الدرس 3-7 قانون الـــــــ Sine وقانون الـــــــ Cosine

:: السابق

- تم حل المثلثات قائمة الزوايا باستخدام الدوال المثلثيّة.

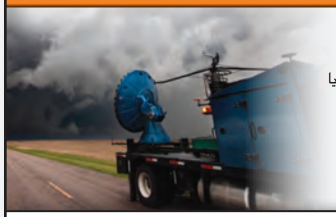
:: الحالي

1 حل المثلثات المائلة؛ مستخدمًا قانون الــ Sine و Cosine.

2 إيجاد مساحة المثلثات المائلة.

:: لماذا؟

- التثليث هو عملية إيجاد إحداثيات نقطة ما، والمسافة إلى تلك النقطة عن طريق حساب طول أحد أضلاع المثلث، مع توافر معطيات قياسات زوايا وأضلاع المثلث الذي شكلته تلك النقطة ونقطتان مرجعيتان أخريان معلومتان. ويمكن لمراقبي حالة الطقس استخدام التثليث لتحديد الأماكن التي ستضربها الأعاصير.



المفردات الجديدة

المثلث المائل oblique triangles

قانون الجيب Law of Sines

حالة مبهمة ambiguous case

قانون جيب التمام Law of Cosines

قاعدة هيرون Heron's Formula

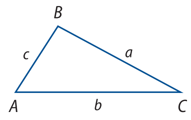
1 حل المثلثات المائلة

في الدرس 3-1، استخدمت الدوال المثلثية لحل *المثلثات* قائمة الزوايا. في هذا الدرس، ستحل **المثلثات المائلة** — وهي مثلثات ليست قائمة الزوايا.

يمكنك تطبيق **قانون الــ sin** لحل المثلث المائل إذا علمت قياس زاويتين وضلع غير محصور، أو زاويتين وضلع محصور، أو ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما.

المفهوم الأساسي قانون الجيب Law of Sines

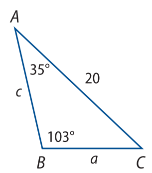
إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي: a و b و c، وهي تمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا التي قياساتها: A و B و C، إذًا فإن، $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



وستستنبط قانون الجيب Law of Sines في التمرين 69.

مثال 1 تطبيق قانون الجيب Law of Sines

حل $\triangle ABC$. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب رقم عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



نظرًا لأن لدينا معطيات زاويتين، $C = 180° - (103° + 35°)$ أو $42°$.

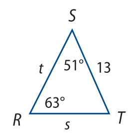
استخدم قانون الـــ sine لإيجاد قيمة كل من a و c.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الـــ Sine	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\frac{\sin 103°}{20} = \frac{\sin 42°}{c}$	بالتعويض	$\frac{\sin 103°}{20} = \frac{\sin 35°}{a}$
$c \sin 103° = 20 \sin 42°$	بالضرب.	$a \sin 103° = 20 \sin 35°$
$c = \frac{20 \sin 42°}{\sin 103°}$	بالقسمة.	$a = \frac{20 \sin 35°}{\sin 103°}$
$c \approx 13.7$	باستخدام حاسبة.	$a \approx 11.8$

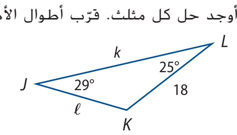
ومن ثَمّ، $a \approx 11.8$ و $c \approx 13.7$ و $\angle C = 42°$.

تمرين موجه أوجد حل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

1A.



1B.



1A. $T = 66°$, $t = 13.3$, $s = 11.3$

1B. $K = 126°$, $k = 30$, $\ell = 15.7$

التركيز 1

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-7 حل المثلثات قائمة الزوايا باستخدام الدوال المثلثية.

الدرس 3-7 حل المثلثات المائلة باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام.
إيجاد مساحة المثلثات المائلة.

بعد الدرس 3-7 التحقق من المتطابقات المثلثية.

التدريس 2

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- **ما الفرق بين المثلث قائم الزاوية والمثلث مائل الزاوية والمثلث حاد الزاوية؟** الإجابة النموذجية: المثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية قائمة. المثلث المائل هو أي مثلث ليس به زاوية قائمة. كل الزوايا في المثلث الحاد تكون أقل من 90°.

(يُتبع في الصفحة التالية)

- لماذا لا يقوم مراقبو حالة الطقس الذين يقومون بتحديد الأعاصير باستخدام المثلثات قائمة الزاوية؟
الإجابة النموذجية: إن المواقع الموجودة في العالم الحقيقي لمراقبي حالة الطقس والأعاصير قد لا تؤدي إلى هندسة مثلث قائم الزاوية.
- لنفترض أن اثنتين من محطات رصد الزلازل تقومان بتسجيل زلزال. إذا كان يمكن لكل محطة تحديد المسافة من المحطة إلى الزلزال، فاشرح لماذا لا تكون المحطتان كافيتين لتحديد موقع الزلزال. هناك أكثر من نقطة واحدة تمثل المسافة الصحيحة من كلتا المحطتين.

1 حل المثلثات المائلة

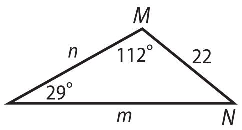
الأمثلة 1–4 توضح كيفية استخدام قانون الجيب لحل المثلثات المعروف فيها مجموعات مختلفة من الأضلاع والزوايا.
المثالان 5 و 6 يوضحان كيفية استخدام قانون الـ Cosine لحل المثلثات.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

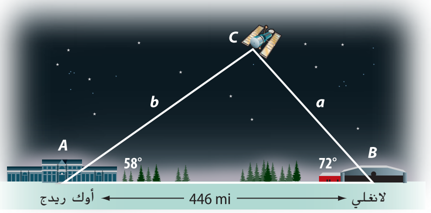
1 حل $\triangle LMN$. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب رقم عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة



$N = 39°,\ m \approx 42.1,\ n \approx 28.6$

مثال 2 من الحياة اليومية تطبيق قانون الـ sine

الأقمار الصناعية يمر قمر صناعي يدور حول الأرض بين مختبر (أوك ريدج) في ولاية تينيسي ومركز أبحاث (لانغلي) في ولاية فيرجينيا، وتبلغ المسافة بينهما 446 ميلاً. فإذا كانت زاويتا ارتفاع القمر الصناعي عن منشأتي (أوك ريدج) و(لانغلي) هما °58 و °72 على الترتيب، فكم يبعد القمر الصناعي عن كل محطة منهما؟



نظرًا لأننا نمتلك معطيات زاويتين، فإن، $C = 180° - (58° + 72°)$ أو °50. استخدم قانون الـ sine لإيجاد المسافة بين القمر الصناعي وبين كل محطة منهما.

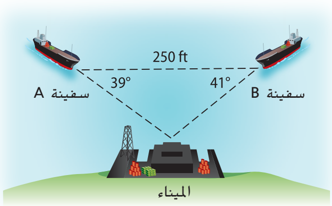
$\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a}$	قانون الـ Sine	$\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin B}{b}$
$\dfrac{\sin 50°}{446} = \dfrac{\sin 58°}{a}$	بالتعويض	$\dfrac{\sin 50°}{446} = \dfrac{\sin 72°}{b}$
$a \sin 50° = 446 \sin 58°$	الضرب.	$b \sin 50° = 446 \sin 72°$
$a = \dfrac{446 \sin 58°}{\sin 50°}$	القسمة.	$b = \dfrac{446 \sin 72°}{\sin 50°}$
$a \approx 493.74$	باستخدام حاسبة.	$b \approx 553.72$

إذًا، يبعد القمر الصناعي حوالي 554 ميلاً عن (أوك ريدج)، وحوالي 494 ميلاً عن (لانغلي).

تمرين موجه

2. **النقل البحري** سفينتان تبعد إحداهما عن الأخرى 250 قدمًا وتبحران في اتجاه الميناء نفسه كما هو مبين. أوجد المسافة بين الميناء وبين كل سفينة منهما على حدة.

السفينة A: 166.5 ft، والسفينة B: 159.8 ft

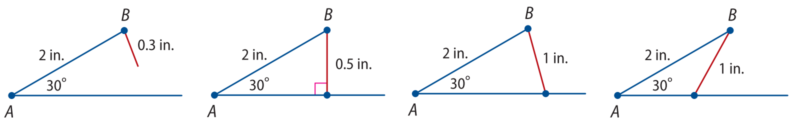


الربط بالحياة اليومية

لفهم أفضل للغلاف الجوي وتغيرات سطح الأرض وعمليات النظام البيئي، تستخدم وكالة ناسا مجموعة من الأقمار الصناعية كجزء من نظام رصد الأرض الخاص بها؛ بغرض دراسة الهواء والأرض والماء الموجود على الأرض.

المصدر: وكالة ناسا

تعلمت في علم الهندسة حقيقة أنه لا يُشكل قياس ضلعين وزاوية غير محصورة بالضرورة مثلثًا وحيدًا. لاحظ قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة في الأشكال الموجودة أدناه.



نصيحة دراسية

تمثيلات بديلة يمكن كتابة قانون الـ Sine بصيغة عكسية مثل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبشكل عام، فإن معرفة قياس ضلعين وزاوية غير محصورة تعني صحة إحدى العبارات التالية: (1) لا يوجد مثلث، أو (2) يوجد مثلث واحد بالضبط، أو (3) يوجد مثلثان. بعبارة أخرى، عند حل مثلث مائل لهذه **الحالة المبهمة**، قد لا يوجد حل، أو يوجد حل واحد، أو حلان.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية ضع ثلاثة أشياء على الأرض بحيث تشكل رؤوس مثلث كبير. استخدم مسطرة ومنقلة لتحديد طول أحد الأضلاع واثنين من زوايا المثلث. حل المثلث باستخدام قانون الجيب. قم بقياس الأضلاع والزوايا الأخرى للتحقق من الحل. كرر هذا النشاط من خلال تشكيل مثلث مختلف وقياس زاوية واحدة واثنين من أضلاع المثلث.

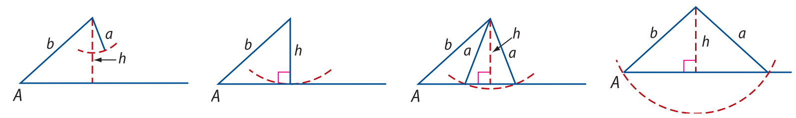
210 | الدرس 3-7 | قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 210 12/15/2016 11:41:43 PM

المفهوم الأساسي الحالة المبهمة

افترض أن مثلثًا فيه a و b و A معلومة. في الحالة الحادة، تكون: $\sin A = \frac{h}{b}$, so $h = b \sin A$

A هي زاوية حادة.
$(A < 90°)$



$a < b$ و $a < h$	$a < b$ و $a = h$	$a < b$ و $a > h$	$a \geq b$
لا يوجد حل	حل واحد	يوجد حلان	حل واحد

A هي زاوية قائمة أو منفرجة.
$(A \geq 90°)$

$a \leq b$، لا يوجد حل

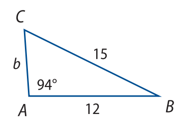
$a > b$، يوجد حل واحد

لحل مثلث مائل ذي حالة مبهمة، أولاً حدّد عدد الحلول الممكنة. وإذا كان للمثلث حل واحد أو حلان، فاستخدم قانون الــ Sine لإيجادهما.

مثال 3 الحالة المبهمة — يوجد حل واحد أو لا توجد حلول

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إذا لم يوجد حل، فاكتب *لا يوجد حل*. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

a. $a = 15, c = 12, A = 94°$



لاحظ أن الزاوية A منفرجة، و$a > c$؛ لأن $15 > 12$. ومن ثم، لا يوجد حل. طبّق قانون الــ Sine لإيجاد قيمة c.

$\frac{\sin C}{12} = \frac{\sin 94°}{15}$ — قانون الــ Sine

$\sin C = \frac{12 \sin 94°}{15}$ — اضرب كل طرف في 12.

$C = \sin^{-1}\left(\frac{12 \sin 94°}{15}\right)$ أو حوالي **53°** — تعريف $\sin^{-1}$

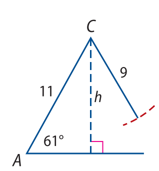
نظرًا لأن هناك الآن زاويتين معلومتين، فإن $B \approx 180° - (94° + 53°)$ أو حوالي **33°**. طبّق قانون الــ Sine لإيجاد قيمة b. اختر النسب ذات أقل القيم الحسابية لتحقيق دقة قصوى.

$\frac{\sin 94°}{15} \approx \frac{\sin 33°}{b}$ — قانون الــ Sine

$b \approx \frac{15 \sin 33°}{\sin 94°}$ أو حوالي **8.2** — حل المسألة لإيجاد قيمة b.

ومن ثم، تكون قياسات المثلث $\triangle ABC$ المتبقية هي: $B \approx 33°$ و $C \approx 53°$ و $b \approx 8.2$.

b. $a = 9, b = 11, A = 61°$



لاحظ أن الزاوية A حادة، و $a < b$؛ لأن $9 < 11$. أوجد قيمة h.

$\sin 61° = \frac{h}{11}$ — تعريف sin

$h = 11 \sin 61°$ أو حوالي **9.6** — $h = b \sin A$

نظرًا لأن $a < h$، إذًا لا يوجد مثلث يمكن تشكيله من الأضلاع: $a = 9$ و $b = 11$ و $A = 61°$. إذًا لا يوجد حل لهذه المسألة.

تمرين موجه

3A. $a = 12, b = 8, B = 61°$ **لا يوجد حل**

3B. $a = 13, c = 26, A = 30°$ **حل واحد؛ $C = 90°$، $B = 60°$، $b \approx 22.5$**

نصيحة دراسية

ارسم رسمًا تصوُّريًا منطقيًا
عند حل المثلثات، يمكن للرسم التصوري المنطقي الدقيق أن يساعدك في معرفة ما إذا كانت إجابتك ممكنة. وفي رسمك، تحقق من أن الضلع الأطول مواجه للزاوية الكبرى، بينما الضلع الأقصر يواجه الزاوية الصغرى.

أمثلة إضافية

2 ركوب المنطاد يلاحظ أحد الأشخاص الذين يركبون في منطاد هواء ساخن أن زاوية الانخفاض تجاه مبنى على الأرض هي 8.65°. وبعد الارتفاع لمسافة 500 قدم، يلاحظ الشخص الآن أن زاوية الانخفاض هي 2.70°. فكم يبعد المنطاد عن المبنى؟ **حوالي 2671.6 ft**

3 أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب *ليس هناك حل*. حوّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a. $A = 63°$, $a = 18$, $b = 25$ **لا يوجد حل**

b. $A = 105°$, $a = 73$, $b = 55$ **$B \approx 47°$, $C \approx 28°$, $c \approx 35.5$**

إرشاد للمعلمين الجدد

الحلول المتعددة في المثالين 3 و 4، قد يجد بعض الطلاب أنه من المفيد رسم المثلثات لمساعدتهم على تصور عدد الحلول الممكن. وهناك طريقة أخرى لتحديد ما إذا كان هناك نوعان من الحلول، وهي إيجاد مجموع المكملة $\angle C$ وقياس $\angle A$. إذا كان المجموع أقل من 180°، فهناك حلّان.

التركيز على محتوى الرياضيات

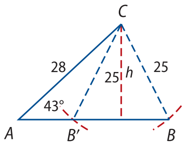
قانون الــ Sine وقانون الــ Cosine
اعتمادًا على القيم المعروفة، يمكن استخدام قانون الــ Sine وقانون الــ Cosine لحل المثلث المائل. لاحظ أنه بينما يمكن الحصول على أكثر من إجابة واحدة ممكنة عند استخدام قانون الجيب، إلا أنه إذا وجد الحل عند استخدام قانون الــ Cosine، فيكون الحل فريدًا من نوعه.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب تسجيل فيديو عن متى يتم تطبيق قانون الــ Sine أو قانون الــ Cosine. ينبغي على الطلاب قياس الزوايا والأضلاع المعروفة، ثم عرض كيفية استخدام كل قانون لحل المقاييس المتبقية من المثلث. يجب أن يوضح الفيديو تطبيق القانون والتحقق من النتيجة.

مثال 4 الحالة المبهمة – حلان

أوجد مثلثين فيهما $A = 43°$ و $a = 25$ و $b = 28$. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

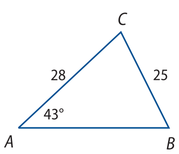


A هي زاوية حادة. و $h = 28 \sin 43°$ أو حوالي 19.1. لاحظ أن $a < b$ لأن $25 < 28$، و $a > h$ لأن $19.1 < 25$. ومن ثم، ثمة مثلثان مختلفان يمكن إيجادهما باستخدام قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة. وستكون الزاوية B زاوية حادة، بينما الزاوية B' ستكون منفرجة.

ارسم رسمًا تصوّريًا منطقيًا لكل مثلث وطبّق قانون الــ Sine لإيجاد كل حل. ابدأ بالحالة التي تكون فيها الزاوية B زاوية حادة.

الحل 1 $\angle B$ حادة.

أوجد B.



$\frac{\sin B}{28} = \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الــ Sine

$\sin B = \frac{28 \sin 43°}{25}$ حل المسألة لإيجاد قيمة $\sin B$.

$\sin B \approx 0.7638$ باستخدام حاسبة.

$B \approx \sin^{-1} 0.7638$ أو حوالي **50°** تعريف $\sin^{-1}$

أوجد قيمة C.

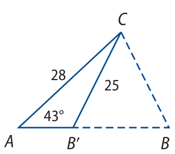
$C \approx 180° - (43° + 50°) \approx 87°$

طبّق قانون الــ Sine لإيجاد c.

$\frac{\sin 87°}{c} \approx \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الــ Sine

$c \approx \frac{25 \sin 87°}{\sin 43°}$ أو حوالي **36.6** حل المسألة لإيجاد قيمة c.

الحل 2 $\angle B$ منفرجة.



لاحظ أن $m\angle CBB' \cong m\angle CB'B$. ولإيجاد قياس الزاوية B'، عليك إيجاد زاوية منفرجة الــ sines لها 0.7638 أيضًا. ولفعل ذلك، اطرح القياس المعطى على الآلة الحاسبة إلى أقرب درجة، 50° من 180°. ومن ثم، تكون B' $180° - 50°$ أو 130° تقريبًا.

أوجد قيمة C.

$C \approx 180° - (43° + 130°)$ أو 7°

طبّق قانون الــ Sine لإيجاد c.

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الــ Sine

$c \approx \frac{25 \sin 7°}{\sin 43°}$ أو حوالي **3.6** حل المسألة لإيجاد c.

وتكون القياسات المجهولة للمثلث الحاد $\triangle ABC$ هي: $B \approx 50°$ و $C \approx 87°$ و $c \approx 36.6$. بينما القياسات المجهولة للمثلث المنفرج $\triangle AB'C$ هي: $B' \approx 130°$ و $C \approx 7°$ و $c \approx 4.5$.

تمرين موجه

أوجد مثلثين لهما القياسات المعطاة للزوايا وأطوال الأضلاع. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

4A. $A = 38°, a = 8, b = 10$

4B. $A = 65°, a = 55, b = 57$

تلميح تقني

باستخدام $\sin^{-1}$ لاحظ أنه عند حساب $\sin^{-1}$ الخاص بأحد النسب، فإن الآلة الحاسبة لن تعرض أبدًا قياسين محتملين للزوايا؛ نظرًا لأن $\sin^{-1}$ تعد *دالة*. كذلك، لن تعرض الآلة الحاسبة أيضًا قياسًا منفرجًا للزاوية لــ $\sin^{-1}$؛ لأن دالة الــ Sine المعكوسة لها مدى يقدر بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ أو $-90°$ إلى $90°$.

4A. حلان؛ $B \approx 50°, C \approx 92°,$ و $c \approx 13.0$
$B \approx 130°,$ $C \approx 12°, c \approx 2.7$

4B. حلان؛ $B \approx 70°, C \approx 45°,$ و $c \approx 42.9$
$B \approx 110°, C \approx 5°,$ $c \approx 5.3$

مثال إضافي

4 أوجد مثلثين فيهما $A = 45°$، $a = 18$ و $c = 24$. حوّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.
$B \approx 65°, C \approx 70°, b \approx 23.0,$
$B \approx 25°, C \approx 110°, b \approx 11.0$

212 | الدرس 3-7 | قانون الــ Sine وقانون الــ Cosine

مثال إضافي

5 **تنسيق الحدائق** يوجد رشاش عند كل رأس في حديقة مثلثية المساحة. إذا كانت أضلاع الحديقة $a = 19$ قدمًا، $b = 24.3$ قدمًا، و $c = 21.8$ قدمًا، فأي زاوية امتداد ينبغي وضع كل رشاش بها لتغطية المساحة؟
$A \approx 48°$, $B \approx 73°$, $C \approx 59°$

نصيحة دراسية

قانون الـــ Cosine لاحظ أن الزاوية المشار إليها في كل معادلة من قانون الـــ cosine تتوافق مع طول الضلع في الطرف الآخر من المعادلة.

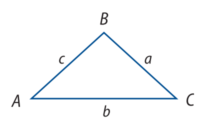
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

يمكنك استخدام **قانون الـــ cosine** لحل مثلث مائل للحالتين المتبقيتين: عندما تُعطى لك قياسات الأضلاع الثلاث، أو قياس ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

المفهوم الأساسي قانون جيب التمام Law of Cosines

في المثلث $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a و b و c مواجهة لزوايا قياساتها A و B و C، على الترتيب، فإن الحل التالي يكون صحيحًا.

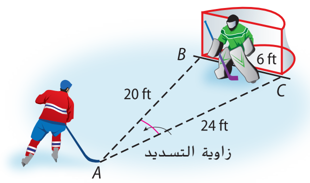
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



ستستنبط القاعدة الأولى لقانون جيب التمام Law of Cosines في التمرين 70.

مثال 5 من الحياة اليومية تطبيق قانون الـــ cosine

الهوكي حين يحاول لاعب هوكي تسديد رمية ويكون على بعد 20 قدمًا من القائم الأيسر للمرمى وعلى بعد 24 قدمًا من القائم الأيمن، كما هو موضح. إذا كان الاتساع المعياري لمرمى الهوكي 6 أقدام، فما زاوية تسديد اللاعب مُقرَّبة لأقرب درجة؟



بما أن الأضلاع الثلاثة معلومة، يمكنك استخدام قانون الـــ Sine لإيجاد زاوية تسديد اللاعب، التي يُرمز لها بـــ A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون الـــ cosine
$6^2 = 24^2 + 20^2 - 2(24)(20) \cos A$	$a = 6$ و $b = 24$ و $c = 20$
$36 = 576 + 400 - 960 \cos A$	بسّط
$36 = 976 - 960 \cos A$	اجمع.
$-940 = -960 \cos A$	اطرح 976 من كل طرف من طرفي المعادلة.
$\frac{940}{960} = \cos A$	اقسم كل طرف من طرفي المعادلة على 960–
$\cos^{-1}\left(\frac{940}{960}\right) = A$	استخدم الدالة الخاصة بـ $\cos^{-1}$.
$11.7° \approx A$	باستخدام الحاسبة.

