3-6 الدوال المثلثية العكسية

:: السابق
- وجدت معكوسات العلاقات والدوال ومثّلتها بيانيًا.

:: الحالي
1. إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثّلها بيانيًا.
2. إيجاد تراكيب الدوال المثلثية.

:: لماذا؟
- يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية في تمثيل زاوية الدوران المتغيرة الأفقية اللازمة لكاميرا تلفزيونية لمتابعة حركة سيارة سباق.

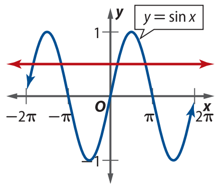
المفردات الجديدة

دالة قوس الجيب
arcsine function

دالة قوس جيب التمام
arccosine function

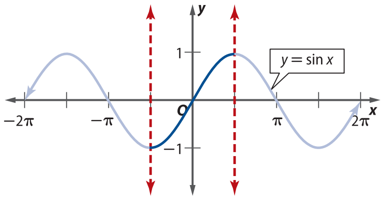
دالة قوس الظل
arctangent function

1 الدوال المثلثية العكسية من خلال الدرس 7-1. ستتعلم أن كل دالة لها دالة عكسية فقط إذا كانت *واحدًا إلى واحد*. بمعنى أن كل قيمة y في الدالة يمكن أن ترتبط بقيمة x واحدة فقط. وبما أن دالة الـ sin لا تحقق اختبار المستقيم الأفقي، فهي ليست واحدًا إلى واحد.

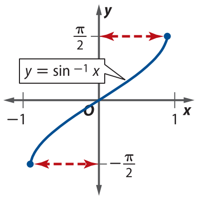


ولكن إذا قيدنا مجال دالة الـ sin في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن الدالة المقيدة تكون واحدًا إلى واحد. وتأخذ كل قيم المدى المحتملة [1 ,1-] للدالة غير المقيدة. في هذا المجال المقيد، $y = \sin x$ لها دالة عكسية تسمى *دالة* الـ sin *العكسية* $y = \sin^{-1} x$. ويكون التمثيل البياني للدالة $y = \sin^{-1} x$ هو معكوس تمثيل الدالة الـ sin المقيدة على الخط $y = x$.

دالة الجيب المقيدة



دالة الجيب العكسية



لاحظ أن مجال الدالة يكون $y = \sin^{-1} x$ هو [1 ,1-]، والمدى يكون $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ولأن الزوايا والأقواس الموجودة في دائرة الوحدة لها قياسات مكافئة بالراديان، فأحيانًا يشار إلى دالة الـ sin العكسية **بدالة قوس الجيب** $y = \arcsin x$.

في الدرس 1-3، استخدمتَ العلاقة العكسية بين دالة الـ sin وبين دوال $\sin^{-1}$ لإيجاد قياس الزاوية الحادة. ومن التمثيل البياني بالأعلى، يمكنك أن ترى بشكل عام،

$y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$ إذا وفقط إذا كان $\sin y = x$. عندما يكون $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. **إذا وفقط إذا كان** **تعني أنه شرط ضروري وكافٍ.**

هذا يعني أن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$ يمكن تفسيره على أنه *الزاوية (أو القوس)* بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ $\sin x$. مثلاً $\sin^{-1} 0.5$ هو الزاوية التي قيمة الـ sine لها يساوي 0.5.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-6 أوجد معكوسات العلاقات والدوال ومثّلها بيانيًا.

الدرس 3-6 أوجد قيمة الدوال المثلثية العكسية ومثّلها بيانيًا.

أوجد تراكيب الدوال المثلثية.

بعد الدرس 3-6 أوجد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

هل قرأ الطلاب قسم **لماذا؟** من الدرس.

اسأل:

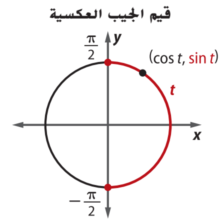
- ما المقصود بمعكوس الدالة؟

الإجابة النموذجية: f و g دالتان عكسيتان إذا كان $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$.

- هل يمكن أن يكون القاطع معكوس دالة الـ Cosine؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

لا. $\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$. إذا كانت الدالتان معكوستين، لكان سينطبق ذلك على جميع قيم x بأن يكون $\cos(\sec x) = \sec(\cos x) = x$. ولكن هذا لا ينطبق.

تذكَّر أن $\sin t$ هي الإحداثي y لتلك النقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى دالة الـ $\sin^{-1}$ مقيد بـ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن قياسات الزاوية المحتملة لدالة الـ $\sin^{-1}$ تقع في النصف الأيمن من دائرة الوحدة كما هو موضح.



ويمكنك الاستعانة بدائرة الوحدة في إيجاد القيمة الدقيقة لبعض التعبيرات التي تتضمن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$.

مثال 1 إيجاد قيم دوال الـ $\sin^{-1}$

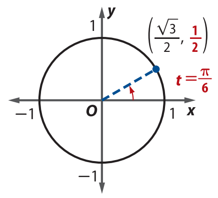
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$

أوجد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{1}{2}$. عندما تكون $t = \frac{\pi}{6}$، $\sin t = \frac{1}{2}$.

من ثم تكون $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.



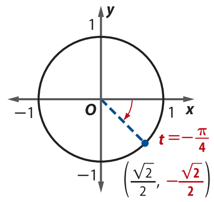
التحقق إذا كان $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$، إذًا $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. ✓

b. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

أوجد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما يكون $t = -\frac{\pi}{4}$، $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم يكون $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.



التحقق إذا كان $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$، إذًا $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✓

c. $\sin^{-1} 3$

نظرًا لأن مجال الدالة $\sin^{-1}$ هو $[-1, 1]$ و $1 < 3$. فلا توجد sine زاوية بقيمة 3. ومن ثم، فإن قيمة $\sin^{-1} 3$ غير موجودة.

نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\sin^{-1}$ يمكنك أيضًا الاستعانة بحاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي قيمة sine لها $\frac{1}{2}$

```
sin⁻¹(0.5)
        .5235987756
π/6
        .5235987756
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

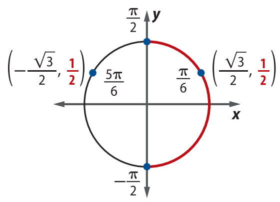
تمرين موجه

1A. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{3}$

1B. $\sin^{-1}(-2\pi)$

1C. $\arcsin(-1)$ $-\frac{\pi}{2}$

لاحظ أنه في المثال 1a بينما $\frac{5\pi}{6}$ تساوي $\frac{1}{2}$، فإن $\sin \frac{5\pi}{6}$ ليست في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. من ثم، فإن $\sin^{-1} \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$.



- كيف يمكنك إعادة كتابة $y = \sin x$ لعزل x. قياس الزاوية؟ ماذا سيساوي x؟ الإجابة النموذجية: $\sin^{-1} y = x$ يساوي x معكوس $y = \sin x$.
- بعض الدوال المثلثية لا تكون دوال واحد لواحد، وتكون لكل قيمة من قيم y قيمة واحدة مرتبطة من x. هل توجد أجزاء من التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ تعد واحدًا لواحد؟ إن وُجدت، اذكر جزءًا واحدًا من التمثيل البياني يكون واحدًا لواحد. الإجابة النموذجية: نعم، من $-\frac{\pi}{2}$ إلى $\frac{\pi}{2}$

1 الدوال المثلثية العكسية

الأمثلة 3–1 توضّح كيفية تحديد قيم الدوال العكسية لـ Sine و الـ Cosine و الـ Tan **المثال 4** يوضّح كيفية تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا. **المثال 5** يوضّح كيفية تطبيق الدوال المثلثية العكسية على موقف من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{4}$

b. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{3}$

c. $\sin^{-1}(-2\pi)$ غير موجودة

إرشاد للمعلمين الجدد

المعكوسات لاحظ أن في المجالات المقيدة، يُحدد $\sin x$ في الربعين الأول والثالث، ويُحدد $\cos x$ في الربعين الأول والثاني، ويُحدد $\tan x$ في الربعين الأول والثالث.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية مثّل دالة جيب الزاوية بيانيًا على اللوحة البيضاء التفاعلية. ثم ارسم مستقيمًا أفقيًا يمر بمنحنى الدالة. اطلب من الطلاب توضيح السبب في أن دالة الـ Cosine ليست واحدًا لواحد بالنسبة لجميع قيم x. توجد أكثر من قيمة واحدة لـ x بالنسبة لكل قيمة من y. ثم اطلب منهم تحديد مجال تكون فيه الدالة واحدًا لواحد. الإجابة النموذجية: من $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$ وضّح كيف يسمح تقييد الدالة بتحديد معكوسها. كرر هذه العملية مع دوال الـ Cosine و الـ Tan.

إرشاد للمعلمين الجدد

المعكوسات ذَكّر الطلاب بأن التمثيل البياني للدالة ومعكوسها متماثلان بالنسبة إلى المستقيم $y = x$.

مثال إضافي

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. إن وُجدت.

a. $\cos^{-1} 1$ 0

b. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$

c. $\cos^{-1}(-2)$ غير موجودة

التركيز على محتوى الرياضيات

تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا لكي تكون الدوال المثلثية العكسية واحدًا لواحد، يجب أن تشتمل على مجالات مقيدة. في حين يوجد عدد لا نهائي من الفواصل المحتملة، فإنه تم اختيار الفواصل المعيارية (المتمركزة عند 0 أو المتخذة 0 نقطة النهاية لها).

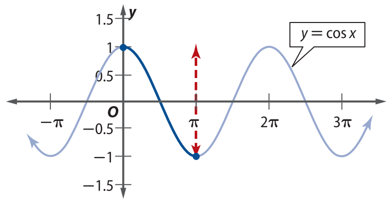
التمثيل البياني لكل معكوس دالة هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة المقيدة في المستقيم $y = x$.

نصيحة دراسية

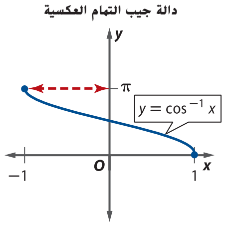
القيم الأساسية أحيانًا يشار إلى الدوال المثلثية التي لها مجالات مقيدة بحروف إنجليزية كبيرة. على سبيل المثال، $y = \text{Sin } x$ تمثل الدالة $y = \sin x$، بحيث تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. وغالبًا ما يطلق على القيم في هذه المجالات المقيدة *القيم الأساسية*.

عندما يكون المجال مقيدًا على $[0, \pi]$، تكون دالة cosine واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة على $[-1, 1]$. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة cosine دالة معكوسة يطلق عليها $y = \cos^{-1} x$ و **دالة قوس جيب التمام** $y = \arccos x$.
والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$ عبارة عن معكوس التمثيل البياني لدالة cosine المقيدة على الخط $y = x$.

دالة جيب التمام المقيدة

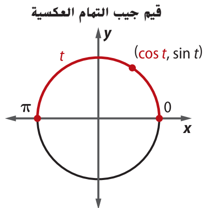


دالة جيب التمام العكسية



تذكر أن $\cos t$ هي الإحداثي x للنقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى $y = \cos^{-1} x$ مقيد بـــ $[0, \pi]$، تقع قيم دالة $\cos^{-1}$ في النصف العلوي من دائرة الوحدة.

قيم جيب التمام العكسية



مثال 2 إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

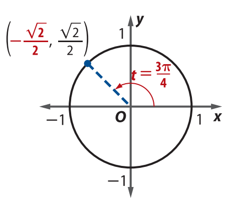
a. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

أوجد نقطة على دائرة في الفترة الفاصلة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

عندما تكون $t = \frac{3\pi}{4}$، $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم تكون $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$، إذًا $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✔



b. $\arccos(-2)$

بما أن مجال دالة cosine هو $[-1, 1]$ و $-2 < -1$، فلا توجد cosine زاوية بقيمة -2. لذا، فإن قيمة (-2) غير موجودة.

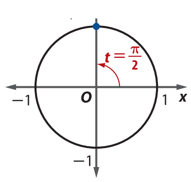
c. $\cos^{-1} 0$

أوجد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة الفاصلة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي 0.

عندما تكون $t = \frac{\pi}{2}$، $\cos t = 0$.

من ثم يكون $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، إذًا $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. ✔



تمرين موجه

2A. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$

2B. $\arccos 2.5$

2C. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{2\pi}{3}$

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة السمعية/الموسيقية اطلب من الطلاب إعداد تسجيل صوتي يوضّح كيفية تحديد $\sin x$، و$\cos x$، و$\tan x$ مع اعتبار وجود دوال عكسية لها. اطلب من الطلاب تحديد مجال الدالة المقيدة ومداها ومجال الدالة العكسية ومداها.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 200 12/15/2016 11:41:24 PM

مثال إضافي

3 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\pi}{6}$

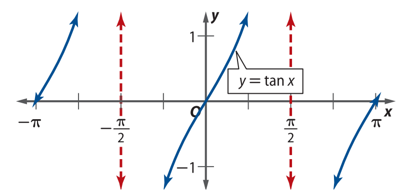
b. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$

عندما تكون مقيدة بمجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، تكون دالة ظل الزاوية واحدًا إلى واحد. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة قوس الظل دالة عكسية تسمى *دالة معكوس ظل الزاوية* $y = \tan^{-1} x$ أو **دالة قوس الظل** $y = \arctan x$. التمثيل البياني $y = \tan^{-1} x$ يمكن إيجاده عن طريق انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية على الخط $y = x$. لاحظ أنه على عكس دوال sine وcosine، فإن مجال $\tan^{-1}$ الزاوية هو $(-\infty, \infty)$.

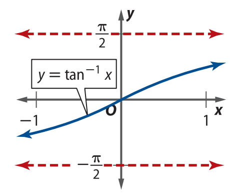
نصيحة دراسية

السلوك الطرفي لمعكوس ظل الزاوية لاحظ أنه عند انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية المقيدة على الخط $y = x$، تصير خطوط المقاربة الرأسية $x = \pm\frac{\pi}{2}$ خطوط المقاربة الأفقية $y = \pm\frac{\pi}{2}$ لدالة $\tan^{-1}$ الزاوية. من ثم تكون $\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

دالة ظل الزاوية المقيدة

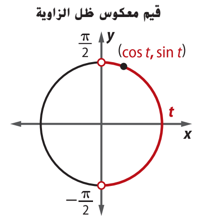


دالة معكوس ظل الزاوية



يمكنك أيضًا الاستعانة بدائرة الوحدة لإيجاد قيمة تعبير معكوس ظل الزاوية. وفي دائرة الوحدة، تكون $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ أو $\frac{y}{x}$. وستقع قيم x $y = \tan^{-1} x$ في النصف الأيمن من دائرة الوحدة، ولا تشمل $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$؛ لأن دالة ظل الزاوية غير محددة على تلك النقاط.

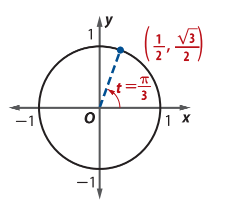
قيم معكوس ظل الزاوية



مثال 3 إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\tan^{-1}\sqrt{3}$



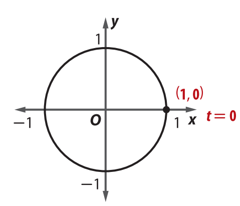
أوجد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$. عندما يكون $t = \frac{\pi}{3}$، $\tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

أو $\sqrt{3}$. من ثم تكون $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

التحقق إذا كان $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$، إذًا $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ✔

b. $\arctan 0$



أوجد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = 0$. عندما تكون $t = 0$، $\tan t = \frac{0}{1}$ أو 0.

من ثم يكون $\arctan 0 = 0$.

التحقق إذا كان $\arctan 0 = 0$، إذًا $\tan 0 = 0$. ✔

نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\tan^{-1}$ يمكنك أيضًا استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي ظل زاويتها $\sqrt{3}$.

