1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-4 اعلم أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تشتمل على n أصفار حقيقية على الأكثر.

الدرس 2-4 إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود. جـد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

بعد الدرس 2-4 حل المتباينات كثيرة الحدود.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- لماذا تحل المسألة لإيجاد قيمة $P(x) = 1{,}500$ وليس $P(x) = 1{,}500{,}000$ ؟ تمثل x عدد آلاف الدراهم التي تم إنفاقها. حيث إن $1{,}500 \times 1{,}000 = 1{,}500{,}000$، فجـد قيمة $P(x) = 1{,}500$
- ما المعادلة التي يجب حلها إذا كانت $P(x) = 1{,}500$؟ $-0.0007x^2 + 2.45x = 1{,}500$

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 2-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

السابق

- تعلمت أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n أصفار حقيقية على الأكثر. (الدرس 2-1)

الحالي

1. إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.
2. إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

لماذا؟

- تقدّر شركة أن الأرباح P بآلاف الدراهم من نموذج معين لجهاز التحكم في ألعاب الفيديو كما يلي $P(x) = -0.0007x^2 + 2.45x$، بحيث x هو عدد الآلاف بالدرهم المستثمرة في تسويق جهاز التحكم. لمعرفة عدد الدراهم التي ينبغي أن تستثمرها الشركة لتحقيق أرباح تبلغ AED 1,500,000 ، يمكنك استخدام الأساليب الواردة في هذا الدرس لحل المعادلة كثيرة الحدود $P(x) = 1{,}500$

مفردات جديدة

نظرية الصفر النسبي Rational Zero Theorem
الحد الأدنى lower bound
الحد الأعلى upper bound
قاعدة ديكارت للإشارات Descartes' Rule of Signs
نظرية الجبر الأساسية Fundamental Theorem of Algebra
نظرية التحليل إلى العوامل الخطية Linear Factorization Theorem
نظرية الجذر المرافق Conjugate Root Theorem
مترافقات مركبة complex conjugates
الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال irreducible over the reals

1 الأصفار الحقيقية

تذكّر أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n من الأصفار الحقيقية. ويمكن أن تكون هذه الأصفار الحقيقية نسبية أو غير نسبية.

الأصفار النسبية	الأصفار غير النسبية
$f(x) = 3x^2 + 7x - 6$ أو $f(x) = (x+3)(3x-2)$ يوجد صفران نسبيان، -3 أو $\frac{2}{3}$	$g(x) = x^2 - 5$ أو $g(x) = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ يوجد صفران غير نسبين، $\pm\sqrt{5}$

توضح **نظرية الصفر النسبي** كيف يمكن استخدام معامل الحد الرئيس والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

المفهوم الأساسي نظرية الصفر النسبي

بما أن f دالة كثيرة الحدود بالصيغة التالية $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات من الأعداد الصحيحة و $a_0 \neq 0$. فإن كل صفر نسبي للدالة f يُمثل بالصيغة $\frac{p}{q}$، بحيث

- p و q لا يوجد لهما أي عوامل مشتركة إلا ± 1
- p عامل عدد صحيح للحد الثابت a_0
- q عامل عدد صحيح لمعامل الحد الرئيس a_n

النتيجة إذا كان معامل الحد الرئيس a_n يساوي 1. فأي صفر نسبي للدالة f يُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت a_0

بمجرد أن تعرف جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة كثيرة الحدود، يمكنك استخدام التعويض المباشر أو التركيبي لتحديد أي منها يُعد أصفارًا فعلية للدالة كثيرة الحدود.

مثال 1 معامل الحد الرئيس يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

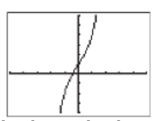
a. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

الخطوة 1 حدد الأصفار النسبية الممكنة.
بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت 1. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة f هي 1 و -1

الخطوة 2 استخدم التعويض المباشر لاختبار كل صفر ممكن.

$f(1) = (1)^3 + 2(1) + 1$ أو 4

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1$ أو -2



[-5, 5] scl: 1 by [-4, 6] scl: 1

بما أن $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$، يمكنك استنتاج أن f لا يحتوي على أصفار نسبية. من التمثيل البياني للدالة f ، يمكنك معرفة أن f تحتوي على صفر حقيقي واحد. يوضح تطبيق نظرية الأصفار النسبية أن هذا الصفر غير نسبي.

- كيف يمكن حل هذه المعادلة؟ اضبطها لتساوي 0: $-0.0007x^2 + 2.45x - 1{,}500 = 0$ ثم قم بإجراء التحليل للعوامل أو استخدم القانون العام.
- ما أكبر عدد من الأصفار الحقيقية التي يمكن أن تشتمل عليها هذه الدالة؟ كيف علمت ذلك؟ 2؛ الدرجة تساوي 2.

1 الأصفار الحقيقية

الأمثلة 3–1 توضح كيفية إيجاد جميع الأصفار النسبية للدالة كثيرة الحدود. **المثال 4** يوضح كيفية استخدام الحدين الأعلى والأدنى للمساعدة في إيجاد الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود. **المثال 5** يستخدم قاعدة "ديكارت" للإشارات لتساعدك في إيجاد الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يمثل أصفارًا، إن وجدت.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ $\pm 1, \pm 2, \pm 4; 1$

b. $f(x) = x^3 - 2x - 1$ $\pm 1; -1$

2 اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لـ $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ ثم حدد أيًا منها يمثل أصفارًا، إن وجدت.

$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}; \frac{1}{2}, -3, 5$

---

b. $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$

الخطوة 1 بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت 9−. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة g هي 1± و 3± و9±

الخطوة 2 ابدأ باختبار 1 و1− باستخدام التعويض التركيبي.

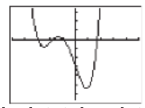
$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & -1 & -3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & 1 & 5 & 5 & -7 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & -7 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -3 & -9 \\ & & -3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

بما أن $g(-1) = 0$، يمكنك استنتاج أن 1− يساوي صفرًا في g. يوضح اختبار 3− على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة أن 3− هو صفر نسبي آخر.

لذا، $g(x) = (x + 1)(x + 3)(x^2 - 3)$ وبما أن العامل $(x^2 - 3)$ لا ينتج عنه أي أصفار نسبية، يمكننا استنتاج أن g يحتوي فقط على صفرين نسبيين 1− و3−.

التحقق من الحل يحتوي التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ في الشكل 1.4.1 على نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x عند 1− و3− وبالقرب من $(2, 0)$ و$(-2, 0)$. من خلال تطبيق نظرية الأصفار النسبية، نعرف أن هذين الصفرين الأخيرين يجب أن يكونا غير نسبيين.
في الحقيقة، ينتج عن العامل $(x^2 - 3)$ صفران غير نسبيين، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ ✔


[-5, 5] scl: 1 by [-20, 10] scl: 3

الشكل 1.4.1

تمرين موجّه

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

1A. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$

1B. $h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$

1A. $\pm 1, \pm 2; 1$
1B. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30; 2, -5$

عندما لا يساوي معامل أكبر حد في الدالة كثيرة الحدود 1، يمكن أن تزيد قائمة الأصفار النسبية الممكنة بدرجة كبيرة.

