الدرس 2-5 الدوال النسبية

:: السابق

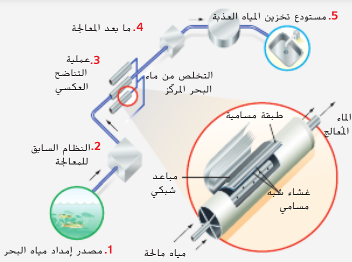
- حددت نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

:: الحالي

1. تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا.
2. حل المعادلات النسبية.

:: لماذا؟

- يتم استخدام تحلية الماء أو إزالة الملح من ماء البحر حاليًا في مناطق من العالم بسبب الكمية المحدودة للماء المتوفر وفي العديد من السفن والغواصات. وتعتبر أيضًا بديلاً لتوفير الماء في المستقبل. ويمكن إنشاء نموذج لتكلفة النطاقات المتنوعة لتحلية الماء باستخدام الدوال النسبية.



مفردات جديدة

الدالة النسبية rational function
خط تقارب asymptote
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
فجوات holes

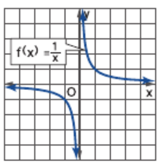
1 الدوال النسبية

الدالة النسبية $f(x)$ تساوي ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود $a(x)$ و b(x)، حيث b لا يساوي صفرًا.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)},\ b(x) \neq 0$$

مجال الدالة النسبية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية باستثناء تلك القيم التي تجعل المعادلة $b(x) = 0$ أو النواتج الصفرية للمعادلة $b(x)$.

تمثل الدالة المقلوبة إحدى أبسط الدوال النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$. كما هو الحال مع الكثير من الدوال النسبية، يتضمن التمثيل البياني للدالة المقلوبة فروعًا تقترب من قيم x وقيم y محددة. وتُسمى المستقيمات التي تمثل هذه القيم **خط التقارب**.



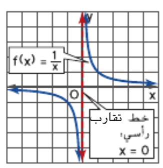
وبما أن الدالة المقلوبة غير معرفة عندما $x = 0$، إذن مجالها يساوي $(-\infty, 0)$ أو $(0, \infty)$. ويمكن وصف سلوك الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ إلى اليسار (0^-) وإلى اليمين (0^+) لقيمة $x = 0$ باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

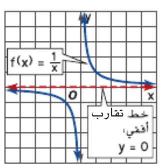
من درس سابق، ينبغي إدرك أن الصفر كنقطة للانفصال اللانهائي في مجال الدالة f. يُسمى المستقيم $x = 0$ في الشكل 1.5.2 *خط تقارب رأسيًا* للتمثيل البياني للدالة f. ويمكن، أيضًا، وصف السلوك الطرفي للدالة f باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

يُسمى المستقيم $y = 0$ في الشكل 2.5.2 *خط تقارب أفقيًا* للتمثيل البياني للدالة f.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.2

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-5 تحديد نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

الدرس 2-5 تحليل الدوال النسبية ومثِّلها بيانيًا. حل المعادلات النسبية.

بعد الدرس 2-5 كتابة التحليلات الجزئية للكسور الخاصة بالتعابير النسبية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- اذكر بعض الطرق لإزالة الأملاح من الماء؟ الإجابة النموذجية: التناضح العكسي والتقطير والتحليل الكهربائي والتجميد الخوائي

ويمكن تعميم هذه التعريفات لخطوط التقارب الرأسية والأفقية.

يمكنك استخدام معرفتك بالحدود والانفصال والسلوك الطرفي لتحديد خطوط التقارب الرأسية والأفقية، إن وُجدت، للدالة النسبية.

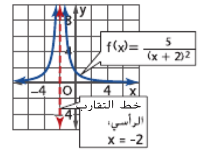
قراءة الرياضيات

رمز النهاية لتعبير $\lim_{x \to c^-} f(x)$ يقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f* من *x عندما تقترب x من c من اليسار* والتعبير $\lim_{x \to c^+} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f من x عندما تقترب x من c من اليمين*.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الرأسية والأفقية

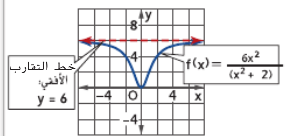
التوضيح بالكلمات $x = c$ هو خطوط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$

مثال



التوضيح بالكلمات $y = c$ **هو** خطوط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ **أو** $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

مثال



مثال 1 إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

a. $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$

الخطوة 1 جد المجال.
تكون الدالة غير معرَّفة عند الصفر الحقيقي في المقام $b(x) = x - 3$ تساوي صفرًا. العدد الحقيقي الذي يجعل ناتج المعادلة $b(x)$ يساوي صفرًا هو 3. إذًا، مجال الدالة f هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 3$.

الخطوة 2 جد خطوط التقارب، إن وُجدت.
تحقق من خطوط التقارب الرأسية.

حدّد ما إذا كانت $x = 3$ نقطة انفصال لا نهائي. جد الحد حيث x تقترب من 3 من اليسار واليمين.

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
f(x)	−69	−699	−6999	غير معرّف	7001	701	71

نظرًا لأن $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$، فأنت تعلم أن $x = 3$ هو خط تقارب رأسي للدالة f.

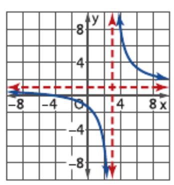
تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

استخدم جدولاً لفحص السلوك الطرفي للدالة $f(x)$.

x	−10,000	−1000	−100	0	100	1000	10,000
f(x)	0.9993	0.9930	0.9320	−1.33	1.0722	1.0070	1.0007

يشير الجدول إلى أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. وبناءً عليه، فأنت تعلم أن $y = 1$ هو خط تقارب أفقي للدالة f.

التحقق من الحل التمثيل البياني الموضح للدالة $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$ يدعم كل هذه النتائج. ✓



131

- تكمن تكلفة تحلية الماء غالبًا في الطاقة المستخدمة. ونظرًا لزيادة نسبة الأملاح التي تتم إزالتها، ماذا يحدث للتكلفة في رأيك؟ الإجابة النموذجية: تزداد التكلفة بزيادة نسبة الأملاح التي تتم إزالتها.
- إذا كانت التكلفة AED 1,000 لإزالة كل نسبة من الأملاح، إذًا فإن نسبة تكلفة إزالة x % من الأملاح إلى نسبة الأملاح المتبقية ستكون $\frac{1{,}000x}{100 - x}$. ما نوع القيم التي يمكن أن تشتمل عليها x؟ اشرح. $0 \le x < 100$؛ لا يمكن أن تساوي المقامات 0. لذلك يجب أن تكون x أصغر من 100. ووجود نسبة مئوية سالبة أمر غير منطقي، لذلك يجب أن تكون x عددًا نسبيًا أكبر من 0.

