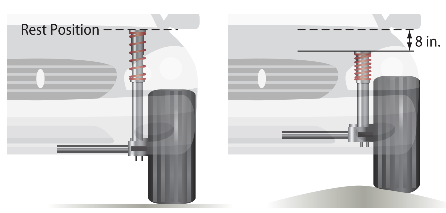
1. $y = 2\tan x$
2. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. $y = -3\tan\frac{x}{3}$
5. $y = -\frac{1}{4}\cot x$
6. $y = -\tan 3x$
7. $y = -2\tan(6x - \pi)$
8. $y = \cot\frac{x}{2}$
9. $y = \frac{1}{5}\csc 2x$
10. $y = \csc\left(4x + \frac{7\pi}{6}\right)$
11. $y = \sec(x + \pi)$
12. $y = -2\csc 3x$
13. $y = 4\sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
14. $y = \sec\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$
15. $y = \frac{3}{2}\csc\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
16. $y = -\sec\frac{x}{8}$

17–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$، وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. (المثال 5)

17. $y = \frac{3}{5}x\sin x$
18. $y = 4x\cos x$
19. $y = 2x^2\cos x$
20. $y = \frac{x^3}{2}\sin x$
21. $y = \frac{1}{3}x\sin 2x$
22. $y = (x-2)^2\sin x$
23. $y = e^{0.5x}\cos x$
24. $y = 3^x\sin x$
25. $y = |x|\cos 3x$
26. $y = \ln x\cos x$

27. **الميكانيكا:** عند اصطدام السيارة المبينة أدناه بمضخة، يتم ضغط ممتص الصدمات حتى 8 بوصات، ثم تحريره ليبدأ في حركة توافقية تضاؤلية بتردد 2.5 دورة في الثانية. ويكون ثابت تضاؤل ممتص الصدمات هو 3. (المثال 6)



a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. افرض أن t = 0 لحظة تحرير ممتص الصدمات. **الإجابة النموذجية $y = 8e^{-3t}\cos 5\pi t$**

b. حدد الزمن t المستغرق في زيادة الاهتزاز ليصل إلى 4 بوصات. **قرابة 0.06 ثانية**

28. **الغوص:** ارتفعت حافة منصة الغطس 20.3 سنتيمتر أعلى موضع سكونها بعد أن ترك الغواص المنصة. وبعد مرور ثانيتين، تحركت المنصة إلى الأعلى والأسفل 12 مرة. ويكون ثابت تضاؤل المنصة هو 0.901 (المثال 6)

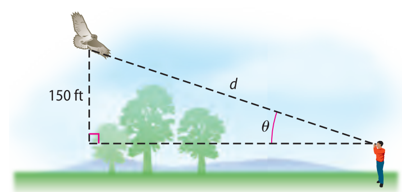
a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة منصة الغطس y إذا كانت دالة الزمن t. **الإجابة النموذجية $y = 20.3e^{-0.901t}\cos 12\pi t$**

b. حدد الزمن t الذي تستغرقه المنصة لتتضاءل إلى $-0.5 \le y \le 0.5$. **قرابة 4.09 ثانية**

B حدّد الخطوط المُقاربة العمودية، ومَثل بيانيًا كل دالة. **29–34. انظر الهامش.**

29. $y = \sec x + 3$
30. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \csc\frac{x}{3} - 2$
32. $y = \csc\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
33. $y = \cot(2x + \pi) - 3$
34. $y = \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

35. **التصوير:** التقط سعيد صورة لصقر كان يحلق على مسافة 150 قدمًا فوقه. وفي النهاية، سيحلق الصقر مباشرة فوق سعيد. افرض أن d المسافة بين سعيد والصقر و θ تكون زاوية ارتفاع الصقر عن الكاميرا الخاصة بسعيد.



a. اكتب d كدالة لـ θ. **$d = 150\csc\theta$ أو $d = \frac{150}{\sin\theta}$**

b. مثل الدالة بيانيًا على الفترة $0 < \theta < \pi$. **انظر الهامش.**

c. بالتقريب، ما المسافة بين الصقر وسعيد عندما تكون زاوية الارتفاع 45°؟ **نحو 212.1 ft**

36b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

36. **المسافة:** يتسلق عنكبوت ببطء الجدار. وتقف هيام على بعد 6 أقدام من الجدار تشاهد العنكبوت. افرض أن d المسافة بين هيام والعنكبوت و θ تكون زاوية ارتفاع العنكبوت عن هيام.