```
tan-1(√(3))
         1.047197551
π/3
         1.047197551
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

تمرين موجه

3A. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$

3B. $\tan^{-1}(-1)$ $-\frac{\pi}{4}$

في حين أن الدوال العكسية لـــــــ Sec, Csc, Cot موجودة بالفعل، فإنها نادرة الاستخدام في العمليات الحسابية؛ لوجود دوال معكوسة لمقلوبها. علاوة على عدم وضوح كيفية تقرير حصر مجالات كل من Sec, Csc, Cot للحصول على Sec^{-1} الزاوية و Csc^{-1} و Cot^{-1}. ستكتشف هذه الدوال في التمرين 66.

وفيما يلي تلخيص الدوال المثلثية العكسية الأكثر شيوعًا.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

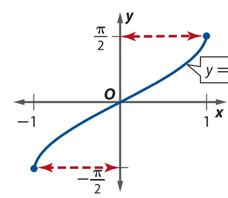
معكوس $\sin x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\sin x$.

الرموز $y = \sin^{-1} x$ إذا كان فقط إذا $\sin y = x$، بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



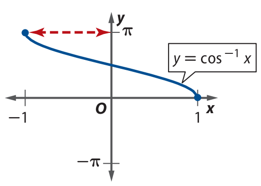
معكوس $\cos x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين 0 و π بقيمة $\cos x$.

الرموز $y = \cos^{-1} x$ إذا كان فقط إذا $\cos y = x$، بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $[0, \pi]$



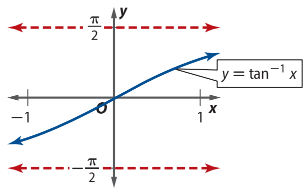
معكوس $\tan x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\tan x$.

