

## 1 التركيز

### التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال.

الدرس 2-2 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

ضع نموذجًا لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

بعد الدرس 2-2 تمثيل المتباينات كثيرة الحدود بيانيًا وحلها.

## 2 التدريس

### أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ بهذا الدرس.

اسأل:

■ انظر إلى التمثيل البياني. وضع الموضوع الذي يغير عنده التمثيل البياني للبيانات اتجاهه.

1,980, 2,000, بعد 2,000

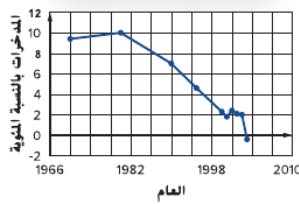
■ هل تظهر أي فجوات أو فراغات أو فجوات أو انحناءات كبيرة في التمثيل البياني؟ لا

■ هل تتوقع وضع نموذج لهذا التمثيل البياني بواسطة دالة خطية؟ لا.

فالببيانات تميل إلى أن تشكل منحنى وليس خطأ.

(يتبع في الصفحة التالية)

### المداخات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح



### لماذا؟

يوضح التمثيل البياني باستخدام مخطط التشتت إجمالي المدخات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية. يمكن في كثير من الأحيان تمثيل بيانات القيم القصوى النسبية المتعددة بشكل أفضل باستخدام الدالة كثيرة الحدود.

### الحالي

1 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.  
2 تمثيل بيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

### السابق

• لقد قيمت بتحليل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال.

### مفردات جديدة

الدالة كثيرة الحدود  
polynomial function  
دالة كثيرة الحدود من الدرجة  $n$   
polynomial function of degree  $n$   
معامل الحد الرئيس  
leading coefficient  
اختبار الحد الرئيس  
leading-term test  
دالة من الدرجة الرابعة  
quartic function  
نقطة دوران  
turning point  
صيغة تربيعية  
quadratic form  
صفر متكرر  
repeated zero  
التكرار  
multiplicity

1 التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود في الدرس 2-1. تعلمت الخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد. الدوال أحادية الحد هي أكثر دالة أساسية في الدوال كثيرة الحدود. وبشكل إيجابي قيم المجموع والفرق للدوال أحادية الحد أنواعًا أخرى من الدوال كثيرة الحدود.

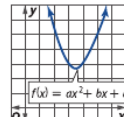
نفترض أن  $n$  عدد صحيح غير سالب وأن  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  أعداد حقيقية حيث  $a_n \neq 0$ . إذا الدالة التي تمثلها الصيغة التالية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

تسمى **دالة كثيرة الحدود من الدرجة  $n$** . يُعد **معامل الحد الرئيس** في الدالة كثيرة الحدود معامل المتغير ذا الأس الأكبر.  $a_n$  هو الحد الرئيس للدالة  $f(x)$ .

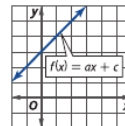
أنت بالفعل على دراية بالدوال كثيرة الحدود التالية.

الدوال التربيعية



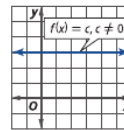
الدرجة: 2

الدوال الخطية



الدرجة: 1

الدوال الثابتة

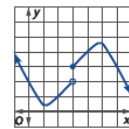
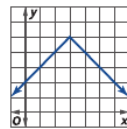


الدرجة: 0

الدالة الصفرية هي دالة ثابتة بدون درجة. وتوضح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود خصائص معينة.

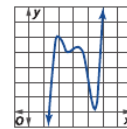
### التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

#### أمثلة خارجة عن التعريف



لا يحتوي التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود على فواصل أو فراغات أو فجوات أو زوايا حادة.

#### مثال



الدوال كثيرة الحدود محدودة ومتصلة لجميع الأعداد الحقيقية وبها منحنيات سلسلة دورانية.

هل تتوقع وضع نموذج لهذا التمثيل البياني بواسطة دالة تربيعية؟  
 اشرح. لا، فالمنحنى التربيعي يشتمل على نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى واحدة، بينما يبدو أن هذا التمثيل البياني يشتمل على نقطتي نهاية عظمى على الأقل.

## 1 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

**مثال 1** يعرض كيفية التمثيل البياني لتحويلات الدوال أحادية الحد. **مثال 2** يوضح كيف يتم تطبيق اختبار الحد الرئيسي على دالة كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية لتحديد سلوك النهاية للتمثيل البياني للدالة. **المثلة 3-5** توضح كيفية إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود. **المثال 6** يوضح كيفية استخدام اختبار الحد الرئيسي وأصفار كثيرة الحدود لتمثيل كثيرة الحدود بيانيًا.

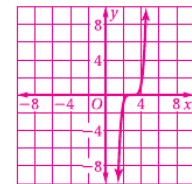
## التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

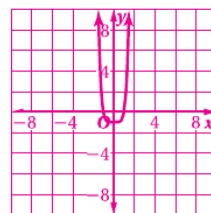
### مثال إضافي

1. مُمِّل كل دالة بيانيًا.

a.  $f(x) = (x - 3)^5$



b.  $f(x) = x^6 - 1$



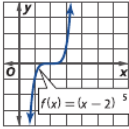
تذكّر أن التمثيل البياني للدوال أحادية الحد غير الثابتة من الدرجة الزوجية يشبه التمثيل البياني للدالة  $f(x) = x^2$  في حين يشبه التمثيل البياني للدوال أحادية الحد من الدرجة الفردية التمثيل البياني للدالة  $f(x) = x^3$  ويمكنك استخدام الأشكال والخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد من الدرجة الزوجية والفردية وما تعلّمته عن عمليات التحويل من أجل التحويل إلى التمثيل البياني للدوال أحادية الحد.