a. اكتب d كدالة لـ θ. **$d = 6\sec\theta$ أو $d = \frac{6}{\cos\theta}$**

b. مثل بيانيًا الدالة في الفترة $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c. بالتقريب، ما المسافة بين العنكبوت وهيام عندما تكون زاوية الارتفاع 32°؟ **نحو 7.1 ft**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-28, 57-60, 62-78	1-27 فردي، 75-78	2-28 زوجي، 57-60, 62-74
OL ضمن المستوى	1-35 فردي، 36, 37-55 فردي، 57-60, 62-78	1-28, 75-78	29-60, 62-74
BL أعلى من المستوى	29-78		

باستخدام الحاسبة البيانية: أوجد قيمة θ على فترة $-\pi < \theta < \pi$ التي تجعل كل معادلة صحيحة. **37–42. انظر الهامش.**

37. $\cot\theta = 2\sec\theta$

38. $\sin\theta = \cot\theta$

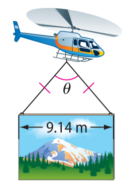
39. $4\cos\theta = \csc\theta$

40. $\tan\frac{\theta}{2} = \sin\theta$

41. $\csc\theta = \sec\theta$

42. $\tan\theta = \sec\frac{\theta}{2}$

C 43. **الشد:** قدمت طائرة هليكوبتر لوحة كبيرة للمدينة. سيتم عرضها في وسط المدينة. وكانت هذه اللوحة متصلة بالطائرة الهليكوبتر عن طريق حبلين كما هو موضح أدناه. وكان مقدار الشد T لكل حبل يساوي نصف قوة الهبوط $\sec\frac{\theta}{2}$.



a. قوة الهبوط بالنيوتن تساوي كتلة اللوحة بالجاذبية، وهي 9,8 نيوتن لكل كيلو جرام. إذا كانت كتلة اللوحة 544 كيلو جرام. فأوجد قيمة قوة الهبوط. **5331.2 N**

b. اكتب معادلة تمثل الشد T في كل حبل. **$T = 2665.6\sec\frac{\theta}{2}$**

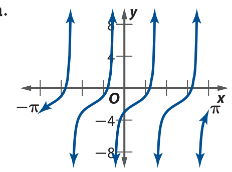
c. مثل بيانيًا هذه المعادلة التي توجد في b في الفترة $[0°, 180°]$. **c-d. انظر الحاشية.**

d. وبفرض أن طول هذه اللوحة يساوي 9.14 متر والزاوية المثالية للشد هي θ الزاوية اليمنى. حدد عدد الأحبال لنقل هذه اللوحة. بالإضافة إلى الشد المناسب لكل حبل.

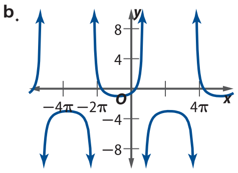
e. بفرض أن لديك 12.2 متر من الأحبال لاستخدامها في نقل هذه اللوحة. أوجد قيمة θ وقيمة الشد المناسبة لكل حبل. **$\theta \approx 97.0°$؛ قراءة 4023 N**

صِل كل دالة بتمثيلها البياني.

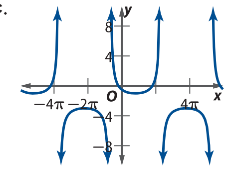
a.



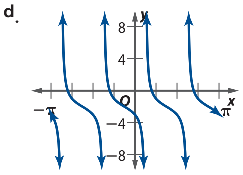
b.



c.



d.



44. $y = \csc\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **c**

45. $y = \sec\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **b**

46. $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **d**

47. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **a**

باستخدام حاسبة التمثيل البياني مثل بيانيًا كل زوج من الدوال في الشاشة نفسها، وخمّن هل هما مساويان لجميع الأعداد الحقيقية؟ ثم استخدم خصائص الدوال لإثبات كل تخمين.

48–51. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

48. $f(x) = \sec x \cos x;\ g(x) = 1$

49. $f(x) = \sec^2 x;\ g(x) = \tan^2 x + 1$

50. $f(x) = \cos x \csc x;\ g(x) = \cot x$

51. $f(x) = \dfrac{1}{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)};\ g(x) = \sin x$

اكتب معادلة للدالة والفترة ومرحلة التحول (ps) والتحول العمودي (vs) المعطاة. **52–56. انظر الهامش.**