الرموز $y = \tan^{-1} x$ إذا كان فقط إذا $\tan y = x$، بالنسبة لـ $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



يمكنك تمثيل الدوال المثلثية العكسية الموجودة بالأعلى بيانيًا عن طريق إعادة كتابتها بالصيغة $\sin y = x$، $\cos y = x$، أو $\tan y = x$. وتعيين قيم y. ثم إنشاء جدول للقيم. ثم تحديد النقاط وتوصيلها بمنحنى منتظم.

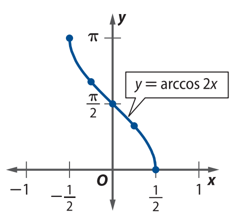
مثال 4 رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

مثّل بيانيًّا $y = \arccos 2x$.

حسب التعريف، $y = \arccos 2x$ و $\cos y = 2x$ متساويين عند $0 \le y \le \pi$؛ لذا فالتمثيل البياني لكليهما واحد. أعد كتابة $\cos y = 2x$ حيث $x = \frac{1}{2} \cos y$ وعيّن قيم y في الفترة $[0, \pi]$ لإنشاء جدول القيم.

y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x = \frac{1}{2} \cos y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

ثم حدد النقاط (x, y) وصلها بمنحنى منتظم. لاحظ أن لهذا المنحنى نقاط نهاية عند $\left(-\frac{1}{2}, \pi\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. تشير إلى أن التمثيل البياني بأكمله $y = \arccos 2x$ موضّح.



انتبه!
تذكر أن $\pi = 3.14$ radians أو 180°.

تمرين موجه

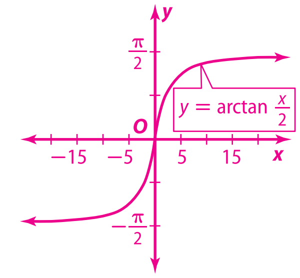
مثّل كل دالة بيانيًّا. 4A–B. انظر الحاشية.

4A. $y = \arcsin 3x$

4B. $y = \tan^{-1} 2x$

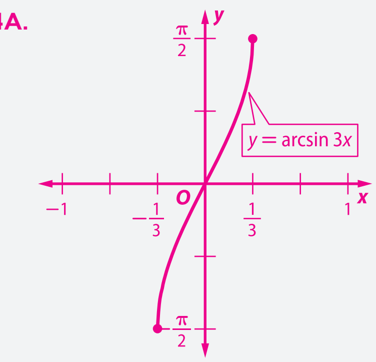
مثال إضافي

4 مثّل بيانيًّا $y = \arctan \frac{x}{2}$.

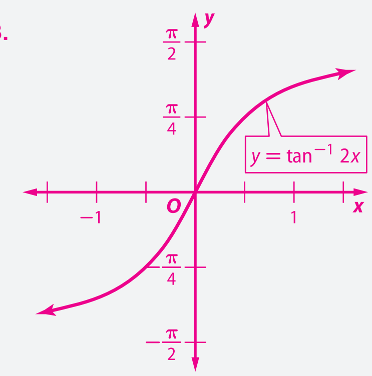


إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A.



4B.



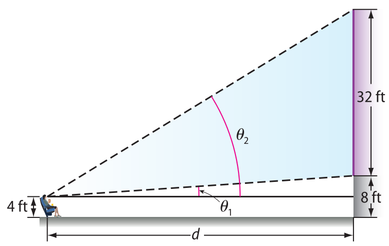
202 | الدرس 3-6 | الدوال المثلثية العكسية

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام الدالة المثلثية العكسية

الأفلام في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم؛ بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض.

اصنع رسمًا تخطيطيًا لإيجاد زاوية الرؤية.
افترض أن θ_1 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أسفل الشاشة، ثم افترض أن θ_2 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أعلى الشاشة.



بذلك، تكون زاوية الرؤية هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$. يمكنك استخدام دالة ظل الزاوية لإيجاد قيمة θ_1 و θ_2. وبما أن مستوى عين المشاهد في أثناء جلوسه هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض. إذًا فالمسافة المقابلة لـ θ_1 هي 4 – 8 أقدام أو 4 أقدام.

$\tan \theta_1 = \frac{4}{d}$ adj = d و opp = 4

$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{4}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

المسافة المقابلة لـ θ_2 هي (32 + 8) - 4 أقدام أو 36 قدمًا.

$\tan \theta_2 = \frac{36}{d}$ adj = d و opp = 36

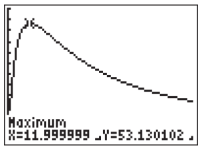
$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{36}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

لذا، يمكن تمثيل زاوية الرؤية بالدالة $\theta = \tan^{-1} \frac{36}{d} - \tan^{-1} \frac{4}{d}$.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

مسافة أقصى زاوية رؤية هي أقصى نقطة في التمثيل البياني. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد هذه النقطة.

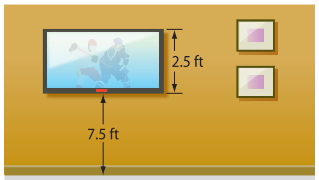
ومن خلال التمثيل البياني، ترى أن أقصى زاوية رؤية تحدث تقريبًا عند مسافة 12 قدمًا من الشاشة.



[0, 100] scl: 10 by [0, 60] scl: 5

تمرين موجه

5. **التلفاز** اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته. قرّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.



A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3 أقدام عن مستوى سطح الأرض. $\theta = \tan^{-1} \frac{7}{d} - \tan^{-1} \frac{4.5}{d}$

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية. 5.6 ft

الربط بالحياة اليومية

في أواخر القرن 19. بدأ توماس إديسون في العمل على اختراع جهاز لتسجيل الصور المتحركة يسمى الكينيتوسكوب، صار فيما بعد عارض الأفلام. وكانت أول صورة متحركة محفوظة الحقوق فيلمًا لأحد موظفي إديسون وهو يعطس.