### مثال 1 التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالة فيما يلي.

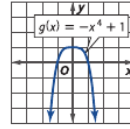
a.  $f(x) = (x - 2)^5$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الفردية، إذاً يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة  $y = x^3$  وهو التمثيل البياني للدالة  $f(x) = (x - 2)^5$  بعد إزاحتها لليمين بمقدار وحدتين.



b.  $g(x) = -x^4 + 1$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الزوجية، إذاً يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة  $y = x^2$  وبعد التمثيل البياني للدالة  $g(x) = -x^4 + 1$  هو التمثيل البياني للدالة  $y = x^4$  المتعكسة في المحور الأفقي  $x$  بعد إزاحتها لأعلى بمقدار وحدة واحدة.



تمرين موجه B-1A. انظر الهامش.

1A.  $f(x) = 4 - x^3$

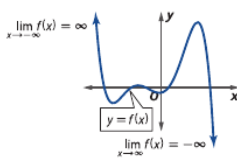
1B.  $g(x) = (x + 7)^4$

تعلّمت أن السلوك الطرفي للدالة يوضح كيف يكون سلوك الدالة أو كيف تتغير رأسياً أو أفقياً عند أي طرف في التمثيل البياني لها. بما أن  $x \rightarrow \infty$  و  $x \rightarrow -\infty$  إذاً السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة الحدود يحدده الحد الرئيس لها. يستخدم **اختبار الحد الرئيس** قيمة الدرجة ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

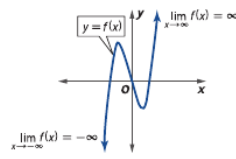
### المفهوم الأساسي اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

يمكن وصف السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة حدود غير ثابتة  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  بإحدى الطرق الأربع التالية. كما هو محدد بالدرجة  $n$  للدالة كثيرة الحدود ومعامل الحد الرئيس لها  $a_n$ .

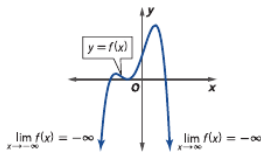
$n$  عدد فردي،  $a_n$  عدد سالب



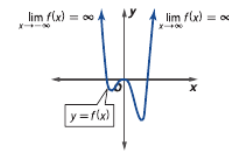
$n$  عدد فردي،  $a_n$  عدد موجب



$n$  عدد زوجي،  $a_n$  عدد سالب



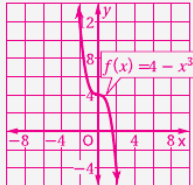
$n$  عدد زوجي،  $a_n$  عدد موجب



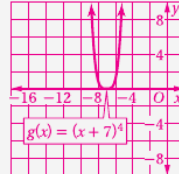
المفهوم الأساسي تسلط البرجمات الضوء على التعريفات والقواعد والأفكار الأخرى المهمة. وتساعد التمثيلات المتعددة -الكلمات والرموز والأمثلة والنماذج- الطلاب على الفهم.

### إجابات إضافية (تمرين موجه)

1A.

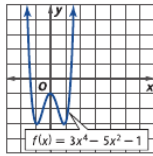


1B.



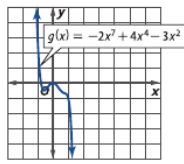
وضّح السلوك الطرفي للممثل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

a.  $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$



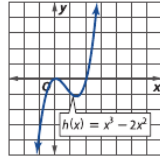
الدالة من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 3. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b.  $g(x) = -3x^2 - 2x^2 + 4x^2$



اكتب بصيغة قياسية  $3x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 2x^2$  والدالة هنا من الدرجة 2 ومعامل الحد الرئيس يساوي 2. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس سالب، إذا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

c.  $h(x) = x^3 - 2x^2$



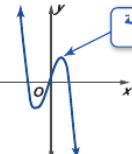
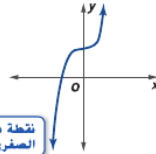
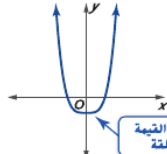
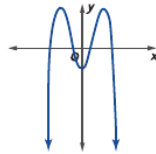
الدالة من الدرجة 3 ومعامل الحد الرئيس يساوي 1. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

تمرين موجّه

2A.  $g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

2B.  $h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

فكر في الأشكال التالية لمجموعة صغيرة من الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة النموذجية أو الدوال التكعيبية أو الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة أو دالة من الدرجة الرابعة الموضحة.



نقطة دوران/القيمة العظمى النسبية

نقطة دوران/القيمة الصغرى المطلقة

دالة من الدرجة الرابعة النموذجية

الدوال التكعيبية النموذجية

لاحظ عدد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x في كل تمثيل بياني. بما أن التقاطع مع المحور الأفقي x يوافق صفراً حقيقياً من الدالة، إذا يمكنك أن تعرف أن الدوال التكعيبية تحتوي على 3 أصفار على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 4 أصفار على الأكثر.