1 الدوال النسبية

الأمثلة 1–4 توضح كيفية تحليل الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ورسمها بيانيًا عن طريق تحليل الأصفار الحقيقية لـ $b(x)$ لإيجاد المجال وباستخدام الحدود أو بمقارنة درجة n لـ $a(x)$ بدرجة m لـ $b(x)$ لإيجاد معادلات خطوط التقارب المائلة والرأسية والأفقية. **المثال 5** يوضح كيف يمكن أن تكون هناك حالات انفصال قابلة للإزالة في الدالة النسبية.

التقويم التكويني

استخدام التمارين الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

التركيز على محتوى الرياضيات

خطوط التقارب يمكن أن تكون خطوط التقارب خطوطًا أفقية أو رأسية أو مائلة. ويمكن تحديد خطوط التقارب من خلال ملاحظة الحدود والانفصال والسلوك الطرفي للدالة النسبية.

b. $g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1}$

الخطوة 1 الأصفار في المقام $b(x) = 4x^2 + 1$ تخيلية. لذلك، فإن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية.

الخطوة 2 نظرًا لأن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية، فليس للدالة خطوط تقارب رأسية.

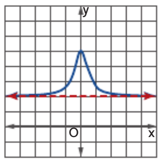
وباستخدام القسمة، يمكنك تحديد أن

$$g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1} = 2 + \frac{3}{4x^2+1}$$

حيث إن قيمة $|x|$ تزيد، يصبح $4x^2 + 1$ عددًا موجبًا كبيرًا بشكل متزايد، كما يتناقص $\frac{3}{4x^2+1}$ مقتربًا من 0. ولذلك،

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 2 + 0$$

التحقق من الحل يمكنك استخدام جدول القيم لدعم هذا الاستنتاج. التمثيل البياني $g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1}$ الموضح يدعم أيضًا كل هذه النتائج. ✓



تمرين موجّه

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

1B. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$؛ خط تقارب رأسي عند $x = -4$ ؛ لا توجد خطوط تقارب أفقية

1A. $m(x) = \frac{15x+3}{x+5}$

1B. $h(x) = \frac{x^2-x-6}{x+4}$

1A. $D = \{x \mid x \neq -5, x \in \mathbb{R}\}$؛ خط تقارب رأسي عند النقطة $x = -5$؛ خط تقارب أفقي عند النقطة $y = 15$

يوضح التحليل في مثال 1 وجود علاقة بين السلوك الطرفي للدالة وخط التقارب الأفقي. يرد تلخيص هذه العلاقة، مع السمات الأخرى للتمثيلات البيانية للدوال النسبية فيما يلي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال النسبية

إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقاً للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

حيث إن $b(x) \neq 0$ و$a(x)$ و$b(x)$ ليس لها عوامل مشتركة غير ± 1. إذًا التمثيل البياني للدالة f له الخصائص التالية.

خطوط التقارب الرأسية قد تحدث خطوط التقارب الرأسية عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $b(x)$.

خط التقارب الأفقي قد يحتوي التمثيل البياني على خط تقارب أفقي واحد أو لا يحتوي على خط تقارب أفقي كما هو محدد بمقارنة الدرجة n من $a(x)$ بالدرجة m من $b(x)$.

- إذا كانت $n < m$، فإن الخط المتقارب الأفقي $y = 0$
- إذا كانت $n = m$، فإن خط التقارب الأفقي $y = \frac{a_n}{b_m}$
- إذا كانت $n > m$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

نقاط التقاطع تقع نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x إن وُجدت، عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $a(x)$. يكون التقاطع مع المحور الرأسي y، إن وُجد، هو قيمة الدالة f عندما $x = 0$

نصيحة دراسية

الأقطاب يُسمى خط التقارب الرأسي في التمثيل البياني للدالة النسبية قطب الدالة أيضًا.

مثال إضافي

1 ابحث عن مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

a. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$D = \{x \mid x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$؛ خط تقارب رأسي عند $x = 1$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 1$

b. $f(x) = 4x^2 + \frac{3}{2x^2+1}$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$؛ لا توجد خطوط مقاربة رأسية؛ خط تقارب أفقي عند $y = 2$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب يوضح للطلاب معادلة الدالة النسبية. اسألهم إذا كانت الدالة تحتوي على خط تقارب رأسي. اطلب من الطلاب الرد بـــ A للإجابة نعم والرد بـــ B للإجابة لا.

نصائح للمعلمين الجدد

الدوال النسبية تفترض العلاقات الموضحة في مربع المفهوم الأساسي أنه لا يمكن خفض الدالة النسبية f إلى دالة ثابتة.

التعليم المتمايز BL

التوسُّع استخدم بعد المثال 1 اطلب من الطلاب أن يحددوا خطوط التقارب الأفقية لـــ $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$، $f(x) = \frac{x}{x-4}$ و $f(x) = \frac{x^3}{x^3-4}$ ثم اجعل الطلاب يضعوا فرضية عن خطوط التقارب لـــ $f(x) = \frac{x^n}{x^n-4}$ لأي عدد صحيح موجب n. تشتمل كل دالة على $y = 1$ كخط تقارب أفقي.

لتمثيل دالة نسبية بيانيًا، بسّط f إن أمكن، ثم اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 جد المجال.

الخطوة 2 جد خطوط التقارب وارسمها، إن وُجدت.

الخطوة 3 جد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y وارسمها، إن وُجدت.

الخطوة 4 جد نقطة واحدة على الأقل من *فترات الاختبار* المحددة بأي نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x وخطوط التقارب الرأسية وارسمها.

> **نصيحة دراسية**
> **فترات الاختبار** قد تغير الدالة النسبية الإشارة عند أصفارها وفيهما غير المعرفة. لذلك عندما تُرتب قيم x، فإنها تقسم مجال الدالة إلى فترات الاختبار التي يمكن أن تساعدك على تحديد ما إذا كان التمثيل البياني يقع فوق المحور الأفقي x أم تحته.

مثال 2 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا: $n < m$ و $n > m$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

a. $g(x) = \frac{6}{x+3}$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$.

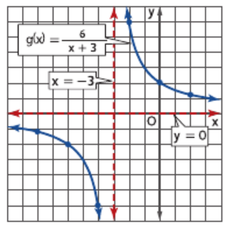
الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = -3$

تساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في البسط صفرًا، وتساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في المقام 1. لأن $1 > 0$. التمثيل البياني g يحتوي على خط تقارب أفقي عند النقطة $y = 0$

الخطوة 3 ليس للدالة كثيرة الحدود في البسط أصفار حقيقية. لذلك ليس لـ g نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. لأن $g(0) = 2$، تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي 2.

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم اختر قيم x التي تقع في فترات الاختبار المحددة بخط التقارب الرأسي لإيجاد نقاط إضافية لرسمها على التمثيل البياني. استخدم منحنيات سلسة لإكمال التمثيل البياني.