المصدر: مكتبة الكونغرس

مثال إضافي

5 السينما توجد في السينما شاشة طولها 32 قدمًا على ارتفاع 8 أقدام من الأرض.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 6 أقدام فوق مستوى الأرض.
$\theta = \tan^{-1} \frac{34}{d} - \tan^{-1} \frac{2}{d}$

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.
حوالي 8.2 ft

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تراكيب الدوال المثلثية

تعلمت في الدرس 1-7 أنه إذا كانت x في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$، إذًا

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{و} \quad f^{-1}[f(x)] = x.$$

وبما أن مجالات الدوال المثلثية مقيدة للحصول على الدوال المثلثية العكسية، فإن الخواص لا تنطبق على قيم x.

على سبيل المثال، عندما يكون $\sin x$ محددة لجميع قيم x، يكون مجال $\sin^{-1} x$ هو [-1, 1]. ومن ثم، $\sin(\sin^{-1} x) = x$ لا يكون صحيحًا إلا عندما يكون $-1 \le x \le 1$. وينطبق قيد مختلف على التركيب $\sin^{-1}(\sin x)$. نظرًا لأن $\sin x$ مقيد بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، $\sin^{-1}(\sin x) = x$ يكون صحيحًا فقط عندما يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

وفيما يلي تلخيص لقيود هذا المجال.

المفهوم الأساسي مجال تراكيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$	$f^{-1}[f(x)] = x$
إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.
إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.	إذا كان $0 \le x \le \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.
إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

مثال 6 استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

تطبق خواص الدوال المثلثية العكسية لأن $-\frac{1}{4}$ تقع في الفترة $[-1, 1]$.

ومن ثم، فإن $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4}$.

b. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

وبما أن $\tan x$ غير محددة عندما يكون $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجودة.

c. $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

لاحظ أن الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ لا تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ومع ذلك، $\frac{7\pi}{4}$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$ أو $-\frac{\pi}{4}$، والتي تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \qquad \text{بما أن } -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}\text{، فإن } \arcsin(\sin x) = x.$$

ومن ثم، فإن $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

انتبه!

التراكيب والمعكوسات عند حساب $f^{-1}[f(x)]$ بالدوال المثلثية، يبدو المجال $(-\infty, \infty)$. ومع ذلك، نظرًا إلى أن مدى الدوال العكسية مقيد، فأحيانًا يجب إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء.

تمرين موجه

6A. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$

6B. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ $\frac{3\pi}{4}$

6C. $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$

2 تراكيب الدوال المثلثية

المثال 6 يوضّح كيفية إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير المثلثي باستخدام الخصائص المثلثية العكسية. **المثالان 7 و 8** يوضّحان كيفية إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية.

مثال إضافي

6 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

b. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2}$

c. $\arctan\left[\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right]$

غير موجودة

التركيز على محتوى الرياضيات

تراكيب الدوال نظرًا لأن الدوال المثلثية العكسية تُحدد فقط على الفاصل. بدلاً من تعريفها بالقيم، فإن تراكيب الدوال المشتملة على دوال مثلثية عكسية قد تكون موجودة أو غير موجودة حسب قيمة x.

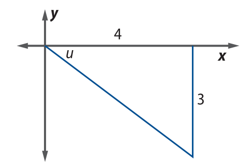
يمكنك أيضًا إيجاد قيمة التركيب الذي يحتوي على دالتين مثلثين معكوستين مختلفتين.

مثال 7 إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

لتحويل التعبير إلى أبسط صورة، افترض أن $u = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$. ومن ثم تكون $\tan u = -\frac{3}{4}$.

وبما أن دالة ظل الزاوية سلبية في الربع الثاني و والرابع، ومجال دالة معكوس ظل الزاوية مقيد في الربع الأول والرابع، يجب أن تكون u في الربع الرابع.



باستخدام مبرهنة فيثاغورس، ستجد أن طول الوتر هو 5. والآن، عليك حل المسألة لإيجاد $\cos u$.

$$\cos u = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \text{cosine دالة}$$

$$= \frac{4}{5} \qquad \text{hyp} = 5 \text{ و } \text{adj} = 4$$

ومن ثم، فإن $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{5}$.

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

7A. $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{6}$

7B. $\sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$ $\frac{5}{13}$

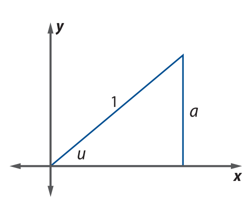
أحيانًا يقلّ التركيب الذي يحتوي على الدالتين المثلثين المختلفتين إلى تعبير جبري لا يحتوي على أي تعابير مثلثية.

مثال 8 إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية

اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لـ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

افترض أن $u = \arcsin a$. ومن ثم يكون $\sin u = a$.

ولأن مجال دالة arcsine مقيد بالربع الأول والرابع، لا بد أن تقع u في الربع الأول أو الرابع. ويكون الحل مماثلاً في كل ربع؛ لذا سنحل الربع الأول.



من نظرية فيثاغورس، تجد أن طول الضلع المجاور لـ u هو $\sqrt{1-a^2}$. والآن، عليك حل $\tan u$.

$$\tan u = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \text{tan دالة}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2} \qquad \text{adj} = \sqrt{1-a^2} \text{ و } \text{opp} = a$$

ومن ثم، فإن $\tan(\arcsin a) = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$.

تمرين موجه

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لـ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

8A. $\sin(\arccos x)$ $\sqrt{1-x^2}$

8B. $\cot[\sin^{-1} x]$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

نصيحة دراسية

تحليل الدوال الجبرية يمكن عكس التقنية المستخدمة لتحويل التعابير المثلثية إلى تعابير جبرية. تحليل الدالة الجبرية كتركيب من دالتين مثلثين هو تقنية تستخدم كثيرًا في حساب التفاضل والتكامل.

أمثلة إضافية

7 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ $\frac{3}{5}$

8 اكتب $\cot(\arccos x)$ في صورة تعبير جبري بدلالة x بحيث لا يشتمل على أي دوال مثلثية. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

المتابعة

لقد استكشف الطلاب الدوال المثلثية ومعكوساتها.