**نقاط الدوران أو نقاط التحول** توضح مكان تغير التمثيل البياني للدالة من التزايد إلى التناقص والعكس. يتم تحديد القيمتين العظمى والصغرى أيضاً على نقاط الدوران. لاحظ أن الدوال التكعيبية تحتوي على نقطتين دوران على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 3 نقاط دوران على الأكثر. يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضح أنها صحيحة لأي دالة كثيرة الحدود.

## مثال إضافي

2

صف سلوك النهاية للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

a.  $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 +$

1 - x الدرجة تساوي 4

والمعامل الرئيسي (معامل

الحد الأكبر) يساوي

3. ولأن الدرجة زوجية

والمعامل الرئيسي موجب،

فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b.  $f(x) = -3x^2 + 2x^5$

3 - x مكتوبة بالصيغة

القياسية، والدالة هي

$f(x) = 2x^5 - x^3 - 3x^2$

الدرجة تساوي 5 والمعامل

الرئيسي يساوي 2. لأن الدرجة

فردية والمعامل الرئيسي موجب،

فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

c.  $f(x) = -2x^5 - 1$

تساوي 5 والمعامل الرئيسي

يساوي 2 - ولأن الدرجة فردية

والمعامل الرئيسي سالب، فإن

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

## التعليم باستخدام التكنولوجيا

**تسجيل الفيديو** اطلب من الطلاب صنع فيديو

يشرح كيفية استخدام اختبار الحد الرئيسي

لتحديد سلوك النهاية لرسم بياني لدالة كثيرة

الحدود. انشر الفيديو على موقع الإنترنت الخاص

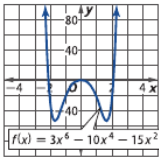
بالوحدة حتى يستطيع الطلاب استخدامه كمرجع

إضافي خارج الوحدة.

### نصيحة دراسية

**المراجعة** تذكر أن التقاطع مع المحور الأفقي  $x$  في التمثيل البياني للدالة يُسمى أصفار الدالة. يُطلق على حلول المعادلة المطابقة جذور المعادلة.

### المفهوم الأساسي الأصفار ونقاط الدوران للدوال كثيرة الحدود



تحتوي الدالة كثيرة الحدود  $f$  من الدرجة  $n \geq 1$  على  $n$  من الأصفار الحقيقية المختلفة على أكثر تقدير وعلى  $n-1$  من نقاط الدوران على أكثر تقدير.

**مثال** لنفرض أن  $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 15x^2 - 6x^6$  تحتوي على 6 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 5 نقاط دوران على الأكثر. يوضح التمثيل البياني للدالة  $f$  أن الدالة تحتوي على 3 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران.

تذكر أنه إذا كانت الدالة  $f$  كثيرة الحدود وأن  $c$  هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي  $x$  للتمثيل البياني للدالة  $f$  فيمكن أن نقول إن:

- $c$  صفر من أصفار الدالة  $f$ .
- $f(x) = 0$  حل للمعادلة  $f(x) = 0$ .
- $(x - c)$  عامل من عوامل الدالة كثيرة الحدود  $f(x)$ .

يمكنك إيجاد أصفار بعض الدوال كثيرة الحدود باستخدام أساليب التحليل ذاتها التي استخدمتها لحل المعادلات التربيعية.

#### المثال 3 أصفار الدوال كثيرة الحدود

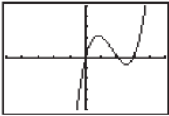
اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$  ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

بما أن المعادلة من الدرجة 3، إذا تحتوي الدالة  $f$  على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 3-1 أو نقطتي دوران على أكثر تقدير. لإيجاد الأصفار الحقيقية، جد حل المعادلة ذات الصلة  $f(x) = 0$  بالتحليل إلى العوامل.

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 6x &= 0 & \text{افرض أن } f(x) &= 0 \\ x(x^2 - 5x + 6) &= 0 & \text{أخرج } x \text{ كعامل مشترك.} \\ x(x - 2)(x - 3) &= 0 & \text{حلل إلى العوامل.} \end{aligned}$$

إذا، تحتوي الدالة  $f$  على ثلاثة أصفار مختلفة 0 و 2 و 3. يتوافق هذا مع الدالة التكعيبية التي تحتوي على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر.

**التحقق** يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لرسم  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$  والتأكد على هذه الأصفار. بالإضافة إلى ذلك، يمكنك أن تعرف أن التمثيل البياني يحتوي على نقطتي دوران، وهذا يتوافق مع الدوال التكعيبية التي تحتوي على نقطتي دوران على الأكثر.



$[-5, 5]$  scl: 1 by  $[-5, 5]$  scl: 1

#### تصريح موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

$$\begin{aligned} \text{3A. } f(x) &= x^3 - 6x^2 - 27x & \text{3B. } f(x) &= x^4 - 8x^2 + 15 \\ \text{4 أصفار و 3 نقاط دوران: } \pm\sqrt{5} & \text{ و } \pm\sqrt{3} & \text{3 أصفار ونقطتان دوران: 0 و 9 و -3} \end{aligned}$$

في بعض الحالات، يمكن تحليل الدالة كثيرة الحدود إلى عواملها باستخدام الأساليب التربيعية إذا كانت لها صيغة تربيعية.

### المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية

**الكلمات** يُكتب تعبير الدالة كثيرة الحدود في **الصيغة التربيعية** إذا كتب بالصيغة  $ax^2 + bu + c$  لأي أعداد  $a$  و  $b$  و  $c \neq 0$  بحيث يكون  $u$  تعبيراً في  $x$ .

**الرموز** يُكتب  $14 - 5x^2 - x^4$  بالصيغة التربيعية لأن التعبير يمكن كتابته بالصيغة التالية  $14 - 5(x^2) - (x^2)^2$  بما أن  $u = x^2$ . إذا أصبح التعبير  $14 - 5u - u^2$ .

### نصيحة دراسية

**المراجعة** لمراجعة أساليب حل المعادلات التربيعية، راجع دروس سابقة.

### مثال إضافي

3 اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط دوران  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$  ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل. **الدرجة تساوي 3.** لذلك تشمل  $f$  على 3 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر ونقطتي دوران على الأكثر.  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x = x(x+1)(x+4)$ . إذا تشمل  $f$  على ثلاثة أصفار هي 0 و -1 و -4.

### التركيز على محتوى الرياضيات

**الدوال كثيرة الحدود** تتشكل الدوال كثيرة الحدود بجمع أو طرح دوال وثوابت أحادية الحد.

يتميز التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود بالصيغة  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، حيث  $a_n \neq 0$ ،  $n$  عدد صحيح غير سالب ومعاملات كل حد أعداد حقيقية، تتسم بالخصائص التالية.

- الدرجة:  $n$
- أقصى عدد لنقاط الدوران:  $n - 1$
- عند صفر المضاعفة الفردية، بالتمثيل البياني المحور  $x$ .
- عند صفر المضاعفة الزوجية، يلمس التمثيل البياني المحور  $x$ .
- بين الأصفار، يكون التمثيل البياني فوق المحور  $x$  أو أسفل منه.
- يتحدد سلوك النهاية للتمثيل البياني من خلال الحد الرئيسي له باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

**المتعلمون بطريقة التواصل** اطلب من الطلاب العمل معاً في مجموعات للتمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود التي تشمل على درجة معينة وعدد من الجذور حقيقية، على سبيل المثال، الدرجة 3 و 3 جذور حقيقية أو الدرجة 3 وجذر حقيقي واحد فقط. ثم اطلب من الطلاب تجربة المعاملات في الصيغة العامة لكثيرة الحدود لإيجاد الدوال باستخدام التمثيلات البيانية التي تشبه مخططاتهم.

## مثال 4 أصفار الدالة كثيرة الحدود بالصيغة التربيعية

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة  $g(x) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$  ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذا  $g$  تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و  $-1$  أو 3 نقاط دوران على الأكثر. نكتب هذه الدالة بالصيغة التربيعية لأن  $4 - 3(x^2) - 3(x^2) = (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$  لنفرض أن  $u = x^2$

$$(x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = 0 \quad \text{افرض أن } g(x) \text{ تساوي } 0$$

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \quad \text{عوض عن } u \text{ بقيمة } x^2$$

$$(u+1)(u-4) = 0 \quad \text{حل التعبير التربيعي إلى العوامل}$$

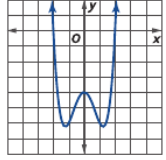
$$(x^2+1)(x^2-4) = 0 \quad \text{عوض عن } x^2 \text{ بقيمة } u$$

$$(x^2+1)(x+2)(x-2) = 0 \quad \text{حل إلى العوامل}$$

$$x^2+1=0 \quad x+2=0 \quad x-2=0 \quad \text{خاصية الناتج الصفري}$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad x = -2 \quad x = 2 \quad \text{جد حل } x$$

بما أن ناتج  $\pm\sqrt{-1}$  ليس أصفاراً حقيقية، إذا تحتوي  $g$  على صفرين حقيقيين مختلفين.  $-2$  و  $2$  يتوافق ذلك مع الدالة التربيعية. يؤكد ذلك التمثيل البياني للدالة  $4 - 3x^2 = x^2$  في الشكل 1.2.1. لاحظ أنه يوجد 3 نقاط انعطاف، وهذا يتوافق أيضاً مع الدالة التربيعية.



الشكل 1.2.1

### تمرين موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل للعوامل.

4A.  $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

4B.  $h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$

4A. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران:  $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}$

4B. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران:  $0, \pm\sqrt{8}$

إذا وجد عامل  $(x - c)$  يتكرر أكثر من مرة بالصيغة التي تم تحليلها بالكامل إلى العوامل للدالة  $f(x)$ ، فإن الصفر المرتبط بها  $c$  يسمى **صفراً مكرراً**. عندما يتكرر الصفر بعدد زوجي من المرات، سيكون التمثيل البياني مماساً للمحور الأفقي  $x$ . عند هذه النقطة، عندما يتكرر الصفر بعدد فردي من المرات، سيقطع التمثيل البياني المحور الأفقي  $x$  عند هذه النقطة. يصبح التمثيل البياني مماساً للمحور عندما يلمس المحور عند هذه النقطة، ولكن لا يقطعه.