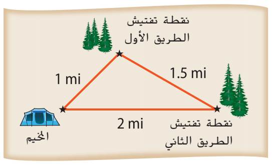
إذًا فزاوية تسديد اللاعب تساوي 12° تقريبًا.

نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل نظرًا لأن المثلث قد يكون له زاوية منفرجة واحدة فقط على الأكثر، من المنطقي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلث أولاً، وهي تكون الزاوية المقابلة لأطول أضلاعه. فإذا كانت الزاوية الكبرى منفرجة، فإنك تعلم أنه لا بد أن تكون الزاويتان الأخيرتان حادتين. وإذا كانت الزاوية الكبرى حادة، فإنه لا بد أن تكون الزاويتان الأخيرتان حادتين.

تمرين موجه

5. التجول سيرًا على الأقدام يقرر مجموعة من الأصدقاء المشاركين في رحلة تخييم أن يخرجوا للتجول سيرًا على الأقدام. وفقًا للخريطة الموضحة، ما الزاوية التي يشكلها الطريقان المؤديان إلى المخيم؟ 46.6°

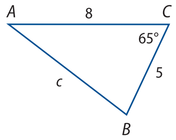


التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب مناقشة كيفية حل المثلثات بمجموعات مختلفة من الأضلاع والزوايا المعروفة. وينبغي عليهم تحديد ما إذا لم يكن هناك أي حل أو ما إذا كان يمكن حل المثلث باستخدام حساب المثلثات قائمة الزاوية أو قانون الـــ Sine أو قانون الـــ Cosine.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 213
12/15/2016 11:41:49 PM

مثال 6 تطبيق قانون الـ sine



حِل $\triangle ABC$. قرِّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 استخدم قانون الـ cosine لإيجاد قياس الضلع المجهول.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ — قانون الـ cosine

$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8) \cos 65°$ — $a = 5$ و $b = 8$ و $C = 65°$

$c^2 \approx 55.19$ — استخدم الحاسبة.

$c \approx 7.4$ — خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف من طرفي المعادلة.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin 65°}{7.4}$ — $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$\sin A = \frac{5 \sin 65°}{7.4}$ — اضرب كل طرف في 5.

$A \approx 38°$ — تعريف $\sin^{-1}$

الخطوة 3 أوجد قياس الزاوية المتبقية.

$B \approx 180° - (65° + 38°)$ أو $77°$

وبالتالي، $c \approx 7.4$ و $A \approx 38°$ و $B \approx 77°$.

تمرين موجه

6. حِل المثلث $\triangle HJK$ إذا علمت أن $H = 34°$ و $j = 7$ و $k = 10$. $h \approx 5.7,\ J \approx 43°,\ K \approx 103°$

2 أوجد مساحات المثلثات المائلة

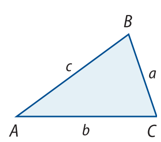
إذا علمتَ قياسات جميع الأضلاع الثلاث، يمكن استخدام قانون الـ cosine لإثبات **قاعدة هيرون** لمساحة المثلث.

المفهوم الأساسي قاعدة هيرون

إذا كانت قياسات أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي a وb وc، إذًا فستكون مساحة المثلث هي

المساحة $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$،

حيث $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$



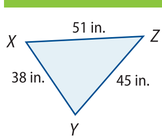
ستُثبت هذه القاعدة في الدرس 5-1

نصيحة دراسية

نصف المحيط يسمى القياس s المستخدم في قاعدة هيرون باسم نصف محيط المثلث.

مثال 7 قاعدة هيرون

أوجد مساحة المثلث $\triangle XYZ$.



وتكون قيمة s هي $\frac{1}{2}(45 + 51 + 38)$ أو 67.

المساحة $= \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ — قاعدة هيرون

$= \sqrt{67(67-45)(67-51)(67-38)}$ — $s = 67$ و $x = 45$ و $y = 51$ و $z = 38$

$= \sqrt{683{,}936}$ — بسّط

$\approx 827 \text{ in}^2$ — استخدم الحاسبة.

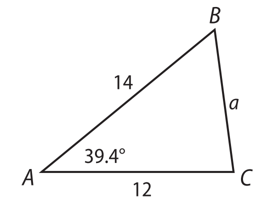
تمرين موجه

7A. $x = 24$ cm, $y = 53$ cm, $z = 39$ cm 432.8 cm^2

7B. $x = 61$ ft, $y = 70$ ft, $z = 88$ ft 2123.7 ft^2

مثال إضافي

6 حِل $\triangle ABC$. حوِّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوِّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.



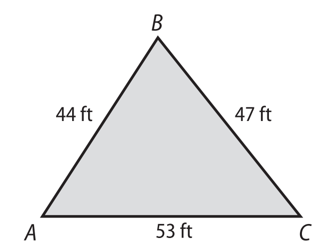
$a \approx 9.0,\ B \approx 58°,\ C \approx 83°$

2 أوجد مساحة المثلثات المائلة

مثال 7 يوضح كيفية إيجاد مساحة مثلث مائل باستخدام صيغة هيرون. **مثال 8** يوضح كيفية إيجاد مساحة مثلث محدد بضلعين وزاوية محصورة.

مثال إضافي

7 أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب عدد عشري.



978.6 ft^2

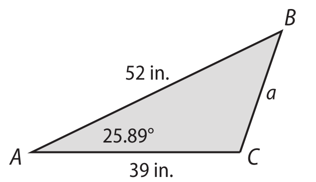
التركيز على محتوى الرياضيات

صيغ المساحة هناك اثنتان من الصيغ لحساب مساحة المثلث عندما يكون الارتفاع غير معروف. إذا كانت جميع مقاييس الأضلاع الثلاثة معروفة، استخدم صيغة هيرون. عندما يكون الضلعان والزاوية المحصورة معروفين، تكون مساحة المثلث مساوية لنصف ناتج ضرب أطوال الضلعين وجيب الزاوية لزاويتها المحصورة.

214 | الدرس 3-7 | قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

مثال إضافي

8 أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب عدد عشري.

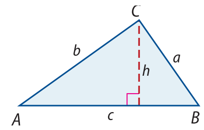


$442.8\ in^2$

إرشاد للمعلمين الجدد

صيغ المساحة أكد على الطلاب أنه لا توجد حاجة إلى حفظ كل من معادلات المساحة الثلاث لمثلث الأضلاع والزاوية المحصورة. وبدلاً من ذلك، ينبغي على الطلاب تعلم الشكل العام لمعادلة المساحة، وهو المساحة تساوي نصف ناتج ضرب طولي الضلعين وجيب زاويتهم المحصورة.

في الحالة المبهمة الخاصة بقانون الـ sine، قارنت بين طول الضلع a وقيمة $h = b \sin A$. في المثلث الموضّح، تمثل h طول ارتفاع الضلع c في $\triangle ABC$. يمكنك استخدام هذا التعبير لارتفاع المثلث لوضع قاعدة لمساحة المثلث.



قاعدة مساحة المثلث	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ch$
عوِّض عن h بـ $b \sin A$.	$= \frac{1}{2}c(b \sin A)$
بسِّط	$= \frac{1}{2}bc \sin A$

وبفرضية مشابهة، يمكنك وضع القواعد:

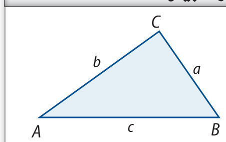
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C$ و $\text{المساحة} = \frac{1}{2}ac \sin B$

لاحظ أنه في كل قاعدة من هذه القواعد، تكون المعلومات المطلوبة لإيجاد مساحة المثلث هي قياسات ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

المفهوم الأساسي مساحة مثلث معلوم الضلعين والزاوية المحصورة بينهما

الكلمات مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين والـ sine الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ac \sin B$
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C$



نصيحة دراسية
مساحة مثلث منفرج الزاوية تسري هذه القاعدة على أي نوع من أنواع المثلث، بما فيها المثلثات منفرجة الزاوية. ستُثبت هذا في الدرس 5-3

نظرًا لأن مساحة المثلث ثابتة، يمكن كتابة القواعد الواردة أعلاه في قاعدة واحدة.

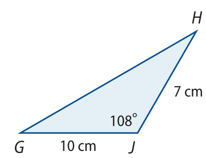
$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B$$

وإذا كان قياس الزاوية المحصورة °90. فلاحظ أن كل قاعدة منها تتحول إلى صورة أبسط متمثلة في القاعدة الخاصة بمساحة المثلث قائم الزاوية. $\frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع)؛ لأن $\sin 90° = 1$.

مثال 8 إيجاد مساحة مثلث معلوم الضلعين والزاوية المحصورة بينهما

أوجد مساحة المثلث $\triangle GHJ$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

في المثلث $\triangle GHJ$، نجد أن $g = 7$ و $h = 10$ و $J = 108°$.



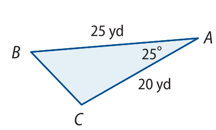
مساحة مثلث باستخدام قياسات طول ضلعين والزاوية المحصورة بينهما	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}gh \sin J$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}(7)(10) \sin 108°$
بسِّط	≈ 33.3

إذًا، تبلغ المساحة حوالي 33.3 سنتيمتر مربع.

تمرين موجه

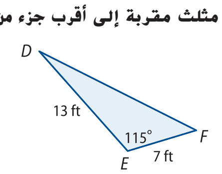
أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

8A.



$105.7\ yd^2$

8B.



$41.2\ ft^2$

تمرين 3

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-51 للتحقق من عملية الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 10-17.
يمكن للطلاب تجاهل الحلول الممكنة في المسألة ما إذا توفر حلان. ذكرهم بالتحقق من حلول متعددة عند توفر مقاييس اثنين من الأضلاع وزاوية حادة غير محصورة.

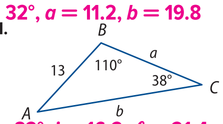
إجابات إضافية

10. $B = 48°, C = 24°, c = 3.9$
11. لا يوجد حل
12. $B = 18°, C = 135°, c = 27.8$
13. $B = 43°, C = 45°, c = 24.7$
14. $B = 14°, C = 21°, c = 8.7$
15. $B = 90°, C = 60°, c = 32.9$
16. لا يوجد حل
17. $B = 90°, C = 45°, c = 10$
19. $B = 63°, C = 78°, c = 18.7$ و $B = 117°, C = 24°, c = 7.8$
20. $B = 52°, C = 102°, c = 11.2$ و $B = 128°, C = 26°, c = 5.0$
21. $B = 70°, C = 49°, c = 12.2$ و $B = 110°, C = 9°, c = 2.5$
22. $B = 84°, C = 49°, c = 25.8$ و $B = 96°, C = 37°, c = 20.6$
23. $B = 70°, C = 56°, c = 31.8$ و $B = 110°, C = 16°, c = 10.6$
24. $B = 30°, C = 132°, c = 19.2$ و $B = 150°, C = 12°, c = 5.4$
27. $B = 39°, C = 99°, a = 12.9$
28. $X = 11°, Y = 137°, Z = 32°$
29. $Q = 27°, R = 80°, p = 14.6$
30. $K = 23°, L = 32°, j = 50.7$
31. $R = 96°, S = 39°, T = 45°$
32. $F = 38°, G = 52°, H = 90°$
33. $C = 162°, D = 2°, b = 24.1$
34. $L = 131°, M = 15°, N = 34°$

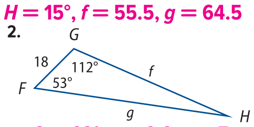
تمارين

حِل كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء عشري إذا لزم الأمر. (المثالان 1 و 2)

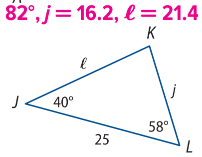
1. $A = 32°, a = 11.2, b = 19.8$



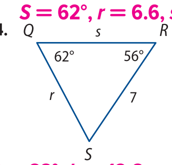
2. $H = 15°, f = 55.5, g = 64.5$



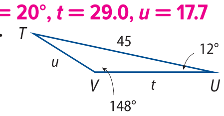
3. $K = 82°, j = 16.2, \ell = 21.4$



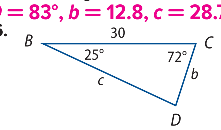
4. $S = 62°, r = 6.6, s = 7$



5. $T = 20°, t = 29.0, u = 17.7$



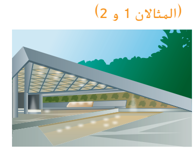
6. $D = 83°, b = 12.8, c = 28.7$



.7 الجولف أخفق لاعب جولف في ضربته التي يبلغ مسارها 12 قدمًا بانحراف 3° عن المسار الصحيح. وتقع الحفرة الآن بزاوية قياسها 120° بين الكرة والنقطة التي كانت بها قبل تنفيذ الضربة. كم تبلغ المسافة التي يتعين على لاعب الجولف تحريك الكرة إليها من أجل تنفيذ الضربة؟ (المثالان 1 و 2) **نحو 0.85 ft.**

.8 الهندسة المعمارية يريد عميل التعاقد مع مهندس معماري بناء منزل على طراز منزل (شيتس جولدشتاين)، الذي صممه المهندس المعماري جون لوتنر. وسيبلغ طول الفناء 60 قدمًا. وسيكون الضلع الأيسر من السطح على زاوية ارتفاع 49°، بينما الضلع الأيمن على زاوية ارتفاع 18°. حدد أطوال الضلعين الأيمن والأيسر للسطح، وكذلك زاوية التقائهما. (المثالان 1 و 2)

اليسار: حوالي 20.1 ft؛ اليمين: حوالي 49.2 ft، 113°



.9 السفر انحرف طيار عن مساره الصحيح بمقدار 8° تفاديًا لعاصفة خلال قطعه لـ 90 ميلاً الأولى من رحلته. ثم غير الطيار مساره ليتجه نحو مقصده بقية الرحلة؛ صانعًا زاوية قياسها 157° مع المسار الأول لرحلته. (المثالان 1 و 2)

.a حدد المسافة الكلية المقطوعة خلال الرحلة. **حوالي 138.4 ميل**

.b حدد مسافة الرحلة المباشرة إلى الوجهة المقصودة. **حوالي 135.9 ميل**

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إذا لم يوجد حل، فاكتب *لا يوجد حل*. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثال 3)

10–17. انظر الحاشية.

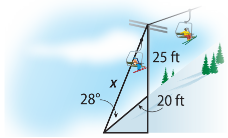
10. $a = 9, b = 7, A = 108°$ **11.** $a = 14, b = 15, A = 117°$

12. $a = 18, b = 12, A = 27°$ **13.** $a = 35, b = 24, A = 92°$

14. $a = 14, b = 6, A = 145°$ **15.** $a = 19, b = 38, A = 30°$

16. $a = 5, b = 6, A = 63°$ **17.** $a = 10, b = \sqrt{200}, A = 45°$

.18 التزلج يرتفع مصعد التزلج بزاوية 28° في أثناء صعود أول 20 قدمًا من الجبل لتحقيق ارتفاع يبلغ 25 قدمًا. ويُحافظ على هذا الارتفاع خلال بقية رحلة صعود الجبل. حدد طول الكابل المطلوب لهذا الصعود الأولي. (المثال 3) **نحو 41 ft.**



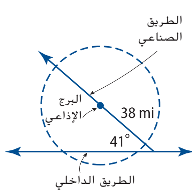
أوجد مثلثين لهما القياسات المعطاة للزوايا وأطوال الأضلاع. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثال 4) **19–24. انظر الحاشية.**

19. $A = 39°, a = 12, b = 17$ **20.** $A = 26°, a = 5, b = 9$

21. $A = 61°, a = 14, b = 15$ **22.** $A = 47°, a = 25, b = 34$

23. $A = 54°, a = 31, b = 36$ **24.** $A = 18°, a = 8, b = 13$

.25 الإذاعة برج إذاعي يقع على بعد 38 ميلاً من الطريق الصناعي ينقل بثًا إذاعيًا له مدى نصف قطره 30 ميلاً. ويتقاطع الطريق الصناعي مع الطريق الداخلي للمدينة بزاوية 41°. ما طول المسافة التي تستطيع السيارات السائرة على الطريق الداخلي للمدينة التقاط إشارة البث خلالها؟ (المثال 4) **33.4 mi**



.26 القوارب يمكن رؤية الضوء الصادر عن منارة في دائرة نصف قطرها 18 ميلاً. وقد رسا قارب بحيث يمكنه بالكاد رؤية ضوء المنارة. بينما يقع قارب ثانٍ على بعد 25 ميلاً من المنارة ويتجه مباشرةً نحوها؛ صانعًا زاوية 44° مع المنارة ومع القارب الأول. أوجد المسافة بين القاربين حين يدخل القارب الثاني نصف قطر ضوء المنارة. (المثال 4) **18.3 mi**

حُــــل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثالان 5 و6) **27–34. انظر الحاشية.**

.27 $\triangle ABC$، إذا كانت $A = 42°$ و $b = 12$ و $c = 19$

.28 $\triangle XYZ$، إذا كانت $x = 5$ و $y = 18$ و $z = 14$

.29 $\triangle PQR$، إذا كانت $P = 73°$ و $q = 7$ و $r = 15$

.30 $\triangle JKL$، إذا كانت $J = 125°$ و $k = 24$ و $\ell = 33$

.31 $\triangle RST$، إذا كانت $r = 35$ و $s = 22$ و $t = 25$

.32 $\triangle FGH$، إذا كانت $f = 39$ و $g = 50$ و $h = 64$

.33 $\triangle BCD$، إذا كانت $B = 16°$ و $c = 27$ و $d = 3$

.34 $\triangle LMN$، إذا كانت $\ell = 12$ و $m = 4$ و $n = 9$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-51, 65-70, 72-89	1-51 فردي, 87-89	2-50 زوجي, 65-70, 72-86
OL ضمن المستوى	1-55 فردي, 56, 57, 59, 61-70, 72-89	1-51, 87-89	52-70, 72-86
BL أعلى من المستوى	52-89		

35. **الطائرات** حلقت قائدة طائرة خلال ورديتها من كولومبوس إلى أتلانتا قاطعةً مسافة تبلغ 448 ميلاً، ثم توجهت إلى فينيكس قاطعةً مسافة تبلغ 1583 ميلاً. ومن فينيكس، عادت ثانية إلى كولومبوس قاطعةً مسافة تبلغ 1667 ميلاً. عيِّن قياسات زوايا المثلث الذي شكله مسار رحلة طيرانها. (المثالان 5 و 6) **15.6°؛ 71.5°؛ 92.9°**

36. **لعبة التقاط الكرة** تُدحرِج ليلى كرة على الأرض بزاوية 23° إلى يمين قطتها نميرة. فإذا كانت الكرة قد تدحرجت لمسافة كلية قدرها 48 قدمًا، بينما هي تقف على بعد 30 قدمًا، فما طول المسافة التي ستقطعها القطة نميرة حتى تصل إلى الكرة؟ (المثالان 5 و 6) **23.5 ft**

استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة كل مثلث. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 7)

37. $x = 9$ cm, $y = 11$ cm, $z = 16$ cm **47.6 cm²**

38. $x = 29$ in., $y = 25$ in., $z = 27$ in. **312.2 in²**

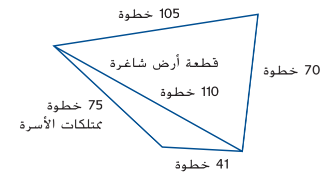
39. $x = 58$ ft, $y = 40$ ft, $z = 63$ ft **1133.0 ft²**

40. $x = 37$ mm, $y = 10$ mm, $z = 34$ mm **167.6 mm²**

41. $x = 8$ yd, $y = 15$ yd, $z = 8$ yd **20.9 yd²**

42. $x = 133$ mi, $y = 82$ mi, $z = 77$ mi **2895.1 mi²**

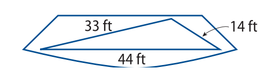
43. **تنسيق الحدائق** تريد عائلة فهد توسعة الفناء الخلفي لمنزلها من خلال شراء قطعة أرض خالية مجاورة لممتلكاتها. لتحديد قياس تقريبي لمساحة قطعة الأرض تلك، عَدّ فهد الخطوات اللازمة للسير حول حدود قطعة الأرض وقطرها. (المثال 7)



a. قدِّر مساحة قطعة الأرض بالخطوات. **4511.5 خطوة²**

b. إذا كان فهد قد قدَّر طول خطوته بـ 1.8 قدم، فحدد مساحة قطعة الأرض بالقدم المربع. **14,617 ft²**

44. **المسرح** خلال أحد العروض، ظل أحد الممثلين واقفًا داخل مساحة مثلثية على خشبة المسرح. (المثال 7)



a. عيّن مساحة خشبة المسرح المستخدمة في العرض. **163.9 ft²**

b. إذا كانت مساحة خشبة المسرح تبلغ 250 قدمًا مربعًا، فحدد نسبة المساحة المستخدمة في الأداء. **66%**

أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 8)

45. △ABC، إذا كانت $A = 98°$ و $b = 13$ mm و $c = 8$ mm **51.5 mm²**

46. △JKL، إذا كانت $L = 67°$ و $j = 11$ yd و $k = 24$ yd **121.5 yd²**

47. △RST، إذا كانت $R = 35°$ و $s = 42$ ft و $t = 26$ ft **313.2 ft²**

48. △XYZ، إذا كانت $Y = 124°$ و $x = 16$ m و $z = 18$ m **119.4 m²**

49. △FGH، إذا كانت $F = 41°$ و $g = 22$ in. و $h = 36$ in. **259.8 in²**

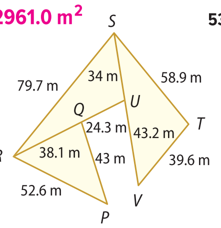
50. △PQR، إذا كانت $Q = 153°$ و $p = 27$ cm و $r = 21$ cm **128.7 cm²**

51. **التصميم** يحتاج مشروع فني مستقل إلى قطعة إسناد مثلثية الشكل لضمان تثبيته. لا بد أن يبلغ طول ضلعين من المثلث 18 و 15 قدمًا، ولا بد أن تبلغ قياس زاويته غير المحصورة بينهما 42°. وإذا كانت أغراض التثبيت تتطلب أن تكون مساحة المثلث على الأقل 75 قدمًا مربعًا، فما طول الضلع الثالث للمثلث؟ (المثال 8)

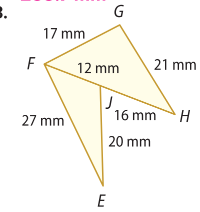
B **حوالي 22.3 ft أو ما يقارب 26.1 ft**

استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة كل شكل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء عشري.