الفترة	x	$(x, g(x))$
$(-\infty, -3)$	-8	$(-8, -1.2)$
	-6	$(-6, -2)$
	-4	$(-4, -6)$
$(-3, \infty)$	-2	$(-2, 6)$
	2	$(2, 1.2)$



> **نصيحة دراسية**
> **القطع الزائد** التمثيلات البيانية للدوال المقلوبة $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{6}{x+3}$ تُسمى *القطوع الزائدة*. ستتعلم المزيد عن القطوع الزائدة في وحدة لاحقة.

b. $k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$

ينتج عن تحليل البسط إلى عوامله $k(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x-3}$. لاحظ أنه ليس للبسط والمقام عوامل مشتركة، لذلك يكون التعبير في أبسط صورة.

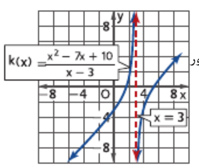
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = 3$.

قارن بين درجات البسط والمقام. لأن $2 > 1$، لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 للبسط أصفار عند $x = 2$ و $x = 5$. لذلك نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x هما 2 و5. $k(0) = -\frac{10}{3}$، لذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي -3.3 تقريبًا.

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار المحددة بنقاط التقاطع وخطوط التقارب الرأسية وارسمها: $(-\infty, 0), (0, 3), (3, \infty)$. استخدم المنحنيات السلسة لإكمال التمثيل البياني.



تمرين موجّه

2A. $h(x) = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$

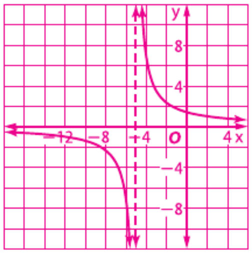
2B. $n(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

2A-B. انظر الهامش.

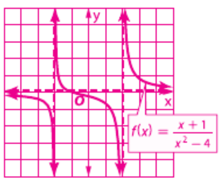
مثال إضافي

2 في كل دالة، حدد أي نقاط تقاطع وخطوط التقارب رأسية وأفقية. ثم ارسم الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

a. $k(x) = \frac{7}{x+5}$ خط تقارب رأسي عند $x = -5$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 1.4 $D = \{x \mid x \neq -5, x \in \mathbb{R}\}$

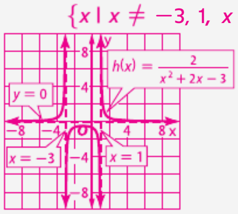


b. $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$ خطوط تقارب رأسي عند $x = 2$ و $x = -2$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -1؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -0.25؛ $D = \{x \mid x \neq 2, -2, x \in \mathbb{R}\}$

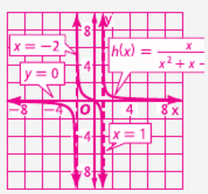


إجابات إضافية (تمرين موجه)

2A. خط تقارب رأسي عند $x = -3$ و $x = 1$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{2}{3}$؛ $D = \{x \mid x \neq -3, 1, x \in \mathbb{R}\}$



2B. خطوط مقاربة رأسية عند $x = -2$ و $x = 1$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 0؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq -2, 1, x \in \mathbb{R}\}$



في مثال 3، درجة البسط *مساوية* لدرجة المقام.

مثال 3 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m$

حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج عن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله $f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ بدون عوامل مشتركة.

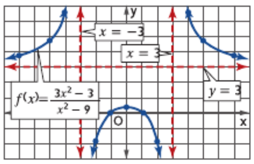
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. ويكون المجال $\{x \mid x \neq -3, 3, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 توجد خطوط تقارب رأسية عندما $x = 3$ و $x = -3$

ويوجد خط تقارب أفقي عند $y = \frac{3}{1}$ أو $y = 3$، وهي النسبة بين المعاملات المستخدمة للبسط والمقام، لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية.

الخطوة 3 نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x هما 1 و -1، وهما النواتج الصفرية للبسط. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $\frac{1}{3}$ لأن الدالة $f(0) = \frac{1}{3}$

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار وارسمها $(-\infty, -3)$ و $(-3, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ و $(3, \infty)$



تمرين موجّه **3A–B. انظر الهامش.**

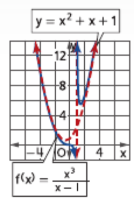
في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

3A. $h(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$ **3B.** $h(x) = \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 5}$

نصيحة دراسية

خطوط التقارب اللاخطية

خطوط التقارب تكون كلها خطية. قد يكون للدالة النسبية خط تقارب غير خطي أيضًا. مثلاً، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ له خط تقارب تربيعي.



عندما تكون درجة البسط *أكبر بمقدار واحد بالضبط* من درجة المقام، فإن التمثيل البياني يكون له *ميل* أو **خط تقارب مائل**.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب المائلة

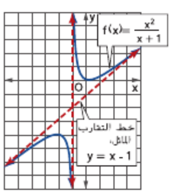
إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

حيث إن $b(x)$ لها درجة أكبر من 0 و $a(x)$ ولا توجد عوامل مشتركة للمعادلتين $b(x)$ غير 1. إذًا التمثيل البياني للدالة f يحتوي على خط تقارب مائل إذا كانت قيمة $n = m + 1$ تكون دالة خط التقارب المائل هي ناتج قسمة كثيرات الحدود $q(x)$ الناتج من قسمة $a(x)$ على $b(x)$.

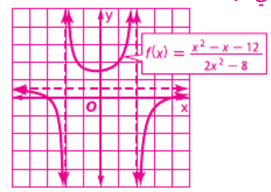
$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{q(x)}_{\text{دالة خط التقارب المائل}} + \frac{r(x)}{b(x)}$$

مثال



مثال إضافي

3 حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 - 8}$ ثم ارسم الدالة بيانيًا واذكر مجالها. خطوط تقارب رأسية عند $x = -2$ و $x = 2$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0.5$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: 4، -3؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 1.5



$D = \{x \mid x \neq -2, 2, x \in \mathbb{R}\}$

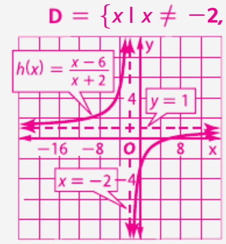
نصائح للمعلمين الجدد

الفروع الناقصة بناءً على إعدادات النافذة التي يحددها الطلاب على حاسبات التمثيلات البيانية الخاصة بهم، قد ينسى الطلاب بعض فروع التمثيل البياني للدالة النسبية التي يرسمونها. واشرح أهمية إيجاد أكبر قدر ممكن من المعلومات عن التمثيل البياني للدالة (خطوط تقارب ونقاط التقاطع والمجال) قبل الانتقال إلى حاسبة التمثيل البياني.