52. الدالة: sec، الفترة: 3π; ps: 0; vs: 2

53. الدالة: tan، الفترة: $\frac{\pi}{2}$; ps: $\frac{\pi}{4}$; vs: −1

54. الدالة: csc، الفترة: $\frac{\pi}{4}$; ps: $-\pi$; vs: 0

55. الدالة: cot، الفترة: 3π; ps: $\frac{\pi}{2}$; vs: 4

56. الدالة: csc، الفترة: $\frac{\pi}{3}$; ps: $-\frac{\pi}{2}$; vs: −3

مسائل معارات التفكير العليا

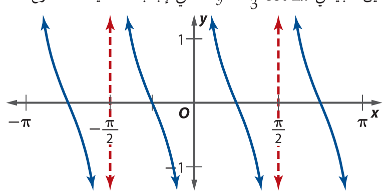
57. **الإثبات:** أثبت أن التقاطع مع المحور الراسي y في التمثيل البياني دالة الشكل $y = ke^{-ct}\cos\omega t$ هو k. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

التبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك. **58–59. انظر الهامش.**

58. إذا كان $b \neq 0$. اذا $y = a + b\sec x$ لها قيمة قصوى $\pm(a + b)$.

59. إذا كان $x = \theta$ خطًا مقاربًا لـ $y = \csc x$. إذا $x = \theta$ أيضًا بعد خطًا مقاربًا لـ $y = \cot x$. **60. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

60. **تحليل الخطأ:** درست هناء وهدى التمثيل البياني المعروض. واعتقدت هناء أن التمثيل البياني لـ $y = -\frac{1}{3}\tan 2x$. واعتقدت هدى أن التمثيل البياني $y = \frac{1}{3}\cot 2x$. فأي إجابة صحيحة؟ اشرح استنتاجك.



61. الإجابة النموذجية **$y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ y = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$**

61. **التحدي** اكتب دالة cosecant ودالة cotan لهما التمثيل البياني نفسه $y = \sec x$ و $y = \tan x$ على التوالي. تحقق من صحة إجابتك بالتمثيل البياني.

62. **الكتابة في الرياضيات** دالة مثلثية متضائلة تتردد بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. اشرح سبب تذبذب الدالة المثلثية المتضائلة بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. ولماذا تتوقف سعة الدالة على عامل التضاؤل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3**

إجابات إضافية

37. 0.427 و 2.715

38. −0.905 و 0.905

39. −2.880 و −1.833، و0.262، و1.309

40. −1.571، و 0، و1.571

41. −2.356 و 0.785

42. −2.050 و 0.830

196 | الدرس 3-5 | التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 196
12/15/2016 11:41:16 PM

مراجعة شاملة

حدد السعة والفترة والتكرار والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم فترتين للدالة. 63–65. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

63. $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 10$

64. $y = 2\cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - 6$

65. $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 1$

أوجد القيم الدقيقة للخمس دوال المثلثية المتبقية لـ θ.

66. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta > 0$ 66. $\cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}$

67. $\cos\theta = \frac{6\sqrt{37}}{37}, \sin\theta > 0$ 67. $\sin\theta = \frac{\sqrt{37}}{37}, \tan\theta = \frac{1}{6}, \csc\theta = \sqrt{37}, \sec\theta = \frac{\sqrt{37}}{6}, \cot\theta = 6$

68. $\tan\theta = \frac{24}{7}, \sin\theta > 0$ $\sin\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \csc\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}, \cot\theta = \frac{7}{24}$

69. **مجتمع إحصائي** بلغ عدد سكان المدينة منذ 10 سنين 45,600. ومنذ ذلك الوقت، ازدادت الإحصائيات بمعدل ثابت كل سنة. فإذا كانت الإحصائيات حاليًا 64,800، فأوجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة. قرابة 3.6%

70. **الطب:** عمر النصف للمادة المشعة هو الزمن الذي تستغرقه نصف ذرات المادة لتتفكك. واستخدم علماء الطب النووي نظير اليود I-131 بفترة عمر نصف 8 أيام للتحقق من وظيفة الغدة الدرقية للمريض. وبعد تناول عقار يحتوي على اليود و النظائر المجمعة في الغدة الدرقية للمريض وتثبيت كاميرا خاصة لرؤية وظيفتها. بفرض أن المريض تناول العقار الذي يحتوي على 9 مِكْرُوكُورِي من I-131. قرّب لأقرب ساعة المدة التي يستغرقها المكروكوري حتى يصل بمقدار 2.8 فقط في الغدة الدرقية للمريض؟ 324 ساعة

حلل كل معادلة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطولة.