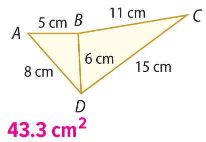
52. **2961.0 m²**



53. **288.7 mm²**

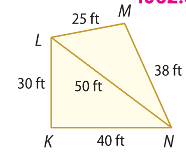


54.



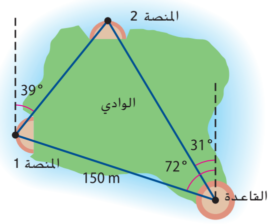
43.3 cm²

55. **1062.6 ft²**



56. **زيب لاينز** منشأة سياحية لها حاليًا قاعدة تتصل بمنصة مركّبة على شجرة تبعد 150 مترًا بحبل انزلاق. ويرغب المالكون الآن في توصيل القاعدة بمنصة أخرى تقع عبر وادٍ ضيق، ثم ربط المنصتين معًا. والمحامل المنصوبة من القاعدة إلى كل منصة منهما، ومن المنصة الأولى إلى الثانية أيضًا معلومة. حدد المسافات من القاعدة إلى المنصة الثانية، ومن المنصة الأولى إلى المنصة الثانية.

حوالي 149.02 m، حوالي 104.72 m

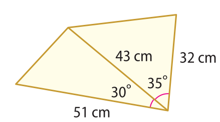


57. **المنارات** تبلغ المسافة بين منارة "ساوث بي" ومنارة "ستيب روك" 25 ميلاً بزاوية 28° شرق الشمال. ورصدت كل منارة منهما قاربًا صغيرًا في حالة استغاثة. وكان المسار إليه يبلغ 50° غرب الشمال من منارة "ساوث بي"، و 80° غرب الجنوب من منارة "ستيب روك". كم يبعد كل برج منهما عن القارب؟

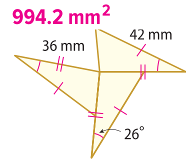
تبعد منارة "ساوث بي" حوالي 25.72 mi من القارب، بينما تبعد منارة "ستيب روك" حوالي 31.92 mi من القارب.

أوجد مساحة كل شكل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من العشرة.

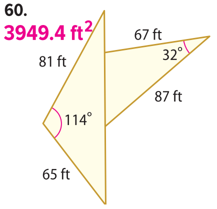
58. 942.9 cm^2



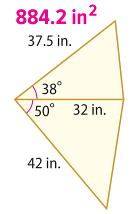
59. 994.2 mm^2



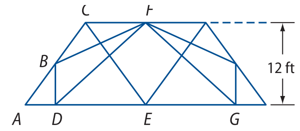
60. 3949.4 ft^2



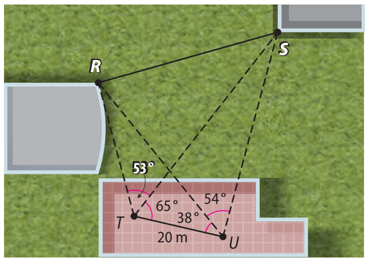
61. 884.2 in^2



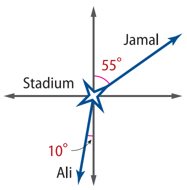
.62 تصميم الجسور في الشكل المدرج أدناه، $\angle FDE = 45°$، $\angle CED = 55°$. $\angle B$، $FDE \cong \angle FGE$ هي نقطة المنتصف لـ AC و DE $EG \cong$. إذا كان $AD = 4$ أقدام و $DE = 12$ قدمًا و $CE = 14$ قدمًا. فأوجد قيمة BF. ≈13.5 ft



.63 المباني تود بدرية معرفة المسافة بين قمتي المبنيين R و S. ومن على قمة مبناها، تقيس المسافة بين النقطتين T و U، فتجد قياسات الزوايا المعطاة. أوجد المسافة بين المبنيين. ≈40.9 m



.64 القيادة بعد مباراة كرة قدم بالمدرسة الثانوية، غادر جمال موقف السيارات قاطعًا مسافة بسرعة 35 ميلاً في الساعة في اتجاه 55° شرق الشمال. إذا تحرك علي بعد جمال بمدة 20 دقيقة بسرعة 45 ميلاً في الساعة في اتجاه 10° غرب الجنوب، فكم تكون المسافة بين علي وجمال بعد مرور ساعة ونصف من تحرك جمال؟ ≈97 mi



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.65 تحليل الأخطاء تحل نبيلة ورشيد مسألة لمثلث حاد الزاوية فيه $\angle A = 34°$ و $a = 16$ و $b = 21$. ترى نبيلة أن للمثلث حلاً واحدًا، بينما يرى رشيد أن المثلث ليس له حل. فهل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح استنتاجك. **انظر الحاشية.**

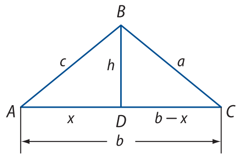
.66 الكتابة في الرياضيات وضّح الأحوال المختلفة التي يمكنك فيها استخدام قانون الـ cosine و sine ومبرهنة فيثاغورس والدوال المثلثية لحل مثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

.67 التبرير لماذا يظهر على الحاسبة البيانية قياس لزاوية منفرجة لجيوب التمام المعكوسة، بينما يظهر قياس سالب للجيوب المعكوسة؟ **انظر الحاشية.**

.68 البرهان برهن على أنه يمكن إيجاد مساحة معين هندسي معطى طول ضلعه s وزاويته المحصورة θ باستخدام القاعدة: $A = s^2 \sin \theta$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

.69 البرهان استنبط قانون الـ sine. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

.70 البرهان لاحظ الشكل الوارد أدناه. **a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

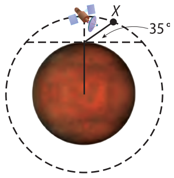


.a استخدم الشكل والإرشادات الواردة أدناه لاستنباط القاعدة الأولى $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ في قانون الـ cosine.

- استخدم مبرهنة فيثاغورس لحل المثلث $\triangle DBC$.
- في المثلث $\triangle ADB$، نجد أن $c^2 = x^2 + h^2$
- $\cos A = \frac{x}{c}$

.b اشرح كيف يمكنك استنباط القاعدتين الأخريَيْن في قانون جيوب التمام.

.71 التحدي يدور قمر صناعي على ارتفاع 850 ميلاً من المريخ، بينما هو الآن مباشرةً فوق أحد القطبين. ويبلغ نصف قطر المريخ 2110 ميلاً. فإذا كان القمر الصناعي متمركزًا عند النقطة X منذ 14 دقيقة مضت، فكم ساعة يستغرقها ليدور دورة كاملة إذا افترضنا أنه يتحرك بمعدل ثابت وفي مدار دائري؟ **حوالي 4.36 ساعة، أو 4 ساعات و 22 دقيقة**



.72 الكتابة في الرياضيات وضح الأسباب لوجود حلين عند حل مثلث فيه $h < a < b$ باستخدام قانون الـ sine. هل هذا الحل صحيح أيضًا إذا استخدمنا قانون الـ cosine؟ وضّح استنتاجك. **انظر الحاشية.**

إجابة إضافية

.65 لا هذا ولا ذاك. في مسألة الزاوية الحادة $h = 21 \sin 34°$ أو 11.7. لأن $a < b$ و $h < a$. هناك حلّان.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 218 12/15/2016 11:42:04 PM

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

73. $\cos^{-1} -\frac{1}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$

74. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$

75. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$

76. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. 80–77. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

77. $y = -2x \sin x$

78. $y = \frac{3}{5}x \cos x$

79. $y = (x-1)^2 \sin x$

80. $y = -4x^2 \cos x$

81. **رسم الخرائط** يمكن إيجاد المسافة المقطوعة حول الأرض على طول خط عرض معلوم باستخدام $C = 2\pi r \cos L$، حيث r هي نصف قطر الأرض و L خط العرض. يبلغ نصف القطر تقريبًا حوالي 3960 ميلاً. أنشئ جدولاً لقيم خط العرض والمسافة المقابلة لها حول الأرض، يشمل $L = 0°$ و30° و45° و60° و90°. استخدم الجدول لوصف المسافات بطول خطوط العرض عند تحركك من زاوية 0° عند خط الاستواء إلى زاوية 90° عند أحد القطبين.
انظر ملحق إجابات الوحدة 6.

82. **النشاط الإشعاعي** بدأ عالِم باستخدام عينة من الرصاص–211 وزنها جرام واحد. والكمية المتبقية من العينة بعد فترات زمنية مختلفة موضحة في الجدول المدرج أدناه.

الوقت (min)	10	20	30	40
الرصاص Pb-211 الموجود (g)	0.83	0.68	0.56	0.46

a. أوجد معادلة انحدار أسية للكمية y من الرصاص كدالة في الزمن x. $y = 1.0091(0.9805)^x$

b. اكتب معادلة انحدار بدلالة القاعدة e. $y = 1.0091e^{-0.0197x}$

c. استخدم المعادلة الموجودة في الجزء b لتقدير زمن الوصول إلى 0.01 جرام من الرصاص -211 الموجود. 234 min

83–86. تُقدَّم نماذج لبعض الإجابات.

اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ حقيقية، وبأصغر درجة ممكنة بصيغة قياسية بحيث تكون لها الأصفار المعطاة.

84. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 8$

86. $f(x) = x^4 + 26x^2 + 25$

83. $-1, 1, 5$
$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

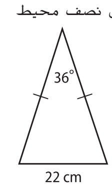
84. $-2, -0.5, 4$

85. $-3, -2i, 2i$
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

86. $-5i, -i, i, 5i$

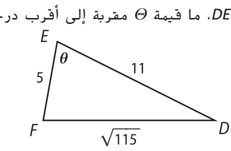
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

87. **SAT/ACT** أي الخيارات التالية يمثل نصف محيط المثلث المعروض؟ E



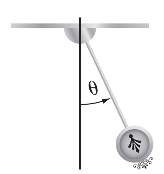
A 49.0 cm
B 66.0 cm
C 71.2 cm
D 91.4 cm
E 93.2 cm

88. في المثلث $\triangle DEF$، ما قيمة Θ مقربة إلى أقرب درجة؟ G



F 26°
G 74°
H 80°
J 141°

89. **الحل الحر** يتحرك البندول على جهة اليمين وفقًا لـ $\theta = \frac{1}{4}\cos 12t$ حيث θ هي الإزاحة الزاويّة بالراديان و t تمثل الزمن بالثواني.



a–e. انظر ملحق إجابات الفصل 3.

a. اضبط الحاسبة على وضع الراديان، وارسم تمثيلاً بيانيًّا للدالة $0 \leq t \leq 2$.

b. ما تردّد الدالة ودورتها وأعلى قيمة تصل إليها؟ ما الذي يمثله كل منها في سياق هذه المسألة؟

c. ما الحد الأقصى لإزاحة البندول الزاويّة بالدرجات؟

d. ما الذي يمثله خط المنتصف في التمثيل البياني؟

e. ما الزمن الذي يقطع فيه البندول إزاحة بمقدار 5 درجات؟

التدريس المتمايز BL

التوسّع أوجد مساحة مثلث في المستوى الإحداثي مع الرؤوس $(0, 0)$، $(6, 0)$، $(3, 3\sqrt{3})$.
$9\sqrt{3}$ وحدات مربعة

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 65. لأن $\angle A$ زاوية حادة، يجب على الطلاب التحقق من الأطوال النسبية في a, b, h. أخفق مونيك وروجيليو في تحليل المسألة تمامًا، وأدى ذلك إلى استنتاجاتهم الخاطئة. لأن $a < b$ و $a > h$، يكون للمثلث حلاّن.

التقويم 4

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة القانون الذي سيستخدمونه لحل مثلث عند توفر زاويتين وضلع محصور قانون الجيب

إجابات إضافية

67. الإجابة النموذجية: يتضمن مجال معكوس الـ Cosine زوايا بقياس 0 إلى 180 درجة. يتضمن مجال معكوس الـ Cosine زوايا بقياس −90 إلى 90 درجة.

72. الإجابة النموذجية: في دائرة الوحدة، تكون دالة جيب الزاوية موجبة في الربعين الأولين / أو عندما $0 < \theta < \pi$. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان $\sin \theta = x$، فإنه يوجد أيضًا $\sin (180 - \theta) = x$. يشير هذا إلى أنه سيكون هناك قيمتان محتملتان لـ θ عند إيجاد $\sin^{-1} x = \theta$. وهذا لا ينطبق على قانون الـ Cosine. لا تكون دالة الـ Cosine موجبة إلا عندما $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. لأن مقياس زاوية المثلث يجب أن يكون أكبر من صفر، فهناك قيمة واحدة فقط في θ.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية بعد كل كلمة إلى المكان الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. وإذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1–10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

الوحدة 3 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

حساب مثلثات المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 3-1)

$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\quad \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\quad \tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ $\quad \sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$ $\quad \cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

الدرجات والراديان (الدرس 3-2)

- للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$
- للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$
- السرعة الخطية: $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس خلال الزمن t
- السرعة الزاويّة: $\omega = \frac{\theta}{t}$، حيث θ هي زاوية الدوران (بالراديان) المحركة خلال الزمن t

الدوال المثلثيّة على دائرة الوحدة (الدرس 3-3)

- بالنسبة لزاوية θ المقيسة بالراديان، والتي بها: (x, y) و $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- بالنسبة للزاوية t التي بها (x, y) على دائرة الوحدة $\cos \theta = x$ و $\sin \theta = y$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

تمثيل دوال الـ sine الزاوية والـ cosine بيانيًّا (الدرس 3-4)

- تُكتب دالة الـ sine كالتالي: $y = a \sin (bx + c) + d$ أو $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث السعة= $|a|$، والفترة = $\frac{2\pi}{|b|}$ والتردد = $\frac{|b|}{2\pi}$، وإزاحة الطور = $-\frac{c}{|b|}$، والإزاحة الرأسية = d.

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى (الدرس 3-5)

- تُكتب الدالة المثلثية المتضائلة كالتالي: $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، عندما تكون $f(x)$ هي العامل المتضائل.

الدوال المثلثية العكسية (الدرس 3-6)

- $y = \sin^{-1} x$ iff $\sin y = x$، لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \cos^{-1} x$ iff $\cos y = x$، لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$
- $y = \tan^{-1} x$ iff $\tan y = x$، لـ $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

قانون الـ sine وقانون الـ cosine (الدرس 3-7)

افترض أن $\triangle ABC$ هو أي مثلث.

- قانون الـ sine: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- قانون الـ cosine:
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

المفردات الأساسية

السعة	المثلث المائل
زاوية الانخفاض	الفترة الزمنية
زاوية الارتفاع	دالة زمنية
السرعة الزاوية	إزاحة الطور
دالة دائرية	الزاوية الربعية
قاطع التمام	الراديان
جيب التمام	دالة المقلوب
ظل التمام	الزاوية المرجعية
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	القاطع
الدالة المثلثية المتضائلة	القطاع
الموجة المتضائلة	جيب الزاوية
عامل التضاؤل	منحنى الـ Sine
التكرار	الوضع القياسي
ضلع الابتداء	المماس
الدالة المثلثية العكسية	ضلع الإنتهاء
قانون جيب التمام	الدوال المثلثية
قانون الـ Sine	الدوال المثلثية
السرعة الخطية	دائرة الوحدة
خط الوسط	إزاحة رأسية

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لصياغة عبارة صحيحة.

1. Sine الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الساق المقابل إلى الوتر. **صحيحة**
2. نسبة دالة الـ Sec هي المعكوس الضربي لنسبة الـ Sine. **خاطئة، قاطع التمام**
3. زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى من هذا الخط. **خاطئة، زاوية الانخفاض**
4. قياس الراديان لزاوية يساوي نسبة طول قوسها المحصور إلى نصف القطر. **صحيحة**
5. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى سرعته الخطية. **صحيحة**
6. $0°$ و π و $-\frac{\pi}{2}$ هي أمثلة لزوايا الإسناد. **خاطئة، الزاوايا الربعية**
7. دورة التمثيل البياني للدالة $y = 4 \sin 3x$ هي 4. **خاطئة، السعة**
8. بالنسبة إلى $f(x) = \cos bx$ كلما ازداد b انخفض التكرار. **خاطئة، الفترة**
9. مدى دالة Sin^{-1} هو $[0, \pi]$. **خاطئة، قوس جيب التمام**
10. يمكن استخدام قانون الـ Sine لتحديد أطوال الأضلاع أو قياسات الزوايا غير المعلومة لبعض المثلثات. **صحيحة**

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 220 12/15/2016 11:42:10 PM

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض المواضيع التي تتناولها الأسئلة. فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية تخبرهم بمواضع مراجعة الموضوع في كتيبهم المدرسية.

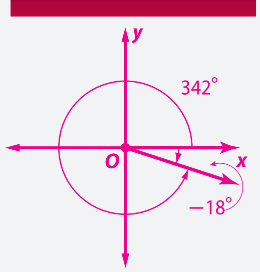
إجابات إضافية

11. $\sin\theta = \frac{12}{13}, \cos\theta = \frac{5}{13},$
$\tan\theta = \frac{12}{5}, \csc\theta = \frac{13}{12},$
$\sec\theta = \frac{13}{5}, \cot\theta = \frac{5}{12}$

12. $\sin\theta = \frac{9}{41}, \cos\theta = \frac{40}{41},$
$\tan\theta = \frac{9}{40}, \csc\theta = \frac{41}{9},$
$\sec\theta = \frac{41}{40}, \cot\theta = \frac{40}{9}$

.22–21 n هو عدد صحيح.

.21 $342° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $702°, \ -18°$

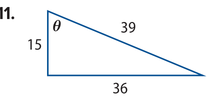


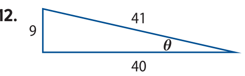
المراجعة التابعة للدرس

3-1 حساب مثلثات المثلثات قائمة الزوايا

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ. **11–12. انظر الهامش.**

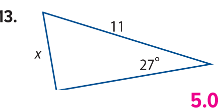
11. **12.**

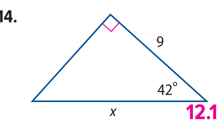




أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

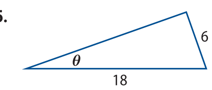
13. **5.0** **14.** **12.1**

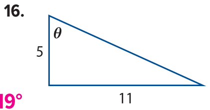




أوجد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

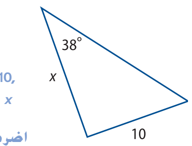
15. **19°** **16.** **66°**





مثال 1

أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$ دالة tan

$\tan 38° = \frac{10}{x}$ $\theta = 38°$, opp = 10, adj = x

$x \tan 38° = 10$ اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{10}{\tan 38°}$ اقسم كل طرف على $\tan 38°$.

$x \approx 12.8$ استخدام الحاسبة.

3-2 الدرجات والراديان

حول كل قياس درجات الى الراديان كمضاعف لـ π، و العكس.

17. $135°$ $\frac{3\pi}{4}$ **18.** $450°$ $\frac{5\pi}{2}$

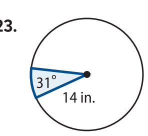
19. $\frac{7\pi}{4}$ **315°** **20.** $\frac{13\pi}{10}$ **234°**

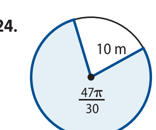
حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

21. $342°$ **22.** $-\frac{\pi}{6}$

أوجد مساحة كل قطاع.

23. **53.0 in²** **24.** **246.1 m²**



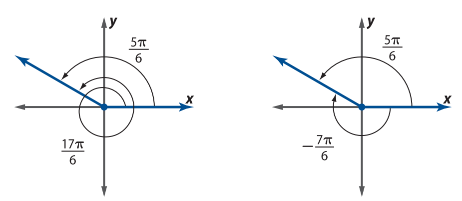


مثال 2

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{5\pi}{12}$. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

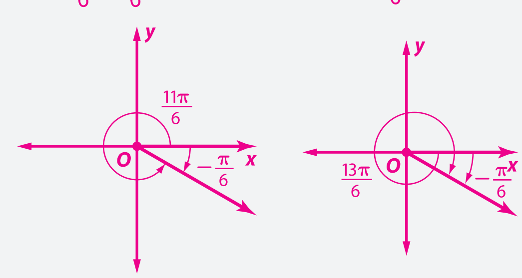
قياسات جميع الزوايا $\frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية $\frac{5\pi}{12}$. افترض أن $n = 1, \ -1$.

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{17\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6} - 2\pi(-1) = -\frac{7\pi}{6}$



221

.22 $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{11\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$



الوحدة 3 دليل الدراسة والمراجعة متابعة

3-3 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. 25–28. انظر الهامش.

25. $240°$ **26.** $75°$

27. $-\frac{3\pi}{4}$ **28.** $\frac{11\pi}{18}$

أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمس المثلثية المتبقية لـ θ. 29–32. انظر الهامش.

29. $\cos\theta = \frac{2}{5}$، حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$

30. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$، حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$

31. $\sin\theta = -\frac{5}{13}$، حيث تكون $\cos\theta > 0$ و $\cot\theta < 0$

32. $\cot\theta = \frac{2}{3}$، حيث تكون $\sin\theta < 0$ و $\tan\theta > 0$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

33. $\sin 180°$ **0** **34.** $\cot\frac{11\pi}{6}$ $-\sqrt{3}$

35. $\sec 450°$ **غير مُعرَّفة** **36.** $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 3

افترض أن $\cos\theta = \frac{5}{13}$، حيث تكون $\sin\theta < 0$. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

بما أن $\cos\theta$ موجبة و $\sin\theta$ سالبة. فإن θ تقع في الربع IV. وهذا يعني أن الإحداثي x لنقطة ما على الضلع الطرفي لـ θ موجب، والإحداثي y سالب.

بما أن $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$، استخدم $x = 5$ و $r = 13$ لإيجاد y.

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ نظرية فيثاغورس

$= -\sqrt{169 - 25} = -12$ $x = 5$ و $r = 13$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{12}{13}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{12}{5}$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{5}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{12}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{5}{12}$

3-4 تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا

وضح كيفية ترابط التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ثم أوجد دورة وسعة $g(x)$. وارسم دورة واحدة على الأقل لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها. 37–40. انظر الهامش.

37. $f(x) = \sin x$, $g(x) = 5\sin x$ **38.** $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$

39. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ **40.** $f(x) = \cos x$, $g(x) = -\cos\frac{1}{3}x$

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا فترتين للدالة.

