الدرس 2-3 نظريتا الباقي والعامل

:: السابق

- لقد حللت التعابير التربيعية إلى العوامل لحل المعادلات.

:: الحالي

- 1 قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
- 2 استخدام نظريّتي الباقي والعامل.

:: لماذا؟

- تعُد أشجار خشب السكويه بحديقة ريدوود الوطنية بولاية كاليفورنيا أقدم الأنواع الحية في العالم. ويمكن لهذه الأشجار أن تنمو حتى تصل إلى 10 7 m ويمكن أن تعيش لما يصل إلى 2,000 عام. يمكن استخدام القسمة التركيبية لتحديد ارتفاع إحدى الأشجار خلال عام معين.

مفردات جديدة

قسمة تركيبية
synthetic division
دالة كثيرة حدود المنخفضة
depressed olynomial
تعويض تركيبي
synthetic ubstitution

1 قسمة الدوال كثيرة الحدود

فكّر في الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ وإذا علمت أن f تحتوي على صفر عند $x = 3$، فأنت تعلم أيضًا أن $(x - 3)$ هي عامل من عوامل $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة. تعلم أن هناك دوالاً كثيرة حدود من الدرجة الثانية $q(x)$ مثل هذا

$$f(x) = (x - 3) \cdot q(x)$$

معنى هذا أن $q(x)$ يمكن إيجادها عن طريق قسمة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ by $(x - 3)$ حيث إن

$$q(x) = \frac{f(x)}{x - 3}، \text{ إذا كان } x \neq 3$$

لقسمة الدوال كثيرة الحدود، يمكننا استخدام خوارزمية مشابهة لتلك الموجودة بالقسمة المطولة ذات الأعداد الصحيحة.

مثال 1 استخدام القسمة المطولة لتحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل

حلِّل $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ بالكامل إلى العوامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان $(x - 3)$ عاملاً.

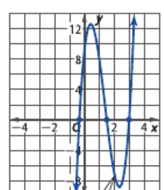
$$\begin{array}{rl}
 & 6x^2 - 7x - 3 \\
x - 3 \,) & 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 \\
(-) & \underline{6x^3 - 18x^2} \\
 & -7x^2 + 18x \\
(-) & \underline{-7x^2 + 21x} \\
 & -3x + 9 \\
(-) & \underline{-3x + 9} \\
 & 0
\end{array}$$

- اضرب المقسوم عليه في $6x^2$ حيث إن $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$
- اطرح وقم بإنزال الحد التالي.
- اضرب المقسوم عليه في $-7x$ حيث إن $\frac{7x^2}{x} = -7x$
- اطرح وقم بإنزال الحد التالي.
- اضرب المقسوم عليه في -3 حيث إن $\frac{-3x}{x} = -3$
- اطرح. لاحظ أن الباقي هو 0

من عملية القسمة هذه، يمكنك كتابة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(6x^2 - 7x - 3)$

بتحليل التعابير التربيعية إلى العوامل ينتج $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(2x - 3)(3x + 1)$

وبالتالي أصفار الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ هي 3 و $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ كما أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x الموضحة بالتمثيل البياني (x) تؤيد هذا الاستنتاج.



$f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$

تمرين موجّه

حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطوَّلة.

1A. $x^3 + 7x^2 + 4x - 12;\ x + 6$ $(x + 2)(x - 1)(x + 6)$

1B. $6x^3 - 2x^2 - 16x - 8;\ 2x - 4$ $(x + 1)(2x - 4)(3x + 2)$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-3 تحليل التعابير التربيعية إلى العوامل لحل المعادلات.

الدرس 2-3 قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
استخدام نظريتي الباقي والعامل.

بعد الدرس 2-3 ايجاد جميع أصفار كثيرة الحدود.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- كيف استطعت أن تجد دالة كثيرة الحدود تمثل متوسط ارتفاع أشجار الخشب الأحمر عندما تكبر؟ أنشئ مخطط انتشار للبيانات على حاسبة التمثيلات البيانية، واحسب عدد الانحناءات التي تظهر أو استخدم حاسبة التمثيلات البيانية لتحصل على دالة انحدار خاصة بالتمثيل البياني.

(يتبع في الصفحة التالية)

- افترض أن الدالة كثيرة الحدود التي تمثل متوسط ارتفاع أشجار الخشب الأحمر عندما تكبر كالتالي $f(x) = -0.001x^2 + 1.15x + 8$. كيف استطعت تقدير ارتفاع شجرة الخشب الأحمر التي يبلغ عمرها 1,000 عام؟ استبدل 1,000 بـ x ثم قم بالتقدير.
- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي تشتمل عليها هذه الدالة؟ اشرح كيف عرفت الحل. 2؛ درجة كثيرة الحدود هي 2.

1 قسمة كثيرات الحدود

الأمثلة 1–4 توضح كيفية قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية. يتضمن ذلك الحاجة إلى أن تكون كثيرات الحدود بالصيغة القياسية إلى جانب استخدام معاملات الصفر للأسس المفقودة كعناصر نائبة.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 قم بتحليل $6x^3 + 17x^2 - 104x + 60$ إلى العوامل بالكامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان $(2x-5)$ عاملاً. $(2x-5)(3x-2)(x+6)$

2 اقسم $6x^3 - 5x^2 + 9x + 6$ على $2x - 1$

$3x^2 - x + 4 + \frac{10}{2x-1},\ x \neq \frac{1}{2}$

يمكن أن ينتج عن القسمة المطوّلة باقي صفري، كما في المثال 1 أو باقي غير صفري، كما هو موضح في المثال أدناه. لاحظ أنه كما هو الحال مع القسمة المطوّلة ذات الأعداد الصحيحة، يتم التعبير عن قسمة كثيرات الحدود باستخدام الناتج والباقي والمقسوم عليه.

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+2\overline{)x^2+5x-4} \\ (-)\ \underline{x^2+2x} \\ 3x-4 \\ (-)\ \underline{3x+6} \\ -10 \end{array}$$

ناتج القسمة ← $x + 3$، المقسوم ← $x^2 + 5x - 4$، المقسوم عليه ← $x + 2$، الباقي ← -10

$$\frac{x^2+5x-4}{x+2} = x + 3 + \frac{-10}{x+2},\ x \neq -2$$

المقسوم، المقسوم عليه، ناتج القسمة، الباقي، المقسوم عليه، القيمة المستبعدة

تذكّر أنه يمكن التعبير عن المقسوم بحدود المقسوم عليه والناتج والباقي.

المقسوم = الباقي + الناتج × المقسوم عليه

$$x^2 + 5x - 4 = (-10) + (x + 3) \times (x + 2)$$

ويؤدي بنا هذا إلى تعريف قسمة كثيرات الحدود.