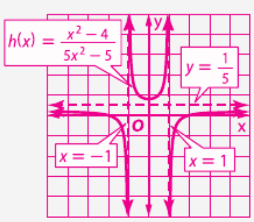
إجابات إضافية

(تمرين موجه)

3A. **مستقيم تقارب رأسي عند $x = -2$؛ مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 6؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -3؛** $D = \{x \mid x \neq -2, x \in \mathbb{R}\}$

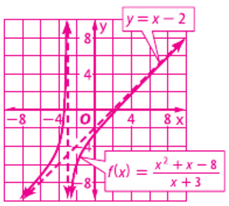


3B. خطوط تقارب رأسية عند $x = -1$ و $x = 1$؛ مستقيم تقارب أفقي عند $y = \frac{1}{5}$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: 2، -2؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{4}{5}$؛ $D = \{x \mid x \neq -1, 1, x \in \mathbb{R}\}$



مثال إضافي

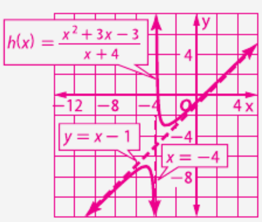
4 حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع للدالة $f(x) = \frac{x^2 + x - 8}{x + 3}$ ثم ارسم الدالة بيانيًا واذكر مجالها. مستقيم تقارب رأسي عند $x = -3$؛ مستقيم تقارب مائل عند $y = x - 2$؛ نقاط التقاطعات مع المحور الأفقي x: $\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$، $\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{8}{3}$



$D = \{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A. مستقيم تقارب رأسي عند $x = -4$؛ مستقيم تقارب مائل عند $y = x - 1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x 0.8 تقريبًا، 3.8 تقريبًا؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{3}{4}$؛ $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$



مثال 4 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m + 1$

حدّد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج عن تحليل المقام إلى عوامله $f(x) = \frac{2x^3}{(x+4)(x-3)}$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 توجد خطوط تقارب رأسية عند $x = -4$ و $x = 3$

تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذلك لا يوجد خط تقارب أفقي.

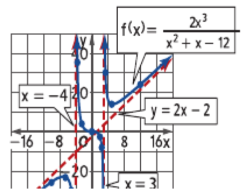
لأن درجة البسط أكبر بواحد بالضبط من درجة المقام، يوجد للدالة f خط تقارب مائل. باستخدام قسمة كثيرات الحدود، يمكنك كتابة ما يلي.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$$
$$= 2x - 2 + \frac{26x - 24}{x^2 + x - 12}$$

لذلك، تكون معادلة خط التقارب المائل هي $y = 2x - 2$

الخطوة 3 تكون نقاط تقاطع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y هي 0. لأن 0 يمثل الناتج الصفري للبسط والدالة $f(0) = 0$

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, -4)$ و $(-4, 0)$ و $(0, 3)$ و $(3, \infty)$ وارسمها.



تمرين موجّه **4A–B. انظر الهامش.**

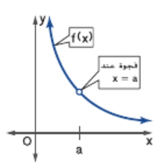
في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

4A. $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$ **4B.** $p(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$

نصيحة دراسية

خط التقارب للسلوك الطرفي في مثال 4، التمثيل البياني للدالة f يقترب من خط التقارب المائل $y = 2x - 2$ حيث $x \to \pm\infty$. ومع ذلك، بين خطي التقارب الرأسيين $x = -4$ و $x = 3$، يمر التمثيل البياني بالمستقيم $y = 2x - 2$ ولهذا السبب، يُشار إلى خط التقارب المائل أو الأفقي بخط *التقارب للسلوك الطرفي*.

عندما يكون لبسط الدالة النسبية ومقامها معاملات مشتركة، يكون للتمثيل البياني للدالة نقاط انفصال يمكن إزالتها تُسمى **فجوات**. عند النواتج الصفرية للعوامل المشتركة. تأكد من توضيح نقاط الانفصال هذه عندما تقوم بتمثيل الدالة بيانيًا.



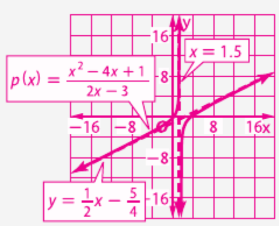
اختصر العامل المشترك في البسط والمقام بالقسمة عليه. يكون الناتج الصفري لـ $x - a$ هو a.

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(x-b)}{\cancel{(x-a)}(x-c)}$$

نصيحة دراسية

حالات الانفصال التي يمكن إزالتها والتي لا يمكن إزالتها إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$، ولكن يمكن جعلها متصلة في تلك النقطة من خلال التبسيط، إذًا لهذه الدالة انفصال *يمكن إزالته* عند $x = a$ وما عدا ذلك، يكون لهذه الدالة انفصال *لا يمكن إزالته* عند $x = a$

4B. مستقيم تقارب رأسي عند $x = \frac{3}{2}$؛ مستقيم تقارب مائل عند $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: 0.27 تقريبًا، 3.73 تقريبًا؛ نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{1}{3}$؛ $D = \left\{x \mid x \neq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$



مثال 5 التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع للدالة $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج من تحليل كل من البسط والمقام $h(x) = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-4)\cancel{(x+2)}}$ $\frac{x-2}{x-4}, x \neq -2, 4$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -2, 4, x \in \mathbb{R}\}$

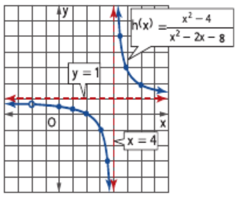
الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$. وهو الصفر الحقيقي للمقام بعد تبسيطه.

يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 1$، وهو النسبة للمعاملات الرئيسة لكل من البسط والمقام، لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية والفجوة عند $x=-2$.

الخطوة 3 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x هي 2، وهو صفر البسط بعد تبسيطه. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $\frac{1}{2}$ لأن $h(0) = \frac{1}{2}$

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, 2)$ و $(2, 4)$ و $(4, \infty)$ وارسمها.

توجد فجوة عند $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = -2$



نصيحة دراسية

الفجوة في مثال 5، حُذِفَت $x + 2$ من التعبير الأصلي بالقسمة عليها. عوّض بالعدد -2 في التعبير الجديد.

$$h(-2) = \frac{(-2) - 2}{(-2) - 4}$$
$$= \frac{-4}{-6} \text{ أو } \frac{2}{3}$$

توجد فجوة عند النقطة $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$

تمرين موجّه

في كل دالة، حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

5A. $g(x) = \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + x - 12}$ **انظر الهامش.**

5B. $c(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$ **انظر الهامش.**

2 المعادلات النسبية

يمكن حل المعادلات النسبية التي تتضمن كسورًا بضرب كل حد في المعادلة في المقام المشترك الأصغر لكل حدود المعادلة.