اسأل:

- ما وجه المقارنة بين الدالة المثلثية العكسية والدالة العكسية الجبرية؟ الإجابة النموذجية: كما هو الحال مع المعكوس الجبري، الدالة المثلثية العكسية تلغي عمل الدالة المثلثية، ويكون تمثيلها البياني انعكاسًا لتمثيل الدالة في المستقيم $y = x$، ويجب أن يكون المجال مقيدًا لاعتبارها دالة.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-48 للتحقق من عملية الفهم.

استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع راجع الترميز المثلثي العكسي وأكد على أن -1 في $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}x$، و $\tan^{-1}x$ تعني $\arcsin x$، و$\arccos x$، و $\arctan x$. وليس $\csc x = \frac{1}{\sin x}$، و لا $\sec x = \frac{1}{\cos x}$، أو $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 66. يختلط الأمر على أحمد بين معكوس الدالة والمتطابق العكسي للدالة. أكد على أن $\tan^{-1}x \neq \frac{1}{\tan x}$؛ بدلاً من $(\tan x)^{-1} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$.

ينطبق منطق مشابه لهذا على الـ Sine و الـ Cosine.

إجابات إضافية

16. $\frac{\pi}{3}$ أو $60°$ جنوبية غربية

41. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

42. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

49. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُزاحًا بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل.

50. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 3 وحدات لأسفل.

51. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا رأسيًا ومُزاحًا بمقدار 6 وحدات لأسفل.

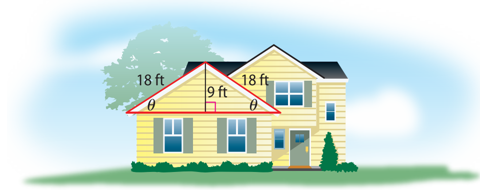
52. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُزاحًا بمقدار وحدتين إلى اليسار ومضغوطًا رأسيًا.

تمارين

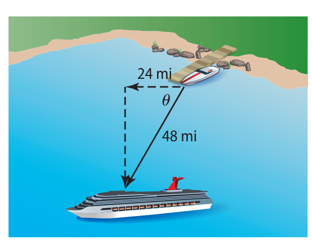
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (الأمثلة 1-3)

1. $\sin^{-1} 0$ 0
2. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
4. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
5. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{4}$
6. $\arccos 0$ $\frac{\pi}{2}$
7. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
8. $\arccos(-1)$ π
9. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
10. $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3}$
11. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$
12. $\arctan(-\sqrt{3})$ $-\frac{\pi}{3}$
13. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\pi}{6}$
14. $\tan^{-1} 0$ 0

15. **الهندسة المعمارية** داعم سطح على شكل مثلثين قائمين كما هو موضح أدناه. أوجد قيمة θ. (المثال 3) $\frac{\pi}{6}$



16. **الإنقاذ** أبحرت سفينة سياحية غربًا بمقدار 24 ميلاً قبل الاتجاه نحو الجنوب. وعندما لم تستطع السفينة المتابعة، طلب طاقم السفينة المساعدة لاسلكيًا. ووجد قارب الإنقاذ أن أسرع طريق يبلغ طوله 48 ميلاً. أوجد الزاوية θ التي يجب أن يأخذها قارب الإنقاذ لمساعدة السفينة السياحية. (المثال 3) **انظر الهامش.**

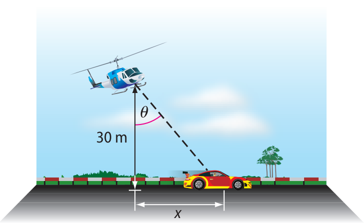


17-26. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مثّل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $y = \arcsin x$
18. $y = \sin^{-1} 2x$
19. $y = \sin^{-1}(x+3)$
20. $y = \arcsin x - 3$
21. $y = \arccos x$
22. $y = \cos^{-1} 3x$
23. $y = \arctan x$
24. $y = \tan^{-1} 3x$
25. $y = \tan^{-1}(x+1)$
26. $y = \arctan x - 1$

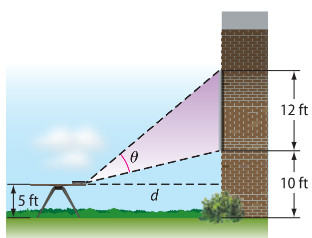
27. **سباق السيارات** تُصوِّر كاميرا تلفيزيونية سباق سيارات. وتدور الكاميرات مع حركة السيارات أمامها. وتبعد الكاميرا عن حلقة السباق مسافة 30 مترًا. أوجد قيمة θ و x كما هو موضح في الشكل. (المثال 5)



a. اكتب θ كدالة x. $\theta = \arctan \frac{x}{30}$

b. أوجد θ عندما تكون $x = 6$ أمتار و $x = 14$ مترًا. **11.3°, 25.0°**

28. **الرياضة** يريد سالم ووالده عرض لعبة كرة القدم للمحترفين بجانب مبنى سكنهما. فوضعا عارض الأفلام على طاولة يبلغ طولها 5 أقدام، ثم ثبّتا شاشة طولها 12 قدمًا ترتفع عن الأرض بمقدار 10 أقدام. (المثال 5)



a. اكتب دالة تعبّر عن θ من حيث المسافة d.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني في تحديد مسافة أقصى زاوية عرض. **9.2 ft تقريبًا**

a. $\theta = \tan^{-1}\frac{17}{d} - \tan^{-1}\frac{5}{d}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (المثالان 6 و7)

29. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ $\frac{3}{4}$
30. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2}$
31. $\cos\left(\cos^{-1}\frac{2}{9}\right)$ $\frac{2}{9}$
32. $\cos^{-1}(\cos \pi)$ π
33. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{4}\right)$ $\frac{\pi}{4}$
34. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$
35. $\cos(\tan^{-1} 1)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
36. $\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$ 0
37. $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 1
38. $\sin(\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
39. $\cos(\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
40. $\cos\left(\cos^{-1} 0 + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{1}{2}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-48, 66, 68-87	1-47 فردي, 84-87 .	2-48 زوجي, 66, 68-83
OL ضمن المستوى	1-61 فردي, 62, 63-67, 68-87	1-48, 84-87	49-66, 68-83
BL أعلى من المستوى	49-87		

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 206 12/15/2016 11:41:35 PM

اكتب كل تعبير مثلثي في صورة تعبير جبري لـ x. (المثال 8) 41–42. انظر الهامش.