## مثال 5 الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المكررة

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة  $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2 = -x^2(x^2 + x - 2)$  ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل للعوامل.

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذا  $h$  تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و  $-1$  أو 3 نقاط دوران على الأكثر. جد الأصفار الحقيقية.

$$-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0 \quad \text{افرض أن } h(x) \text{ تساوي } 0$$

$$-x^2(x^2 + x - 2) = 0 \quad \text{إخراج } x^2 \text{ كعامل مشترك.}$$

$$-x^2(x-1)(x+2) = 0 \quad \text{حل إلى العوامل}$$

يحتوي التعبير السابق على 4 عوامل، ولكن حل  $x$  ينتج عنه 3 أصفار،  $0$  و  $1$  و  $-2$ . ومن بين الأصفار، يتكرر  $0$  مرتين.

يؤكد التمثيل البياني للدالة  $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$  الموضع في الشكل 1.2.2 على هذه الأصفار ويوضح أن  $h$  تحتوي على ثلاث نقاط دوران. لاحظ أنه عندما يكون  $x = -2$  و  $x = 0$ ، فإن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي  $x$  ولكن عندما  $x = 0$  يصبح التمثيل البياني مماساً للمحور الأفقي  $x$ .

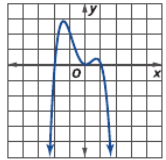
### تمرين موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

5A.  $g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$

5B.  $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$

5B. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران:  $0$  و  $3$  و  $-3$  و  $-4$  و  $0$  و  $2$



الشكل 1.2.2

## أمثلة إضافية

4 اذكر عدد الأصفار الحقيقية

المحتملة ونقاط دوران

$$h(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

حدد جميع الأصفار الحقيقية

عن طريق التحليل إلى

العوامل. الدرجة تساوي 4. إذا

تشتل  $h$  على

4 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر

و 3 نقاط دوران على الأكثر.

$$h(x) = x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$$

تشتل  $h$  على أربعة أصفار حقيقية مميزة،

على أربعة أصفار حقيقية مميزة،

$-1, \pm\sqrt{3}, 1$ .

5 اذكر عدد الأصفار الحقيقية

$$h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2$$

المحتملة ونقاط دوران

ثم حدد

جميع الأصفار الحقيقية عن طريق

التحليل إلى العوامل. الدرجة تساوي

4. إذا تشتل  $h$  على 4 أصفار حقيقية

مميزة على الأكثر و 3 نقاط دوران على

الأكثر.

$$h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 = x^2(x+2)(x+3)$$

على ثلاثة أصفار،  $0$  و  $-2$  و  $-3$  من

بين الأصفار، يكون  $0$  مكرراً.

## نصائح للمعلمين الجدد

الأصفار أكد للطلاب أنه يمكنهم

التأكد من الأصفار (حيث يمر التمثيل

البياني بالمحور  $x$ ) وعدد نقاط الدوران

باستخدام حاسبة تمثيل بياني لتمثيل

الدالة كثيرة الحدود بيانياً.

التماس اشرح للطلاب أنه يمكن أن يكون

التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود

مماساً للمحور  $x$  عند نقطة محددة،

ويمكن أن يتقاطع مع المحور الأفقي  $x$

عند نقطة مختلفة، على النحو الموضح

في الشكل 2.2.2.

## مثال إضافي

6

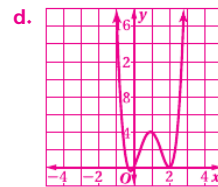
بالنسبة إلى الدالة  $f(x) = x(3x+1)(x-2)^2$ ، (a) طبق اختبار الحد الرئيسي، (b) حدد الأصفار واذكر مضاعفة أي أصفار مكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية ثم (d) ارسم الدالة بيانيًا.

a. الدرجة تساوي 4 والمعامل الرئيسي يساوي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

b. الأصفار هي  $x = \frac{1}{3}$ ،  $x = 2$ ،  $x = 0$ . الصفر الموجود في  $x = 2$  يشتمل على مضاعفة 2.

c. الإجابة النموذجية:  $(-1, 18)$ ،  $(-0.1, -0.3087)$ ،  $(1, 4)$ ،  $(3, 30)$

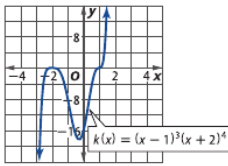


## نصائح للمعلمين الجدد

قيمة المحور  $x$  في الفترة يمكن اختيار أي قيمة للمحور  $x$  طالما أن القيمة تقع ضمن الفترة.

## 2 وضع نموذج للبيانات

المثال 7 يوضح كيفية إيجاد أفضل دالة كثيرة الحدود لوضع نموذج لمجموعة البيانات. يعد حساب عدد نقاط الدوران التي تتم ملاحظتها في مخطط انتشار لمجموعة من البيانات خطوة مهمة في وضع نموذج للبيانات.