41. $y = 2\cos(x - \pi)$ **42.** $y = -\sin 2x + 1$

43. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **44.** $y = 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

41–44. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مثال 4

حدد السعة، والدورة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لـ $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4$. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

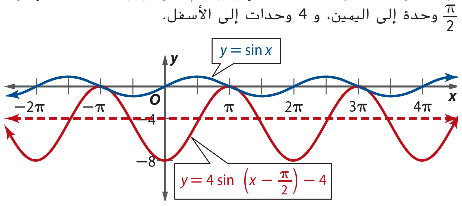
في هذه الدالة، $a = 4$ و $b = 1$ و $c = -\frac{\pi}{2}$ و $d = -4$.

السعة: $|a| = |4|$ أو 4 الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π

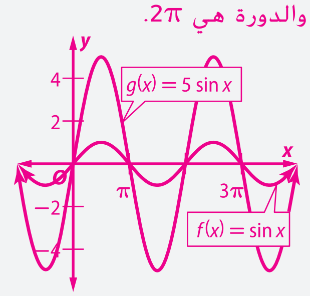
التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi}$ أو $\frac{1}{2\pi}$ الإزاحة الرأسية: d أو -4

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|1|}$ أو $\frac{\pi}{2}$

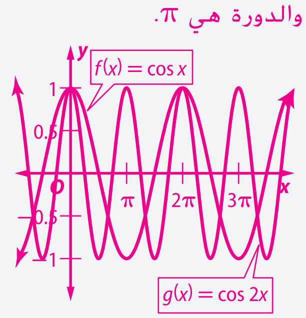
أولاً، مثّل خط الوسط $y = -4$ بيانيًا. ثم مثّل $y = 4\sin x$ بيانيًا مزاحة $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين، و 4 وحدات إلى الأسفل.



37. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا رأسيًا. سعة $g(x)$ هي 5، والدورة هي 2π.

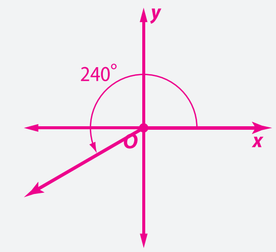


38. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا. سعة $g(x)$ هي 1، والدورة هي π.

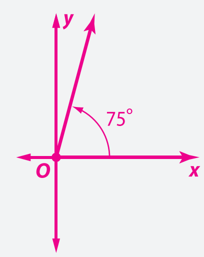


إجابات إضافية

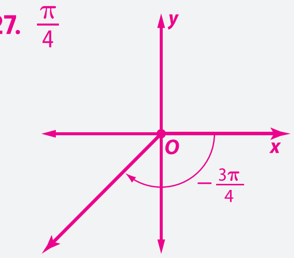
25. $60°$



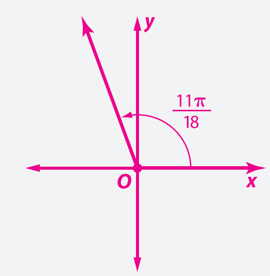
26. $75°$



27. $\frac{\pi}{4}$



28. $\frac{7\pi}{18}$



29. $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\csc\theta = \frac{5\sqrt{21}}{21}$, $\sec\theta = \frac{5}{2}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

30. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

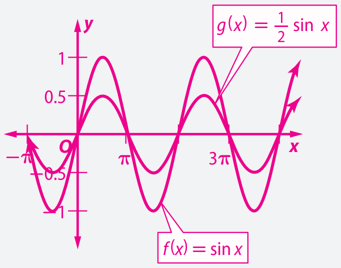
31. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$

32. $\sin\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$

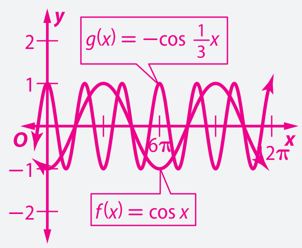
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 222 12/15/2016 11:42:17 PM

إجابات إضافية

39. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا رأسيًا. سعة $g(x)$ هي $\frac{1}{2}$. والدورة هي 2π.



40. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا أفقيًا ومنعكسًا على المحور الأفقي x. سعة $g(x)$ هي 1. والدورة هي 6π.



61. $B = 12°, C = 146°, c = 16.4$

62. $B = 48°, C = 90°, c = 13.5$ و $B = 132°, C = 6°, c = 1.4$

63. $B = 29°, C = 73°, c = 19.5$

64. لا يوجد حل

65. $A = 78°, B = 65°, C = 37°$

66. $c = 6.7, A = 36°, B = 48°$

3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

حَدد الخطوط المُقاربة العمودية، ومَثل كل دالة بيانيًا.
45–52. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

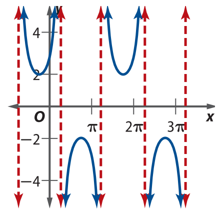
45. $y = 3 \tan x$
46. $y = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
47. $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
48. $y = -\cot (x - \pi)$
49. $y = 2 \sec \left(\frac{x}{2}\right)$
50. $y = -\csc (2x)$
51. $y = \sec (x - \pi)$
52. $y = \frac{2}{3} \csc \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 5

حَدد الخطوط المقاربة الرأسية، وارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = 2 \sec \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

لأن التمثيل البياني لـ $y = 2 \sec \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = 2 \sec x$ مزاحًا $\frac{\pi}{4}$ وحدات إلى اليسار. فإن الخطوط المقاربة الرأسية لفترة واحدة تقع في $-\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$.

مثّل بيانيًا دورتين على الفترة الفاصلة $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right]$



3-6 الدوال المثلثية العكسية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

53. $\sin^{-1}(-1)$ $-\frac{\pi}{2}$
54. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
55. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$
56. $\arcsin 0$ 0
57. $\arctan (-1)$ $-\frac{\pi}{4}$
58. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
59. $\sin^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ $-\frac{\pi}{3}$
60. $\cos^{-1}[\cos(-3\pi)]$ π

مثال 6

أوجد القيمة الدقيقة لـ $-\sqrt{3}$.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة الفاصلة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بالمماس $-\sqrt{3}$. عندما تكون $t = -\frac{\pi}{3}$، $\tan t = -\sqrt{3}$.
وبذلك، $\arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3-7 قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب *ليس هناك حل*. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة. **61–64. انظر الهامش.**

61. $a = 11, b = 6, A = 22°$
62. $a = 9, b = 10, A = 42°$
63. $a = 20, b = 10, A = 78°$
64. $a = 2, b = 9, A = 88°$

65–66. انظر الهامش.
حل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة.

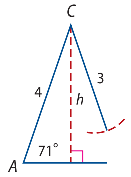
65. $a = 13, b = 12, c = 8$
66. $a = 4, b = 5, C = 96°$

مثال 7

حل المثلث إذا كان $a = 3$، $b = 4$، و $A = 71°$.

في الشكل، $h = 4 \sin 71°$ أو حوالي 3.8.

لأن $h \leq a$. فإنه لا يوجد مثلث يمكن تشكيله بالأضلاع $a = 3$، $b = 4$، و $A = 71°$. إذًا، لا حل لهذه المسألة.



الوحدة 3

دليل الدراسة والمراجعة متابعة

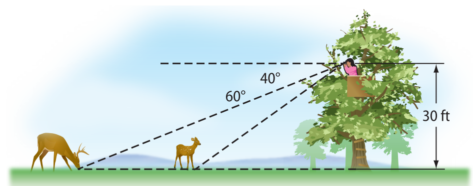
التطبيقات وحل المسائل

.67 **البناء** تقوم شركة تعمير بتركيب منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع ثلاث أقدام على بسطة درج أحد المكاتب. بحيث تكون زاوية المنحدر °4. (الدرس 3-1)

a. ما طول المنحدر؟ **43 ft**

b. ما ميل المنحدَر؟ **0.07**

.68 **الطبيعة** ضمن مشروع تصوير فوتوغرافي، تقوم خديجة بتصوير غزال من موقع على شجرة. من موقع نظرها الذي يرتفع 30 قدمًا عن الأرض، تلمح غزالين في خط مستقيم، كما هو موضح أدناه. كم يبعد الغزال الثاني عن الأول؟ (الدرس 3-1) **18.4 ft**



.69 **التزلّج الفني على الجليد** تؤدي متزلّجة أوليمبية حركة معتادة بالقفز في الهواء لمدة 2.4 ثانية، بينما تدور 3 دورات كاملة. (الدرس 3-2)

a. أوجد السرعة الزاوية للمتزلّجة. **150π/min أو 2.5π/s**

b. عبّر عن السرعة الزاويّة للمتزلّجة بالدرجات لكل دقيقة. **27,000°/min**

.70 **الساعات** يبلغ طول عقرب دقائق ساعة جيب 1.5 بوصة. ما المساحة التي يغطيها عقرب الدقائق خلال 40 دقيقة؟ (الدرس 3-2) **$4.7\ in^2$**

.71 **المعرض العالمي** كان قطر أول ساقية دوارة 250 قدمًا واستغرقت 10 دقائق لإتمام دورة واحدة كاملة حول محورها. (الدرس3-3)

a. كم عدد الدرجات التي تدورها عجلة فيريس خلال 100 ثانية؟ **60°**

b. ما المسافة التي يتحرَّكها شخص ما إن ركب عجلة فيريس لمدة 7 دقائق؟ **550 ft**

c. كم يستغرق شخص ليتحرك 200 قدم؟ **2.5 min**

.72 **تكييف الهواء** تعمل وحدة تكييف الهواء وتتوقف للمحافظة على درجة الحرارة المرادة. في أحد أيام الصيف، يعمل مكيف الهواء في الساعة 8:30 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °80 فهرنهايت، ويتوقف تشغيله في الساعة 8:55 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °74. (الدرس 3-4)

a. أوجد السعة والفترة إذا كنت ستستخدم دالة مثلثية لتمثيل التغير في درجة الحرارة؛ مُفترِضًا أن دورة درجة الحرارة ستستمر. **3; 50 min**

b. هل يصح تمثيل هذه الحالة باستخدام دالة مثلثية؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

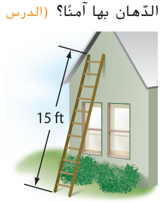
.73 **المد والجزر** في خليج لويس، سُجِّل مقدار الجزر بقدمين في 4:30 صباحًا، ومقدار المد بـــ 5.5 قدم في 10:45 صباحًا. (الدرس 3-4)

a. أوجد فترة التمثيل المثلثي. **12 h 30 min**

b. في أي وقت يحدث المد التالي؟ **11:15 مساءً**

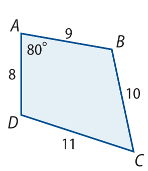
.74 **الموسيقى** عندما يُسحَب وتر الكمان، فإنه يتحرك بمقدار 1.5 بوصة، بينما يكون عامل التضاؤل الخاص به 1.9. يصدر نوتة بتردد 90 دورة في الثانية. حدد المدة الزمنية التي يستغرقها الوتر ليتضاءل بحيث تكون: $-0.1 \le y \le 0.1$. (الدرس 3-5) **حوالي 1.41 s**

.75 **الطلاء** يستخدم الدّهان سلمًا طوله 15 قدمًا ليطلي جانب أحد المنازل. وإذا أصبحت الزاوية بين السلم والأرض أقل من °65، فسينزلق السلم من تحته. ما أكبر مسافة يمكن أن يبتعد بها قاع السلم عن جانب المنزل ويظل الدّهان بها آمنًا؟ (الدرس 3-6) **6.3 ft**



.76 **المِلاحة** يبعد قارب 20 ميلاً ملاحيًا عن الميناء بمقدار °30 شمال الشرق. ويري الربان قاربًا ثانيًا، ويبلّغ الميناء بأن قاربه يبعد 15 ميلاً ملاحيًا عن القارب الثاني الموجود شرق الميناء. هل يمكن لموظفي الميناء التأكد من موقع القارب الثاني؟ علل إجابتك. (الدرس 3-7) **انظر الهامش.**

.77 **الهندسة** فكّر في رباعي الأضلاع *ABCD*. (الدرس 3-7)



a. أوجد *C*. **63°**

b. أوجد مساحة *ABCD*. **84 وحدة مربعة**

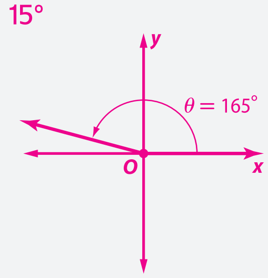
إجابات إضافية

.72b الإجابة النموذجية: لا تبدو الدالة دورية؛ لأن الأمر قد يستغرق وقتًا أكثر أو أقل لكي تدفأ الحرارة صعودًا مرة أخرى إلى °80

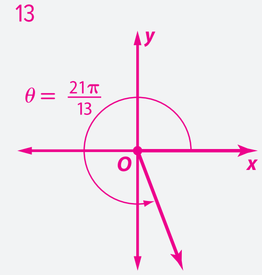
.76 لا. الإجابة النموذجية: بما أن $a < b$، و $a > h$، فإنه يوجد مثلثان محتملان بالأبعاد المعطاة. لذا، لا يمكن للمقرات الرئيسية التأكد من موقع القارب المجهول.

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

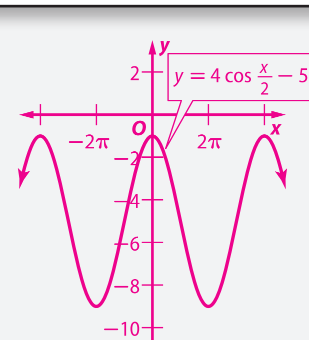
9. 15°



10. $\frac{5\pi}{13}$



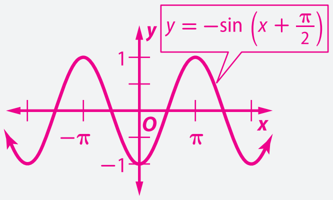
.14 السعة = 4؛ الدورة = 4π؛ التكرار = $\frac{1}{4\pi}$؛ إزاحة الطور = 0؛ الإزاحة الرأسية = -5؛



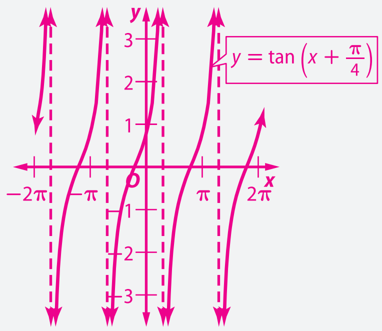
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 224
12/15/2016 11:42:23 PM

إجابات إضافية

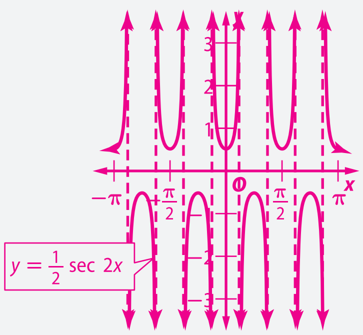
15. السعة $= 1$؛ الدورة $= 2\pi$؛ التكرار $= \frac{1}{2\pi}$؛ إزاحة الطور $= -\frac{\pi}{2}$؛ الإزاحة الرأسية $= 0$؛



17.



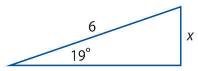
18.



الوحدة 3 تدريب على الاختبار

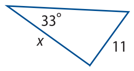
أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1.



2.0

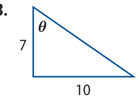
2.



16.9

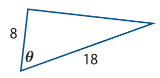
أوجد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

3.



55°

4.



64°

5. الاختيار من متعدد ما السرعة الخطية لنقطة تدور بسرعة زاويّة 36 راديان لكل ثانية على بعد 12 بوصة من مركز الدوران؟ **B**

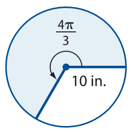
A 420 in./s
B 432 in./s
C 439 in./s
D 444 in./s

اكتب كل مقياس درجة بالراديان كمضاعف لــ π، وكل مقياس راديان بالدرجات.

6. $200°$ $\frac{10\pi}{9}$

7. $-\frac{8\pi}{3}$ $-480°$

8. أوجِد مساحة القطاع المعروض من الدائرة. **209.4 in^2**



ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. 9–10. انظر الهامش.

9. $165°$

10. $\frac{21\pi}{13}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

11. $\sec\frac{7\pi}{6}$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. $\cos(-240°)$ $-\frac{1}{2}$

13. الاختيار من متعدد تتحقق في زاوية θ المتباينات التالية: $\csc\theta < 0$، $\cot\theta > 0$ و $\sec\theta < 0$. في أي ربع تقع θ ؟ **H**

F I
G II
H III
J IV

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًّا فترتين للدالة. 14–15. انظر الهامش.

14. $y = 4\cos\frac{x}{2} - 5$

15. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

16. المد والجزر يبين الجدول الأوقات التقريبية التي حدث فيها المد والجزر في خليج سان أزاليا على مدار يومين.

المد والجزر	المد 1	الجزر 1	المد 2	الجزر 2
اليوم 1	2:35 صباحًا.	8:51 صباحًا.	3:04 مساءً.	9:19 مساءً.
اليوم 2	3:30 صباحًا.	9:48 صباحًا.	3:55 مساءً.	10:20 مساءً.

الإجابة النموذجية: 12 h 30 min

a. يمكن تمثيل المد والجزر بدالة مثلثية. ما الفترة الزمنية لهذه الدالة تقريبًا؟

3.5 ft

b. الفرق في الارتفاع بين المد والجزر هو 7 أقدام. ما سعة هذه الدالة؟

c. اكتب دالة توضح المد والجزر حين تكون t مقيسة بالساعات. افترض أن هذه الدالة ليس لها إزاحة طور أو إزاحة رأسية.

$y = 3.5\sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right)$

حَدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثِّل كل دالة بيانيًا.
17–18. انظر الهامش.

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

18. $y = \frac{1}{2}\sec 2x$

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن هناك حل، فاكتب *ليس هناك حل*. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة.

19. $B = 49°$, $C = 109°$, $c = 20.1$ and $B = 131°$, $C = 27°$, $c = 9.7$

19. $a = 8, b = 16, A = 22°$

20. $a = 9, b = 7, A = 84°$
$B = 51°, C = 45°, c = 6.4$

21. $a = 3, b = 5, c = 7$
$A = 22°, B = 38°, C = 120°$

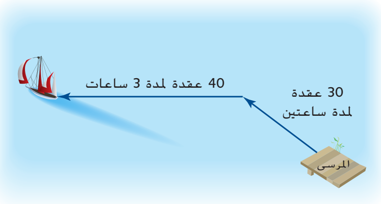
22. $a = 8, b = 10, C = 46°$
$c = 7.3, A = 52°, B = 82°$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجِدت.

23. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$

24. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$

25. المِلاحة يغادر قاربٌ الميناءَ ويتحرك 45° شمال الغرب بمتوسط 30 عقدة لمدة ساعتين. ثم يتحرك القارب غربًا مباشرةً بمتوسط 40 عقدة لمدة 3 ساعات.



a. كم عدد الأميال الملاحية التي يبعدها القارب عن المرسى بعد 5 ساعات؟ **حوالي 167.9 ميلاً بحريًّا**

b. كم درجةً جنوب الشرق يقع عندها المرسى بالنسبة إلى الموضع الحالي للمركب؟ **حوالي 15° جنوب الشرق**

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 225 12/15/2016 11:42:26 PM

1 التركيز

الهدف تمثيل مسائل المعدلات المترابطة وحلها.

نصيحة تدريسية

قد يشعر بعض الطلاب بالصعوبة بسبب تعقيد هذه المسائل. يُرجى التأكيد على أن يقوم الطلاب بتحليل الوضع وتطبيق ما يعرفونه باستخدام نهج الخطوة بخطوة. فمثلاً، قبل التفكير في معدل التغير في المسافة بين السيارات، يجب على الطلبة أولاً تمثيل حركة كل سيارة على حدة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلبة في الصف الدراسي إلى مجموعات ثنائية ذات قدرات متنوعة. اطلب من كل مجموعة العمل من خلال الخطوات 1 إلى 5 من النشاط 1. ثم اطلب من أحد المتطوعين تقديم عمل مجموعته الثنائية للخطوة 1. كرر الخطوات من 2 إلى 5. بعد مراجعة الخطوات مع الصف الدراسي، اطلب من كل مجموعة ثنائية إكمال التمارين 1 إلى 3 من قسم تحليل النتائج.

كرر النشاط 2.

إجابات إضافية

نشاط 1

الخطوة 2 سيارة تسير شمالاً: $d = 35t$؛ سيارة تسير شرقًا: $d = 55t$

الخطوة 3 سيارة تسير شمالاً: $d(1) = 35$ mi, $d(2) = 70$ mi, $d(3) = 105$ أميال. $d(4) = 140$ mi؛ سيارة تسير شرقًا: $d(1) = 55$ mi, $d(2) = 110$ mi, $d(3) = 165$ mi, $d(4) = 220$ mi

الخطوة 4 $t = 1$, 65.19 mi; $t = 2$, 130.38 mi; $t = 3$, 195.58 mi; $t = 4$, 260.77 mi

الخطوة 5 $1 \le t \le 2 = 65.19$ mi/h; $2 \le t \le 3 = 65.2$ mi/h; $3 \le t \le 4 = 65.19$ mi/h

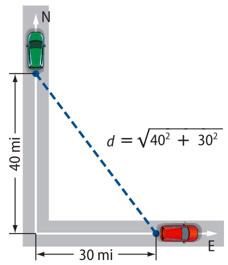
---

3 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
المعدلات المرتبطة

:.الهدف

- تمثيل مسائل المعدلات المرتبطة وحلها.

إذا كان الهواء يُضخ في بالون بمعدل معلوم، فهل يمكننا إيجاد معدل تمدد حجم البالون؟ كيف يؤثر معدل إنفاق شركة ما لأموالها في الدعاية في معدل مبيعاتها؟ *المعدلات المترابطة* تظهر مشكلاتها عندما يمكن إيجاد معدل التغير لمتغير واحد من خلال *ربط* ذلك بمعدلات التغير للمتغيرات الأخرى.



لنفترض أن سيارتين تغادران نقطة ما في الوقت نفسه. إحداهما تبلغ سرعتها 40 ميلاً في الساعة وتتجه نحو الشمال، بينما الأخرى تبلغ سرعتها 30 ميلاً في الساعة وتتجه نحو الشرق. كم تبعد إحداهما عن الأخرى بعد ساعة واحدة؟ وبعد ساعتين؟ وبعد 3 ساعات؟ يمكننا استخدام القانون: $d = rt$ ومبرهنة فيثاغورس للوصول إلى هذه القيم.

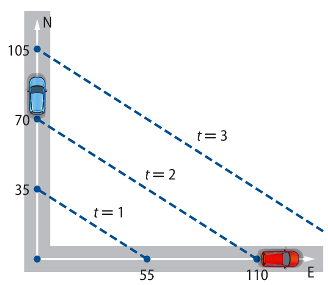
في هذه الحالة، نعرف معدلات التغير لكل سيارة. ماذا لو أردنا معرفة معدل تغير المسافة بين السيارتين؟

نشاط 1 معدل التغير

سيارتان تغادران منزلاً في الوقت نفسه. تغادر إحداهما باتجاه الشمال بسرعة 35 ميلاً في الساعة، بينما الأخرى تتجه إلى الشرق بسرعة 55 ميلًا في الساعة. عيِّن معدل تغير المسافة بين السيارتين تقريبًا.