41. $\tan(\arccos x)$

42. $\csc(\cos^{-1} x)$

43. $\sin(\cos^{-1} x)$ $\sqrt{1-x^2}$

44. $\cos(\arcsin x)$ $\sqrt{1-x^2}$

45. $\csc(\sin^{-1} x)$ $\frac{1}{x}$

46. $\sec(\arcsin x)$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

47. $\cot(\arccos x)$ $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

48. $\cot(\arcsin x)$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

صف كيفية ربط التمثيلات $g(x)$ و $f(x)$ البيانية.

49–54. انظر الهامش.

49. $f(x) = \sin^{-1} x$ و $g(x) = \sin^{-1}(x-1) - 2$

50. $f(x) = \arctan x$ و $g(x) = \arctan 0.5x - 3$

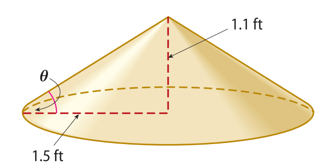
51. $f(x) = \cos^{-1} x$ و $g(x) = 3(\cos^{-1} x - 2)$

52. $f(x) = \arcsin x$ و $g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x+2)$

53. $f(x) = \arccos x$ و $g(x) = 5 + \arccos 2x$

54. $f(x) = \tan^{-1} x$ و $g(x) = \tan^{-1} 3x - 4$

55. **الرمال** عند تراكم الرمال. تشكلت زاوية بين الكومة والأرض. وبقيت ثابتة إلى حد ما. ويطلق على هذه الزاوية زاوية السكون. وبافتراض أن امرأة صنعت كومة من الرمال على الشاطئ يبلغ قطرها 3 أقدام وارتفاعها 1.1 قدم.



a. ما قيمة زاوية السكون؟ تقريبًا $36°$

b. إذا ظلت زاوية السكون ثابتة. فكم يبلغ القطر الذي تحتاج إليه الكومة لتصل إلى الارتفاع 4 أقدام؟ تقريبًا 11 ft

56–61. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد المجال والمدى لكل دالة تركيب. ومن ثم، استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيلها بيانيًا.

56. $y = \cos(\tan^{-1} x)$

57. $y = \sin(\cos^{-1} x)$

58. $y = \arctan(\sin x)$

59. $y = \sin^{-1}(\cos x)$

60. $y = \cos(\arcsin x)$

61. $y = \tan(\arccos x)$

62. **المعكوسات** تمثل دالة Sec^{-1} بيانيًا بتقييد مجال دالة Sec التي تقع في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. وتمثل دالة Csc^{-1} عن طريق تحديد مجال دالة Csc للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ و $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. حدد المجال والمدى لكل دالة.

b. مثّل كل دالة بيانيًا.

c. اشرح لماذا يعد تقييد المجال لدوال Sec, Csc ضروريًا في التمثيل البياني للدوال العكسية.

اكتب كل تعبير جبري كدالة مثلثية للدالة المثلثية العكسية x.

63. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\tan(\sin^{-1} x)$ أو $\cot(\cos^{-1} x)$

64. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\tan(\cos^{-1} x)$ أو $\cot(\sin^{-1} x)$

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التمثيلات البيانية لتركيبات الدوال المثلثية. a–g. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

a. **تحليليًا** افترض أن $f(x) = \sin x$ و $f^{-1}(x) = \arcsin x$. صف مجال ومدى $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$.

b. **بيانيًا** صمّم جدولاً من القيم العديدة لكل دالة تركيب في الفترة $[-2, 2]$. ثم استخدم الجدول لرسم التمثيلات البيانية لـ $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

c. **تحليليًا** افترض أن $g(x) = \cos x$ و $g^{-1}(x) = \arccos x$. صف مجال ومدى $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$ وخمن كيف سيبدو شكل التمثيلات البيانية لـ $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$. اشرح استنتاجك.

d. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية لـ $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

e. **كلاميًا** خمن شكل التمثيلات البيانية للتركيبين المحتملين لدوال ظل الزاوية وقوس ظل الزاوية. اشرح استنتاجك. ثم تحقق من تخمينك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الخطأ** يناقش أحمد وعلي الدوال المثلثية العكسية. بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ خمّن أحمد أن $\tan^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$. ولكن لم يوافقه علي الرأي. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

67. **تحدٍ** استخدم التمثيلات البيانية لـ $y = \sin^{-1} x$ و $y = \cos^{-1} x$ لإيجاد قيمة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ في الفترة $[-1, 1]$. اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

68. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، فإن $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}$. اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

التبرير حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم لا فردية ولا زوجية. علل إجابتك. 69–71. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

69. $y = \sin^{-1} x$

70. $y = \cos^{-1} x$

71. $y = \tan^{-1} x$

72. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن لقيود دوال sine و cosine و tangent التحكم في المجال والمدى لدوالها العكسية. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

إجابات إضافية

53. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 5 وحدات لأعلى.

54. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 4 وحدات لأسفل.

66,

49-

مراجعة شاملة

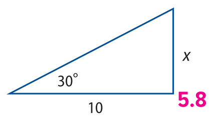
حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًّا. 73–75. انظر الهامش.