مثال 2 معامل الحد الرئيس لا يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$ ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

الخطوة 1 معامل الحد الرئيس هو 3 والحد الثابت هو 8.

الأصفار النسبية الممكنة: $\dfrac{\text{عوامل } 8}{\text{عوامل } 3} = \dfrac{\pm 1، \pm 2، \pm 4، \pm 8}{\pm 1، \pm 3} = \pm 1، \pm 2، \pm 4، \pm 8، \pm \frac{1}{3}، \pm \frac{2}{3}، \pm \frac{4}{3}، \pm \frac{8}{3}$

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 2− صفر نسبي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -7 & -22 & 8 \\ & & -6 & 26 & -8 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = (x + 2)(3x^2 - 13x + 4)$ وبمجرد تحليل $3x^2 - 13x + 4$ إلى العوامل، تصبح الدالة كثيرة الحدود $h(x) = (x + 2)(3x - 1)(x - 4)$ ويمكنك استنتاج أن الأصفار النسبية للدالة h هي 2− و $\frac{1}{3}$ و 4. تحقق من هذه النتيجة بالتمثيل البياني.

تمرين موجّه

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

2A. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36$

2B. $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21$

2A. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}; 2$
2B. $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{7}{3}$ لا توجد أصفار نسبية

120 | الدرس 2-4 | أصفار الدوال كثيرة الحدود

مثال 3 من الحياة اليومية حل معادلة كثيرة الحدود

الأعمال **بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المبيعة بالمئات و x عدد الساعات بعد الإصدار. ما الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة؟**

بما أن $g(x)$ تمثل عدد الألعاب المبيعة بالمئات، يجب أن تحل $g(x) = 4$ لتحديد الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة.

$g(x) = 4$ اكتب المعادلة.

$2x^3 + 4x^2 - 2x = 4$ قم بتعويض $2x^3 + 4x^2 - 2x$ لـ $g(x)$

$2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ اطرح 4 من كل طرف.

طبّق نظرية الأصفار النسبية على هذه الدالة الجديدة كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

الخطوة 1 الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{4 \text{ عوامل}}{2 \text{ عوامل}} = \frac{\pm 1، \pm 2، \pm 4}{\pm 1، \pm 2}$

$= \pm 1، \pm 2، \pm 4، \pm \frac{1}{2}$

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 1 يمثل صفرًا نسبيًا.

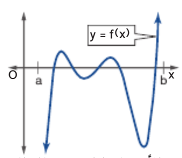
1	2	4	−2	−4
		2	6	4
	2	6	4	0

بما أن 1 يمثل صفرًا للدالة f، إذًا $x = 1$ يعد حلاً للدالة $f(x) = 0$. يمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 + 6x + 4$ كما يلي $2(x + 1)(x + 2)$ وأصفار هذه الدالة كثيرة الحدود -2 و-1 وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون بالسالب، إذًا الحل $x = 1$. لذا، يستغرق الزمن ساعة واحدة لبيع 400 لعبة.

تمرين موجّه

3. **الكرة الطائرة** فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 مترًا في الثانية بارتفاع 4 مترًا $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$، بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و t يمثل الزمن بالثواني. ما الزمن الذي ستصل به الكرة إلى ارتفاع 20 مترًا؟ **0.5 ثانية وثانيتان**

ثمة طريقة لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية وهي تحديد الفترة التي يتم فيها تحديد مواقع الأصفار الحقيقية للدالة. العدد الحقيقي a هو **القيمة الصغرى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x < a$ وبالمثل، b هو **القيمة العظمى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x > b$



الأصفار الحقيقية للدالة f توجد في الفترة [a, b]

يمكنك اختبار هل تحتوي فترة معينة على جميع الأصفار الحقيقية لدالة باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى التالية.

المفهوم الأساسي اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل الحد الرئيس موجب. لنفرض أن $f(x)$ ثمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن c هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة f
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة f

الربط بالحياة اليومية
أظهرت دراسة حديثة أن أعمار ما يقرب من ثلث هواة ألعاب الفيديو المعروفة بين 6 و 17 عامًا.
المصدر: NPD Group Inc

القراءة في الرياضيات
غير سالبة وغير موجبة تذكّر أن القيمة غير السالبة هي القيمة الموجبة أو الصفر وأن القيمة غير الموجبة هي القيمة السالبة أو الصفر.

مثال إضافي

3 **مستوى الماء** يمكن عمل نموذج لمستوى الماء في دلو بالفناء باستخدام $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7$. حيث $f(x)$ يمثل ارتفاع الماء بالمليمتر وx يشير إلى الوقت بالأيام. في أي يوم (أيام) سيصل ارتفاع الماء إلى 10 مليلترات؟ **اليوم الأول**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

المدونة اطلب من الطلاب كتابة إدخال على مدونة الوحدة لتلخيص كيفية إيجاد الأصفار النسبية المحتملة لدالة كثيرة الحدود. وتأكد أن الطلاب يستخدمون مفهوم $\frac{p}{q}$ في توضيحاتهم.

للاستفادة من اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 مثّل الدالة بيانيًا لتحديد فترة توجد فيها الأصفار.

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، تأكد أن القيمتين العظمى والصغرى للفترة هما في الحقيقة القيمتان العظمى والصغرى للدالة بتطبيق اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي للمساعدة على إيجاد جميع الأصفار الحقيقية.

نصيحة دراسية
القيمتان العظمى والصغرى ليس بالضرورة أن تكون القيمتان العظمى والصغرى لدالة فريدين.

مثال 4 استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

الخطوة 1 مثّل $h(x)$ بيانيًا باستخدام آلة حاسبة بيانية. من هذا التمثيل البياني، يبدو أن الأصفار الحقيقية لهذه الدالة توجد في الفترة $[-1, 7]$

الخطوة 2 اختبر القيمة الصغرى للدالة $c = -1$ والقيمة العظمى للدالة $c = 7$

-1	2	−11	2	−44	−24
		−2	13	−15	59
	2	−13	15	−59	35

تعمل القيم على تبديل الإشارات في السطر الأخير، لذا -1 هو القيمة الصغرى.

7	2	−11	2	−44	−24
		14	21	161	819
	2	3	23	117	795

جميع القيم غير سالبة في السطر الأخير، لذا 7 هو القيمة العظمى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي.

الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\text{عوامل } 24}{\text{عوامل } 4} = \frac{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24}{\pm1, \pm2}$
$= \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

بما أن الأصفار الحقيقية في الفترة $[-1, 7]$، يمكنك تضييق هذه القائمة إلى ±1 أو $\pm\frac{1}{2}$ أو $\pm\frac{3}{2}$ أو 2 أو 4 أو 6 فقط. من التمثيل البياني، يبدو أن 6 و $-\frac{1}{2}$ فقط منطقيان.