مثال 6 حل المعادلة النسبية

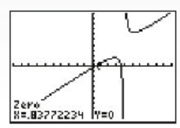
حُلّ المعادلة $x + \frac{6}{x-8} = 0$

$x + \frac{6}{x-8} = 0$	المعادلة الأصلية
$x(x-8) + \frac{6}{x-8}(x-8) = 0(x-8)$	اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x - 8$.
$x^2 - 8x + 6 = 0$	خاصية التوزيع
$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$	القانون العام
$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$	بسّط.

نصيحة دراسية

التحقق من صحة الحل

يمكنك أيضًا التحقق من النتيجة في مثال 6 باستخدام حاسبة بيانية لتمثيل $y = x + \frac{6}{x-8}$ بيانيًا. استخدم قائمة الحاسبة البيانية لتحديد مواقع الأصفار. لأن أصفار التمثيل البياني تبدو عند $x = 0.84$ و $x = 7.16$ تقريبًا. يكون الحل صحيحًا.



[-20, 20] scl: 2 على [-20, 20] scl: 2

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

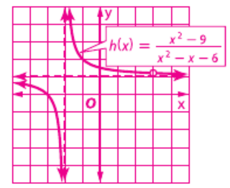
6A. $\frac{20}{x+3} - 4 = 0$ **2**

6B. $\frac{9x}{x-2} = 6$ **−4**

مثال إضافي

5 حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية وفجوات ونقاط تقاطع للدالة $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$ ثم ارسم الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

مستقيم تقارب رأسي عند $x = -2$؛ مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -3، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{3}{2}$؛ الفجوة: $\left(3, \frac{6}{5}\right)$



$D = \{x \mid x \neq -2, 3, x \in \mathbb{R}\}$

نصائح للمعلمين الجدد

الفجوات في التمثيلات البيانية عندما يشتمل بسط ومقام الدالة النسبية على عامل مشترك $(x - c)$، يجب حذف النقطة $(c, f(c))$ من التمثيل البياني. ويُشار إليها بدائرة أو فجوة. إذا كان $x = c$ خطًا تقاربيًا رأسيًا، فحينها لن تكون هناك فجوة في التمثيل البياني.

2 المعادلات النسبية

الأمثلة 6–8 توضح كيفية حل المعادلات النسبية التي تشتمل على كسور. ويتم ضرب جميع الحدود في المقام المشترك الأصغر ثم يتم عزل المتغير. ويجب التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية لتحديد أي حلول دخيلة.

مثال إضافي

6 حل $x - \frac{4}{x-6} = 0$ $3 \pm \sqrt{13}$

التعليم المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي قسم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة. اكتب معادلة نسبية على السبورة واجعل كل مجموعة تحلها، مع كتابة الخطوات التي يستخدمونها لإيجاد الحل. ثم اجعل المجموعات تقارن وتضاهي العمليات التي استخدمتها.

نصيحة دراسية

التقاطع يمكنك استخدام سمة التقاطع في الحاسبة البيانية في حل معادلة نسبية بالتمثيل البياني لكل من طرفي المعادلة وإيجاد كل نقاط التقاطع للتمثيلين البيانيين.

قد ينتج من حل المعادلة النسبية حلولاً دخيلة. تحقق من إجاباتك في المعادلة الأصلية دائمًا.

مثال 7 حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

حُلّ المعادلة $\frac{2}{x-4} + \frac{3x}{x-2} = \frac{4}{x^2-6x+8}$

المقام المشترك الأصغر للتعابير هو $(x-4)(x-2)$. وهي عوامل المعادلة $x^2 - 6x + 8$

$\frac{4}{x^2-6x+8} = \frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}$ — المعادلة الأصلية

$(x-2)(x-4)\frac{4}{x^2-6x+8} = (x-2)(x-4)\left(\frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}\right)$ — اضرب في المقام المشترك الأصغر

$4 = 3x(x-4) + 2(x-2)$ — خاصية التوزيع

$4 = 3x^2 - 10x - 4$ — خاصية التوزيع

$0 = 3x^2 - 10x - 8$ — اطرح 4 من كل طرف.

$0 = (3x+2)(x-4)$ — حلل.

$x = -\frac{2}{3}$ أو $x = 4$ — جد الحل.

لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = 4$، يمكنك حذف هذا الحل الدخيل. لذلك، يكون الحل الوحيد هو $-\frac{2}{3}$

تمرين موجّه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

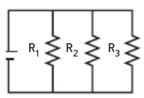
7a. $\frac{2x}{x+3} + \frac{3}{x-6} = \frac{27}{x^2-3x-18}$ $-\frac{3}{2}$

7B. $\frac{12}{x^2+6x} = \frac{2}{x+6} + \frac{x-2}{x}$ ليس لها حل

مهن من الحياة اليومية

فني الكهرباء يعمل فنيو الكهرباء في تركيب مكونات كهربية متنوعة مثل توصيلات الأسلاك والمصاهر ويقومون بصيانتها، كما يجب عليهم الحفاظ على الالتزام بالقوانين العالمية والمحلية والخاصة بالدولة. يستكمل معظم فنيي الكهرباء برنامج تمرين يتضمن كلا من التعليم داخل الفصول الدراسية والتدريب العملي.

مثال 8 من الحياة اليومية حل المعادلة النسبية



الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت R هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث، إذاً $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. في هذه الدائرة، R_1 تساوي ضعف مقاومة R_2، و R_3 تساوي 20 أوم. لنفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. جد R_1 و R_2.

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ — المعادلة الأصلية

$\frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{20}$ — $R = 10$ ، $R_1 = 2R_2$ و $R_3 = 20$

$\frac{1}{20} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}$ — اطرح $\frac{1}{20}$ من كل طرف.

$(20R_2)\frac{1}{20} = (20R_2)\left(\frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}\right)$ — اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، وهو $20R_2$.

$R_2 = 10 + 20 = 30$ — بسّط.

R_2 تساوي 30 أوم و $R_1 = 2R_2$ أو 60 أوم.

تمرين موجّه

8. **الأجهزة الإلكترونية** لنفترض أن التيار I، بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I = t + \frac{1}{10-t}$، حيث t هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟ 10.1 تقريبًا أو 0.9 ثانية تقريبًا

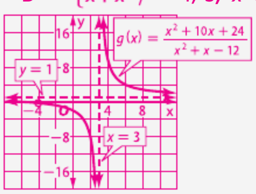
أمثلة إضافية

7 حل $\frac{3x-2}{x-1} = x + \frac{x}{x-1}$ 2

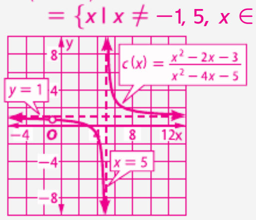
8 **تيار الماء** معدل سرعة تيار الماء في النهر 4 أميال في الساعة. وخلال ساعتين، يقطع القارب مسافة 6 أميال في اتجاه التيار إلى إحدى ضفتي النهر ويقطع 6 أميال للعودة. فإذا كانت r هي سرعة القارب في الماء الراكد، و $r + 4$ هي سرعته في اتجاه التيار، وكانت $r - 4$ هي سرعته ضد التيار، و $2 = \frac{6}{r+4} + \frac{6}{r-4}$، فجد قيمة r. 8