المفهوم الأساسي قسمة كثيرات الحدود

لنفترض أن $f(x)$ و$d(x)$ هما دالتان كثيرتا حدود حيث تكون درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$ و$d(x) \neq 0$. وهكذا يكون هناك حدود كثيرة ومتعددة $q(x)$ و $r(x)$ بحيث تكون

$$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x) = \frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

حيث $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أصغر من درجة $d(x)$. إذا كان $r(x) = 0$، إذًا $d(x)$ يقسم $f(x)$ بالتساوي إلى 0.

> **نصيحة دراسية**
> **الصحيح مقابل غير الصحيح** يكون التعبير النسبي غير صحيح إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام. لذا ففي خوارزميات القسمة، $\frac{f(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا غير صحيح، بينما $\frac{r(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا صحيحًا.

قبل القسمة، تأكد من كتابة كل دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية ومن إدراج العناصر النائبة ذات المعاملات الصفرية متى لزم الأمر لأسس المتغير الناقصة.

مثال 2 القسمة المطوّلة مع الباقي غير الصفري

اقسم $9x^3 - x - 3$ على $3x + 2$

أولاً أعد كتابة $9x^3 - x - 3$ بالشكل $9x^2 + 0x^2 - x - 3$ ثم استخدم عملية القسمة.

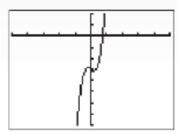
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 \\ 3x+2\overline{)9x^3 + 0x^2 - x - 3} \\ (-)\ \underline{9x^3 + 6x^2} \\ -6x^2 - x \\ (-)\ \underline{-6x^2 - 4x} \\ 3x - 3 \\ (-)\ \underline{3x + 2} \\ -5 \end{array}$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل

$$\frac{9x^3 - x - 3}{3x + 2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{-5}{3x + 2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$
$$= 3x^2 - 2x + 1 - \frac{5}{3x + 2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$

التحقق من الحل اضرب للتحقق من هذه النتيجة.

$$(3x + 2)(3x^2 - 2x + 1) + (-5) \stackrel{?}{=} 9x^3 - x - 3$$
$$9x^3 - 6x^2 + 3x + 6x^2 - 4x + 2 - 5 \stackrel{?}{=} 9x^3 - x - 3$$
$$9x^3 - x - 3 = 9x^3 - x - 3\ ✓$$

> **نصيحة دراسية**
> **التحقق من التمثيل البياني** كما يمكنك التحقق من النتيجة الموضحة بالمثال 2 باستخدام الحاسبة البيانية. التمثيلات البيانية $Y_1 = 9x^3 - x - 3$ و $Y_2 = (3x^2 - 2x + 1)(3x + 2) - 5$ متطابقة.
>
> 
>
> [−5, 5] scl: 1 by [−8, 2] scl: 1

تمرين موجّه

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

2A. $(8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

2B. $(-3x^3 + x^2 + 4x - 66) \div (x - 5)$

عند قسمة الدوال كثيرة الحدود، قد يكون للمقسوم عليه درجة أعلى من 1. وقد يؤدي هذا أحيانًا إلى ناتج به حدود ناقصة.

التعليم المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي لمساعدة الطلاب على فهم قسمة كثيرات الحدود، قدم بعض أمثلة القسمة من الحساب، مثل $235 \div 22 = 10\text{ R}15$ و $235 = 22 \times 10 + 15$ حل بعض الأمثلة، أولاً باستخدام الأعداد ثم باستخدام كثيرات الحدود، لتوضيح المفاهيم أكثر.

المثال 3 القسمة على دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أعلى

اقسم $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11$ على $x^2 - 2x + 7$

$$\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - 1 \\
x^2 - 2x + 7 \,\big)\!\! & \overline{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11} \\
(-) & \underline{2x^4 - 4x^3 + 14x^2} \\
 & -x^2 + 3x - 11 \\
(-) & \underline{-x^2 + 2x - 7} \\
 & x - 4
\end{array}$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل $\dfrac{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11}{x^2 - 2x + 7} = 2x^2 - 1 + \dfrac{x - 4}{x^2 - 2x + 7}$

تمرين موجّه

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

3A. $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x^2 + 3x - 4)$

3B. $(6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x) \div (3x^3 - 2x^2 + x)$

نصيحة دراسية

القسمة على الصفر في المثال 3، لا يتم تحديد هذه القسمة لأن $x^2 - 2x + 7 = 0$. من هذا الدرس فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه لا يمكن لـ x أخذ القيم التي تكون قسمتها المشار إليها غير معرفة.

القسمة التركيبية طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$
ضع في اعتبارك القسمة المطوَّلة من المثال 1.

القسمة المطوَّلة	المتغيرات المحذوفة	الطي العمودي	القسمة التركيبية
لاحظ المعاملات التي تم تمييزها بالنص الملوَّن. $\begin{array}{r l} & 6x^2 - 7x - 3 \\ x - 3\,\big) & \overline{6x^3 - 25x^2 + 18x + 9} \\ (-) & \underline{6x^3 - 18x^2} \\ & -7x^2 + 18x \\ (-) & \underline{-7x^2 + 21x} \\ & -3x + 9 \\ (-) & \underline{-3x + 9} \\ & 0 \end{array}$	احذف x وأسس x. $\begin{array}{r l} & 6 \quad -7 \quad -3 \\ -3\,\big) & \overline{6 \quad -25 \quad +18 \quad +9} \\ (-) & \underline{6 \quad -18} \\ & -7 \quad +18 \\ (-) & \underline{-7 \quad +21} \\ & -3 \quad +9 \\ (-) & \underline{-3 \quad +9} \\ & 0 \end{array}$	قم بطي القسمة المطوَّلة عموديًا مع حذف التكرارات. $\begin{array}{r\|r r r r} -3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\ & & -18 & 21 & 9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$	قم بتغيير علامات المقسوم عليه والأعداد في السطر الثاني. $\begin{array}{r\|r r r r} 3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\ & & 18 & -21 & -9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$ العدد الذي يمثل الآن المقسوم عليه هو الصفر المرتبط بذات الحدين $x - c$ كما أننا الآن نجمع بدلاً من الطرح عن طريق تغيير الإشارات بالسطر الثاني.

يمكننا استخدام القسمة التركيبية الموضحة في المثال أعلاه لوضع المستقيمات العريضة لإجراء القسمة التركيبية لأي دالة كثيرة الحدود عن طريق دالة ذات حدين.

المفهوم الأساسي خوارزمية القسمة التركيبية

لقسمة كثيرة الحدود على عامل $x - c$، استكمل كل خطوة.

الخطوة 1 اكتب معاملات المقسوم بالصيغة القياسية. اكتب الصفر المرتبط بالمعادلة c للمقسوم عليه $x - c$ في المربع. قم بإنزال المعامل الأول.