في  $h(x) = -x^2(x-1)(x+2)$  من مثال 5، يتكرر الصفر  $x = 0$  مرتين. في  $k(x) = (x-1)^3(x+2)^4$  يتكرر الصفر  $x = 1$  ثلاث مرات، بينما يتكرر  $x = -2$  4 مرات. لاحظ أنه في التمثيل البياني  $k$  الموضح، يقطع المنحنى المحور الأفقي  $x$  عند  $x = 1$  وليس عند  $x = -2$ . يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لكل الدوال كثيرة الحدود.

## المفهوم الأساسي الأصفار المتكررة للدوال كثيرة الحدود

بما أن  $(x-c)^m$  أكبر قيمة أسية في  $(x-c)$  التي تعد عاملاً للدالة كثيرة الحدود  $f$ ، إذا  $c$  صفرًا تكرر  $m$  مرة في  $f$ ، بحيث يكون  $m$  عددًا طبيعيًا.

- إذا وجد صفر  $c$  له تكرار فردي، فإن التمثيل البياني للدالة  $f$  يقطع المحور الأفقي  $x$  عند  $x = c$  ويغير قيمة  $f(x)$  الإشارة عند  $x = c$ .
- إذا وجد صفر  $c$  له تكرار زوجي، فإن التمثيل البياني للدالة  $f$  يصبح مماسًا للمحور الأفقي  $x$  عند  $x = c$  ولا تغير قيمة  $f(x)$  الإشارة عند  $x = c$ .

لذلك الآن عدة اختيارات وأدوات لمساعدتك في تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

## مثال 6 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

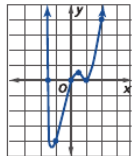
فيما يتعلق بالدالة  $f(x) = x(2x+3)(x-1)^2$ ، (a) طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانيًا.

a. بما أن ناتج  $x(2x+3)(x-1)^2$  يحتوي على حد رئيسي في  $x(2x)(x)^2$  أو  $2x^4$ ، إذا  $f$  من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 2، بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذا  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

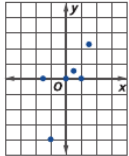
b. الأصفار الحقيقية المختلفة هي 0 و -1.5 و 1. كما يتكرر الصفر الموجود عند 1 مرتين.

c. اختر قيم  $x$  التي تقع ضمن الفترات التي حددتها أصفار الدالة.

الفترة	قيمة $x$ في الفترة	$f(x)$	$(x, f(x))$
$(-\infty, -1.5)$	-2	$f(-2) = 18$	$(-2, 18)$
$(-1.5, 0)$	-1	$f(-1) = -4$	$(-1, -4)$
$(0, 1)$	0.5	$f(0.5) = 0.5$	$(0.5, 0.5)$
$(1, \infty)$	1.5	$f(1.5) = 2.25$	$(1.5, 2.25)$



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

d. ارسم مخططًا للبيانات التي وجدتها (الشكل 1.2.3). يوضح لك السلوك الطرفي للدالة أن التمثيل البياني يتغير رأسًا في نهاية الأمر تجاه اليمين واليسار. تعرف أيضًا أن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي  $x$  عند أصفار غير مكررة -1.5 و 0، ولكن لا يقطع المحور الأفقي  $x$  عند الصفر المتكرر 1 لأن تكراره زوجي. ارسم منحنى متصلًا عبر النقاط كما هو موضح في الشكل 1.2.4.

## تمرين موجّه

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانيًا. A-6A. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

6A.  $f(x) = -2x(x-4)(3x-1)^3$

6B.  $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

## المتابعة

استكشف الطلاب وضع النماذج باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

## أسأل:

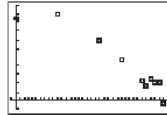
- ما مزايا وضع نماذج لمواقف من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود؟ الإجابة النموذجية: لها خصائص معروفة ومفهومة؛ وهناك نماذج متعددة يمكن اعتبارها ضمن نفس مجموعة الدوال؛ ومن السهل نسبيًا تنفيذ الحساب الذي يتم إجراؤه لعمل التنبؤات.

## مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

المدهرات ارجع إلى بداية الدرس. يوضح الجدول متوسط المدهرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.

العام	1970	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
النسبة المئوية للمدهرات	9.4	10.0	7.0	4.6	2.3	1.8	2.4	2.1	2.0	-0.4

المصدر: وزارة التجارة الأمريكية



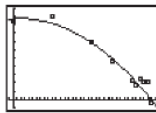
[-1, 36] scl: 1 by [-1, 11] scl: 1

a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

أدخل البيانات باستخدام ميزة القائمة في الحاسبة البيانية. لفرض أن  $L1$  عدد الأعوام منذ 1970. ثم صمم مخطط تشتت للبيانات. يشبه منحنى مخطط التشتت التمثيل البياني للمعادلة التربيعية. لذا سنستخدم الانحدار التربيعي.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قَرِّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

باستخدام أداة QuadReg على الحاسبة البيانية وتقريب كل معامل إلى أقرب ناتج من ألف  $r(x) = -0.009x^2 + 0.033x + 9.744$  بما أن معامل الارتباط  $r^2$  للبيانات يساوي 0.96. وهذا أقرب إلى 1. إذا النموذج ملائم جدًا.