ابدأ بإختبار $-\frac{1}{2}$ في الدالة كثيرة الحدود

$-\frac{1}{2}$	2	1	8	4
		−1	0	−4
	2	0	8	0

الآن اختبر **6**

6	2	−11	2	−44	−24
		12	6	48	24
	2	1	8	4	0

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = 2(x - 6)(x + \frac{1}{2})(x^2 + 4)$ لاحظ أن العامل $(x^2 + 4)$ لا توجد له أصفار حقيقية مرتبطة به لأن $x^2 + 4 = 0$ لا توجد لها حلول حقيقية. لذا، f لها حلان حقيقيان نسبيان وهما، 6 و $-\frac{1}{2}$—ويدعم التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ هذا الاستنتاج.

تمرين موجّه

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

4A. $g(x) = 6x^4 + 70x^3 - 21x^2 + 35x - 12$

4B. $f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$

4A. الإجابة النموذجية: $[-13، 1]$؛ $-12، \frac{1}{3}$

الإجابة النموذجية: $[-2، 6]$؛ $5، 0.71، -1.16$

التركيز على محتوى الرياضيات

الأصفار الحد الأعلى لأصفار الدالة كثيرة الحدود هو عدد ليس له صفر حقيقي موجود أكبر من ذلك العدد الموجود لتلك الدالة. تكون القيمة الصغرى لأصفار الدالة كثيرة الحدود عبارة عن عدد ليس له صفر حقيقي موجود أصغر من ذلك العدد. ويكون الحدان الأعلى والأدنى المختاران غير فريدين.

يتم اختبار الحدين المختارين عن طريق قسمة كثيرة الحدود تركيبيًا على التعابير الخطية $x - c$، حيث يمثل c كل عدد تم اختياره. وإذا كان كل عدد في السطر الأخير بالقسمة غير سالب وغير موجب بشكل متبادل، فسيكون المقسوم عليه حدًا أدنى. إذا كان كل عدد في السطر الأخير بالقسمة غير سالب، فسيكون المقسوم عليه حدًا أعلى. ويمكن أن يساعد إيجاد الحدين الأعلى والأدنى في حذف القيم من قائمة الأصفار المحتملة التي تم العثور عليها عند استخدام نظرية الصفر النسبي.

مثال إضافي

4 حدد فترة تقع فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $f(x)=x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 4x - 12$ اشرح استدلالك باستخدام اختبارات الحدين الأعلى والأدنى. ثم جد جميع الأصفار الحقيقية. قد يختلف الحدان الأعلى والأدنى. الإجابة النموذجية: باستخدام القسمة التركيبية، تبدل القيم العلامات عند اختبار -3، وتكون كلها سالبة عند اختبار 7 لذلك، تكون -3 حدًا أدنى و 7 حدًا أعلى. وتكون الأصفار -2 و 6

القراءة في الرياضيات

تغير الإشارة يحدث *تغير الإشارة* في أي دالة مكتوبة بالصيغة القياسية عندما تحتوي المعاملات التالية على إشارات معاكسة.

ثمة طريقة أخرى لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية هي استخدام **قاعدة ديكارت للإشارات**. توفر هذه القاعدة معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص التغير في إشارة الدالة كثيرة الحدود.

المفهوم الأساسي قاعدة ديكارت للإشارات

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية، فإن

- عدد الأصفار الحقيقية *الموجبة* للدالة f يساوي عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي
- عدد الأصفار الحقيقية*السالبة* للدالة f هو نفسه عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(-x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي محدد.

مثال 5 استخدام قاعدة ديكارت للإشارات

وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة للدالة $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$

اختبر تغيرات الإشارة للدالة $g(x)$ والدالة $g(-x)$

$$g(-x) = -3(-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 1$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x - 1$$

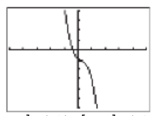
$+ \quad -$

$$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$+ \quad - \qquad - \quad +$

تحتوي الدالة الأصلية $g(x)$ على تغيرين في الإشارة، بينما تحتوي الدالة $g(-x)$ على متغير واحد في الإشارة. بتطبيق قاعدة ديكارت للإشارات، تعرف أن الدالة $g(x)$ تحتوي على صفرين حقيقيين موجبين أو بدون أصفار وصفر حقيقي سالب واحد .

من التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة، يمكنك معرفة أن الدالة تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد قريب من $x = -0.5$ وبدون أصفار حقيقية موجبة.



[-5, 5] scl: 1 by [-6, 4] scl: 1

تمرين موجّه

وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.

5A. $h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

5B. $f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

5A صفر حقيقي موجب واحد، صفران حقيقيان سالبان أو بدون أصفار

5B. 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر واحد، صفر حقيقي سالب واحد

عند استخدام قاعدة ديكارت للإشارات، يتضمن عدد الأصفار الحقيقية الموضح أي أصفار متكررة. لذا، ينبغي حساب صفر بالتكرار m كأصفار **m**.

2 الأصفار المركبة يمكن أن تحتوي مثل الدوال التربيعية على أصفار حقيقية أو تخيلية ويمكن أن تحتوي الدوال كثيرة الحدود ذات الدرجة الأعلى أيضًا على أصفار في نظام الأعداد المركبة. تجعلنا هذه الحقيقة بالإضافة إلى **نظرية الجبر الأساسية** نحسّن العبارة الخاصة بنا المعنية بعدد الأصفار لأي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n.

المفهوم الأساسي نظرية الجبر الأساسية

تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n، بحيث $n > 0$، على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

النتيجة تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n على عدد n معين من الأصفار، بما في ذلك الأصفار المُكررة، في نظام الأعداد المركبة .

الربط بتاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1596–1650) فيلسوف وعالم ورياضي فرنسي، كتب ديكارت العديد من الأعمال الفلسفية مثل *نقاش المنهج* وأعمال رياضية مثل *الهندسة*.

مثال إضافي

5 وضح الأصفار الحقيقية المحتملة لـ $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

2 أو 0 أصفار حقيقية موجبة، 2 أو 0 أصفار حقيقية سالبة

2 الأصفار المركبة

المثال 6 يوضح كيفية كتابة دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية بافتراض أصفارها الحقيقية والمركبة.

المثال 7 يوضح كيفية إيجاد الأصفار الحقيقية والمركبة لكثيرة حدود وكتابة كثيرة الحدود كناتج للعوامل التربيعية الخطية غير القابلة للتبسيط.

المثال 8 يوضح كيفية إيجاد باقي الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود عند معرفة أحدها.

بتوسيع نظرية العامل لتشمل كلاً من الأصفار الحقيقية والتخيلية وتطبيق نظرية الجبر الأساسية، نحصل على **نظرية التحليل إلى العوامل الخطية**.

المفهوم الأساسي نظرية التحليل إلى العوامل الخطية

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$، فإن الدالة f تحتوي على عدد n معين من العوامل الخطية

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

حيث a_n عدد حقيقي معين غير الصفر و $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) للدالة f.