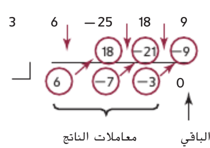
الخطوة 2 اضرب المعامل الأول في c. اكتب الناتج تحت المعامل الثاني.

الخطوة 3 اجمع الناتج والمعامل الثاني.

الخطوة 4 كرِّر الخطوتين 2 و 3 حتى تصل إلى ناتج الجمع في العمود الأخير. الأرقام الموجودة في الصف الأسفل هي معامل الناتج.
القوة للحد الأول أصغر بمقدار واحد عن المقسوم. العدد النهائي هو الباقي.

مثال

اقسم $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ على $x - 3$



= اضرب في c واكتب الناتج. = اجمع الحدود.

مثال إضافي

3 اقسم $x^3 - x^2 - 14x + 4$ على $x^2 - 5x + 6$

$x + 4 - \dfrac{20}{x^2 - 5x + 6}$

التركيز على محتوى الرياضيات

القسمة التركيبية هي طريقة لقسمة كثيرة حدود على عامل بالصيغة $(x - c)$ ولكي تنجح القسمة التركيبية، يجب كتابة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية حيث تمثل الأصفار عناصر نائبة لأي أسس مفقودة. ويجب أن يكون المقسوم عليه في الصيغة $(x - c)$ بالنسبة إلى كثيرات الحدود المقسومة على قيم مقسوم عليها من الدرجة 2 أو أعلى، تستخدم القسمة المطولة.

كما هو الحال مع قسمة الدوال كثيرة الحدود عن طريق القسمة المطوَّلة، تذكر استخدام الأصفار كقيمة رمزية لأي حدود ناقصة بالمقسوم. عند قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها ذات الحدين $x - c$، فإنه يطلق على ناتج القسمة **كثيرة الحدود المنخفضة**.

مثال 4 القسمة التركيبية

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

a. $(2x^4 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x + 2)$

حيث إن $x + 2 = x - (-2)$, $c = -2$. قم بإجراء القسمة التركيبية كالتالي، باستخدام القيمة الرمزية للصفر للحد المفقود x^3 في المقسوم. ثم اتبع إجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr|r} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & -4 & 8 & -6 & 2 \\ \hline & \underbrace{2 \quad -4 \quad 3 \quad -1}_{\text{معاملات الدالة كثيرة الحدود المنخفضة}} & & & & \underset{\text{الباقي}}{0} \end{array}$$

= اجمع الحدود.

= اضرب في c واكتب الناتج.

يتضمن ناتج القسمة درجة واحدة أصغر من تلك التي يحتوي عليها المقسوم، لذا

$$\frac{2x^4 - 5x^2 + 5x - 2}{x + 2} = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

تحقق من هذه النتيجة

b. $(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div (2x - 3))$

أعد كتابة تعبير القسمة بحيث يكون المقسوم عليه على هذه الصورة $x - c$.

$$\frac{5x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7}{x - \frac{3}{2}} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = \frac{(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div 2}{(2x - 3) \div 2}$$

إذًا، $c = \frac{3}{2}$. قم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrr|r} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \hline & 5 & 1 & 4 & -1 \end{array}$$

إذًا، $5x^2 + x + 4 - \frac{1}{x - \frac{3}{2}} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = 5x^2 + x + 4 - \frac{2}{2x - 3}$ تحقق من هذه النتيجة.

تمرين موجّه

4A. $(4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3)$

4B. $(6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7) \div (3x + 1)$

نصيحة تكنولوجية

استخدام التمثيلات البيانية للتحقق من عملية القسمة، يمكنك تمثيل تعبير قسمة الدالة كثيرة الحدود والدالة كثيرة الحدود المنخفضة ذات الباقي بيانيًا. يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية.

2 نظريتا الباقي والعامل

عندما يكون $(d(x) = (x - c)$ هو المقسوم عليه من الدرجة 1 ويكون الباقي هو العدد الحقيقي r. بالتالي، يتم تبسيط خوارزمية القسمة إلى

$$f(x) = (x - c) \times q(x) + r$$

عند إيجاد قيمة $f(x)$ حيث $x = c$، نجد أن

$$r = f(c) = (c - c) \times q(c) + r = 0 \times q(c) + r$$

إذًا $r = f(c)$، الذي يمثل الباقي. وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

المفهوم الأساسي نظرية الباقي

إذا كانت الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ مقسومة على $x - c$، فإن الباقي هو $r = f(c)$

مثال إضافي

4 القسمة باستخدام القسمة التركيبية.

a. $(2x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 5x - 8) \div (x - 3)$
$2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 4 + \frac{4}{x - 3}$

b. $(8x^4 + 38x^3 + 5x^2 + 3x + 3) \div (4x + 1)$
$2x^3 + 9x^2 - x + 1 + \frac{2}{4x + 1}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

ويكيبيديا اطلب من الطلاب إنشاء صفحة ويكيبيديا تشرح كيفية إعداد القسمة التركيبية لمسألة قسمة تشتمل على كثيرات الحدود. وتأكد أنهم يشرحون كيف يحذفون المتغيرات وكذلك كيف يغيرون علامات المقسوم عليه والأعداد في السطر الثاني.

2 نظريتا الباقي والعامل

المثال 5 يعرض كيفية استخدام نظرية الباقي. **والمثال 6** يوضح كيفية استخدام نظرية العامل لتحديد ما إذا كان $x - c$ عاملاً لكثيرة الحدود $f(x)$

نصائح للمعلمين الجدد

معاملات الصفر في المثالين 2 و 4، ركز على أهمية كتابة كل كثيرة حدود بالصيغة القياسية. اطلب من الطلاب ترك مساحة في مسألة القسمة المطولة أو إدخال صفر في مسألة القسمة التركيبية إذا كان أي من أسس x في المقسوم يشتمل على معاملات الصفر. اجعل الطلاب يحلوا بعض مسائل القسمة التركيبية بمفردهم عند تقديم المفهوم لأول مرة حتى يتعلموا الخطوات اللازمة.