73. $y = 3 \tan \theta$ **74.** $y = \cot 5\theta$ **75.** $y = 3 \csc \frac{1}{2}\theta$

.76 **الأمواج** تطفو ورقة على سطح الماء، وتتحرك صعودًا وهبوطًا. والمسافة بين أعلى النقاط وأدناها 4 سنتيمترات. وتتحرك من النقطة العليا إلى النقطة الدنيا، ثم إلى النقطة العليا من جديد كل 10 ثوانٍ. اكتب الدالة التي تمثل حركة الورقة من حيث نقطة التوازن. $y = 2 \cos \frac{\pi}{5}t$

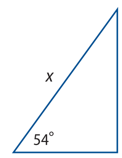
أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

77.



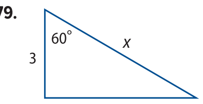
5.8

78.



22

79.



6

لكل زوج من الدوال، أوجد $[f \circ g](x)$، $[g \circ f](x)$، و$[f \circ g](4)$. 80–82. انظر الهامش.

80. $f(x) = x^2 + 3x - 6$
$g(x) = 4x + 1$

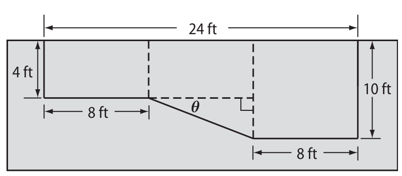
81. $f(x) = 6 - 5x$
$g(x) = \frac{1}{x}$

82. $f(x) = \sqrt{x + 3}$
$g(x) = x^2 + 1$

.83 **التعليم** أجاب طارق عن 11 سؤالاً من الاختبار اليومي القصير الذي يتكون من 20 سؤالاً بشكل صحيح. وقال له مدرب البيسبول الخاص به إنه يجب أن يرفع متوسط مستواه إلى 70% على الأقل إذا رغب في المشاركة في افتتاحية الموسم القادم. وتعهد طارق أن يدرس بجدٍّ، وأن يجيب عن جميع أسئلة الاختبار اليومي القصير بشكل صحيح في المستقبل. فكَّم سؤالاً يجب عليه إجابته بشكل صحيح ليرفع متوسط مستواه إلى 70%؟ **10 أسئلة**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.84 **SAT/ACT** ما قيمة زاوية الانخفاض θ بين نهاية السطح ونهاية عمق حمام السباحة لأقرب درجة؟ **B**



رؤية جانبية لحمام السباحة

A 25° C 41° E 73°
B 37° D 53°

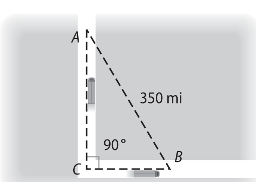
.85 أي مما يلي يمثل القيمة الدقيقة لـ $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **H**

F $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ H $\frac{\sqrt{5}}{5}$
G $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ J $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

.86 **مراجعة** يبلغ وتر المثلث القائم 67 بوصة. إذا كان قياس إحدى الزوايا 47°. فما طول أقصر ضلع في المثلث؟ **A**

A 45.7 in. C 62.5 in.
B 49.0 in. D 71.8 in.

.87 **مراجعة** شاحنتان، A و B، بدأ سيرهما من التقاطع C لطريقين مستقيمين في الوقت نفسه. وكانت الشاحنة A تتحرك بضعف سرعة الشاحنة B. وبعد 4 ساعات، كان بُعد إحدى الشاحنتين عن الأخرى 350 ميلاً. أوجد تقريبًا سرعة الشاحنة B بالميل في كل ساعة. **F**



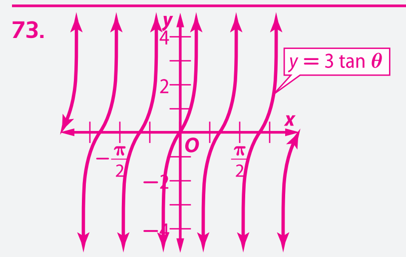
F 39 H 51
G 44 J 78

4 التقويم

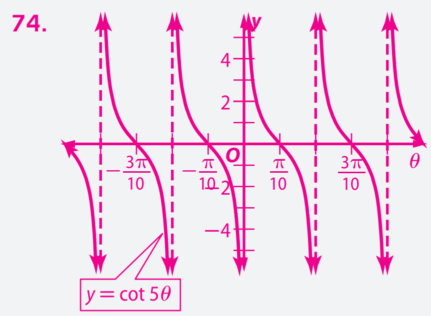
حصاد الأمس اطلب من الطلاب توضيح كيف ساعد الدرسان 4-3 و 5-3 حول تمثيل الدوال المثلثية، على إعدادهم لهذا الدرس عن تمثيل الدوال المثلثية العكسية.

إجابات إضافية

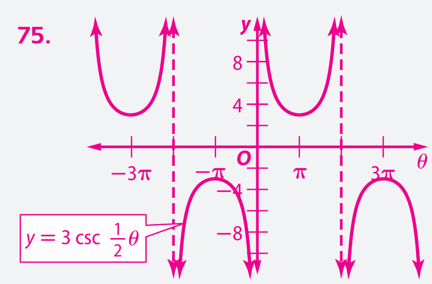
73.



74.



75.



80. $[f \circ g](x) = 16x^2 + 20x - 2;$
$[g \circ f](x) = 4x^2 + 12x - 23;$
$[f \circ g](4) = 334$

81. $[f \circ g](x) = 6 - \frac{5}{x};$
$[g \circ f](x) = \frac{1}{6 - 5x};$
$[f \circ g](4) = 4.75$

82. $[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 + 4};$
$[g \circ f](x) = x + 4;$
$[f \circ g](4) = \sqrt{20}$ أو $2\sqrt{5}$

التدريس المتمايز BL

الإثراء إذا علمت أن $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$. فأثبت أن $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

افترض أن $A = \arctan\frac{1}{3}$ و $B = \arctan\frac{1}{2}$.

عندها يكون، $\tan A = \frac{1}{3}$ و $\tan B = \frac{1}{2}$

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ إذن، $\tan(A + B) = 1$.

وهكذا فإن، $A + B = \arctan 1$ أو $\frac{\pi}{4}$ لذلك فإن، $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 208 12/15/2016 11:41:39 PM