الخطوات 2-5. انظر الحاشية.

الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.



الخطوة 2 اكتب معادلات تمثل المسافة التي تسيرها كل سيارة منهما بعد عدد t من الساعات.

الخطوة 3 أوجد المسافة التي قطعتها كل سيارة بعد ساعة وساعتين و3 ساعات و4 ساعات.

الخطوة 4 استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين السيارتين عند كل نقطة في الوقت المحدد.

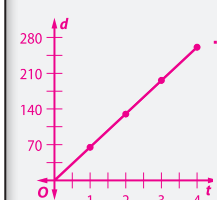
الخطوة 5 أوجد متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين لـ $1 \le t \le 2$ و $2 \le t \le 3$ و $3 \le t \le 4$.

تحليل النتائج

1. ارسم مخطط تشتت يعرض المسافة الكلية بين السيارتين. افترض أن الزمن t هو المتغير المستقل، والمسافة الكلية d هي المتغير التابع. ارسم خطًّا بين النقاط.
2. أي نوع من الدوال يعبّر عنه التمثيل البياني؟ ما فرضيتك المبنية على القيم الموجودة في الخطوة 5؟
3. ماذا يحدث لمتوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين إذا أبطأت إحدى السيارتين سرعتها أو زادتها؟ اشرح استنتاجك.

معدل تغير المسافة بين السيارتين *يرتبط* بمعدلات السيارتين. في حساب التفاضل والتكامل، يمكن حل المسائل التي تتضمن المعدلات المترابطة باستخدام *التفاضل الضمني*. ومع ذلك، قبل أن يكون بإمكاننا استخدام تقنيات التفاضل المتقدمة، نحتاج إلى فهم كيفية ارتباط المعدلات بعضها ببعض. ولذلك، فإن أولى خطوات حل أي مسألة معدلات مترابطة يجب أن تكون تمثيل الحالة باستخدام رسم تصوري أو تمثيل بياني، وبكتابة المعادلات باستخدام المتغيرات والقيم ذات الصلة.

.1



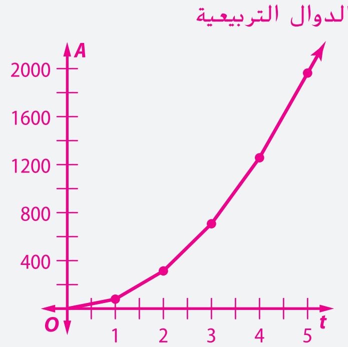
.2 الدالة الخطية؛ الإجابة النموذجية: كانت معدلات التغير المتوسطة واحدة في كل الفترات الفاصلة، وهو ما يشير إلى ميل ثابت.

.3 الإجابة النموذجية: إذا أبطأت إحدى السيارتين من سرعتها، فستزداد المسافة بين السيارتين بمعدل أبطأ. وبذلك، يكون متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين أصغر. إذا زادت سرعة إحدى السيارتين، فستزداد المسافة بين السيارتين بمعدل أسرع. وبذلك، يكون متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين أكبر.

نشاط 3

الخطوة 3 x = 3: h = 0.1, m = 479.1; h = 0.01, m = 472; h = 0.001, m = 471.3
x = 4: h = 0.1, m = 636.2; h = 0.01, $m = 629.1$; $h = 0.001$, $m = 628.4$

.6 الدوال التربيعية



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 226 12/15/2016 11:42:30 PM

تمرين اطلب من الطلاب إتمام النشاط 3 والتمرين 10 في قسم استخدام النماذج والتطبيق.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 10 الأجزاء من a إلى c لتقييم قدرات الطلاب لتمثيل موقف معدل مرتبط بالحياة اليومية.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تحديد العلاقات الأساسية التي تم استخدامها لتمثيل الأحداث في النشاطين 1 و2 ووصفها. فمثلاً، في النشاط 1، يتم وصف حركة كل سيارة من خلال المعادلة: المسافة = السرعة × الوقت. ثم يتم ربط معادلتي المسافة من خلال نظرية فيثاغورس.

توسيع المفهوم

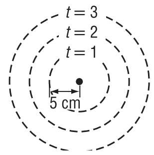
حدد المعدلين المترابطين وصِف العلاقة الأساسية اللازمة لتمثيل الموقف التالي. يتم ضخ الهواء في بالون بمعدل $1\ cm^3/s$. إذا كان البالون كرويًا، فعند أي معدل يزداد نصف قطره عندما يكون قطر البالون 15 cm؟ المعدلان هما المعدل الذي يتغير عنده الحجم والمعدل الذي يتغير عنده نصف القطر. العلاقة الأساسية هي حجم الكرة: الحجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$، حيثما يكون r هو نصف قطر البالون.

إجابات إضافية

9. الإجابة النموذجية: في النشاط الأول، يشبه التمثيل البياني دالة خطية. ولذلك، يمكن إيجاد متوسط معدل التغيير باستخدام أي نقطتين طالما ظل معدل التغيير ثابتًا. وفي النشاط الثاني، يشبه التمثيل البياني دالة تربيعية. كان لابد من استخدام ناتج قسمة الفرق لتقريب معدل التغيير عند كل قيمة فردية من t.

نشاط 2 تمثيل المعدلات المرتبطة

أُلقِي حجر في جسم مائي ساكن، فصنع تموجًا دائريًا يتَّسع بمعدل 5 سنتيمترات في الثانية. أوجد مساحة الدائرة بعد ثلاث ثوانٍ إذا كان نصف قطر الدائرة يبلغ 5 سنتيمترات عندما تكون $t = 1$.



الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلة لنصف قطر الدائرة r بعد عدد t من الثواني. $r = 5t$

الخطوة 3 أوجد نصف القطر عندما تكون $t = 3$، ثم أوجد المساحة.

نصف القطر = 15 cm؛ المساحة = 225π أو $705.9\ cm^2$

تحليل النتائج

4. أوجد معادلة للمساحة A في الدائرة بدلالة t. $A = \pi(5t)^2$ أو $25\pi t^2$
5. أوجد مساحة الدائرة عندما $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ثانية.
6. اصنع تمثيلًا بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟ **انظر الحاشية.**

5. عندما تكون $t = 1$، فإن $A \approx 79\ cm^2$.
عندما تكون $t = 2$، فإن $A \approx 314\ cm^2$.
عندما تكون $t = 3$، فإن $A \approx 707\ cm^2$.
عندما تكون $t = 4$، فإن $A \approx 1257\ cm^2$.
عندما تكون $t = 5$، فإن $A \approx 1963\ cm^2$.

يمكنك استخدام ناتج قسمة الفرق لحساب معدل التغير في مساحة الدائرة عند نقطة زمنية محددة.

نشاط 3 تقريب المعدل المترابط

عيّن معدل تغير مساحة الدائرة في النشاط 2 على وجه التقريب.

الخطوة 1 استبدل تعبير مساحة الدائرة بناتج قسمة الفرق.

$$m = \frac{\pi[5(t+h)]^2 - \pi(5t)^2}{h}$$

الخطوة 2 عيّن معدل تغير الدائرة بعد ثانيتين على وجه التقريب. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$.

$h = 0.1, m = 322;$ $h = 0.01, m = 314.9;$ $h = 0.001, m = 314.2$

الخطوة 3 كرر الخطوات 1, 2 عندما ثوانٍ $t = 3$، و ثوانٍ $t = 4$. **انظر الحاشية.**

نصيحة دراسية
ناتج قسمة الفرق تذكَّر أن ناتج قسمة الفرق لحساب ميل خط المماس بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ يكون $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

تحليل النتائج

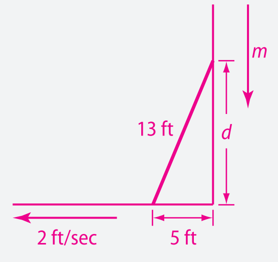
7. إلى أي قيمة من قيم t يبدو اقتراب معدلات التغير؟
8. ماذا يحدث لمعدل تغير مساحة الدائرة مع زيادة نصف القطر؟ اشرح.
9. ما وجه اختلاف هذا المنهج عن المنهج الذي استخدمته في النشاط 1 لإيجاد معدل تغير المسافة بين السيارتين؟ اشرح لماذا كان هذا ضروريًا. **انظر الحاشية.**

7. عندما تكون $t = 2$، فإن m تصل إلى $314\ cm^2/sec$. عندما تكون $t = 3$، فإن m تصل إلى $471\ cm^2/sec$. عندما تكون $t = 4$، فإن m تصل إلى $628\ cm^2/sec$.
8. الإجابة النموذجية: بزيادة نصف القطر، يكون معدل زيادة مساحة الدائرة أكبر. وبما أن مساحة الدائرة تُعيَّن من خلال تربيع نصف القطر، فإن أي زيادة في نصف القطر تؤثر في المساحة.

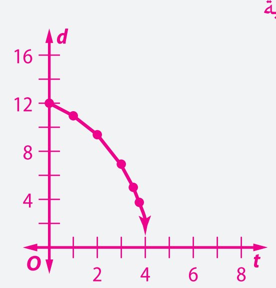
التمثيل والتطبيق **a, d, e. انظر الحاشية.**

10. سلّم يبلغ طوله 13 قدمًا يستند إلى جدار، بحيث تكون قاعدته على بعد 5 أقدام من قاعدة الجدار. إذا بدأ قاع السلم في الانزلاق بعيدًا عن الجدار بمعدل قدمين في الثانية، فما سرعة انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار؟
   a. مثّل الحالة. افترض أن d هي المسافة من قمة السلم إلى الأرض، وm هو معدل انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار.
   b. اكتب تعبيرًا للمسافة من قاعدة السلم إلى الحائط بعد عدد t من الثواني. **$5 + 2t$**
   c. أوجد معادلة للمسافة d من قمة السلم إلى الأرض بدلالة t بالتعويض بالتعبير الموجود في الجزء b في مبرهنة فيثاغورس.
   d. استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة d من قمة السلم إلى الأرض عندما يكون $t = 0, 1, 2, 3, 3.5, 3.75$.
   e. اصنع تمثيلاً بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟
   f. استخدم ناتج قسمة الفرق لتقدير معدل تغير m للمسافة من قمة السلم إلى الأرض عندما تكون $t = 2$. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$. وباقتراب قيمة h من الصفر، فإلى أي القيم يبدو اقتراب قيم m ؟ **حوالي -1.92 ft/s**

10a.



10e. الدوال التربيعية

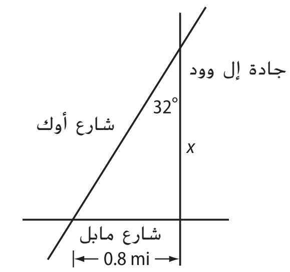


10d.

t	0	1	2	3	3.5	3.75
d	12	10.95	9.38	6.93	5	3.57

الدرس 3-1

29a.



83. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى الزاوية الحادة θ من المثلث قائم الزاوية، $\sin\theta=\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \cos\theta=\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \tan\theta=\frac{\text{opp}}{\text{adj}}, \cot\ \theta=\frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

باستخدام تلك التعريفات، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}}=\frac{\text{opp}}{\text{adj}}=\tan\theta$.

وبالمثل، $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}}=\frac{\text{adj}}{\text{opp}}=\cot\theta$.

84. محمد: الإجابة النموذجية: دالة الـ Csc هي دالة المعكوس الضربي لدالة الـ Sine . إذن، إذا كانت $\sin\ \theta = a$، فإن $\csc\ \theta = \frac{1}{a}$ حيث $a \neq 0$.

85. الدوال المثلثية دوال متسامية لأنه لا يمكن التعبير عنها من خلال العمليات الجبرية. على سبيل المثال، لا سبيل لإيجاد قيمة θ في $y = \cos\ \theta$ بجمع الثابت أو طرحها أو ضربها أو قسمتها و θ أو رفع θ إلى قوة نسبية.

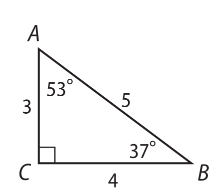
86. الإجابة النموذجية: إذا رسمت ارتفاع المثلث، فإنه يكوّن مثلثين قائمي الزاوية. طول الارتفاع يساوي $a \sin\ \theta$ باستخدام الصيغة $A=\frac{1}{2}bh$ حيث تكون قاعدة المثلث b والارتفاع $a \sin\ \theta$.

87. الإجابة النموذجية: بفرض وجود مثلث وتره c وساقان a و b وبفرض أن $\theta=\frac{b}{c}$ و $\cos\theta=\frac{a}{c}$. باستخدام نظرية فيثاغورس، $c^2=a^2+b^2$

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2$$
$$=\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}$$
$$=\frac{b^2+a^2}{c^2}$$
$$=\frac{c^2}{c^2}$$
$$=1$$

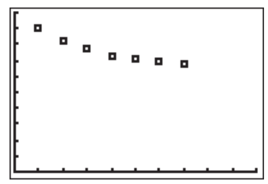
إذن، $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$

89. خطأ: الإجابة النموذجية: في $\triangle ABC$، $m\angle B < m\angle A$، $\cos B \approx 0.7986$ و $\cos A \approx 0.6018$. إذن، $\cos B > \cos A$ وبالتالي العبارة خاطئة.



91. الإجابة النموذجية: بما أن دالة الـ Cosine هي المعكوس الضربي لدالة الـ Sec . فإن دالة الـ Sine هي المعكوس الضربي لدالة الـ Csc، ودالة الـ Tan هي المعكوس الضربي لدالة الـ Csc . يمكنك إيجاد قيمة الـ Cot أو الـ Csc أو دالة Sec ظل التمام على حاسبة التمثيل البياني عن طريق إيجاد واحد مقسوم على المعكوس الضربي للدالة.

101a.

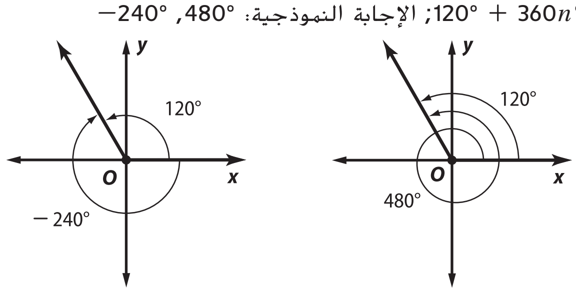


[0, 10] scl: 1 by [0, 1000] scl: 100

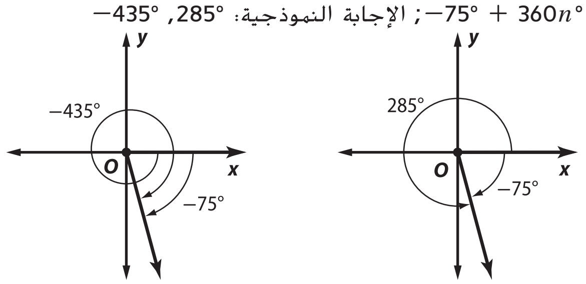
الدرس 3-2

18–25. n هو عدد صحيح.

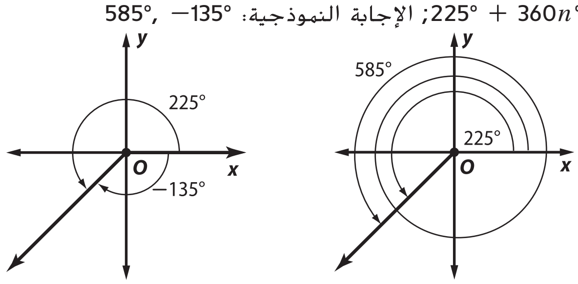
18. $120° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $480°$، $-240°$



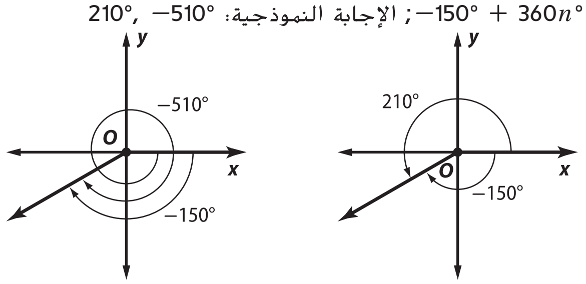
19. $-75° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $285°$، $-435°$



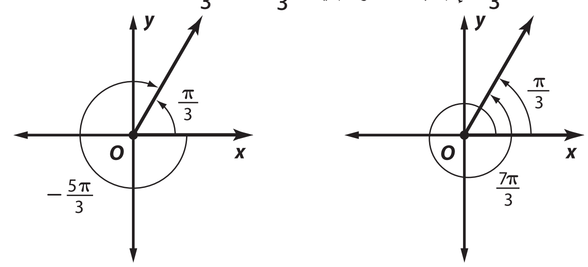
20. $225° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $585°$، $-135°$



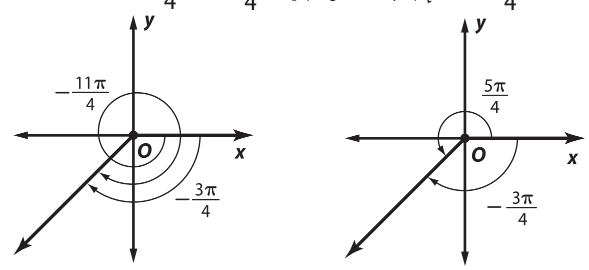
21. $-150° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $210°$، $-510°$



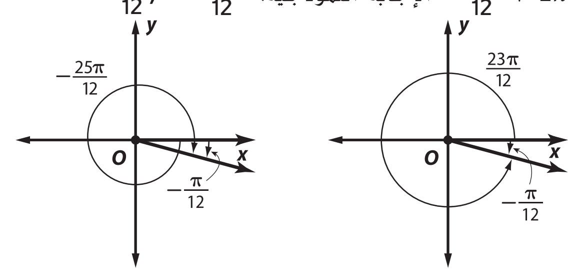
22. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$



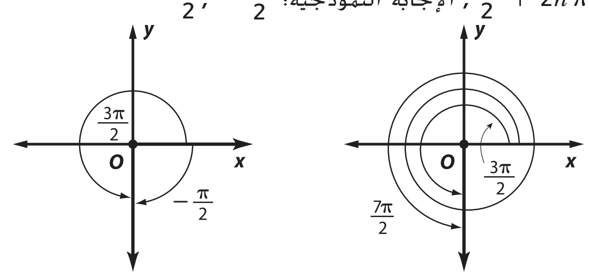
23. $-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}$



24. $-\frac{\pi}{12} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{23\pi}{12}, -\frac{25\pi}{12}$



25. $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$



75. تناقص. الإجابة النموذجية: إذا تناقص نصف القطر، فسوف تتناقص السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب طرديًّا مع نصف القطر.

76. تزايد. الإجابة النموذجية: إذا تناقص نصف القطر، فسوف تتزايد السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب عكسيًّا مع الوحدة الزمنية.

77. تزايد. الإجابة النموذجية: وقد تُكتب معادلة السرعة الخطية على النحو التالي $v = r\omega$. إذا تزايدت سرعة الزاوية، فسوف تتزايد السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب طرديًّا مع سرعة الزاوية.

78. **البرهان:**

المعطيات: $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$

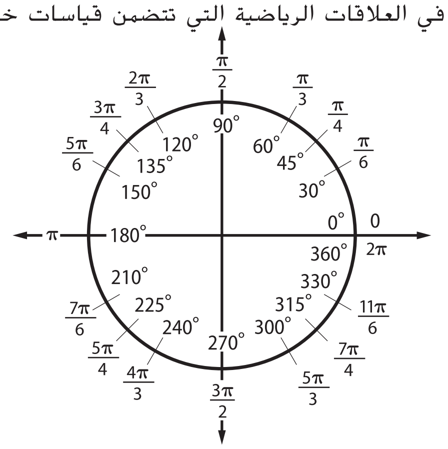
برهن: $\theta_1 = \theta_2$

1. $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$ (المعطيات)
2. $s = r\theta$ (صيغة طول القوس)
3. $s_1 = r_1\theta_1, s_2 = r_2\theta_2$ (التعويض)
4. $\frac{s_1}{r_1} = \theta_1, \frac{s_2}{r_2} = \theta_2$ (خاصية القسمة في المساواة)
5. $\theta_1 = \theta_2$ (خاصية. التحويل في المساواة باستخدام 1 و 4)

79a. المحيط يتضاعف. الإجابة النموذجية: محيط قطاع الدائرة P يساوي مجموع أطوال القوس s وضعف نصف القطر r. إذن $P = s + 2r$. لأن $s = r\theta$. إذا تضاعف نصف القطر، فسوف يصبح طول القوس طول قوس جديد $s' = (2r)\theta$، الذي يساوي $s' = 2(r\theta)$ أو $s' = 2s$. إذن، سيكون المحيط $P = 2s + 2(2r)$ أو $P = 2(s + 2r)$. إذن، يتضاعف المحيط.

79b. تزيد المساحة أربعة أضعاف. الإجابة النموذجية: لأن $A = \frac{1}{2}r^2\theta$، إذا تضاعف نصف القطر، فسوف تصبح المساحة مساحة جديدة $A' = \frac{1}{2}(2r)^2\theta$ وهو ما يساوي $A' = \frac{1}{2}4r^2\theta$ أو $A' = 4\left(\frac{1}{2}r^2\theta\right)$. إذن، تتضاعف المساحة أربعة أضعاف.

80. الإجابة النموذجية: تستخدم الدرجة ومقاييس راديان في وصف قياسات الزوايا. وقياسات الدرجات لها وحدات؛ بينما تعتبر قياسات راديان بلا وحدات ومن ثم يمكن استخدامها في العلاقات الرياضية التي تتضمن قياسات خطية.