أمثلة إضافية

5 **العقارات** افترض أن 800 وحدة من الوحدات السكنية المواجهة للشاطئ يقطنها مستأجرون يدفعون 600 AED شهريًا. وتشير الدراسات إلى أنه لكل 10 AED يتم تخفيضها من الإيجار، سيتم تأجير 15 وحدة إضافية. ويتم الحصول على العائد الأسبوعي من الإيجارات من خلال $R(x) = -150x^2 + 1{,}000x + 480{,}000$، حيث x هي عدد التناقص بمقدار 10 AED التي يرغب مدير العقار في تنفيذها. استخدم نظرية الباقي لإيجاد العائد من العقارات إذا خفض مدير العقارات الإيجار بمقدار 50 AED. **481,250 AED**

6 استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت ذات الحدين المقدمة عوامل لــ $f(x)$ استخدم ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة إلى عوامل لــ $f(x)$

a. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 25;\ (x - 5),\ (x + 5)$
$f(x) = (x - 5)(x^2 - 13x - 5)$

b. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10;\ (x - 5),\ (x + 2)$
$f(x) = (x - 5)(x + 2)(x + 1)$

نصائح للمعلمين الجدد

نظرية الباقي اشرح للطلاب أنه يتم إجراء التعويض التركيبي تمامًا مثل القسمة التركيبية. ولكن، يتم تفسير آخر سطر للأعداد بطريقة مختلفة. وتستخدم القسمة التركيبية آخر سطر من الأرقام بالكامل لخارج القسمة والباقي. وبالنسبة إلى التعويض التركيبي، لا يُلتفت إلا إلى آخر رقم في السطر الأخير، لأن هذا الرقم هو الذي يعطي قيمة الدالة لــ $x = c$

تشير نظرية الباقي إلى أنه لإيجاد قيمة الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ حيث $x = c$، يمكنك قسمة $f(x)$ على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية. سيكون الباقي $f(c)$ باستخدام القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة تُسمى **التعويض التركيبي**.

الربط بالحياة اليومية

إن قواعد كرة القدم بالمدرسة الثانوية مشابهة لقواعد كرة القدم بالكليات والمحترفين. يتمثل أكبر اختلافين في أن مدة الأشواط تكون 12 دقيقة في مقابل 15 دقيقة وأن نقطة الانطلاق تبدأ من خط الــ 40 ياردة بدلاً من الــ 30 ياردة.

المصدر: *الاتحاد الوطني لجمعيات المدارس الثانوية بالولايات المتحدة الأمريكية*

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام نظرية الباقي

كرة القدم يمكن تمثيل عدد التذاكر المبيعة أثناء موسم كرة القدم باستخدام $t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ حيث إن x هو عدد المباريات التي تم لعبها. استخدم نظرية الباقي لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة بموسم كرة القدم.

لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة، استخدم التعويض التركيبي لتقييم $t(x)$ حيث $x = 12$

12	1	−12	48	74
		12	0	576
	1	0	48	650

الباقي هو 650 حيث إن $t(12) = 650$ وبالتالي، تم بيع 650 تذكرة خلال المباراة الثانية عشرة بالموسم.

تحقق من الحل يمكنك التحقق من صحة إجابتك باستخدام التعويض المباشر.

$t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ الدالة الأصلية

$t(12) = (12)^3 - 12(12)^2 + 48(12) + 74 = 650$ ✓ استبدل 12 لــ x وبسّط.

تمرين موجّه

5. **كرة القدم** استخدم نظرية الباقي لتحديد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثالثة عشر بموسم كرة القدم بالموسم. **867**

إذا كنت تستخدم نظرية الباقي لإيجاد قيمة $f(x)$ عند $x = c$ والنتيجة هي $f(c) = 0$. إذًا فأنت تعلم أن c هو صفر الدالة و $(x - c)$ هو العامل. يقودنا هذا إلى نظرية مفيدة تقدم اختبارًا لتحديد ما إذا كان $(x - c)$ هو عامل $f(x)$

المفهوم الأساسي نظرية العامل

يكون للدالة كثيرة الحدود $f(x)$ العامل $(x - c)$ فقط في حالة $f(c) = 0$

يمكنك استخدام القسمة التركيبية لإجراء هذا الاختبار.

مثال 6 استخدام نظرية العامل

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة عوامل لــ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين التي تُعد عوامل لكتابة الصيغة التي تم تحليلها إلى العوامل لــ $f(x)$

a. $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3;\ (x - 1),\ (x + 3)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار كل عامل، $(x - 1)$ و$(x + 3)$.

−3	4	21	25	−5	3
		−12	−27	6	−3
	4	9	−2	1	0

بما أن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x + 3)$ يكون 0. إذًا $f(-3) = 0$ و $(x + 3)$ يُعد عاملاً.

1	4	21	25	−5	3
		4	25	50	45
	4	25	50	45	48

لأن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x - 1)$ يكون $f(1) = 48$ و$(x - 1)$ لا يُعد عاملاً.

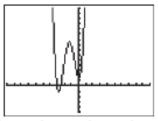
نظرًا لأن $(x + 3)$ يُعد عاملاً لــ $f(x)$ يمكننا استخدام ناتج القسمة $f(x) \div (x + 3)$ لكتابة صيغة المعادلة بعد تحليلها إلى العوامل $f(x)$

$$f(x) = (x + 3)(4x^3 + 9x^2 - 2x + 1)$$

نصيحة تكنولوجية

الأصفار يمكنك التأكد من الأصفار بالتمثيل البياني لدالة ما باستخدام خاصية الصفر من قائمة CALC في الحاسبة البيانية.

التحقق من الحل إذا كان $(x+3)$ عاملاً في المعادلة $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3$ إذًا فإن -3 هي صفر الدالة و$(-3, 0)$ هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي للتمثيل البياني. مثّل $f(x)$ بيانيًا باستخدام حاسبة بيانية واثبت أن $(-3, 0)$ نقطة على التمثيل البياني. ✔



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 30] scl: 2

b. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20;\ (x+4),\ (x-5)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار العامل $(x+4)$.

−4	2	−1	−41	−20
		−8	36	20
	2	−9	−5	0

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x+4)$ هو 0، فإن $f(-4) = 0$ ويكون $(x+4)$ عاملاً لـ $f(x)$

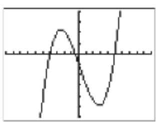
بعد ذلك، اختبر العامل الثاني، $(x-5)$ باستخدام الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 - 9x - 5$

5	2	−9	−5
		10	5
	2	1	0

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x-5)$ هو 0 فإن $f(5) = 0$ و $(x-5)$ هو عامل $f(x)$. بما أن $(x+4)$ و$(x-5)$ عاملان لـــ $f(x)$ يمكننا استخدام ناتج القسمة النهائي لكتابة صيغة المعادلة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل

$$f(x) = (x+4)(x-5)(2x+1)$$

تحقق من الحل يؤكد التمثيل البياني $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20$ أن $x = -4$ و $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ أصفار للدالة. ✔



[−10, 10] scl: 1 by [−120, 80] scl: 20

تمرين **موجّه**

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـــ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين لكتابة صيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل

6A. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 22x + 24;\ (x-2),\ (x+5)$ **نعم، لا؛** $f(x) = (x-2)(3x-4)(x+3)$

6B. $f(x) = 4x^3 - 34x^2 + 54x + 36;\ (x-6),\ (x-3)$

نعم، نعم؛ $f(x) = 2(x-6)(x-3)(2x+1)$

يمكنك اعتبار القسمة التركيبية أداة مفيدة لتحليل أصفار الدوال كثيرة الحدود وإيجادها.