وفق **نظرية الجذر المرافق** عندما تحتوي معادلة كثيرة الحدود على متغير واحد وذات معاملات حقيقية على جذر بالصيغة $a + bi$، بحيث $b \neq 0$، فإن **المرافق المركب**، $a - bi$، يُعد جذرًا أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لكتابة دالة كثيرة الحدود توجد أصفارها المركبة.

مثال 6 إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تتضمن -2 و 4 و $3 - i$ كأصفار.

بما أن $3 - i$ تساوي صفرًا ويجب أن تحتوي الدالة كثيرة الحدود على معاملات حقيقية، إذًا تعرف أن $3 + i$ يجب أن تساوي أيضًا صفرًا. باستخدام نظرية التحليل إلى العوامل الخطية والأصفار -2 و 4 و $3 - i$ و $3 + i$، يمكنك كتابة $f(x)$ كما يلي.

$$f(x) = a[x - (-2)](x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$$

في حين أن a يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا غير الصفر، من الأسهل أن نفترض أن $a = 1$. ثم بسّط الدالة.

$f(x) = (1)(x + 2)(x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$	لنفرض أن $a = 1$
$= (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 6x + 10)$	اضرب
$= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80$	اضرب

وبالتالي، تصبح الدالة ذات أقل درجة التي تحتوي على -2 و 4 و $3 - i$ و $3 + i$ كأصفار هي $f(x) = x^4 - 8x^3\ 14x^2 + 28x - 80$ أو أي مضاعف غير صفري للدالة $f(x)$.

تمرين موجّه

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار الموضحة. تم تقديم نماذج للإجابات.

6A. -3، $4i$، 1 مكرر مرتين

6B. $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1 + i$

6A. $f(x) = x^5 + x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 80x + 48$ **6B.** $f(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 24x - 24$

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود اللانهائية بما أن a يمكن أن يكون أي عدد حقيقي غير الصفر، إذًا يوجد عدد لا نهائي من الدوال كثيرة الحدود التي يمكن كتابتها لمجموعة معينة من الأصفار.

في المثال 6، كتبت معادلة بأصفار حقيقية ومركبة. تتضمن الدالة أصفارًا مركبة عندما تحتوي صيغتها المحللة على عامل تربيعي يُعد من الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط. يصبح التعبير التربيعي **الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط** عندما يحتوي على معاملات حقيقية غير مرتبطة بأصفار حقيقية. يوضح هذا المثال النظرية التالية.

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود الأولية لاحظ الفرق بين التعابير التي تُعد جذورًا تربيعية وتعابير غير قابلة للتبسيط تُعد *أولية*. التعبير $x^2 - 8$ أولي لأنه لا يمكن تحليله إلى تعابير باستخدام معاملات صحيحة. ومع ذلك، لا تُعد $x^2 - 8$ جذورًا تربيعية غير قابلة للتبسيط لأنه توجد أصفار حقيقية مرتبطة بها $\sqrt{8}$ و $-\sqrt{8}$

المفهوم الأساسي تحليل الدوال كثيرة الحدود على الأعداد الحقيقية

يمكن كتابة كل دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ذات معاملات حقيقية كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للتبسيط، وكل له معاملات حقيقية.

كما يتضح من نظرية التحليل إلى العوامل الخطية، عند تحليل دالة كثيرة الحدود على نظام الأعداد المركبة، يمكننا كتابة المعادلة بوصفها ناتج ضرب العوامل الخطية فقط.

مثال إضافي

6 اكتب دالة كثيرة الحدود من الدرجة الأقل مع المعاملات الحقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على -1 و 2 و $2 - i$ كأصفار. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10$

نصائح للمعلمين الجدد

i^2— ذكر الطلاب بأن $i^2 = -1$، وبالتالي، $-i^2 = -(-1)$ أو 1

التركيز على محتوى الرياضيات

نظريات الوجود يطلق على نظرية الجبر الأساسية ونظريات التحليل إلى العوامل الخطية نظريات الوجود. فهذه النظريات تخبرك بأن الأصفار أو العوامل الخطية لكثيرة الحدود موجودة، ولكن لا تخبرك بكيفية إيجادها.

التعليم المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب مقارنة نواتج $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ و$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. شجع الطلاب على ملاحظة أن واحدة من كثيرات الحدود هذه تشتمل على جذور موجبة فقط بينما تشتمل الأخرى على جذور سالبة فقط. ثم اطرح السؤال التالي: ما المزايا التي توفرها لنا كثيرات الحدود لاستنتاج هذه الحقيقة؟ يشتمل الناتج الثاني على كل المعاملات الموجبة، بينما يشتمل الأول على علامات تبديل.

مثال إضافي

7 افترض أن $k(x) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 23x^2 - 14x - 24$

a. اكتب $k(x)$ كناتج للعوامل التربيعية غير القابلة للتبسيط والخطية.

$k(x) = (x - 4)(x + 2) \times (x + 3)(x^2 + 1)$

b. اكتب $k(x)$ كناتج للعوامل الخطية.

$k(x) = (x - 4)(x + 2) \times (x + 3)(x + i)(x - i)$

c. اذكر جميع أصفار $k(x)$

$4, -2, -3, i, -i$

مثال 7 تحليل أصفار الدالة كثيرة الحدود وإيجادها

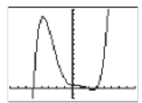
لنفرض أن $k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$

a. اكتب $k(x)$ كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للاختزال.

الأصفار النسبية الممكنة هي ±1، ±2، ±3، ±5، ±6، ±10، ±15، ±30 وبذلك تحتوي الدالة الأصلية على 4 متغيرات إشارة.

$$k(-x) = (-x)^5 - 18(-x)^3 + 30(-x)^2 - 19(-x) + 30$$
$$= -x^5 + 18x^3 + 30x^2 + 19x + 30$$

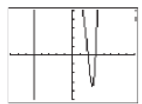
بما أن $k(-x)$ تحتوي على متغير إشارة واحد، إذًا $k(x)$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية موجبة أو 2 أو 0 وعلى صفر حقيقي سالب واحد.



[-8, 8] scl: 1 by [-100, 800] scl: 50

يعرض التمثيل البياني الموضح −5 كصفر حقيقي واحد للدالة $k(x)$.
استخدم التعويض التركيبي لاختبار هذه الاحتمالية.

−5	1	0	−18	30	−19	30
		−5	25	−35	25	−30
	1	−5	7	−5	6	0



[-8, 8] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

بما أن $k(x)$ تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد فقط، إذًا لست بحاجة إلى اختبار أي أصفار نسبية سالبة ممكنة أخرى. قم بتكبير الأصفار الحقيقية الموجبة في التمثيل البياني الذي يظهر 2 و 3 كأصفار نسبية أخرى. اختبر هذه الاحتمالات بالتتابع في الدوال كثيرة الحدود التربيعية المنخفضة ثم التكعيبية.

ابدأ باختبار 2.

2	1	−5	7	−5	6
		2	−6	2	−6
	1	−3	1	−3	0

اختبر الآن 3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة.