81. $\cos\theta = \frac{\sqrt{161}}{15}, \tan\theta = \frac{8\sqrt{161}}{161}, \csc\theta = \frac{15}{8},$
$\sec\theta = \frac{15\sqrt{161}}{161}, \cot\theta = \frac{\sqrt{161}}{8}$

82. $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{14}, \cos\theta = \frac{5\sqrt{7}}{14}, \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}, \csc\theta = \frac{2\sqrt{21}}{3},$
$\cot\theta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

83. $\sin\theta = \frac{19\sqrt{26}}{130}, \cos\theta = \frac{17\sqrt{26}}{130}, \tan\theta = \frac{19}{17},$
$\csc\theta = \frac{5\sqrt{26}}{19}, \sec\theta = \frac{5\sqrt{26}}{17}$

الدرس 3-3

33. $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sec\theta = \sqrt{5},$ $\cot\theta = \frac{1}{2}$

34. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$ $\cot\theta = -\sqrt{3}$

35. $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \csc\theta = -5, \sec\theta = \frac{5\sqrt{6}}{12},$ $\cot\theta = -2\sqrt{6}$

36. $\sin\theta = -\frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \csc\theta = -\frac{13}{5}, \sec\theta = -\frac{13}{12},$ $\cot\theta = \frac{12}{5}$

37. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan\theta = -\sqrt{2}, \csc\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2},$ $\cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

38. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1, \csc\theta = -\sqrt{2},$ $\sec\theta = -\sqrt{2}$

39. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \csc\theta = -\sqrt{2}, \sec\theta = \sqrt{2},$ $\cot\theta = -1$

40. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\sqrt{3}, \csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sec\theta = -2,$ $\cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

59.

t	θ
0	22
0.5	0
1	−22
1.5	0
2	22
2.5	0

78a.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin 4\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

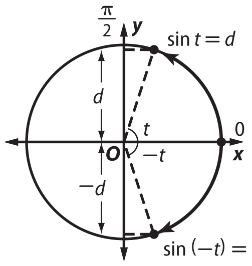
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\sin 2\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin 4\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

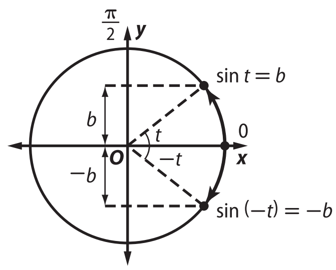
78b. الدورة $\sin\theta$ هي 2π. الدورة $\sin 2\theta$ هي π. الدورة $\sin 4\theta$ هي $\frac{\pi}{2}$.

78c. الإجابة النموذجية: تقل الدورة كلما زادت قيمة n.

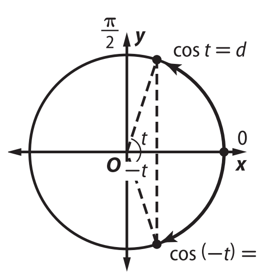
83. الإجابة النموذجية: تُمثَّل دالة الـ Sine بإحداثي y– في دائرة الوحدة. مقارنة $\sin t$ و $\sin(-t)$ للقيم المختلفة من t. لاحظ أن الإحداثي y–موجب بالنسبة إلى $\sin t$ وسالب بالنسبة إلى $\sin(-t)$. على سبيل المثال. على دائرة الوحدة الأولى. $\sin t = b$ و $\sin(-t) = -b$. والآن أوجد $-(\sin t)$ للتحقق من العلاقة.

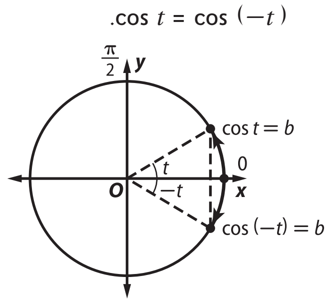
$-(\sin t) = -(b)$ أو $-b$. الذي يساوي $\sin(-t)$. وبالتالي. $-\sin t = \sin(-t)$.





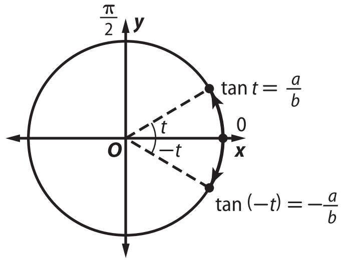
84. الإجابة النموذجية: تُمثَّل دالة الـ Cosine بإحداثي x في دائرة الوحدة. وبمقارنة $\cos(-t)$ و $\cos t$ لقيم مختلفة من t. لاحظ أن قيمة الـ Cosine. إحداثي x–. سوف يكون هو نفسه بغض النظر عن الإشارة t. وبالتالي فإنّ. $\cos t = \cos(-t)$.

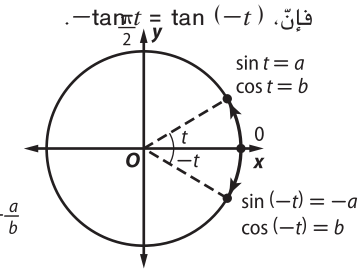




85. الإجابة النموذجية: بما أن $t = \frac{\sin t}{\cos t}$ يمكننا أن نحلل $-\tan t$ و $\tan(-t)$ بالنظر أولاً إلى الـ Sine والـ Cosine لـ t و $(-t)$ على دائرة الوحدة للقيمة المفترضة لـ t. بغض النظر عن إشارة t. فإن قيمة الـ Cosine تظل كما هي. ومع ذلك تكون قيمة الـ Sine موجبة عند t وسالبة عند $-t$. وهذا ينتج عنه $\tan t = \frac{a}{b}$. لكن $\tan(-t) = -\frac{a}{b}$. والآن أوجد $-\tan t$ للتحقق من العلاقة.

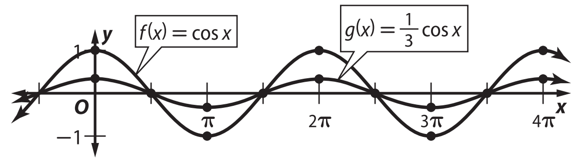
$-\tan t = -(\frac{a}{b})$ أو $-\frac{a}{b}$ التي تساوي $\tan(-t)$. وبالتالي فإنّ. $-\tan t = \tan(-t)$.



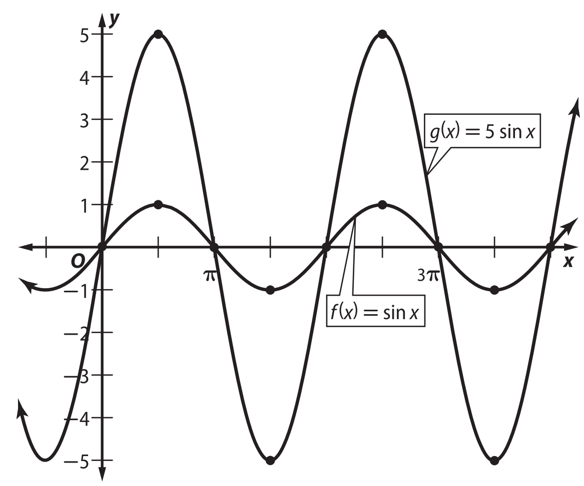


الدرس 3-4 (تمرين موجه)

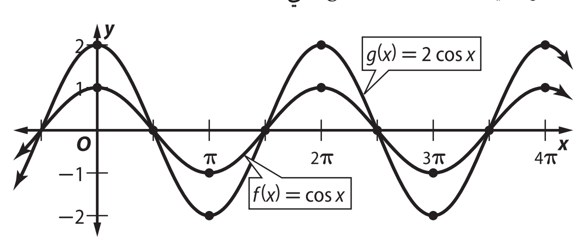
1A. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{3}$.



1B. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 5.

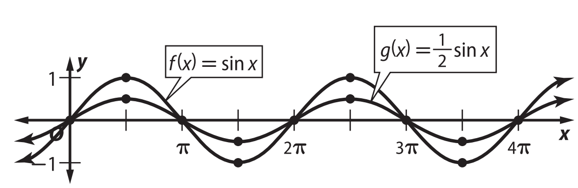


1C. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 2.

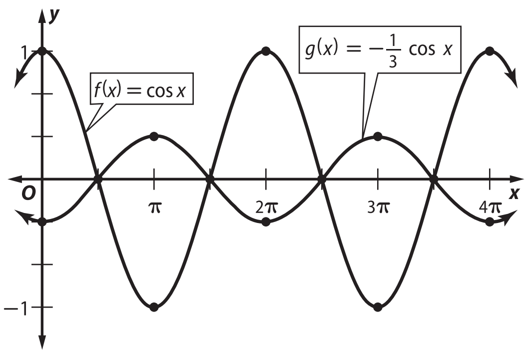


الدرس 3-4

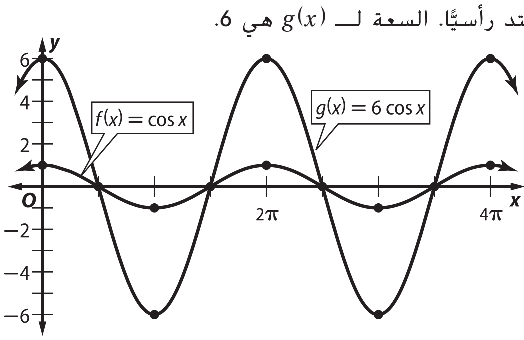
1. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{2}$.



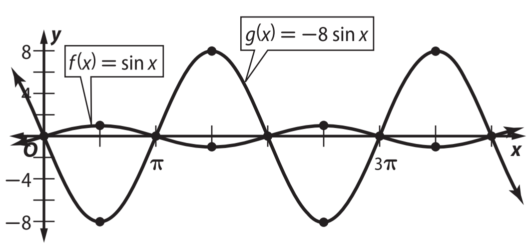
2. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا ومن ثم منعكس في المحور x. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{3}$.



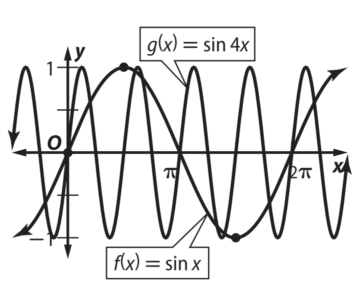
3. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 6.



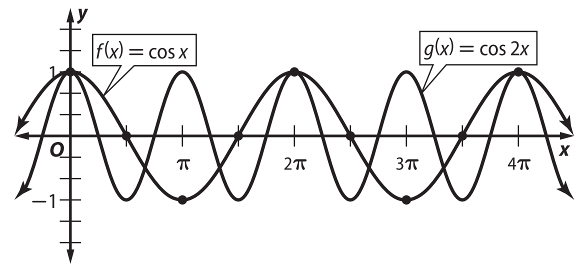
4. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا ومن ثم منعكس في المحور x. السعة لـ $g(x)$ هي 8.



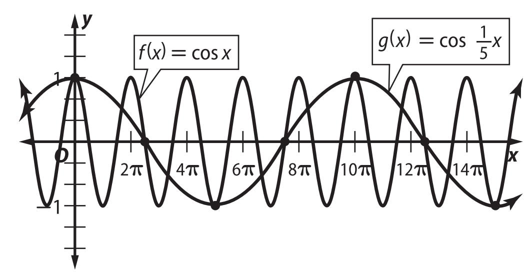
5. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي $\frac{\pi}{2}$.



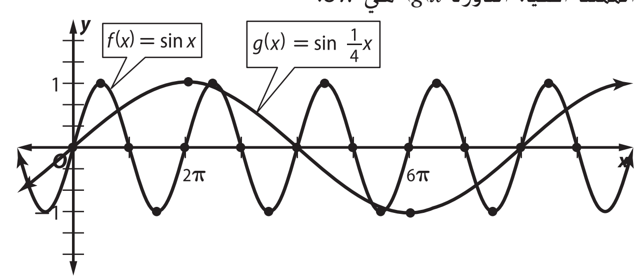
6. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي π.



7. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي 10π.



8. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي 8π.



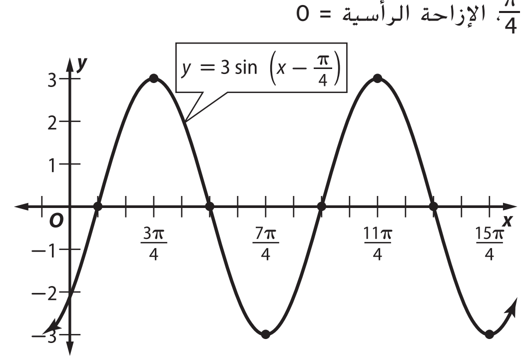
10. الإجابة النموذجية: $y = 0.3 \sin 880\pi t$

11. الإجابة النموذجية: $y = 0.25 \sin 1864\pi t$

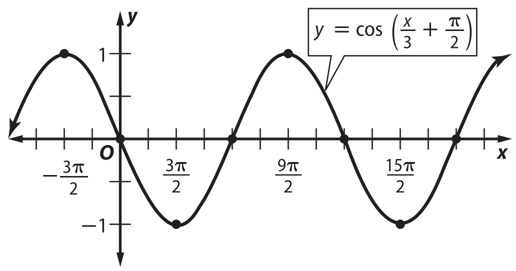
12. الإجابة النموذجية: $y = 0.12 \sin 2490\pi t$

13. الإجابة النموذجية: $y = 0.2 \sin 1246\pi t$

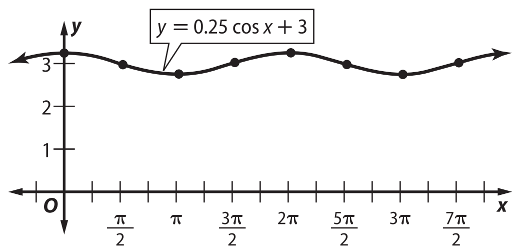
14. السعة = 3؛ الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$ ؛ الإزاحة الطور = $\frac{\pi}{4}$. الإزاحة الرأسية = 0



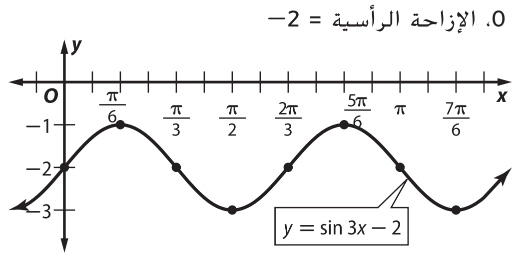
15. السعة = 1. الدورة = 6π. التكرار = $\frac{1}{6\pi}$. الإزاحة الطور = $-\frac{3\pi}{2}$. الإزاحة الرأسية = 0



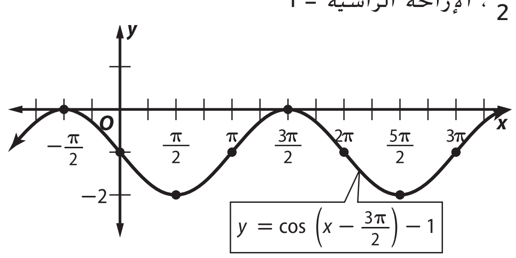
16. السعة = $\frac{1}{4}$. الدورة = 2π. التكرار= $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = 0; الإزاحة الرأسية = 3



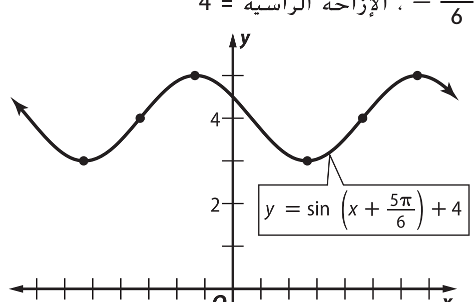
17. السعة = 1. الدورة = $\frac{2\pi}{3}$. التكرار = $\frac{3}{2\pi}$. الإزاحة الطور = 0. الإزاحة الرأسية = -2



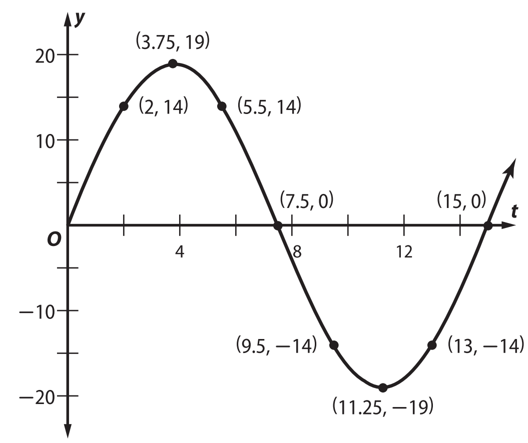
18. السعة = 1. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $\frac{3\pi}{2}$. الإزاحة الرأسية = -1



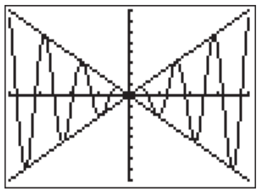
19. السعة = 1. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $-\frac{5\pi}{6}$. الإزاحة الرأسية = 4



.30c



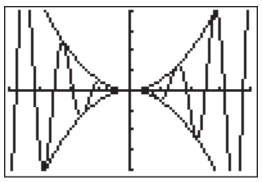
.39a



[−20, 20] scl: 5 by [−40, 40] scl: 5

.39b التمثيل البياني لـــ $y = 2x \cos x$ يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـــ $y = 2x$ و $y = -2x$.

.39c



[−20, 20] scl: 5 by [−200, 200] scl: 50

.39d التمثيل البياني لـــ $y = x^2 \sin x$ يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـــ $y = x^2$ و $y = -x^2$.

.39e التمثيل البياني لـــ $y = f(x) \sin x$ أو $y = f(x) \cos x$ سوف يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـــ $y = f(x)$ و $y = -f(x)$.

.41 صواب. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـــ $y = \cos x$ هو الإزاحة الأفقية للتمثيل البياني لـــ $y = \sin x$. إذن، يمكن كتابة دالة الـــ Cosine من أي دالة الـــ Sine باستخدام السعة نفسها والدورة عن طريق تطبيق الإزاحة الطور اللازمة.

.44 الإجابة النموذجية: تأمل $y = a \sin(bx + c)$، حيث $a, b, c \neq 0$. لإيجاد صفر دالة ما، أوجد قيمة x التي تكون فيها $a \sin(bx + c) = 0$. بما أن $\sin 0 = 0$. فإن حل $bx + c = 0$ سينتج صفر الدالة.

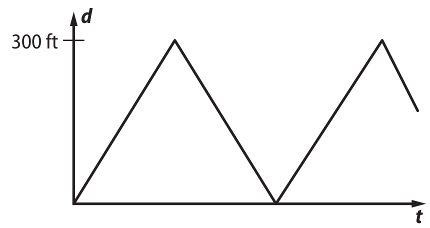
$$bx + c = 0$$
$$bx = -c$$
$$x = -\frac{c}{b}$$

إذن، $y = 0$ عندما تكون $x = -\frac{c}{b}$. قيمة $-\frac{c}{b}$ هي الإزاحة الطور.

عندما تكون $c > 0$: التمثيل البياني لـــ $y = a \sin(x + c)$ هو نفسه التمثيل البياني لـــ $y = a \sin bx$. وحدات $\left|\frac{c}{b}\right|$ مزاحة إلى اليسار.

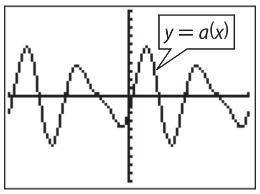
عندما تكون $c < 0$: التمثيل البياني لـــ $y = a \sin(x + c)$ هو نفسه التمثيل البياني لـــ $y = a \sin bx$. مزاحًا بمقدار $\left|\frac{c}{b}\right|$ وحدة إلى اليمين.

.45 الإجابة النموذجية: برغم أن النبض يمكن تمثيله كدالة لها الدورة، فهو ليس دالة منحنى الـــ Sine لأن مسافة بُعد نبض الضوء عن الأرض تتغير بمعدل ثابت. ونتيجة لذلك، فإن التمثيل البياني لهذه الدالة يشبه التمثيل البياني التالي.

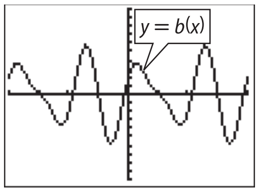


التوسع 3-4

.1 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

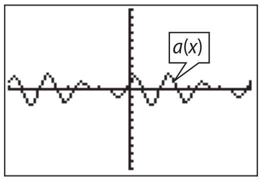


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

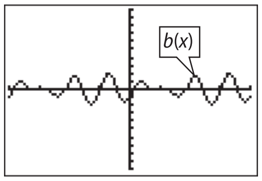


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.2 الإجابة النموذجية: $[0, \pi]$. الدورة: π

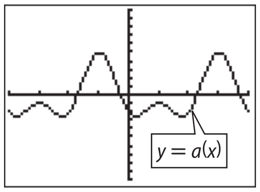


$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

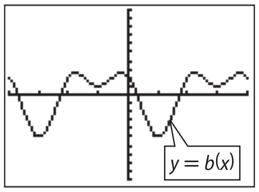


$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.3 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

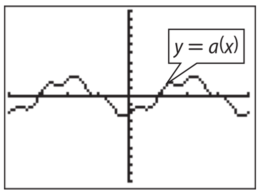


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

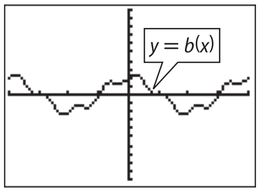


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.4 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

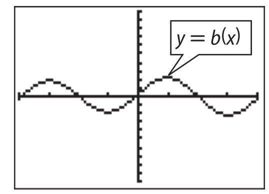


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

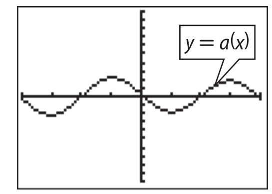


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.5 الإجابة النموذجية: $[0, 4\pi]$. الدورة: 4π

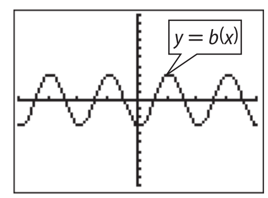


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

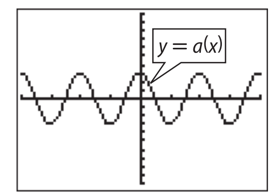


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.6 الإجابة النموذجية: $[0, \pi]$. الدورة: π



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

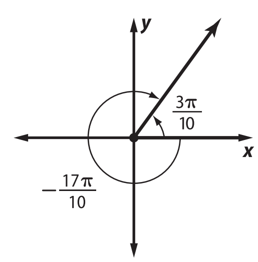


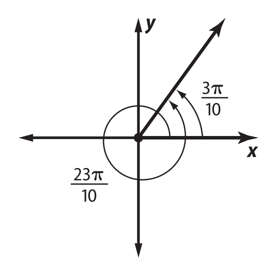
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

اختبار منتصف الوحدة

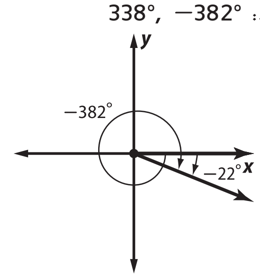
9–10. n هو عدد صحيح.