ملخص المفاهيم القسمة التركيبية والبواقي

إذا كان r هو الباقي بعد عملية قسمة تركيبية لـــ $f(x)$ من $(x-c)$، فإن العبارات التالية تكون صحيحة.

- r هي قيمة $f(c)$
- إذا كان $r = 0$، فإن $(x-c)$ هو عامل $f(x)$
- إذا كان $r = 0$ فإن c هو تقاطع المحور الأفقي x للتمثيل البياني f
- إذا كان $r = 0$ فإن $x = c$ هو حل $f(x) = 0$

إجابات إضافية

9. $5x^3 + 17x^2 + 74x + 295 + \frac{1{,}192}{x-4}$

10. $x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 41x - 83 + \frac{190}{x+2}$

11. $2x^3 - 8x^2 + 22x - 47 + \frac{100}{x+2}$

12. $2x^3 - x^2 - 41x - 20$

13. $3x^5 + 3x^3 - 6x^2 - 2x + 4 - \frac{2}{2x-1}$

14. $36x^4 - 36x^3 + 24x^2 + 9x + 6 + \frac{12}{3x+2}$

15. $x + 4$

16. $2x^2 - 8x + 9 + \frac{5x+24}{2x^2+x-12}$

17. $2x^2 - 4x + 2 + \frac{2}{3x^3+2x+3}$

18. $4x^2 - x - 3 - \frac{x+10}{3x^3+2x^2-x+6}$

19. $x^3 + x^2 + 5x + 4 + \frac{2}{x-2}$

20. $2x^3 - 2x^2 + 4x - 4 + \frac{8}{x+3}$

21. $3x^3 + 3x^2 + 12x + 24 + \frac{48}{x-4}$

22. $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1 + \frac{4}{x+2}$

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-47 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه !

القسمة التركيبية في التمارين 19-28. راجع الطلاب الذين قد يستخدمون العلامة الخاطئة للعدد في مربع القسمة التركيبية. ذكر الطلاب بأن المقسوم يجب أن يُكتب بالصيغة $(x - c)$ على سبيل المثال، يجب أن يُكتب مقسوم عليه مثل $(x + 3)$ بالصيغة $(x - (-3))$ لمعرفة أن العدد المطلوب استخدامه في مربع القسمة التركيبية هو -3 وليس 3.

إجابات إضافية

23. $6x^4+14x^3+12x^2+12x+18+\frac{46}{2x-3}$

24. $12x^3-6x^2+6x-12$

25. $15x^4+12x^3+9x^2+6x+\frac{20}{3}+\frac{76}{3(3x-2)}$

26. $12x^4+4x^3+16x^2-4x+\frac{15}{4}+\frac{9}{4(4x+1)}$

27. $12x^5+6x^4-3x^3-5$

28. $8x^5-12x^3+6x^2-15$

38. نعم؛ لا؛ $f(x)=(x+2)(x^3-4x^2-x+3)$

39. لا، لا

40. لا، لا

41. نعم، نعم؛ $f(x)=(3x-1)(x-5)\times(x-4)(x+2)$

42. نعم، لا؛ $f(x)=(4x-1)(x^3-9x-30)$

43. لا، لا

44. لا، لا

45. نعم، لا؛ $f(x)=(4x+3)\times(x^4-3x^3+12x^2-3x+21)$

حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المقدم والقسمة المطوَّلة. (المثال 1)

1. $x^3+2x^2-23x-60;\ x+4$ $(x+3)(x-5)(x+4)$
2. $x^3+2x^2-21x+18;\ x-3$ $(x-1)(x+6)(x-3)$
3. $x^3+3x^2-18x-40;\ x-4$ $(x+5)(x+2)(x-4)$
4. $4x^3+20x^2-8x-96;\ x+3$ $(x+4)(x-2)(x+3)4$
5. $-3x^3+15x^2+108x-540;\ x-6$ $(x-5)(x+6)(x-6)-3$
6. $6x^3-7x^2-29x-12;\ 3x+4$ $(2x+1)(x-3)(3x+4)$
7. $x^4+12x^3+38x^2+12x-63;\ x^2+6x+9$ $(x+7)(x-1)(x+3)^2$
8. $x^4-3x^3-36x^2+68x+240;\ x^2-4x-12$ $(x+5)(x-4)(x+2)(x-6)$

اقسم باستخدام القسمة المطولة. (المثالان 2 و 3) **9–18. انظر الهامش.**

9. $(5x^4-3x^3+6x^2-x+12)\div(x-4)$
10. $(x^6-2x^5+x^4-x^3+3x^2-x+24)\div(x+2)$
11. $(4x^4-8x^3+12x^2-6x+12)\div(2x+4)$
12. $(2x^4-7x^3-38x^2+103x+60)\div(x-3)$
13. $(6x^6-3x^5+6x^4-15x^3+2x^2+10x-6)\div(2x-1)$
14. $(108x^5-36x^4+75x^2+36x+24)\div(3x+2)$
15. $(x^4+x^3+6x^2+18x-216)\div(x^3-3x^2+18x-54)$
16. $(4x^4-14x^3-14x^2+110x-84)\div(2x^2+x-12)$
17. $\frac{6x^5-12x^4+10x^3-2x^2-8x+8}{3x^3+2x+3}$
18. $\frac{12x^5+5x^4-15x^3+19x^2-4x-28}{3x^3+2x^2-x+6}$

اقسم باستخدام القسمة التركيبية. (المثال 4) **19–28. انظر الهامش.**

19. $(x^4-x^3+3x^2-6x-6)\div(x-2)$
20. $(2x^4+4x^3-2x^2+8x-4)\div(x+3)$
21. $(3x^4-9x^3-24x-48)\div(x-4)$
22. $(x^5-3x^3+6x^2+9x+6)\div(x+2)$
23. $(12x^5+10x^4-18x^3-12x^2-8)\div(2x-3)$
24. $(36x^4-6x^3+12x^2-30x-12)\div(3x+1)$
25. $(45x^5+6x^4+3x^3+8x+12)\div(3x-2)$
26. $(48x^5+28x^4+68x^3+11x+6)\div(4x+1)$
27. $(60x^6+78x^5+9x^4-12x^3-25x-20)\div(5x+4)$
28. $\frac{16x^6-56x^5-24x^4+96x^3-42x^2-30x+105}{2x-7}$

29. **التعليم** يمكن تمثيل عدد طلاب من الآلاف الحاصلين على درجة البكالوريوس ما بين عامي 1970 و 2006 كما يلي $g(x)=0.0002x^5-0.016x^4+0.512x^3-7.15x^2+47.52x+800.27$ حيث إن x هو عدد الأعوام منذ 1970. استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد الطلاب الذين تخرجوا عام 2005. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (المثال 5) **2,151,000 طالب**