3	1	−3	1	−3
		0	3	3
	1	0	1	0

لا ينتج عن العامل التربيعي المتبقي $(x^2 + 1)$ أي أصفار نسبية وبالتالي أي جذور حقيقية غير قابلة للاختزال.
لذا، تصبح $k(x)$ المكتوبة كناتج لعوامل خطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال
$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

b. اكتب $k(x)$ كناتج للعوامل الخطية.

يمكنك تحليل $x^2 + 1$ بكتابة التعبير أولاً كفرق مربعات $x^2 - (\sqrt{-1})^2$ أو $x^2 - i^2$. ثم حلل فرق الجذور التربيعية هذا كما يلي $(x + i)(x - i)$. لذا، تُكتب $k(x)$ كناتج ضرب العوامل الخطية كما يلي.

$$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x - i)(x + i)$$

c. اذكر جميع أصفار $k(x)$.

بما أن الدالة من الدرجة 5 ومن خلال استخدام نتيجة نظرية الجبر الأساسية، تحتوي $k(x)$ على خمسة أصفار بالفعل، بما في ذلك أي صفر قد يكون متكررًا. يعطينا التحليل إلى العوامل الخطية هذه الأصفار الخمسة: −5 و 2 و 3 و i و $-i$.

تمرين موجّه

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج ضرب العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج ضرب العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.

7a. $f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$

7B. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$

نصيحة دراسية

استخدام التكرار سيكون الصفر النسبي في بعض الأحيان صفرًا متكررًا في الدالة. استخدم التمثيل البياني للدالة لتحديد هل ينبغي اختبار صفر نسبي باستخدام التعويض التركيبي بالتتابع.

نصيحة دراسية

الصيغة التربيعية يمكنك أيضًا استخدام القانون العام لإيجاد أصفار $x^2 + 1$ لتحليل التعبير.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$= \pm \frac{\sqrt{-4}}{2}$$
$$= \pm \frac{2i}{2} = \pm i$$

لذا، يُعد 1, -1 أصفارًا ويُعد $(x - i)$ و $(x + i)$ عوامل.

7a. a. $f(x) = (x^2 + 4) \times (x - 5)(x + 6)$
b. $f(x) = (x - 2i) \times (x + 2i)(x - 5) \times (x + 6)$
c. $\pm 2i, 5, -6$

7B. a. $f(x) = (x^2 + 9) \times (x - 1)(x - 4) \times (x + 3)$
b. $f(x) = (x - 3i) \times (x + 3i)(x - 1) \times (x - 4)(x + 3)$
c. $\pm 3i, 1, 4, -3$

125

يمكنك استخدام التعويض التركيبي مع الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي تستخدمها مع الأعداد الحقيقية. يمكن أن يساعدك ذلك على تحليل الدالة كثيرة الحدود لإيجاد جميع أصفارها.

مثال 8 إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

جد جميع الأصفار المركبة للدالة $p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13$ مع العلم أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة p. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$.

استخدم التعويض التركيبي للتأكد أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة $p(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & & \\ \hline & 1 & -4-3i & & & \end{array}$$

$$(2-3i)(-4-3i) = -8 + 6i + 9i^2 = -8 + 6i + 9(-1) = -17 + 6i$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & 24+3i & \\ \hline & 1 & -4-3i & 3+6i & & 0 \end{array}$$

$$(2-3i)(3+6i) = 6 + 3i - 18i^2 = 6 + 3i - 18(-1) = 24 + 3i$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & 24+3i & 13 \\ \hline & 1 & -4-3i & 3+6i & 2+3i & 0 \end{array}$$

$$(2-3i)(2+3i) = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$$

بما أن $2 - 3i$ هي للدالة p، فأنت تعرف أن $2 + 3i$ أيضًا صفر للدالة p. اقسم الدالة كثيرة الحدود المنخفضة على $2 + 3i$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2+3i & 1 & -4-3i & 3+6i & 2+3i \\ & & 2+3i & -4-6i & -2-3i \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

باستخدام هذين الصفرين والدالة كثيرة الحدود المنخفضة من هذه القسمة الأخيرة، يمكنك كتابة
$p(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x^2 - 2x - 1)$

بما أن $p(x)$ دالة رباعية كثيرة الحدود، فأنت تعرف أن لها 4 أصفار حقيقية بالفعل. إذا وجدت صفرين اثنين، تجد الصفرين الآخرين. جد أصفار
$x^2 - 2x - 1$ باستخدام القانون العام.

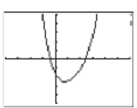
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{القانون العام}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \quad a = 1 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = -1$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad \text{بسّط}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{بسّط}$$

لذا، أصفار الدالة الأربعة $p(x)$ هي $2 - 3i$ و $2 + 3i$ و $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ويكون التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$ هو
$[x - (2 - 3i)] \times [x - (2 + 3i)][x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$
باستخدام التمثيل البياني للدالة $p(x)$، يمكنك التأكد من أن الدالة تحتوي على صفرين حقيقيين عند $1 + \sqrt{2}$ أو حوالي 2.41 و $1 - \sqrt{2}$ أو حوالي -0.41


[-4, 6] scl: 1 by [-40, 40] scl: 8

انتبه!
الأعداد المركبة تذكّر من درس سابق أن جميع الأعداد الحقيقية أعداد مركبة أيضًا.

نصيحة دراسية
قسمة العوامل المشتركة قبل تطبيق أي من الطرق الواردة في هذا الدرس، تذكّر أن إخراج أي عوامل مشتركة أحادية الحد. على سبيل المثال، ينبغي أولاً تحليل
$g(x) = -2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$
كما يلي $g(x) = -2x(x^3 - 3x^2 + 2x + 4)$
وهذا يعني أن 0 هو صفر للدالة g

تمرين موجّه

لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.

8A. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$; $2 + \sqrt{3}$

8B. $h(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95$; $1 - \sqrt{6}$

8A. $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, $3 + i$, $3 - i$; $(x - 2 - \sqrt{3})\,x\,(x - 2 + \sqrt{3})\,x\,(x - 3 - i)\,x\,(x - 3 + i)$

8B. $1 - \sqrt{6}$, $1 + \sqrt{6}$, $3 + i\sqrt{10}$, $3 - i\sqrt{10}$; $(x - 1 + \sqrt{6})\,x\,(x - 1 - \sqrt{6})\,x\,(x - 3 - i\sqrt{10})\,x\,(x - 3 + i\sqrt{10})$

مثال إضافي

8 جد جميع الأصفار المركبة في $p(x) = x^4 - 6x^3 + 35x^2 - 50x - 58$ مع العلم أن $2 + 5i$ هو صفر لـ p. ثم اكتب تحليل العوامل الخطية لـ $p(x)$

$2 + 5i$, $2 - 5i$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$; $p(x) = [x - (2 + 5i)]\,x\,[x - (2 - 5i)][x - (1 + \sqrt{3})]\,x\,[x - (1 - \sqrt{3})]$