71. $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x - 1$ $(x+1)(x+2)(x-1)$

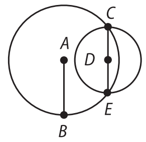
72. $x^3 + x^2 - 16x - 16;\ x + 4$ $(x-4)(x+1)(x+4)$

73. $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 1$ $(x-4)(x+2)(x+1)$

74. **التمرين:** تنصح الجامعة الأمريكية للطب الرياضي بممارسة البالغين الأصحاء التمرينات على مستوى الهدف من 60٪ إلى 90٪ من المعدلات القصوى لضربات قلوبهم. ويمكنك تقدير أقصى معدل لضربات قلبك عن طريق طرح عمرك من 220. اكتب عبارة بها أكثر من متباينة لتمثل عمر a ومعدل ضربات القلب المستهدفة r. $0.6(220 - a) \le r \le 0.9(220 - a)$

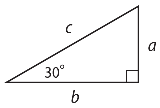
مراجعة مهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** في الشكل، A وD مركزي الدائرتين. ويتقاطعان في النقاط C وE. CE هو قطر الدائرة D. إذا كان $AB = CE = 10$، فماذا تكون AD؟ C



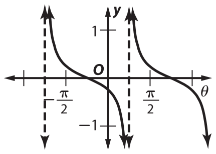
A 5 B $5\sqrt{2}$ C $5\sqrt{3}$ D $10\sqrt{2}$ E $10\sqrt{3}$

76. **مراجعة** بالنظر إلى الشكل التالي. إذا كان $c = 14$. فأوجد قيمة b. J



F $\frac{\sqrt{3}}{2}$ G $14\sqrt{3}$ H 7 J $7\sqrt{3}$

77. أي معادلة ممثلة بالتمثيل البياني؟ B



A $y = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

B $y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

C $y = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

D $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

78. **مراجعة** إذا كان $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ و $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، ثم $\theta = ?$ G

F $\frac{13\pi}{12}$ G $\frac{7\pi}{6}$ H $\frac{5\pi}{4}$ J $\frac{4\pi}{3}$

197

التدريس المتمايز BL

التوسّع يدرس علماء فيزياء الجسيمات خصائص الجسيمات دون الذرية من خلال تسريع الجزيئات في مسرّع بسرعات عالية للغاية. لنفترض أن عالمة فيزياء ترغب في وصف السلوك غير المعتاد لجسيم وهو يتحرك. وفي الوقت الذي كانت تحدده بشكل اعتباطي على أنه 0، كان الجسيم على مسافة $y = 1$ ملليمتر، ثم يغطي مسافة كبيرة ويختفي بينما يتحرك من $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. هل هناك دالة مثلثية يمكنها تمثيل هذا السلوك؟ إن كان الأمر كذلك، فمثّلها بيانيًا.

نعم؛ الإجابة النموذجية: $y = \sec t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$؛ راجع الرسومات البيانية للطلاب.

انتبه!

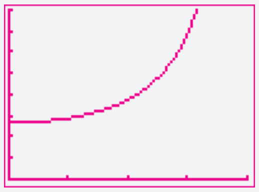
تحليل الخطأ في التمرين 60. ينبغي على الطلاب ملاحظة أنه ليس لأي دالة إزاحة أفقية. وبالتالي، فإن حقيقة أن التمثيل البياني لا يمر من خلال نقطة الأصل تعني أنه لا يمكن أن يكون دالة ظل الزاوية.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب قبل أن يغادر الطلاب، اعرض بطاقة مكتوبًا عليها واحدة من دوال الدرس. واطلب من الطلاب تعريف الدالة.

إجابات إضافية

43c.



[0, 180°] scl: 45° by [0, 8000] scl: 1000

43d. الحبل: ≈12.9 m؛ الشد: ≈3769.7 N

52. $y = \sec\frac{2x}{3} + 2$،
$y = \sec\left(-\frac{2x}{3}\right) + 2$

53. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$،
$y = \tan\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

54. $y = \csc(8x + 8\pi)$،
$y = \csc(-8x + 8\pi)$

55. $y = \cot\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 4$،
$y = \cot\left(-\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 4$

56. $y = \csc(6x + 3\pi) - 3$،
$y = \csc(-6x + 3\pi) - 3$

58. خطأ؛ الإجابة النموذجية: نظرًا لأن $y = \sec x$ لها قيمة قصوى ±1، و $y = a + b\sec x$ لها قيمة قصوى $a + b(1)$ و $a + b(-1)$ أو $a + b$ أو $a - b$.

59. صواب، الإجابة النموذجية: نظرًا لأن $y = \csc x$ أو $\frac{1}{\sin x}$، فإن الخطوط المقاربة ستحدث للقيم x عندما يكون $\sin x = 0$. نظرًا لأن $y = \cot x$ أو $\frac{\cos x}{\sin x}$، فإن الخطوط المقاربة ستحدث للقيم x عندما يكون $\sin x = 0$. وبالتالي، فإن $x = \theta$ هي خط مقارب لكل من $y = \csc x$ و $y = \cot x$.