30. **التزلج** يمكن تمثيل المسافة التي يقطعها الشخص في التزلج بالأمتار على النحو التالي $d(t)=0.2t^2+3t$ حيث إن t هو الزمن بالثواني. استخدم نظرية الباقي لإيجاد المسافة المقطوعة بعد 45 s. (المثال 5) **540 m**

جد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي. (المثال 5)

31. $f(x)=4x^5-3x^4+x^3-6x^2+8x-15;\ c=3$ **711**
32. $f(x)=3x^6-2x^5+4x^4-2x^3+8x-3;\ c=4$ **11,165**
33. $f(x)=2x^6+5x^5-3x^4+6x^3-9x^2+3x-4;\ c=5$ **45,536**
34. $f(x)=4x^6+8x^5-6x^3-5x^2+6x-4;\ c=6$ **247,388**
35. $f(x)=10x^5+6x^4-8x^3+7x^2-3x+8;\ c=-6$ **−67,978**
36. $f(x)=-6x^7+4x^5-8x^4+12x^3-15x^2-9x+64;\ c=2$ **−686**
37. $f(x)=-2x^8+6x^5-4x^4+12x^3-6x+24;\ c=4$ **−125,184**

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$. استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$. (مثال 6) **38–45. انظر الهامش.**

38. $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+x+6;\ (x+2),(x-1)$
39. $f(x)=x^4+2x^3-5x^2+8x+12;\ (x-1),(x+3)$
40. $f(x)=x^4-2x^3+24x^2+18x+135;\ (x-5),(x+5)$
41. $f(x)=3x^4-22x^3+13x^2+118x-40;\ (3x-1),(x-5)$
42. $f(x)=4x^4-x^3-36x^2-111x+30;\ (4x-1),(x-6)$
43. $f(x)=3x^4-35x^3+38x^2+56x+64;\ (3x-2),(x+2)$
44. $f(x)=5x^5+38x^4-68x^2+59x+30;\ (5x-2),(x+8)$
45. $f(x)=4x^5-9x^4+39x^3+24x^2+75x+63;\ (4x+3),(x-1)$

46. **الأشجار** يوضح الجدول أدناه ارتفاع شجرة بالأمتار في أعمار مختلفة بالأعوام.

العمر	الارتفاع	العمر	الارتفاع
2	3.3	24	73.8
6	13.8	26	82.0
10	23.0	28	91.9
14	42.7	30	101.7
20	60.7	36	111.5

a. استخدم حاسبة رسوم بيانية لكتابة معادلة تربيعية لتمثيل نمو الشجرة. **a. $f(x)=-0.001x^2+3.44x-6.39$**

b. استخدم القسمة التركيبية لتقييم ارتفاع الشجرة عند 15 عامًا. **نحو 44.985 ft**

47. **ركوب الدراجات الهوائية** يقود عبيد دراجته بسرعة ابتدائية v_0 من 4 أمتار في الثانية. عندما يمر بمنحدر، تزيد سرعة الدراجة بمعدل a من $0.4\ m/s^2$. المسافة الرأسية من أعلى التل إلى أسفله 25 m. استخدم $d(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ لإيجاد الزمن الذي سيستغرقه عبيد حتى ينزل من التل، حيث إن $d(t)$ هي المسافة المقطوعة و t الموضح بالثواني. **5 ثوانٍ**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-47, 62, 63, 68-83	1-47 فردي, 80-83	2-46 زوجي, 62, 63, 68-79
OL ضمن المستوى	1-51 فردي, 52, 53-59 فردي, 60, 62, 63, 68-83	1-47, 80-83	48-60, 62, 63, 68-79
BL أعلى من المستوى	48-83		

حلّل كل دالة كثيرة الحدود باستخدام العامل الموضح والقسمة المطوَّلة. افترض $n > 0$.

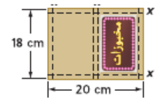
48. $x^{3n} + x^{2n} - 14x^{n} - 24;\ x^{n} + 2$ $(x^n + 2)(x^n - 4)(x^n + 3)$

49. $x^{3n} + x^{2n} - 12x^{n} + 10;\ x^{n} - 1$ $(x^{2n} + 2x^n - 10)(x^n - 1)$

50. $4x^{3n} + 2x^{2n} - 10x^{n} + 4;\ 2x^{n} + 4$ $(2x^n - 1)(2x^n + 4)(x^n - 1)$

51. $9x^{3n} + 24x^{2n} - 171x^{n} + 54;\ 3x^{n} - 1$ $3(x^n - 3)(x^n + 6)(3x^n - 1)$

52. **التصنيع** يتم قص قطعة من الورق المقوى مقاس 18 cm في 20 cm من الورق المقوى وطيها داخل صندوق مخبز.



$v(x) = 3x^3 - 47x^2 + 180x$

a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم الصندوق.

b. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

c. ترغب الشركة في أن يكون حجم الصندوق $196\ cm^3$. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة. $196 = 3x^3 - 47x^2 + 180x$

d. جد عددًا صحيحًا موجبًا لـ x التي تحقق المعادلة الموجودة في الجزء c. **2 in**

جد حجم k بحيث يكون كل باقي صفرًا.

53. $\frac{x^3 - kx^2 + 2x - 4}{x - 2}$

54. $\frac{x^3 + 18x^2 + kx + 4}{x + 2}$ **4**

55. $\frac{x^3 + 4x^2 - kx + 1}{x + 1}$ **−4**

56. $\frac{2x^3 - x^2 + x + k}{x - 1}$ **−2**

57. **النحت** سيستخدم عيسى كتلة من الطين بحجم 3 m في 4 m في 5 m في صنع تمثال. ويرغب في تقليص حجم الطين بإزالة نفس الكمية من الطول والعرض والارتفاع.

a. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل الموقف. $v(x) = -x^3 + 12x^2 - 47x + 60$

b. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

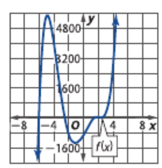
c. إنه يرغب في تقليص حجم الطين إلى $\frac{3}{5}$ من الحجم الأصلي. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة. $36 = -x^3 + 12x^2 - 47x + 60$

d. كم ينبغي عليه أن يقتطع من كل بُعد؟ **نحو 0.60 ft**

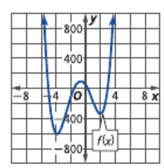
استخدم التمثيلات البيانية والقسمة التركيبية لتحليل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل.