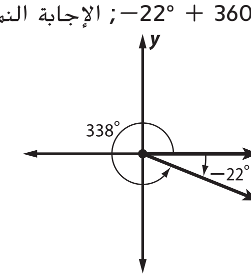
.9 $\frac{3\pi}{10} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{23\pi}{10}, -\frac{17\pi}{10}$



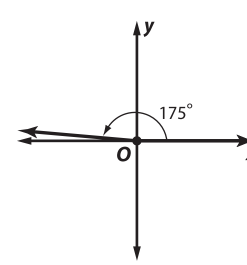


.10 $-22° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $338°, -382°$

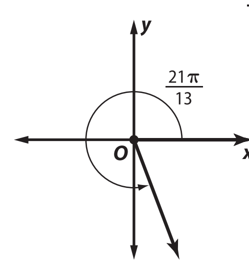




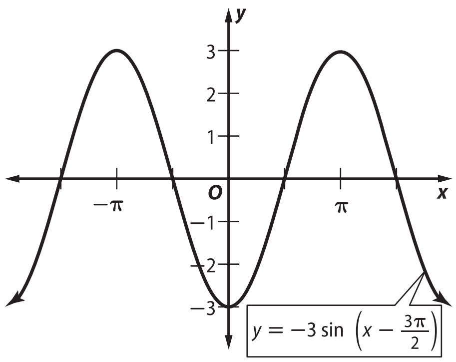
.13 $5°$



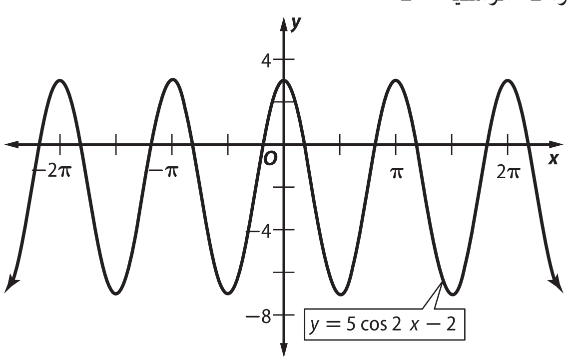
.14 $\frac{5\pi}{13}$



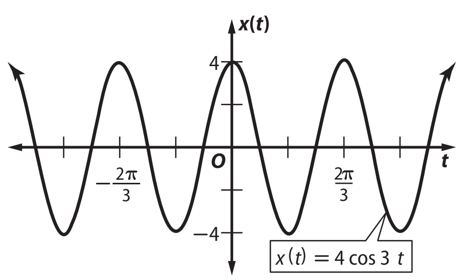
.21 السعة = 3. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $\frac{3\pi}{2}$–. الإزاحة الرأسية = 0



.22 السعة = 5. الدورة = π. التكرار = $\frac{1}{\pi}$. الإزاحة الطور = 0.
الإزاحة الرأسية = -2

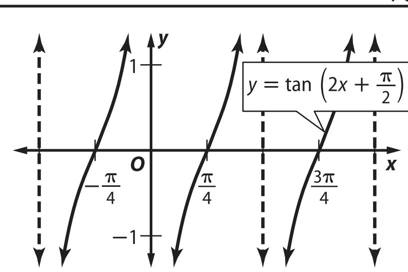


24a.

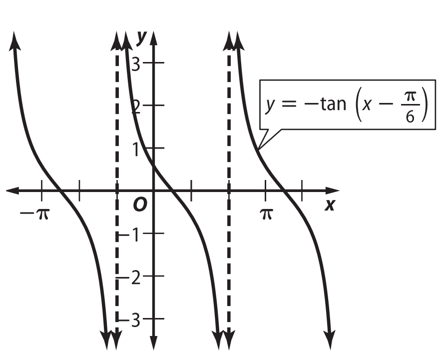


الدرس 3-5 (تمرين موجه)

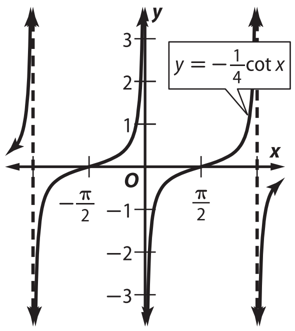
2A.



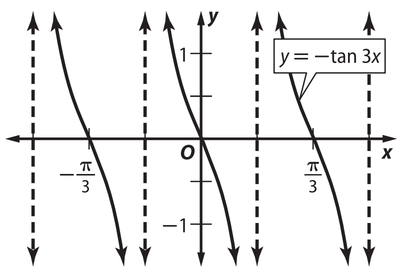
2B.



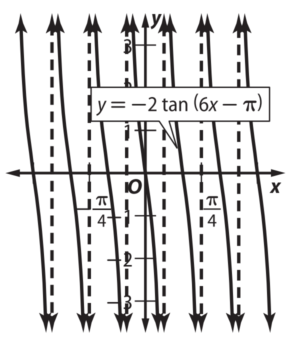
5.



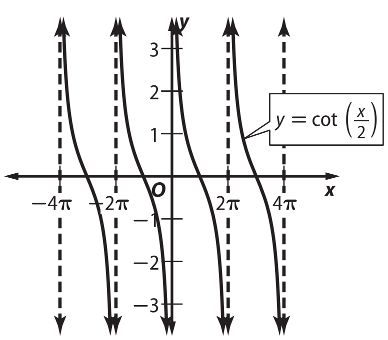
6.



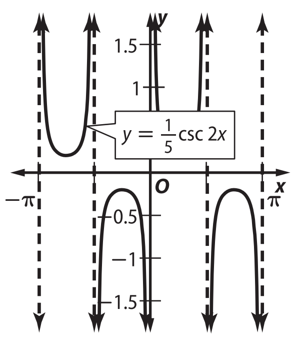
7.



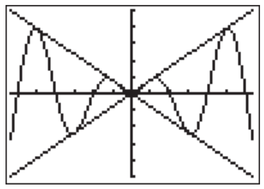
8.



9.

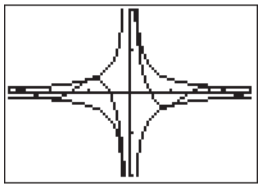


5A. $f(x) = 5x$ تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0.



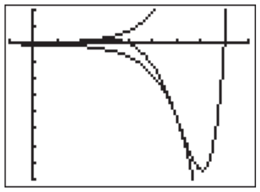
$[-10, 10]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 10

5B. $f(x) = \frac{1}{x}$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من $\pm\infty$.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: π by $[-2, 2]$ scl: 1

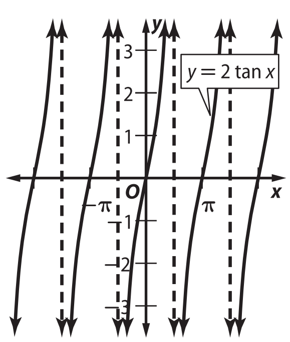
5C. $f(x) = 3^x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من $-\infty$.



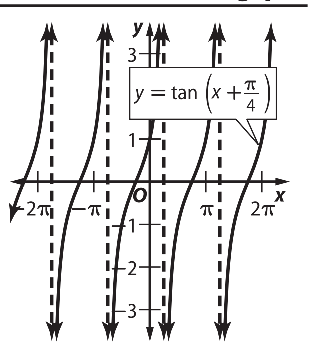
$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-320, 80]$ scl: 40

الدرس 3-5

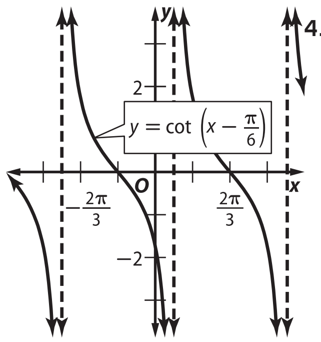
1.



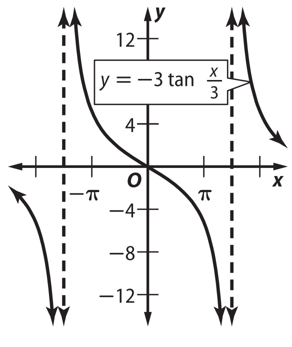
2.



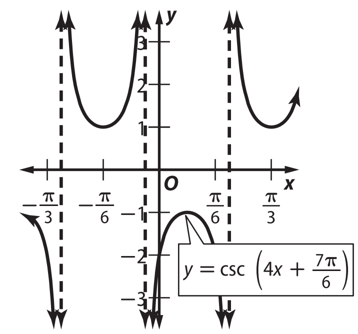
3.



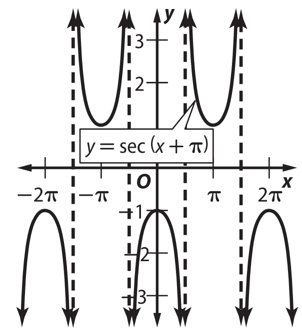
4.



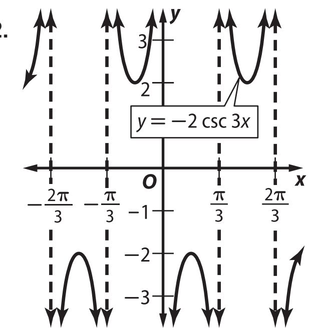
10.



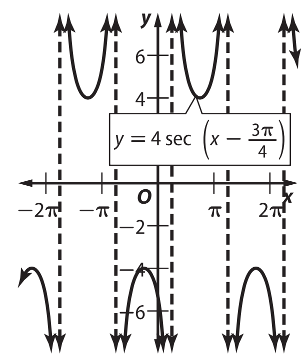
11.



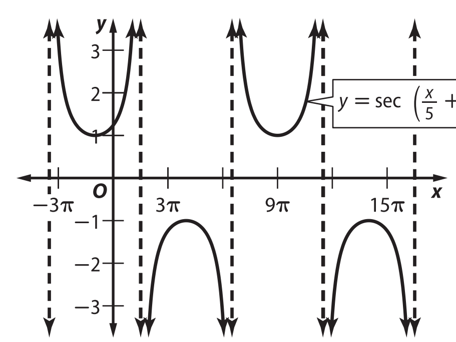
12.



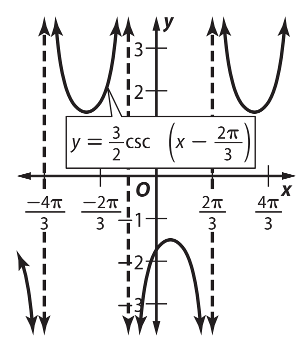
13.



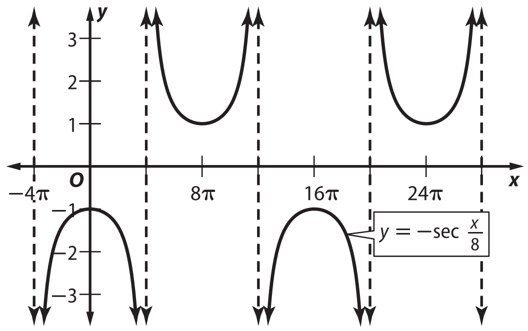
14.



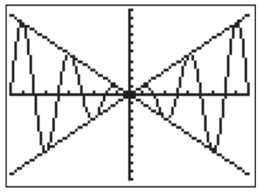
15.



16.

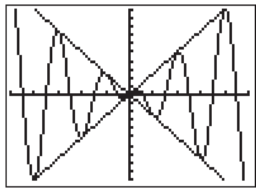


17. $f(x) = \frac{3}{5}x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



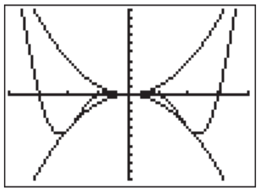
$[-5\pi, 5\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

18. $f(x) = 4x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



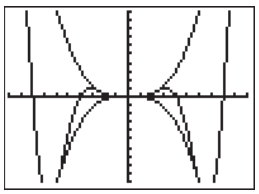
$[-5\pi, 5\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

19. $f(x) = 2x^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



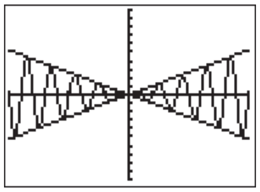
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

20. $f(x) = \frac{x^3}{2}$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



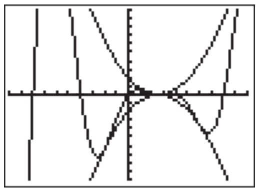
$\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

21. $f(x) = \frac{1}{3}x$، تقل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.



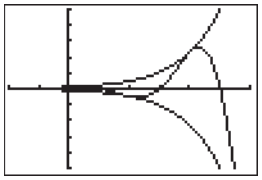
$\left[-5\pi, 5\pi\right]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

22. $f(x) = (x - 2)^2$، تقل سعة الدالة كلما اقترب x من 2 من كلا الاتجاهين.



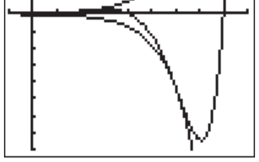
$\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-20, 20]$ scl: 2

23. $f(x) = e^{0.5x}$، تقل سعة الدالة كلما اقترب x من اللانهاية السالبة وتزيد كلما اقترب x من اللانهاية الموجبة.



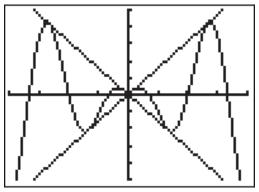
$[-\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 10

24. $f(x) = 3^x$، تقل سعة الدالة كلما اقترب x من $-\infty$.



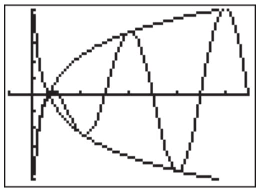
$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-320, 80]$ scl: 40

25. $f(x) = |x|$، تقل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.



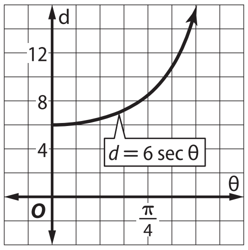
$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2.5, 2.5]$ scl: 0.5

26. $f(x) = \ln x$; $\lim_{x \to 0^+} (\ln x \cos x) = -\infty$ وسعة الدالة تزيد كلما اقترب x من ∞.

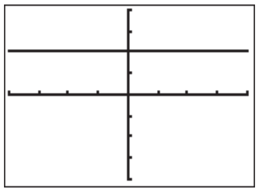


$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2.5, 2.5]$ scl: 0.5

36b.



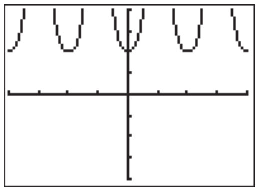
48.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير لا تساوي جميع الأعداد الحقيقية.

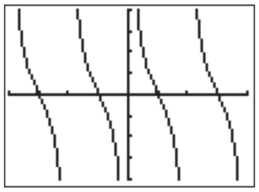
49.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير متساوية.

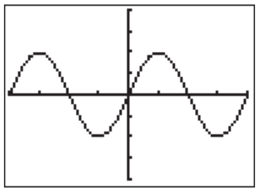
50.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير متساوية.

51.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير لا تساوي جميع الأعداد الحقيقية.

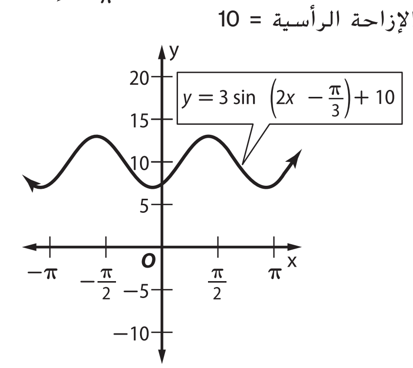
57. لإيجاد التقاطع مع المحور y افترض أن $t = 0$.

المعادلة الأصلية	$y = ke^{-ct}\cos \omega t$
عوّض $t = 0$	$= ke^{-c(0)}\cos(\omega \cdot 0)$
اضرب.	$= ke^{0}\cos 0$
$e^{0} = 1, \cos 0 = 1$	$= k(1)(1)$
حوّل لأبسط صورة.	$= k$

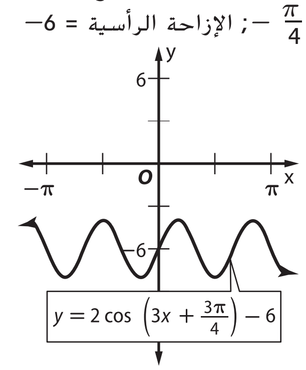
60. هدى، الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـــ $y = \cot x$ ليس له تقاطع مع المحور y. بينما التمثيل البياني لـــ $y = \tan x$ له التقاطع 0 مع المحور y من. نظرًا لأن كلتا المعادلتين في المسألة لا تشير إلى الإزاحة أفقية للكسر الجزئي ومنحنى التمثيل البياني لا يمر بنقطة الأصل، فلا بد أن تكون إجابة ميرا خاطئة. وكذلك، باستخدام المهارات المستنبطة من هذا الالدرس، تكون لمعادلة هدى a الدورة $\frac{\pi}{2}$، وخطوط مقاربة عند $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = 0$ ، وتقاطعات مع المحور x عند $\frac{\pi}{4}$ – و $\frac{\pi}{4}$ ، و النقاط المتوسطة $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{1}{3}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{8}, -\frac{1}{3}\right)$. التي تتناسب كلها مع التمثيل البياني.

62. الإجابة النموذجية: نظرًا لأن التمثيلات البيانية لـــ $y = \sin bx$ و $y = \cos bx$ تتذبذب بين $y = -1$ و $y = 1$. فعند ضرب أي من تلك العوامل في عامل التضاؤل لـــ $f(x)$، سوف يتذبذب التمثيل البياني الناتج بين $y = -1 \cdot f(x)$ أو $y = -f(x)$ و $y = 1 \cdot f(x)$ أو $y = f(x)$.

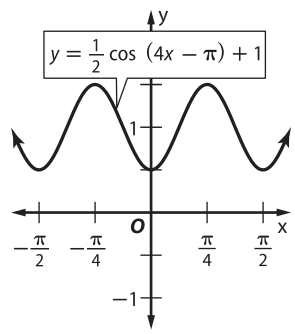
63. السعة = 3، الدورة π، التكرار= $\frac{1}{\pi}$ ، الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{6}$. الإزاحة الرأسية = 10



64. السعة = 2، الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، التكرار = $\frac{3}{2\pi}$، الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{4}$; الإزاحة الرأسية = -6

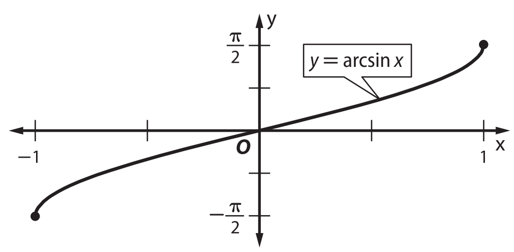


65. السعة = $\frac{1}{2}$، الدورة = $\frac{\pi}{2}$، التكرار = $\frac{2}{\pi}$، الإزاحة الطور = $\frac{\pi}{4}$.
الإزاحة الرأسية = 1

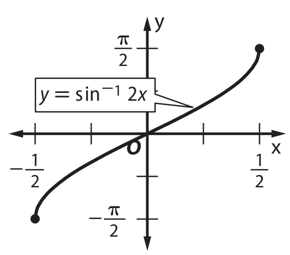


الدرس 3-6

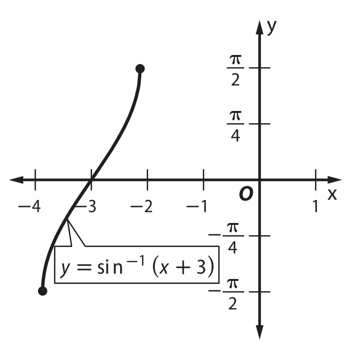
17.



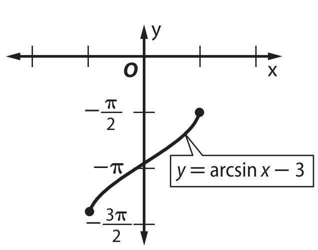
18.



19.

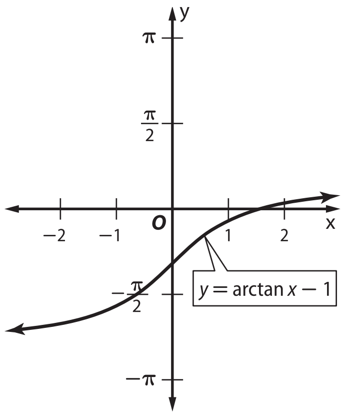


20.

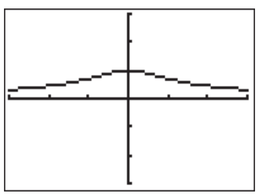


UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 11 12/15/2016 11:42:40 PM

26.

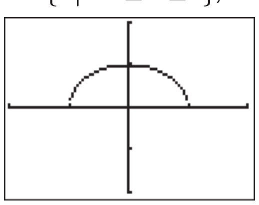


56. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$; $R = \{y \mid 0 < y \leq 1\}$



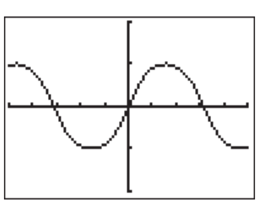
[−3, 3] scl: 1 by [−3, 3] scl: 1

57. $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$; $R = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$



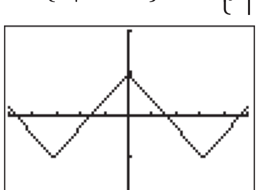
[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

58. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$; $R = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$



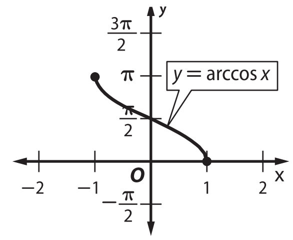
[−5, 5] scl: 1 by $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$

59. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$; $R = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

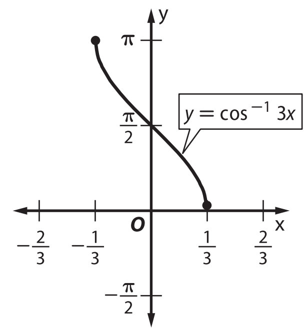


[−5, 5] scl: 1 by [−π, π] scl: $\frac{\pi}{2}$

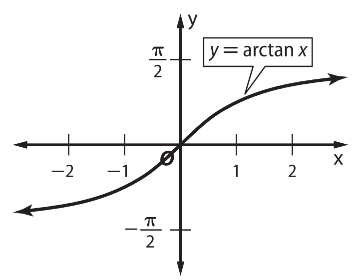
21.



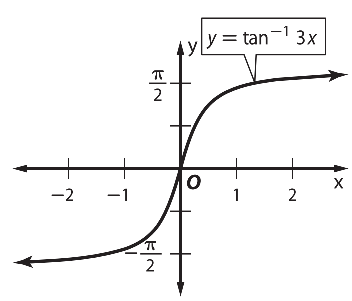
22.



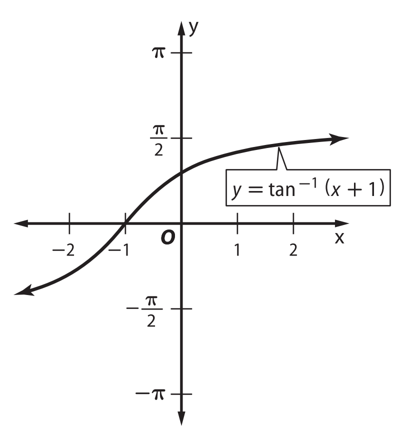
23.