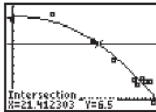
[-1, 36] scl: 1 by [-1, 11] scl: 1

يمكننا رسم الانحدار (غير المربى) الكامل عبر إرساله إلى قائمة  $Y=$ . إذا أدخلت  $L1$  و  $L2$  بعد QuadReg. كما هو موضح في الشكل 12.5. قسّم إدخال معادلة الانحدار إلى  $Y1$ . مثل هذه الدالة بيانيًا وكذلك باستخدام مخطط التشتت في نفس نافذة العرض. تتناسب الدالة مع البيانات جيدًا.

c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدهرات في 1993.

بما أن 1993 بعد 1970 بمقدار 23 عامًا. استخدم ميزة CALC على الحاسبة لإيجاد  $f(23)$  بما أن قيمة  $f(23)$  تساوي 5.94. إذا نسبة المدهرات في 1993 كانت تقريبًا 5.94%.

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي وصلت فيه نسبة المدهرات إلى 6.5%.



[-1, 36] scl: 1 by [-1, 11] scl: 1

مثل بيانات الخط  $y = 6.5$  بالنسبة إلى  $Y2$ . ثم استخدم تقاطع 5. على قائمة CALC لإيجاد نقطة تقاطع  $y = 6.5$  مع  $f(x)$ . بما أن التقاطع يحدث عندما  $x \approx 21$  إذا العام التقريبي الذي وصلت فيه النسبة إلى 6.5% كان تقريبًا 1970 + 21 أو 1991.

تمرين موجّه

7. السكان تم توضيح متوسط عمر سكان إحدى الدول حسب التوقع في عام 2080.

العام	1900	1930	1960	1990	2020	2050	2080
متوسط العمر	22.9	26.5	29.5	33.0	40.2	42.7	43.9

a. اكتب دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. بفرض أن  $L1$  يمثل عدد الأعوام منذ 1900.

b. قَدِّر متوسط عمر السكان في 2005. الإجابة النموذجية: 36

c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان إلى 80؟ الإجابة النموذجية: 1958

## مثال إضافي

7 تعداد السكان يوضح الجدول التالي تعداد سكان المدينة خلال فترة 8 سنوات. يشير العام 1 إلى عام 2001. ويشير العام 2 إلى عام 2002 وهكذا.

العام	تعداد السكان
1	5,050
2	5,510
3	5,608
4	5,496
5	5,201
6	5,089
7	5,095
8	4,675

a. قِم بإنشاء مخطط انتشار (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات. الدالة التكعيبية



[0, 10] scl: 1 by [0, 7000] scl: 1000

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لوضع نموذج لمجموعة البيانات. قَرِّب كل معامل إلى أقرب جزء من الألف واذكر معامل الارتباط.  $f(x) = 10.020x^3 - 176.320x^2 + 807.469x + 4,454.786$ ;  $r^2 = 0.89$



[0, 10] scl: 1 by [0, 7000] scl: 1000

c. استخدم النموذج لتقدير تعداد سكان المدينة خلال عام 2012. 6,069

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي يصل فيه تعداد السكان إلى 10,712. 2015

## الربط بالحياة اليومية

يحتاج خريج كلية في إحدى الدول أن يتقاعد عند سن 65 إلى ادخار متوسط 10,000 AED كل عام للتقاعد.

المصدر: Monroe Bank



الشكل 12.5



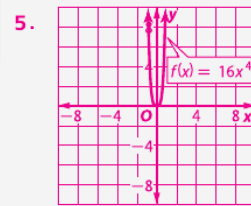
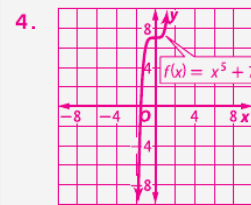
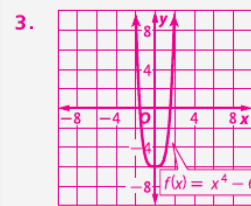
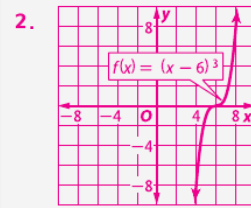
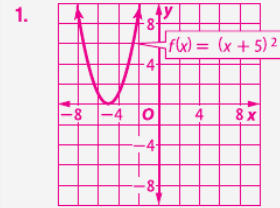
## 3 تبارين

## التقويم التكويني

استخدام التمارين 1-49 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

## إجابات إضافية



ارسم التمثيل البياني لكل دالة. (مثال 1) 1-10. انظر الهامش.