58. $f(x) = 8x^4 + 26x^3 - 103x^2 - 156x + 45$ (الشكل 1.3.1) $f(x) = (x + 5)(x - 3)(4x - 1)(2x + 3)$

59. $f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 153x^3 + 54x^2 + 724x - 840$ (الشكل 1.3.2) $f(x) = (x + 6)(x - 2)^2(3x - 7)(2x + 5)$



الشكل 1.3.2



الشكل 1.3.1

60. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف القيمتين العظمى والصغرى لدالة ما.

a. **العرض البياني** مثّل كل دالة كثيرة الحدود ذات صلة بيانيًا وحدد الأصفار الأكبر والأصغر. ثم انسخ وأكمل الجدول. **a-d. انظر الهامش.**

الدالة كثيرة الحدود	أكبر صفر	أصغر صفر
$x^3 - 2x^2 - 11x + 12$		
$x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$		
$x^5 - x^4 - 2x^3$		

b. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء a لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأكبر من الصفر الأكبر.

c. **العرض الكلامي** قدّم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة ما لعددٍ صحيح أكبر من صفره الأكبر.

d. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء a لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأقل من الصفر الأصغر.

e. **العرض الكلامي** قدم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة عدد ما أقل من صفره الأصغر. **الإجابة النموذجية: تتراوح العناصر في الصف الأخير بين غير السالبة وغير الموجبة.**

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

61. **تحدٍ** هل $(x - 1)$ عامل لـ $18x^{165} - 15x^{135} + 8x^{105} - 15x^{55} + 4$؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكنك استخدام الحاسبة البيانية والقسمة التركيبية وتحليل العامل لتحليل الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة ذات المعاملات النسبية والأصفار الثلاثة الصحيحة والصفرين النسبيين غير الصحيحين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

63. **الاستنتاج** حدد هل كل عبارة أدناه صحيحة أم خاطئة. اشرح.

إذا كان $h(y) = (y + 2)(3y^2 + 11y - 4) - 1$، فإن باقي $\frac{h(y)}{y + 2}$ هو −1. **صحيحة، الإجابة النموذجية: تنص نظرية الباقي على أنه إذا كان $h(y)$ مقسومًا على $y - (-2)$، فإن الباقي هو $r = h(-2)$، وهو −1**

تحدٍ جد k بحيث يحتوي الناتج على باقي 0.

64. $\frac{x^3 + kx^2 - 34x + 56}{x + 7}$ **1**

65. $\frac{x^6 + kx^4 - 8x^3 + 173x^2 - 16x - 120}{x - 1}$ **−30**

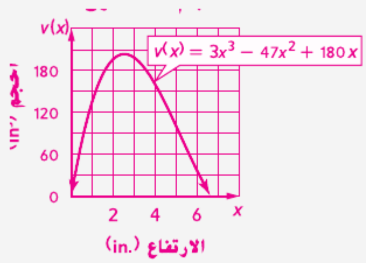
66. $\frac{kx^3 + 2x^2 - 22x - 4}{x - 2}$ **5**

67. **تحدٍ** إذا كان $2x^2 - dx + (31 - d^2)x + 5$ يحتوي على عامل $x - d$، فما قيمة d إذا كان d عددًا صحيحًا؟ **−5**

68. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق في قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

إجابة إضافية

52b.



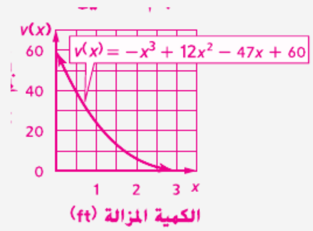
116 | الدرس 2-3 | نظريتا الباقي والعامل

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب أن يكتبوا باقي $x^3 - x^2 - 5x - 3$ عند قسمته على $x - 3$ 0

إجابات إضافية

57b.



60a.

كثيرة الحدود	أكبر صفر	أصغر صفر
$x^3 - 2x^2 - 11x + 12$	4	−3
$x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$	1	−5
$x^5 - x^4 - 2x^3$	2	−1

60b. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$: $f(5) = 32$, $f(7) = 180$, $f(8) = 308$; $f(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$: $f(2) = 56$, $f(3) = 240$, $f(4) = 648$; $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$: $f(3) = 108$, $f(5) = 2{,}250$, $f(7) = 13{,}720$

60c. الإجابة النموذجية: جميع العناصر المذكورة في الصف الأخير بالقسمة التركيبية موجبة.

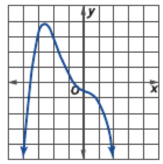
60d. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$: $f(-4) = -40$, $f(-5) = -108$, $f(-6) = -210$; $f(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$: $f(-6) = 168$, $f(-7) = 560$, $f(-9) = 2{,}520$; $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$: $f(-2) = -32$, $f(-3) = -270$, $f(-4) = -1{,}152$

61. نعم؛ الإجابة النموذجية: افترض أن $f(x)$ هي الدالة كثيرة الحدود ذات الصلة. واستخدم نظرية العامل. لأن $f(1) = 0$, $(x - 1)$ عامل لكثيرة الحدود.

مراجعة شاملة

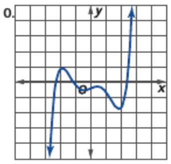
حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الأكبر فيها a_n موجبًا أم سالبًا. (الدرس 2-2)

69.



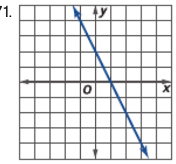
زوجي، سالب

70.



فردي، موجب

71.



فردي، سالب

.72 **القفز بالمظلات** يتم إيجاد الزمن التقريبي t بالثواني الذي يستغرقه سقوط جسمٍ ما من مسافة d قدم باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ لنفترض أن اللاعب سقط قبل أن يفتح المظلة بمدة 11 ثانية. فما المسافة التي يسقطها اللاعب خلال هذه المدة؟ (الدرس 1-2) **1,936 ft**

.73 **مكافحة الحرائق** يتم تمثيل ا لسرعة v وأقصى ارتفاع h للمياه التي يتم ضخها في الهواء باستخدام المعادلة $v = \sqrt{2gh}$ حيث g هو السرعة بسبب الجاذبية ($32\ ft/s^2$) (الدرس 7-1)

a. حدِّد معادلة ستنتج أقصى ارتفاع للمياه كدالة سرعتها. $h = \frac{v^2}{64}$

b. يجب على إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة قوية بما يكفي لدفع المياه لمسافة 80 ft في الهواء. هل ستلبي المضخة المُعلن عنها للمشروع بسرعة 75 ft/s احتياجات إدارة مكافحة الحرائق؟ اشرح. **نعم؛ يمكن أن تعمل المضخة على دفع الماء إلى ارتفاع حوالي 88 ft**

حُل أنظمة المعادلات التالية جبريًا.