إجابات إضافية

1. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm12, \pm15, \pm18, \pm20, \pm30, \pm36, \pm45, \pm60, \pm90, \pm180$; $6, 5, 1, -6$
2. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$; $6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
3. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$; $-5, 6, -1, 1$
4. $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{5}{4}$; 2 (مكرر: 2), $5, -\frac{1}{4}$
5. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm30, \pm60, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{20}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}$; $-\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$
6. $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32, \pm64, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{16}{3}, \pm\frac{32}{3}, \pm\frac{64}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{4}{9}, \pm\frac{8}{9}, \pm\frac{16}{9}, \pm\frac{32}{9}, \pm\frac{64}{9}, \pm\frac{1}{18}$; $-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$
7. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm16, \pm18, \pm24, \pm27, \pm36, \pm48, \pm54, \pm72, \pm108, \pm144, \pm216, \pm432$; 4 (مكرر: 2), 3
8. $\pm1, \pm3, \pm5, \pm9, \pm15, \pm45, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{45}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{15}{4}, \pm\frac{45}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{9}{8}, \pm\frac{15}{8}, \pm\frac{45}{8}$; $\frac{1}{4}, -\frac{5}{2}$

18. الإجابة النموذجية: $[-3, 10]$; $6, -2, 1, 4$
19. الإجابة النموذجية: $[-6, 5]$; $3, 2, -4, -\frac{1}{2}$
20. الإجابة النموذجية: $[-6, 4]$; $2, -1, 1, -4$
21. الإجابة النموذجية: $[-4, 7]$; $-2, 5, 1, \frac{3}{2}$
22. الإجابة النموذجية: $[-2, 9]$; 5, 2 (مكرر: 2)، $-\frac{1}{2}$
23. الإجابة النموذجية: 3; $[-2, 7]$ (مكرر: 2)، $-1, \frac{3}{2}$
24. الإجابة النموذجية: 1 ;$[-3, 5]$(مكرر: 2)، -2 (مكرر: 2)، 3
25. الإجابة النموذجية: $\frac{1}{2}$; $[-3, 5]$ (مكرر: 2)، $-2, 3$ (مكرر: 2)
26. 1 صفر موجب، 2 أو 0 أصفار سالبة
27. 3 أو 1 أصفار موجبة، 1صفر سالب
28. 2 أو 0 أصفار موجبة، 2 أو 0 أصفار سالبة
29. 2 أو 0 أصفار موجبة، 2 أو 0 أصفار سالبة
30. 3 أو 1 أصفار موجبة، 2 أو 0 أصفار سالبة
31. 4 أو 2 أو 0 أصفار موجبة، 1 صفر سالب

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-56 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه !

خطأ شائع في التمرين 9، سيجد الطلاب أن لديهم الكثير من الأصفار النسبية المحتملة للاختبار. ذكرهم بأنه يمكنهم حذف الكثير من الأصفار للاختبار من خلال ملاحظة أن ℓ يجب أن يكون عددًا موجبًا أكبر من 4. ذكر الطلاب بطرح 45 من الدالة المعطاة. واضبطها لتساوي 0. ثم جـد المتغير فقط باستخدام الأصفار المحتملة المقبولة لأبعاد الحاوية.

إجابات إضافية

32. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 54x + 72$
33. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120$
34. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 6x^3 - 14x^2 + 154x - 255$
35. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 19x^3 + 113x^2 - 163x - 296$
36. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 41x^2 + 80x + 420$
37. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 5x^3 - 21x^2 + 119x - 130$
38. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 + 9x^2 - 112$
39. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 + 36x - 150$
40. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 74x^2 - 172x + 41$
41. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 28x^3 + 296x^2 - 1{,}372x + 2{,}263$

55a. $V(\ell) = \frac{1}{3}\ell^3 - 3\ell^2$

55b. $6{,}300 = \frac{1}{3}\ell^3 - 3\ell^2$

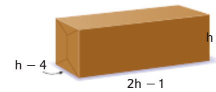
55c. القاعدة: 30 in. × 30 in.؛ الارتفاع: 21 in.

تمارين

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت. (المثالان 1 و 2)

1. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 31x^2 + 216x - 180$ 1–8. انظر الهامش.
2. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$
3. $g(x) = x^4 - x^3 - 31x^2 + x + 30$
4. $g(x) = -4x^4 + 35x^3 - 87x^2 + 56x + 20$
5. $h(x) = 6x^4 + 13x^3 - 67x^2 - 156x - 60$
6. $f(x) = 18x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 48x - 64$
7. $h(x) = x^5 - 11x^4 + 49x^3 - 147x^2 + 360x - 432$
8. $g(x) = 8x^5 + 18x^4 - 5x^3 - 72x^2 - 162x + 45$

9. **التصنيع** فيما يلي مواصفات أبعاد العبوة الكرتونية الجديدة. إذا تم تمثيل حجم الحاوية بالصيغة $V(h) = 2h^3 - 9h^2 + 4h$ وتحتوي على 45 in من سلعة ما. فما هي أبعاد العبوة؟ (مثال 3)



1 in.، 5 in.، 9 in.

جد حلاً لكل من المعادلات التالية. (المثال 3)

10. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 = 0$ $-1, 3, -2$ (تكرار: 2)
11. $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 3x - 36 = 0$ $-4, 1, -3$ (تكرار: 2)
12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ 3، −2، 2، −1
13. $x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 84x - 80 = 0$ 4، −5، 2 (تكرار: 2)
14. $x^4 + 34x = 6x^3 + 21x^2 - 48$ $-3, 8, 2, -1$
15. $6x^4 + 41x^3 + 42x^2 - 96x + 6 = -26$ 15. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -4$ (تكرار: 2)
16. $-12x^4 + 77x^3 = 136x^2 - 33x - 18$ 16. $-\frac{1}{4}, 3, \frac{2}{3}$ (تكرار: 2)

17. **المبيعات** يمكن تمثيل المبيعات $S(x)$ بآلاف الدراهم التي يحققها متجر في الشهر تقريبًا من خلال $S(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x$. بحيث x هو عدد الأيام بعد أول يوم من الشهر. كم عدد الأيام الذي يستغرقها المتجر لتحقيق AED 16,000؟ (المثال 3) **يومان**

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية لكل دالة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد الأصفار الحقيقية. (المثال 4) 18–25. انظر الهامش.

18. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48$
19. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 29x^2 + 34x + 24$
20. $g(x) = 2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 4x + 16$
21. $g(x) = 6x^4 - 33x^3 - 6x^2 + 123x - 90$
22. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 16x - 20$
23. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 21x^2 + 9x - 27$
24. $h(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 16x - 12$
25. $h(x) = 4x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 80x^2 - 75x + 18$

وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة. (المثال 5) 32–41. انظر الهامش.

26. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$
27. $f(x) = 10x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4x - 8$
28. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 6$
29. $f(x) = 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x + 12$
30. $g(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 16x - 24$
31. $h(x) = -4x^5 + x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 64x - 124$

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة. (المثال 6) 32–41. انظر الهامش.