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A. مستقيم تقارب رأسي عند $x = 3$؛ مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -6. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -2؛ الفجوة: $\left(-4, -\frac{2}{7}\right)$؛ $D = \{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$



5B. مستقيم تقارب رأسي عند $x = 5$؛ مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 3؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{3}{5}$؛ الفجوة: $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$؛ $D = \{x \mid x \neq -1, 5, x \in \mathbb{R}\}$



تمارين

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت. (المثال 1) **8–1. انظر الهامش.**

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$
2. $h(x) = \frac{x^3 - 8}{x + 4}$
3. $f(x) = \frac{x(x-1)(x+2)^2}{(x+3)(x-4)}$
4. $g(x) = \frac{x - 6}{(x+3)(x+5)}$
5. $h(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x}$
6. $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 20}{x - 4}$
7. $h(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)^2(x+4)^2}$
8. $g(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

18–9. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها. (الأمثلة 1-5)

9. $f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)}$
10. $g(x) = \frac{(2x+3)(x-6)}{(x+2)(x-1)}$
11. $f(x) = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$
12. $f(x) = \frac{x+2}{x(x-6)}$
13. $g(x) = \frac{(x+2)(x+5)}{(x+5)^2(x-6)}$
14. $h(x) = \frac{(x+6)(x+4)}{x(x-5)(x+2)}$
15. $h(x) = \frac{x^2(x-2)(x+5)}{x^2 + 4x + 3}$
16. $f(x) = \frac{x(x+6)^2(x-4)}{x^2 - 5x - 24}$
17. $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 + 4x + 5}$
18. $g(x) = \frac{-4}{x^2 + 6}$

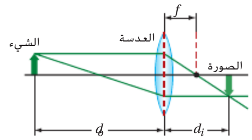
19. **المبيعات** خطة العمل لمشاريع غسل السيارات الجديدة التي سيتم فيها تمثيل الأرباح بآلاف الدراهم بالدالة $p(z) = \frac{3z^2 - 3}{2z^2 + 7z + 5}$، حيث z تمثل أسبوع التشغيل و$z = 0$ تمثل الافتتاح. (المثال 4)
    a. اذكر مجال الدالة. **a. $D = \{z \mid z \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$**
    b. حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط تقاطع الدالة $p(z)$.
    c. مثّل الدالة بيانيًا.
    b. خط تقارب أفقي: $y = \frac{3}{2}$؛ التقاطع مع المحور الأفقي x: 1؛ التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{3}{5}$
    c. ملحق إجابات الوحدة 2.

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها. (الأمثلة 2-5) **29–20. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

20. $h(x) = \frac{3x - 4}{x^3}$
21. $h(x) = \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 4}$
22. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x + 3}$
23. $g(x) = \frac{x + 7}{x - 4}$
24. $h(x) = \frac{x^3}{x + 3}$
25. $g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x - 4}$
26. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 21}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$
27. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$
28. $f(x) = \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$
29. $g(x) = \frac{(2x+1)(x-5)}{(x-5)(x+4)^2}$

30. **الإحصاء** يُقال إن العدد x هو *الوسط التوافقي* للعددين y و z إذا كان $\frac{1}{x}$ هو المتوسط بين $\frac{1}{y}$ و$\frac{1}{z}$. (المثال 7)
    a. **اكتب معادلة يكون حلها الوسط التوافقي بين** 30 و 45. $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{30} + \frac{1}{45}}{2}$
    b. **جد الوسط التوافقي بين** 30 و 45. **36**

31. **بصريات** تكون معادلة العدسة $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o}$، حيث تكون f هي البعد البؤري، و d_i هي المسافة من العدسة إلى الصورة، و d_o هي المسافة من العدسة إلى الشيء. لنفترض أن الشيء يبعد 32 cm عن العدسة والبعد البؤري يساوي 8 cm. (مثال 7)



    a. **اكتب معادلة نسبية لتمثيل الموقف.** $\frac{1}{8} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{32}$
    b. **جد المسافة بين العدسة والصورة.** $10\frac{2}{3}$ cm

حُلّ كل من المعادلات التالية. (أمثلة 6-8)

32. $y + \frac{6}{y} = 5$ **3, 2**
33. $\frac{8}{z} - z = 4$ $\pm 2\sqrt{3} - 2$
34. $\frac{x-1}{2x-4} + \frac{x+2}{3x} = 1$ **1, 8**
35. $\frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$ **35. لا يوجد حل**
36. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{23}{x^2+x}$ **4**
37. $\frac{4}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{14}{x^2-2x}$ **5**
38. $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{20}$ **4, −5**
39. $\frac{6}{x-3} - \frac{4}{x+2} = \frac{12}{x^2-x-6}$ **−6**
40. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{3x+6}{2x+1} = 3$ **7, 1**
41. $\frac{2}{a+3} - \frac{3}{4-a} = \frac{2a-2}{a^2-a-12}$ **−1**

42. **الماء** التكلفة اليومية لإزالة النسبة المئوية x من الملح من ماء البحر في محطة التحلية هي $c(x) = \frac{994x}{100 - x}$، حيث $0 \leq x < 100$.
    a. مثّل كل دالة بيانيًا باستخدام الحاسبة البيانية.
    b. مثّل بيانيًا المستقيم $y = 8{,}000$ وجد التقاطع مع التمثيل البياني $c(x)$ لتحديد النسبة المئوية للملح الذي يمكن إزالته مقابل AED 8,000 يوميًا.
    c. وفقًا للنموذج، هل من الممكن أن تزيل محطة التحلية 100% من الملح؟ اشرح استدلالك. **a–c . انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

اكتب دالة نسبية لكل مجموعة من الخصائص.

43. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x عند $x = 0$ و $x = 4$. خطوط تقارب رأسية عند $x = 1$ و $x = 6$. وخط مقارب أفقي عند $y = 0$
44–43. انظر الهامش.
44. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x عند $x = 2$ و $x = -3$ وخط مقارب رأسي عند $x = 4$ ونقطة انفصال عند $(-5, 0)$

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-42 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع تشتمل المعادلات النسبية، مثل تلك المذكورة في التمرينين 35 و 41، على تعبير في مقام الحد غير مكتوب مع المتغير أولاً. افترض أن الطلاب أعادوا كتابة هذه المعادلات أولاً باستخدام المقامات المكتوبة بالصيغة القياسية. على سبيل المثال، $\frac{a}{a+3} - \frac{3}{4-a} = \frac{2a-2}{a^2-a-12}$ يمكن إعادة كتابتها بالصيغة $\frac{a}{a+3} - \frac{3}{-a+4} = \frac{2a-2}{a^2-a-12}$ قبل تحديد المقام المشترك الأصغر.