74. $5x - y = 16$
$2x + 3y = 3$ $(3, -1)$

75. $3x - 5y = -8$
$x + 2y = 1$ $(-1, 1)$

76. $y = 6 - x$
$x = 4.5 + y$ $(5.25, 0.75)$

77. $2x + 5y = 4$
$3x + 6y = 5$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

78. $7x + 12y = 16$
$5y - 4x = -21$ $(4, -1)$

79. $4x + 5y = -8$
$3x - 7y = 10$ $\left(-\frac{6}{43}, -\frac{64}{43}\right)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.80 **اختبارا SAT/ACT** في الشكل الموضح، مثلث متساوي الأضلاع مرسوم أيضًا بارتفاع قطر الدائرة. إذا كان محيط المثلث 36، فما محيط الدائرة؟ **B**

A $6\sqrt{2}\pi$
B $6\sqrt{3}\pi$
C $12\sqrt{2}\pi$
D $12\sqrt{3}\pi$
E 36π

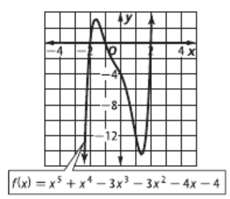
.81 **مراجعة** إذا كان $(3, -7)$ هو مركز الدائرة وتقع النقطة $(8, 5)$ على الدائرة، فما محيط الدائرة؟ **K**

F 13π
G 15π
H 18π
J 25π
K 26π

.82 **مراجعة** الحد الأول في المتتالية هو x كل حد لاحق هو ثلاثة أصغر من ضعف الحد السابق. ما الحد الخامس في المتتالية؟ **D**

A $8x - 21$
B $8x - 15$
C $16x - 39$
D $16x - 45$
E $32x - 43$

.83 استخدم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود. أي مما يلي لا يُعد عامل $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟ **H**



F $(x - 2)$
G $(x + 2)$
H $(x - 1)$
J $(x + 1)$

التعليم المتمايز BL

التوسُّع اطلب من الطلاب أن يجدوا قيم a وb وc حيث إنه عند قسمة $x^6 - 2x^4 + ax^2 + bx + c$ على $(x - 1)$ و$(x - 2)$ و$(x + 4)$، يكون الباقي 0. $-125, 342, -216$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس 1-2 إلى 2-3

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال للدالة، وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (الدرس 2-1)

1. $f(x) = 2x^3$

2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$

3. $f(x) = 3x^{-8}$

4. $f(x) = 4x^{\frac{2}{5}}$

1-4. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

5. **الأشجار** فيما يلي أطوال أشجار التنوب والمساحات التي تغطيها فروعها. (الدرس 2-1)

الارتفاع (m)	المساحة (m^2)
4.2	37.95
2.1	7.44
3.4	23.54
1.7	4.75
4.6	46.48

a. صمم مخطط تشتت للبيانات. **انظر الهامش.**

b. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات. $y = 1.37x^{2.3}$

c. توقع المساحة التي تغطيها فروع شجرة التنوب بارتفاع 7.6 m. $149.26\ m^2$

حُلّ كل لكل من المعادلات التالية. (الدرس 2-1)

6. $\sqrt{5x+7} = 13$ **32.4**

7. $\sqrt{2x-2} + 1 = x$ **1، 3**

8. $\sqrt{3x+10} + 1 = \sqrt{x+11}$ **-2**

9. $-5 = \sqrt[4]{(6x+3)^3} - 32$ **13**

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل. (الدرس 2-1)

10. $f(x) = x^2 - 11x - 26$

11. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3$

12. $f(x) = x^4 + 9x^2 - 10$

10. صفران حقيقيان ونقطة دوران واحدة؛ -2 و 13

11. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ -1 و 0 و $\frac{1}{3}$

12. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ -1 و 1

13. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يوضح السلوك الطرفي الممكن لدالة أحادية الحد من الدرجة الفردية؟ (الدرس 2-1) **D**

A $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$

B $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

C $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

D $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (الدرس 2-1)

14. $f(x) = -7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 23x + 7$ **انظر الهامش.**

15. $f(x) = -5x^5 + 4x^4 + 12x^2 - 8$ **انظر الهامش.**

a-b. انظر الهامش.

16. **الطاقة** فيما يلي استهلاك خولة للكهرباء بالكيلو واط في الساعة (kWh) خلال 12 شهرًا الماضية. (الدرس 2-1)

الشهر	الاستهلاك (kWh)	الشهر	الاستهلاك (kWh)
يناير	240	يوليو	300
فبراير	135	أغسطس	335
مارس	98	سبتمبر	390
أبريل	110	أكتوبر	345
مايو	160	نوفمبر	230
يونيو	230	ديسمبر	100

a. حدد نموذجًا لعدد الساعات بالكيلو واط التي استخدمتها خولة كدالة لعدد الأشهر منذ يناير.

b. استخدم النموذج لتوقع عدد الساعات بالكيلو واط التي ستستخدمها خولة في يناير القادم. هل هذه الإجابة منطقية؟ اشرح استدلالك.

القسمة باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 2-3)

17. $(5x^3 - 7x^2 + 8x - 13) \div (x-1)$ $5x^2 - 2x + 6 - \frac{7}{x-1}$

18. $(x^4 - x^3 - 9x + 18) \div (x-2)$ $x^3 + x^2 + 2x - 5 + \frac{8}{x-2}$

19. $(2x^3 - 11x^2 + 9x - 6) \div (2x-1)$ $x^2 - 5x + 2 - \frac{4}{2x-1}$

حدد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي. (الدرس 2-3)

20. $f(x) = 9x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 16x + 8$؛ $c = 2$ **376**

21. $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 12x^2 - 6x + 4$؛ $c = -3$ **5881**

22. $f(x) = -2x^6 + 8x^5 - 12x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 6x - 3$؛ $c = -2$ **-695**

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل (الدرس 2-3)

23. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 25x - 50$؛ $(x+5)$

24. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$؛ $(x-1)$، $(x-2)$

23-24. انظر الهامش.

25. **الاختيار من متعدد** جد الباقي عند قسمة $f(x) = x^3 - 4x + 5$ على $x + 3$ (الدرس 2-3) **F**

F -10

G 8

H 20

J 26

الدروس من 2-1 إلى 2-3

التقويم التكويني

استخدام اختبار منتصف الوحدة لتقييم تقدم الطلاب في الجزء الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل غير صحيح، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين أقواس.

إجابات إضافية

5a.

[0, 10] scl: 1 by [0, 100] scl: 10

14. الدرجة تساوي 4 والمعامل الرئيسي يساوي -7 لأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$

15. الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي -5 ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$، $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

16a. الإجابة النموذجية: $f(x) = -2.707x^3 + 41.392x^2 - 141.452x + 238.176$

16b. الإجابة النموذجية: -177.273 كيلوواط في الساعة؛ هذه الإجابة غير صحيحة لأنه لا يمكن استهلاك وحدات كيلوواط في الساعة بقيمة سالبة خلال شهر.

23. نعم؛ $f(x) = (x+5)(x-5)(x+2)$

24. نعم، نعم؛ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$