32. 3، −4، 6، −1
33. −2، −4، −3، 5
34. −5، 3، $4 + i$
35. −1، 8، $6 - i$
36. $2\sqrt{5}$، $-2\sqrt{5}$، −3، 7
37. −5، 2، $4 - \sqrt{3}$، $4 + \sqrt{3}$
38. $\sqrt{7}$، $-\sqrt{7}$، $4i$
39. $\sqrt{6}$، $-\sqrt{6}$، $3 - 4i$
40. $2 + \sqrt{3}$، $2 - \sqrt{3}$، $4 + 5i$
41. $6 - \sqrt{5}$، $6 + \sqrt{5}$، $8 - 3i$

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها. (المثال 7) 42–48. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

42. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x + 48$
43. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 8$
44. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 18x - 216$
45. $f(x) = 4x^4 - 35x^3 + 140x^2 - 295x + 156$
46. $f(x) = 4x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 577x + 615$
47. $h(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$
48. $g(x) = x^4 + 31x^2 - 180$

49–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة. (المثال 8)

49. $h(x) = 2x^5 + x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 225x + 108$؛ $3i$
50. $h(x) = 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 - 65x^2 - 2{,}200x + 1{,}500$؛ $-5i$
51. $g(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 46x - 60$؛ $3 - i$
52. $g(x) = 4x^5 - 57x^4 + 287x^3 - 547x^2 + 83x + 510$؛ $4 + i$
53. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 32x + 96$؛ $-2i$
54. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$؛ $3 + i$

55. **الهندسة المعمارية** يصمم مهندس معماري نموذجًا مقياسيًا لمبنى بشكل هرمي.
a. إذا كان ارتفاع النموذج المقياسي أقل من طوله بمقدار 9 cm وكانت قاعدته مربعة، فاكتب دالة كثيرة الحدود توضح حجم النموذج من حيث طوله. a–c. انظر الهامش.
b. إذا كان حجم النموذج $6{,}300\ cm^3$، فاكتب معادلة توضح الموقف.
c. ما أبعاد النموذج المقياسي؟

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-56, 73, 74, 76, 77, 82-98	1-55 فردي, 95-98	2-5 زوجي, 73, 74, 76, 77, 82-94
OL ضمن المستوى	1-71 فردي, 72-74, 76, 77, 82-98	1-56, 95-98	57-74, 76, 77, 82-94
BL أعلى من المستوى	57-98		

56. **الإنشاءات** يزيد ارتفاع نفق قيد الإنشاء عن نصف عرضه بمقدار قدم واحد وطوله يزيد عن 324 مرة من عرضه بمقدار 32 ft. إذا كان حجم النفق 62.231.040 ft^3 وعلى شكل متوازي مستطيلات، فجد الطول والعرض والارتفاع.

$\ell = 23.360$ ft $w = 72$ ft $h = 37$ ft

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات صحيحة تحتوي على العدد الموضح كصفر. 57–60. انظر الهامش.

57. $\sqrt[3]{6}$

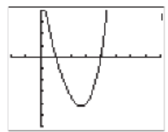
58. $\sqrt[3]{5}$

59. $-\sqrt[3]{2}$

60. $-\sqrt[3]{7}$

استخدم كل تمثيل بياني لكتابة g كناتج للعوامل الخطية. ثم اذكر جميع أصفارها.

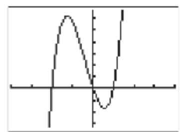
61. $g(x) = 3x^4 - 15x^3 + 87x^2 - 375x + 300$



[-2, 8] scl: 1 by [-300, 200] scl: 50

$g(x) = 3(x-4)(x-1)(x-5i)(x+5i)$؛ $4, 1, \pm 5i$

62. $g(x) = 2x^5 + 2x^4 + 28x^3 + 32x^2 - 64x$



[-4, 4] scl: 1 by [-40, 80] scl: 12

$g(x) = 2x(x-1)(x+2)(x-4i)(x+4i)$؛ $0, 1, -2, \pm 4i$

حدد جميع الأصفار النسبية المحتملة للدالة.

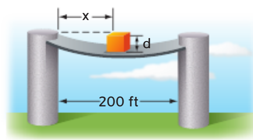
63. $h(x) = 6x^3 - 6x^2 + 12$ -1

64. $f(y) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 - y^2 + 2y - 8$ 3

65. $w(z) = z^4 - 10z^3 + 30z^2 - 10z + 29$ أصفار غير نسبية

66. $b(a) = a^5 - \frac{5}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1$

67. **الهندسة** تدعم دعامتين بينهما مسافة 200 ft عارضة من الصلب. إذا وُضع وزن على مسافة x ft من الدعامة الموجودة على اليسار، فسيحدث انحراف رأسي تمثله الدالة التالية $d = 0.0000008x^2(200 - x)$ كم يبعد الوزن عن الدعامة إذا كان الانحراف الرأسي 0.8 m؟



100 ft أو حوالي 161.8 ft

اكتب كل دالة كثيرة الحدود كناتج للعوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال. 68–71. انظر الهامش.

68. $x^3 - 3$

69. $x^3 + 16$

70. $8x^3 + 9$

71. $27x^6 + 4$

72. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة سوف تستكشف الدوال كثيرة الحدود الزوجية والفردية.

a. **العرض التحليلي** حدد الدرجة وعدد أصفار كل دالة كثيرة الحدود.

i. $f(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$ 3, 3 أصفار

ii. $g(x) = 2x^5 + x^4 - 32x - 16$ 5, 5 أصفار

iii. $h(x) = 5x^3 + 2x^2 - 13x + 6$ 3, 3 أصفار

iv. $f(x) = x^4 + 25x^2 + 144$ 4, 4 أصفار

v. $h(x) = 3x^6 + 5x^5 + 46x^4 + 80x^3 - 32x^2$ 6, 6 أصفار

vi. $g(x) = 4x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 6$ 4, 4 أصفار

b–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

b. **العرض العددي** جد أصفار كل دالة.

c. **العرض الكلامي** هل يجب أن تحتوي دالة من الدرجة الفردية على أقل عدد من الأصفار الحقيقية؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

73. **تحليل الخطأ** تستخدم أيوب ومازن نظرية الأصفار النسبية لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f(x) = 7x^2 + 2x^3 - 5x - 3$ ويعتقد أيوب أن الأصفار الممكنة هي ± 3 و ± 1 و $\pm\frac{3}{7}$ و $\pm\frac{1}{7}$ ويعتقد مازن أنها ± 3 و ± 1 و $\pm\frac{3}{2}$ و $\pm\frac{1}{2}$ هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

74. **الاستنتاج** اشرح لماذا يجب أن تحتوي $g(x) = x^9 - x^8 + x^5 + x^3 - x^2 + 2$ على جذر بين $x = -1$ و $x = 0$. انظر الهامش.

75. **تحدٍ** استخدم $f(x) = x^2 + x - 6$ و $f(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ و $f(x) = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40$ لوضع فرضية عن العلاقة بين التمثيلات البيانية وأصفار $f(x)$ والرسوم البيانية وأصفار كل مما يلي. a–b انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. $-f(x)$

b. $f(-x)$

76. **مسألة مفتوحة** اكتب دالة من الدرجة 4 ذات صفر تخيلي وصفر غير نسبي. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

77. **الاستنتاج** حدد هل العبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضاداً. تحتوي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ذات معاملات حقيقية على صفر غير حقيقي واحد فقط. انظر ملحق الإجابات الوحدة 2.