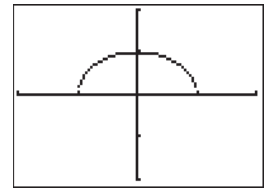
24.



25.

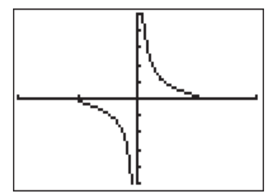


60. $D = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$; $R = \{y \mid 0 \le y \le 1\}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

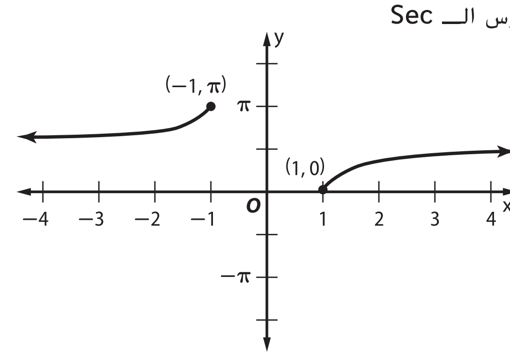
61. $D = \{x \mid -1 \le x \le 1, x \ne 0\}$; $R = \{y \mid y \ne 0\}$



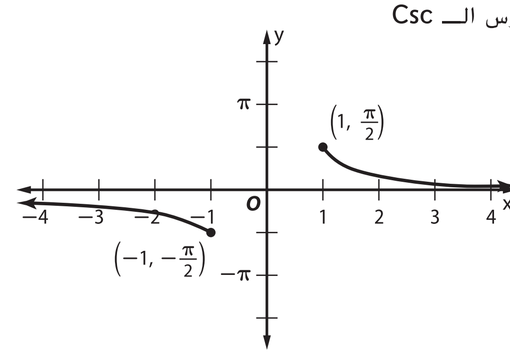
[−2, 2] scl: 1 by [−10, 10] scl: 2

62a. الإجابة النموذجية: قوس الـ Sec: $D: (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$، $R: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$؛ قوس الـ Csc: $D: (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$، $R: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

62b. قوس الـ Sec



قوس الـ Csc



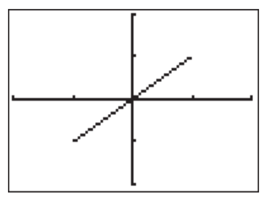
62c. إذا لم تكن القيود موضوعة على مجال الـ Csc و الـ Sec عند التمثيل البياني للمعكوسات. الشبيهة بمعكوسات الـ Sine و الـ Cosine و Sine. فلن تكون المعكوسات دوال.

65a. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $f \circ f^{-1}$، المجال هو $[-1, 1]$ والمدى هو $[-1, 1]$. بالنسبة إلى $f^{-1} \circ f$، المجال هو $(-\infty, \infty)$ والمدى هو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

65b. الإجابة النموذجية:

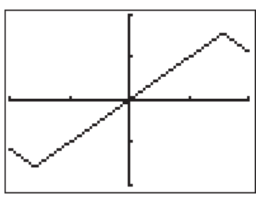
x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
$f \circ f^{-1}$			−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
x	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	
$f \circ f^{-1}$	0.25	0.5	0.75	1.0			
x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
$f^{-1} \circ f$	−1.142	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
x	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	2.0	
$f^{-1} \circ f$	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	1.142	

$f \circ f^{-1}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

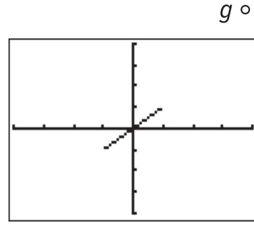
$f^{-1} \circ f$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

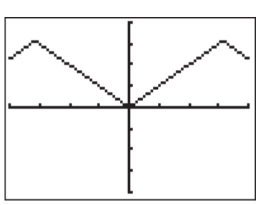
65c. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $g \circ g^{-1}$، المجال هو $[-1, 1]$ والمدى هو $[-1, 1]$. بالنسبة إلى $g^{-1} \circ g$، المجال هو $(-\infty, \infty)$ والمدى هو $[0, \pi]$. التمثيل البياني لـ $g \circ g^{-1}$ يجب أن يكون الخط $y = x$ بالنسبة إلى $-1 \le x \le 1$. الخاصية العكسية للدوال المثلثية تقول إنه خلال الدورة المغلقة $[-1, 1]$، $\cos(\cos^{-1} x) = x$. الرسم البياني لـ $g^{-1} \circ g$ يجب أن يكون الخط $y = x$ بالنسبة إلى $0 \le x \le \pi$. بمجرد اقتراب التمثيل البياني من π، يتحول ويتناقص إلى أن يصل إلى المحور x بالمعدل نفسه. عندما يصل إلى المحور x يتحول مرة أخرى ويتزايد إلى أن يصل إلى π. وسوف يواصل على هذا النحو كلما اقترب x من اللانهاية.

65d. $g \circ g^{-1}$



[−4, 4] scl: 1 by [−4, 4] scl: 1

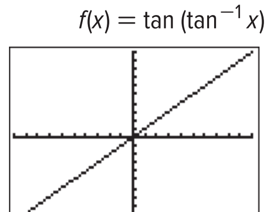
$g^{-1} \circ g$



[−4, 4] scl: 1 by [−4, 4] scl: 1

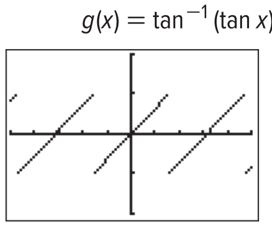
65e. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $f(x) = \tan(\tan^{-1} x)$، نظرًا للخاصية العكسية في الدوال المثلثية. فإن كل قيم x، $f(x) = x$. وهذا يؤدي بالضرورة إلى أن المستقيم $y = x$ لجميع الأعداد الحقيقية. التمثيل البياني لـ $g(x) = \tan^{-1}(\tan x)$ سيكون مختلفًا لأن $y = \tan x$ غير محددة بالنسبة إلى مضاعفات $\frac{\pi}{2}$. نتيجة لذلك، فإن خطوط المقاربة للمضاعفات $\frac{\pi}{2}$ ممكنة التوقع. يمكننا أيضًا أن نتوقع مدى $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ نظرًا لتعريف arctan.

$f(x) = \tan(\tan^{-1} x)$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

$g(x) = \tan^{-1}(\tan x)$



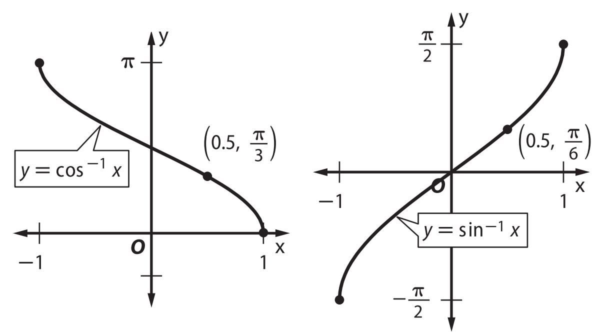
[−5, 5] scl: 0.5 by [−π, π] scl: $\frac{\pi}{2}$

.66 علي. الإجابة النموذجية: لا ينبغي لأحد أن يفترض أن جميع علاقات الدوال المثلثية تنطبق على معكوساتها. ولا ينبغي له أيضًا أن يقع في خطأ الاعتقاد بأن

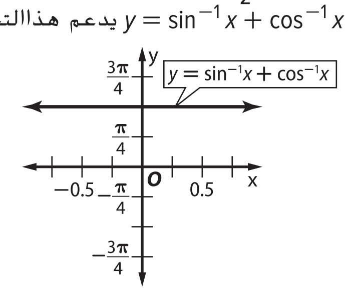
$$\sin^{-1}x = \frac{1}{\sin x},\ \cos^{-1}x = \frac{1}{\cos x},\ \text{and } \tan^{-1}x = \frac{1}{\tan x},$$

واستخدام تلك العلاقات الخاطئة في إثبات افتراضه الخاطئ. ترتبط القيم المثلثية للزوايا ببعضها البعض. ومع ذلك، عندما نجد $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$, and $\tan^{-1}x$ نحسب قياسات الزوايا. وقياسات الزوايا في حد ذاتها لا تملك تلك العلاقة الفريدة.

.67



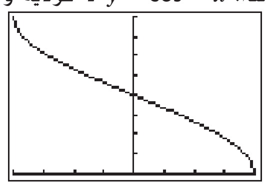
لاحظ من التمثيلات البيانية لـــ $y = \sin^{-1}x$ و $y = \cos^{-1}x$ أنه عندما يكون $\sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ و $x = 0.5$, $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{3}$. إذن، هو $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$ $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ أو $\frac{\pi}{2}$. عندما يكون $x = 1, \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ و $\cos^{-1}x = 0$. إذن، $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ هي $\frac{\pi}{2} + 0$ أو $\frac{\pi}{2}$. عندما $x = -1, \sin^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$ و $\cos^{-1}x = \pi$، إذن، $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ is $-\frac{\pi}{2} + \pi$ أو $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي خلال الدورة الزمنية [−1, 1] يظهر أن $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$. والتمثيل البياني لـــ $y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ يدعم هذاالتخمين.



.68 خطأ؛ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{4}$ لا تندرج ضمن مدى المعكوس. تذكر أن قوس الـــ Cosine مقيد بالنصف العلوي من دائرة الوحدة. قيمة θ بالنسبة إلى $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \theta$ هي $\frac{\pi}{4}$.

.69 الإجابة النموذجية: افترض أن $y = \sin^{-1}x$ دالة فردية. تعريف الدالة الفردية يقول إنه لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. إذا افترضنا أن $\sin^{-1}x = u$، فلدينا $x = \sin u$. من خلال الدرس 3-3، عرفنا أن دالة الـــ Sine فردية، إذن $-x = \sin(-u)$.

.70 الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـــ $y = \cos^{-1}x$ ليس متماثلاً فيما يتعلق بالمحور y أو نقطة الأصل نقطة الأصل. لذا، $y = \cos^{-1}x$ لا فردية ولا زوجية.



[−1, 1] scl: $\frac{1}{4}$ by [0, π] scl: $\frac{\pi}{8}$

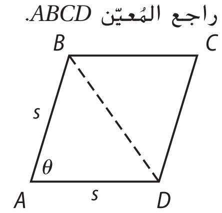
.71 الإجابة النموذجية: افترض أن $y = \tan^{-1}x$ دالة فردية. تعريف الدالة الفردية يقول إن x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. إذا افترضنا أن $\tan^{-1}x = u$. فلدينا $x = \tan u$. من خلال الدرس 3-3، عرفنا أن دالة الـــ Tan فردية. إذن $-x = \tan(-u)$. من هنا، يمكننا أن نحصل على $^{-1}(-x) = -u$.

.72 الإجابة النموذجية: تصبح المجالات المقيدة من الـــ Cosine. والـــ Sine، ودوال الـــ Tan مدى لقوس الـــ Cosine وقوس الجيب ودوال قوس الـــ Tan على الترتيب. وكذلك، يصبح مدى الـــ Cosine والجيب ودوال الـــ Tan في ظل تلك القيود مجالات لمعكوسها.

الدرس 3-7

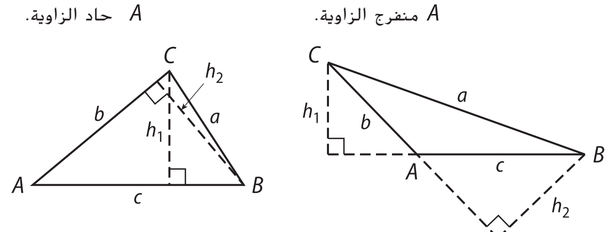
.66 يجب أن يستخدم قانون الـــ Cosine إذا كان لديك SSS أو SAS من مثلث ما. يجب أن يستخدم قانون الـــ Cosine إذا كان لديك AAS أو ASA أو SSA من مثلث ما. يجب استخدام نظرية فيثاغورس إذا كان لديك مثلث قائم الزاوية ولديك طول ضلعين منه. ومع ذلك، لا تصلح نظرية فيثاغورس إلا في حل مسائل إيجاد الضلع المفقود فقط. يمكن استخدام النسب المثلثية إذا كان لديك مثلث قائم الزاوية ولديك إما طول ضلعيه أو طول أحد أضلاعه مع قياس إحدى الزوايا بخلاف الزاوية القائمة.

.68 راجع المُعيّن $ABCD$.



خط مرسوم من B إلى D ينتج مثلثين متطابقين. استخدام صيغة المساحة بالنسبة إلىSAS, مساحة أحد المثلثين $\frac{1}{2}(s)(s)\sin\theta$ تكون $\frac{1}{2}s^2\sin\theta$. لإيجاد مساحة المعين، ضاعف مساحة أحد المثلثين. إذًا، مساحة المعين $ABCD$ هي $2\left(\frac{1}{2}s^2\sin\theta\right)$ أو $s^2\sin\theta$.

.69 A منفرج الزاوية. A حاد الزاوية.



الإجابة النموذجية: افترض أن h_1 هو ارتفاع أحد المثلثين الموضحين أعلاه. من خلال تعريف دالة الـ Sine. $\sin A = \frac{h_1}{b}$ أو $h_1 = b \sin A$. $\sin B = \frac{h_1}{a}$ أو $h_1 = a \sin B$. إنشاء معادلة لـ h_1، $b \sin A = a \sin B$. أو $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$، حيث $\sin B \neq 0$ و $\sin A \neq 0$. عند رسم ارتفاع h_2 من الرأس B إلى الضلع AC (ممتد في مثلث منفرج الزاوية). $\sin A = \frac{h_2}{c}$ أو $h_2 = c \sin A$. و $\sin C = \frac{h_2}{a}$ أو $h_2 = a \sin C$. إنشاء معادلة لقيمتي h_2، $c \sin A = a \sin C$. أو $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$. من خلال خاصية تحول المساواة. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

70a. $a^2 = (b - x)^2 + h^2$ استخدم نظرية فيثاغورس لـ $\triangle DBC$.

$= b^2 - 2bx + x^2 + h^2$ يمتد $(b - x)^2 + h^2$.

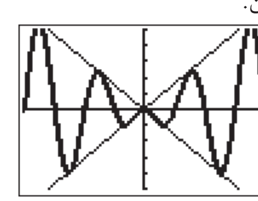
$= b^2 - 2bx + c^2$ في $\triangle ADB$, $c^2 = x^2 + h^2$.

$= b^2 - 2b(c \cos A) + c^2$ $\cos A = \frac{x}{c}$، إذن $x = c \cos A$.

$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ خاصية التبديل

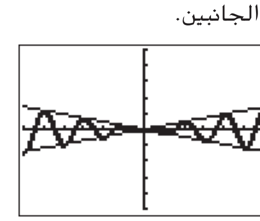
70b. لحل b^2 and c^2. يمكن رسم الارتفاعات من A و C ويمكن استخدام العملية نفسها.

77. $f(x) = -2x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



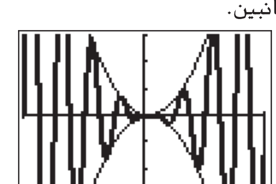
$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-20, 20]$ scl: 4

78. the; $f(x) = \frac{3}{5}x$ تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



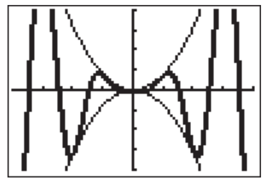
$[-6\pi, 6\pi]$ π by $[-40, 40]$ scl: 8

79. $f(x) = (x - 1)^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



$[-8\pi, 8\pi]$ scl: 2π by $[-150, 150]$ scl: 50

80. $f(x) = -4x^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



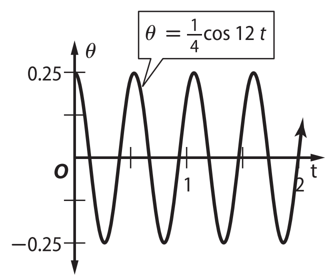
$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-200, 200]$ scl: 50

81.

خط العرض	المسافة
0°	24,881.4
30°	21,547.9
45°	17,593.8
60°	12,440.7
90°	0

مدى المسافات من نحو 24,881 mi إلى 0 mi.

89a.



89b. الدورة هي $\frac{\pi}{6}$ أو نحو 0.524 ثانية. هذا يمثل مقدار الوقت الذي يستغرقه البندول لاستكمال لفة أو دورة كاملة. السعة هي $\frac{1}{4}$. هذا يمثل أقصى الإزاحة للزاوية يحدثها البندول. التكرار هو $\frac{6}{\pi}$ نحو 1.91. هذا يمثل عدد اللفات التي يكملها البندول في كل ثانية.

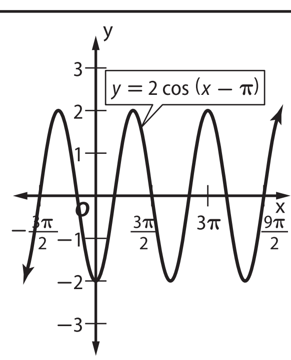
89c. أقصى الإزاحة للزاوية هي 3.14°.

89d. يمثل الخط المتوسط عندما يكون البندول رأسيًّا ولا يوجد الإزاحة للزاوية.

89e. نحو $0.101 + 0.524n$ ثانية و $0.161 + 0.524n$ ثانية

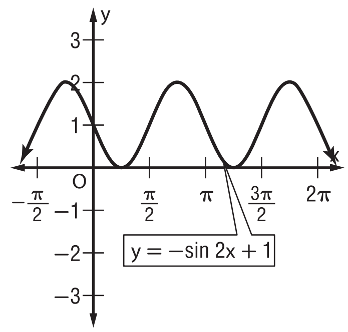
دليل الدراسة والمُراجعة

41. السعة = 2; الدورة = 2π; التكرار = $\frac{1}{2\pi}$ ، الإزاحة الطور = π. الإزاحة الرأسية = 0



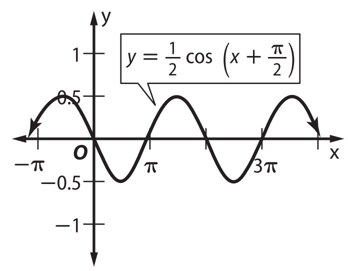
الوحدة 3 ملحق الإجابات

.42



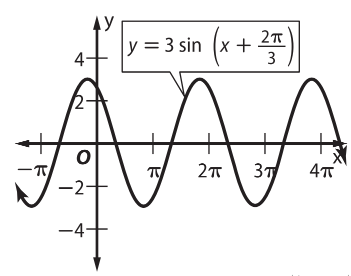
السعة = 1؛
الدورة = π.
التكرار = $\frac{1}{\pi}$.
الإزاحة الطور = 0.
الإزاحة الرأسية = 1

.43



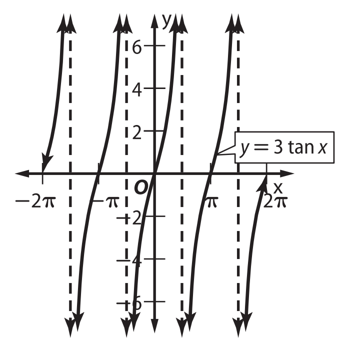
السعة = $\frac{1}{2}$.
الدورة = 2π.
التكرار = $\frac{1}{2\pi}$ ؛
الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{2}$ ؛
الإزاحة الرأسية = 0

.44

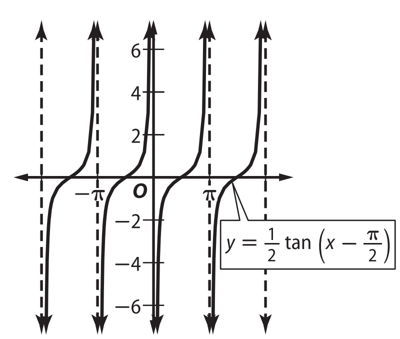


السعة = 3.
الدورة = 2π؛
التكرار = $\frac{1}{2\pi}$؛
الإزاحة الطور = $-\frac{2\pi}{3}$؛
الإزاحة الرأسية = 0

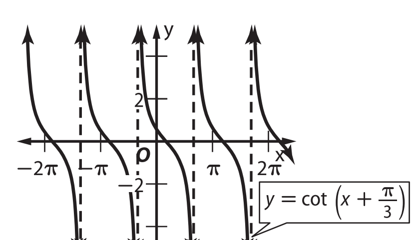
.45



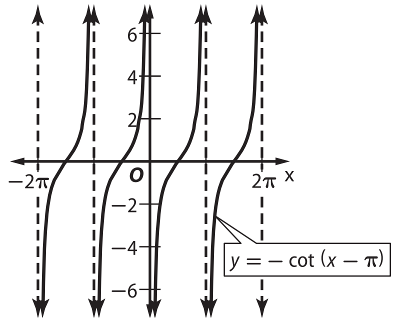
.46



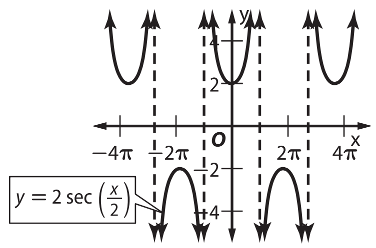
.47



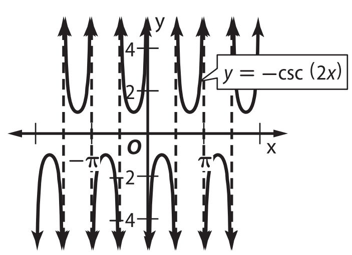
.48



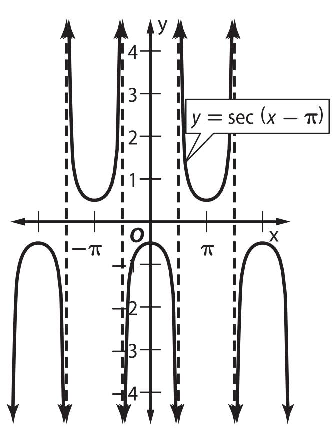
.49



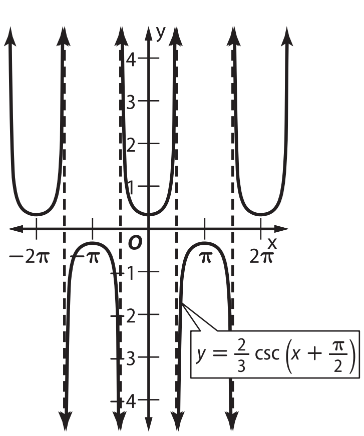
.50



.51



.52



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 16
12/15/2016 11:42:43 PM