إجابات إضافية

1. $D = \{x \mid x \neq 2, -2, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$
2. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$; $x = -4$
3. $D = \{x \mid x \neq 4, -3, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 4$, $x = -3$
4. $D = \{x \mid x \neq -3, -5, x \in \mathbb{R}\}$; $x = -3$, $x = -5$, $y = 0$
5. $D = \{x \mid x \neq 0, -2, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 0$, $x = -2$, $y = 2$
6. $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 4$
7. $D = \{x \mid x \neq 2, -4, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 2$, $x = -4$, $y = 0$
8. $D = \{x \mid x \neq 3, -1, x \in \mathbb{R}\}$; $x = 3$, $x = -1$, $y = 1$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-42, 54, 55, 57, 59-80	1-41 فردي, 77-80	2-42 زوجي, 54, 55, 57, 59-76
OL ضمن المستوى	1-51 فردي, 52-55, 57, 59-80	1-42, 77-80	43-55, 57, 59-76
BL أعلى من المستوى	43-80		

138 | الدرس 2-5 | الدوال النسبية

إجابات إضافية

43. الإجابة النموذجية:

$$f(x)=\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-6)^2}$$

44. الإجابة النموذجية:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+3)(x+5)^2}{(x-4)(x+5)}$$

46. الإجابة النموذجية:

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2+5x-6}$$

47. الإجابة النموذجية:

$$f(x)=\frac{2x^2-14x+20}{x^2+x-12}$$

45. **الكهرباء** عندما تكون المقاومة الكلية لدائرة متصلة على التوازي ثابتة، يمكن تمثيل المقاومين الفرديين r_1 و r_2 بالمعادلة $r_2=\frac{30r_1}{r_1-30}$

a. جد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالة، إن وُجدت. تحقق من إجابتك بيانيًا.

b. انسخ الجدول الموضح وأكمله.

r_1	45	50	55	60	65	70
r_2 52.5	55.7	60	66	75	90	

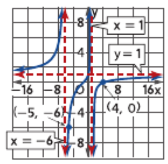
a,c . انظر ملحق الوحدة 2.

c. هل المجال $r_1 > 30$ صحيح في هذا الموقف؟ اشرح استنتاجك.

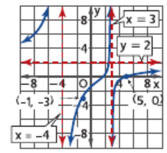
46–47. انظر الهامش.

استخدم معرفتك بخطوط التقارب والنقاط المذكورة للتعبير عن الدالة الموضحة في كل تمثيل بياني.

46.



47.



استخدم سمة التقاطع في الحاسبة البيانية لحل كل معادلة.

48. $\frac{x^4-2x^3+1}{x^3+6}=8$ $\approx -1.59, \approx 10.05$

49. $\frac{2x^4-5x^2+3}{x^4+3x^2-4}=1$ $\approx -2.65, \approx 2.65$

50. $\frac{3x^3-4x^2+8}{4x^4+2x-1}=2$ $\approx -0.98, \approx 0.90$

51. $\frac{2x^5-3x^3+5x}{4x^3+5x-12}=6$ $\approx -3.87, \approx 1.20, \approx 3.70$

52. **الكيمياء** عندما يُضاف محلول حمض الأسيتيك بتركيز 60% إلى 10 L من محلول حمض الأسيتيك بتركيز 20% في خزان سعته 100 L، يتغير تركيز المحلول الإجمالي.

a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. وضّح أن تركيز المحلول يكون $f(a)=\frac{3a+10}{5a+50}$، حيث تكون a هي حجم المحلول بتركيز 60%.

b. جد المجال ذا الصلة للدالة $f(a)$ وخطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

c. اشرح دلالة أي قيود للمجال أو خطوط التقارب.

d. بغض النظر عن قيود المجال، هل توجد أي خطوط تقارب إضافية للدالة؟ اشرح.

53. **التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتحقق من خطوط التقارب للدوال النسبية.**

b, d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول وأكمله. حدّد خط التقارب الأفقي لكل دالة جبريًا.

الدالة	خط التقارب الأفقي
$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^3+2}$	$y=0$
$h(x)=\frac{x^3-3x^2+4x-12}{x^4-4}$	$y=0$
$g(x)=\frac{x^4-1}{x^5+3}$	$y=0$

b. **العرض البياني** مثّل كل دالة وخط التقارب الأفقي لها من الجزء a بيانيًا.

c. **العرض الجدولي** انسخ الجدول التالي وأكمله. استخدم نظرية الصفر النسبي لتساعدك على إيجاد الأصفار الحقيقية للبسط في كل دالة.

الدالة	الأصفار الحقيقية للبسط
$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^3+2}$	1, 4
$h(x)=\frac{x^3-3x^2+4x-12}{x^4-4}$	3
$g(x)=\frac{x^4-1}{x^5+3}$	−1, 1

d. **العرض الكلامي** ضع فرضية عن سلوك التمثيل البياني لدالة نسبية عندما تكون درجة المقام أكبر من درجة البسط وللبسط ناتج صفري حقيقي واحد على الأقل.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

54. **الاستنتاج** بافتراض أن $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+c}{dx^3+ex^2+f}$. فهل سيكون للدالة $f(x)$ في بعض الأحيان أو دائمًا خط تقارب أفقي أم لن يكون لها ذلك مطلقًا عند $y=1$ إذا كانت a و b و c و d و e و f ثوابت و $a\neq 0$ و $d\neq 0$. اشرح. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

55. **ما قبل الكتابة** صمم خطة درس لتدريس موضوعات التمثيل البياني للدوال النسبية الواردة في هذا الدرس. ضع خطة تتناول فيها الهدف والطلاب والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل. راجع عمل الطلاب.

56. **تحدٍ** اكتب معادلة نسبية لها خطوط تقارب رأسية عندما $x=-2$ و $x=3$ وخط تقارب مائل $y=3x$. الإجابة النموذجية: $f(x)=\frac{3x^3-3x^2}{x^2-x+6}$

57. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانيًا. راجع عمل الطلاب.

58. **تحدٍ** جد قيمة k حتى يصبح للمعادلة النسبية حل دخيل واحد وحل حقيقي واحد. 3

$$\frac{2}{x^2-4x+k}=\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{x-3}$$

59. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب استخدام فترات الاختبار للحصول على تمثيل بياني دقيق لدالة نسبية. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

مراجعة شاملة

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها يعد أصفارًا، إن وجدت.

60. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6; -3, -1, 2$

61. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 18$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18; -2$

62. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$
$\pm1, \pm2; 1$ (التكرار 3) 2

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$. استخدم الدوال ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة إلى عوامل للدالة $f(x)$.

63. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24;\ x - 3,\ x - 2$
.63 لا؛ نعم؛ $f(x) = (x-2)(x^3 - 13x - 12)$

64. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 4x;\ x - 4,\ 2x - 1$
.64 نعم؛ لا؛ $f(x) = (x-4)(2x^3 + 3x^2 + x) = f(x) = x(2x+1)(x+1)(x-4)$

65. $f(x) = 6x^4 + 59x^3 + 138x^2 - 45x - 50;\ 3x - 2,\ x - 5$
.65 نعم؛ لا؛ $f(x) = (3x-2)(2x^3 + 21x^2 + 60x + 25) = f(x) = (3x-2)(2x+1)(x+5)^2$

66. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 17x - 6;\ 4x - 3;\ x - 1$
.66 نعم؛ نعم؛ $f(x) = (4x-3)(x-1)(x^2 + x - 2) = f(x) = (4x-3)(x-1)^2(x+2)$

67. $f(x) = 4x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 4x^2;\ x + 2,\ 4x + 1$
.67 نعم؛ لا؛ $f(x) = (x+2)(4x^4 + 7x^3 - 2x^2) = f(x) = x^2(x+2)^2(4x-1)$

68. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2;\ x + 1,\ x - 1$
.68 نعم؛ نعم؛ $f(x) = (x+1)(x-1)(4x^3 - 8x^2 - x + 2) = f(x) = (x-2)(2x-1)(2x+1)(x+1)(x-1)$

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا. (الدرس 2-1) **71–69. انظر الهامش.**

69. $f(x) = (x+7)^2$

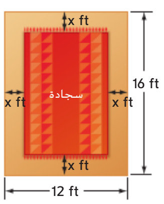
70. $f(x) = (x-4)^3$

71. $f(x) = x^4 - 5$

72. **البيع بالتجزئة** تتسوق حمد في متجر يعرض إرجاع 10 AED للمشتري لكل 50 AED ينفقها في هذا المتجر. لنفترض أن $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{50}\right]\!\right]$ و $h(x) = 10x$، حيث x هي المبلغ المالي الذي أنفقته حمد.

a. إذا أنفقت حمد المال في المتجر، فهل يتم تمثيل المبلغ النقدي الذي يُرجِعه المتجر بالدالة $f[h(x)]$ أو $h[f(x)]$؟ اشرح استنتاجك.
a. $h[f(x)]$؛ الإجابة النموذجية: يمكن إيجاد المبلغ النقدي الذي يتم إرجاعه بحساب عدد المرات التي أنفقت فيها 50 AED.

b. حدّد المبلغ النقدي الذي يُرجعه المتجر إذا أنفقت حمد 312.68 AED في المتجر. **60 AED**



73. **التصميم الداخلي** يعمل أحمد حسن في التصميم الداخلي. طُلِب منه وضع سجادة شرقية في المكتب الجديد لإحدى الشركات. ينبغي أن تغطي السجادة نصف إجمالي مساحة الأرضية مع وجود عرض ثابت للمنطقة المحيطة بالسجادة. (الدرس 0-3)

a. إذا كانت أبعاد الغرفة 12 ft في 16 ft، فاكتب معادلة لتمثيل مساحة السجادة فيما يتعلق بـ x.
$(12 - 2x)(16 - 2x) = 96$

b. مثّل الدالة ذات الصلة بيانيًا. **انظر الهامش.**

c. ما أبعاد السجادة؟ **8 ft في 12 ft**

حوّل إلى أبسط صورة.

74. $i^{10} + i^2$

75. $(2 + 3i) + (-6 + i)$

76. $(2.3 + 4.1i) - (-1.2 - 6.3i)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. **اختبار SAT/ACT** تبيع إحدى الشركات القهوة المطحونة في حاويتين على شكل إسطوانة وبحجمين مختلفين. تسع الحاوية الأصغر 300 جرام من القهوة. إذا كانت الحاوية الأكبر لها ضعف نصف قطر الحاوية الأصغر ومرة ونصف قدر الارتفاع، فكم عدد الجرامات القهوة التي تسعها الحاوية الأكبر؟ (يتم حساب حجم الإسطوانة بالقاعدة $V = \pi r^2 h$.) **C**

A 850   C 1700   E 2552
B 1275   D 2126

78. ما حلول المعادلات $1 = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ ؟ **H**

F $x = 1, x = -2$
H $x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{3}$
G $x = -2, x = 1$
J $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

79. **مراجعة** أراد أيمن أن يحسب متوسط درجاته في 6 اختبارات. جمع الدرجات بطريقة صحيحة ليحصل على T ولكنه قسّم على 7 بدلاً من 6. وكانت النتيجة أقل من متوسطه الفعلي بـ 12 درجة. أي معادلة يمكن استخدامها لتحدد قيمة T؟ **C**

A $6T + 12 = 7T$
C $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$
B $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$
D $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$

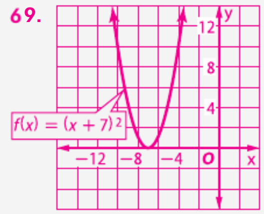
80. تستطيع أماني أن تجمع أجزاء الأحجية في ثلاث ساعات. وتستطيع حصة أن تجمع أجزاء الأحجية نفسها في خمس ساعات. كم ستستغرقان من الزمن إذا عملتا معًا؟ **J**

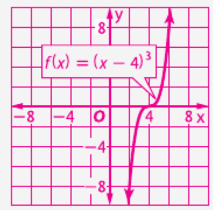
F $1\frac{3}{8}$ ساعات
H $1\frac{3}{4}$ ساعات
G $1\frac{5}{8}$ ساعات
J $1\frac{7}{8}$ ساعات

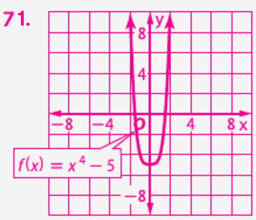
4 لتقويم

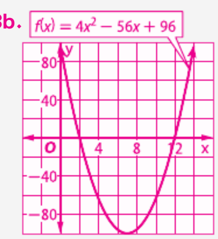
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب حل $\frac{4}{x(x-1)} + \frac{4}{x} = \frac{x}{x-1}$ **4**

إجابات إضافية

69.


70.


71.


73b.


المتابعة

استكشف الطلاب عمل النماذج باستخدام الدوال الأسية والدوال الجذرية وكثيرة الحدود والنسبية.

اسأل:

- ما قيود وضع النماذج الرياضية؟ الإجابة النموذجية: لا يمكن عمل نماذج لجميع المواقف من الحياة اليومية. أما بالنسبة للمواقف التي يمكن عمل نماذج لها، قد لا تكون التنبؤات التي يتم القيام بها باستخدام النموذج واضحة عندما تعتمد على قيم البيانات التي تعد خارج نطاق قيم البيانات المستخدمة لإنشاء النموذج. لذلك، بعد إنشاء النموذج، يجب تحليله بعناية قبل استخدامه لعمل التنبؤات/اتخاذ القرارات.