تحدٍ **جد أصفار كل دالة إذا كانت $h(x)$ تحتوي على أصفار عند x_1 و x_2 و x_3.**

78. $c(x) = 7h(x)$ x_1, x_2, x_3

79. $k(x) = h(3x)$ $\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}$

80. $g(x) = h(x - 2)$ $x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 2$

81. $f(x) = h(-x)$ $-x_1, -x_2, -x_3$

82. **الاستنتاج** عند وجود أول حدين للدالة كثيرة الحدود التالية $f(x) = a_5x^5 - a_4x^4 + \ldots$. إذا كانت $x - c$ عاملاً للدالة $f(x)$. فما القيمة التي يجب أن تكون c أكبر منها أو تساويها لتصبح حدًا أعلى لأصفار الدالة $f(x)$؟ لنفرض أن المعاملات المحددة غير سالبة و $a_1 \neq 0$ اشرح استنتاجك. انظر ملحق الوحدة 1.

83. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب أن تحتوي دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية وصفر واحد تخيلي على صفرين تخيليين اثنين على الأقل. انظر ملحق الوحدة 1.

إجابات إضافية

57. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 6$

58. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 5$

59. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 + 2$

60. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 + 7$

68. $(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})$

69. $(x + 2\sqrt[3]{2})(x^2 - 2x\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4})$

70. $(2x + \sqrt[3]{9})(4x^2 - 2x\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3})$

71. $(3x^2 + \sqrt[3]{4})(9x^4 - 3x^2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})$

128 | الدرس 2-4 | أصفار الدوال كثيرة الحدود

مراجعة شاملة

اقسم باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 3-1)

84. $(x^3 - 9x^2 + 27x - 28) \div (x - 3)$ $x^2 - 6x + 9 - \frac{1}{x-3}$

85. $(x^4 + x^3 - 1) \div (x - 2)$ $x^3 + 3x^2 + 6x + 12 + \frac{23}{x-2}$

86. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2) \div (x + 1)$ $3x^3 - 5x^2 + 10x - 14 + \frac{12}{x+1}$

87. $(2x^3 - 2x - 3) \div (x - 1)$ $2x^2 + 2x - \frac{3}{x-1}$

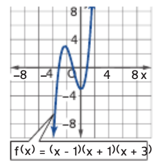
وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي. (الدرس 2-1) **88–90. انظر الهامش.**

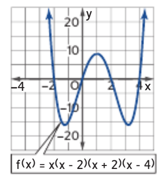
88. $f(x) = -4x^7 + 3x^4 + 6$

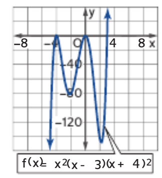
89. $f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 7x^2$

90. $g(x) = 3x^4 + 5x^5 - 11$

قدِّر لأقرب 0.5 وحدة وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادعم إجابتك بالأرقام. (الدرس 4-1) **91–93 انظر الهامش.**

91.


92.


93.


94. **المسائل المالية** يختار المستثمرون أسهمًا مختلفة لضمان محفظة متوازنة. توضح المصفوفات أسعار سهم واحد لكل مجموعة من الأسهم المختلفة في أول يوم عمل من شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

	يوليو	أغسطس	سبتمبر
السهم A	33.81	30.94	27.25
السهم B	15.06	13.25	8.75
السهم C	54	54	46.44
السهم D	52.06	44.69	34.38

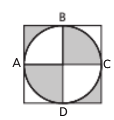
a. تمتلك السيدة حورية 42 سهمًا من السهم A و 59 سهمًا من السهم B و 21 سهمًا من السهم C و 18 سهمًا من السهم D. اكتب مصفوفة صفية تمثل محفظة السيدة حورية. $[42 \quad 59 \quad 21 \quad 18]$

b. استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي قيمة محفظة السيدة حورية لكل شهر إلى أقرب فلس.

يوليو، 4,379.64 AED ؛ أغسطس، 4,019.65 AED؛ سبتمبر، 3,254.83 AED

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

95. **SAT/ACT** هناك دائرة محصورة في مربع وتقطع المربع في النقاط التالية A و B و C و D. إذا كان $AC = 12$، فما إجمالي مساحة المناطق المظللة؟ **E**



A 18   B 36   C 18π D 24π E 72

96. **مراجعة** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ لها حد أدنى نسبي يقع علي أي من قيم x التالية؟ **G**

F -2 G 2   H 3   J 4

97. جد جميع أصفار $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$. **A**

A $-4, 1 + 2i, 1 - 2i$ B $1, 4 + i, 4 - i$ C $-1, 1, 4 + i, 4 - i$ D $4, 1 + i, 1 - i$

98. **مراجعة** أي تعبير يساوي $(t^2 + 3t - 9)(5 - t)^{-1}$؟ **H**

F $t + 8 - \frac{31}{5 - t}$

G $-t - 8$

H $-t - 8 + \frac{31}{5 - t}$

J $-t - 8 - \frac{31}{5 - t}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 73، ذكر الطلاب أن الخطوة الأولى في إيجاد جميع الأصفار المحتملة هي كتابة الدالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. بعد ذلك، يتم تحديد عوامل المعامل الرئيسي وعوامل الحد الثابت.

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا كيف ساعدتهم مبادئ القسمة التركيبية في الدرس 3-2 في اختبار الأصفار النسبية المحتملة للدالة كثيرة الحدود.

إجابات إضافية

73. ايوب؛ الإجابة النموذجية: لم تقسم مازن على عوامل المعامل الرئيسي.

74. الإجابة النموذجية: يُنتج إدخال -1 ناتجًا سالبًا، بينما يؤدي إدخال 0 إلى ناتج موجب.

88. الدرجة تساوي 7 والمعامل الرئيسي يساوي -4. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

89. الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي 4. حيث إن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

90. الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي 5. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

91. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة صغرى نسبية تبلغ -3 عند $x = 0$ وقيمة عظمى نسبية 3 عند $x = -2$

92. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة عظمى نسبية تبلغ 8 عند $x = 1$ وقيمة صغرى نسبية تبلغ -16 عند $x = -1$ و $x = 3$

93. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة عظمى نسبية تبلغ 0 عند $x = 0$ و $x = -4$ وقيمة صغرى نسبية تبلغ -80 عند $x = -2$ و -150 عند $x = 2$

التعليم المتمايز BL

التوسُّع اسأل الطلاب هل من الممكن أن تشتمل الدالة كثيرة الحدود على صفر حقيقي يزيد عن أكبر جذر نسبي ممكن لها. إذا كان ذلك ممكنًا، فاطلب منهم أن يعطوا مثالًا. نعم؛ الإجابة النموذجية: تشتمل الدالة $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ على 1 كأكبر صفر نسبي ممكن لها، بينما الصفر الموجب الفعلي لها هو $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ أو حوالي 2.28.