- $f(x) = (x+5)^2$
  - $f(x) = (x-6)^3$
  - $f(x) = x^4 - 6$
  - $f(x) = x^5 + 7$
  - $f(x) = 16x^4$
  - $f(x) = 32x^5 - 16$
  - $f(x) = (x-3)^4 + 6$
  - $f(x) = (x+4)^3 - 3$
  - $f(x) = \frac{1}{3}(x-9)^5$
  - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 8$
11. الباء إذا كان تصريف خزان بحجم 10 لترات يستغرق دقيقة واحدة، فإن حجم ما يتبقى من الماء في الخزان يمكن أن يكون  $V(t) = 10(1-t)^2$  تقريباً، بحيث تكون  $t$  الزمن بالدقائق،  $0 \leq t \leq 1$  مثل الدالة بيانياً. (مثال 1) انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

12-21. انظر ملحق إجابات الوحدة 2. وضح السلوك الطرقي للرسم البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (مثال 2)

- $f(x) = -5x^7 + 6x^4 + 8$
- $f(x) = 2x^6 + 4x^5 + 9x^2$
- $g(x) = 5x^4 + 7x^5 - 9$
- $g(x) = -7x^3 + 8x^4 - 6x^6$
- $h(x) = 8x^2 + 5 - 4x^3$
- $h(x) = 4x^2 + 5x^3 - 2x^5$
- $f(x) = x(x+1)(x-3)$
- $g(x) = x^2(x+4)(-2x+1)$
- $f(x) = -x(x-4)(x+5)$
- $g(x) = x^3(x+1)(x^2-4)$

a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

22. الأغذية العضوية يمكن تمثيل عدد الكيلوواتر المربعة المستخدمة في إحدى الدول لإنتاج التفاح العضوي من 2000 إلى 2005 كما يلي  $a(x) = 43.77x^4 - 498.76x^3 + 1,310.2x^2 + 1,626.2x + 6,821.5$ ، حيث  $x = 0$  تساوي 2,000. (مثال 2)

a. مثل كل دالة باستخدام الحاسبة البيانية.

b. وضح السلوك الطرقي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيس.

23-32. انظر ملحق إجابات الوحدة 2

اذكر عدد الأصناف الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصناف الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل. (الأمثلة 3-5)

- $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$
- $f(x) = x^6 - 8x^5 + 12x^4$
- $f(x) = x^4 + 4x^2 - 21$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 - 32x^2$
- $f(x) = x^6 - 6x^3 - 16$
- $f(x) = 4x^8 + 16x^4 + 12$
- $f(x) = 9x^6 - 36x^4$
- $f(x) = 6x^5 - 150x^3$
- $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2$
- $f(x) = 3x^5 + 11x^4 - 20x^3$

33-42. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصناف وأذكر تكرار أي أصناف مكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانياً. (مثال 6)

- $f(x) = x(x+4)(x-1)^2$
- $f(x) = x^2(x-4)(x+2)$
- $f(x) = -x(x+3)^2(x-5)$
- $f(x) = 2x(x+5)^2(x-3)$
- $f(x) = -x(x-3)(x+2)^3$
- $f(x) = -(x+2)^2(x-4)^2$
- $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x$
- $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
- $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2$
- $f(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^3$

104 | الدرس 2-2 | الدوال كثيرة الحدود

43. خزانات المياه فيها يلي عدد الأمطار دون الحد الأقصى لمستوى المياه في خزان مياه رينبو بولاية ويسكونسين خلال عشرة أشهر في 2007. (مثال 7)

الشهر	المستوى	الشهر	المستوى
يناير	4	يوليو	9
فبراير	5.5	أغسطس	11
مارس	10	سبتمبر	16.5
أبريل	9	نوفمبر	11.5
مايو	7.5	ديسمبر	8.5

a. اكتب نموذجاً يوضح مستوى المياه كدالة لعدد الأشهر منذ يناير. انظر الهامش.

b. استخدم النموذج لتقدير مستوى المياه في الخزان في أكتوبر. 14.8 ft

44-47. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

استخدم حاسبة بيانية لكتابة دالة كثيرة الحدود لتمثيل كل مجموعة من البيانات. (مثال 7)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	8.75	7.5	6.25	5	3.75	2.5	1.25

x	5	7	8	10	11	12	15	16
f(x)	2	5	6	4	-1	-3	5	9

x	-2.53	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
f(x)	23	11	7	6	6	5	3	2	4

x	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
f(x)	52	41	32	44	61	88	72	59	66	93

48a. إجابة النموذجية:

$$f(x) = 2.14 \cdot 10^{-4}x^3 - 0.018x^2 + 0.383x + 5.976$$

48b. الكهرباء فيها يلي متوسط أسعار الكهرباء بالتجزة في إحدى الدول من 1970 إلى 1970، فيما يلي الأسعار المتوقعة أيضاً لعامي 2010 و 2020. (مثال 7)

السعر (fil/kWh)	السعر (fil/kWh)	السعر (fil/kWh)	السعر (fil/kWh)
7.5	1995	6.125	1970
6.625	2000	7	1974
6.25	2005	7.25	1980
6.25	2010	9.625	1982
6.375	2020	8	1990

a. اكتب نموذجاً يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1970.

b. استخدم النموذج لتوقع متوسط سعر الكهرباء في 2015.

c. وفقاً للنموذج، في أي سنة تكرر السعر 7 fils للمرة الثانية؟ 1999

5.93 F

## خيارات الواجب المنزلي المتميزة

AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليمين
AL قريب من المستوى	1-49, 90-92, 94-113	1-49, 90-92, 94-109, زوجي 48
OL ضمن المستوى	1-49, 68, 69-79, 80, 81-89, 90-92, 94-113	1-49, 110-113, 90-92, 94-109
BL أعلى من المستوى	50-113	

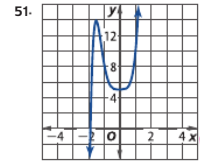
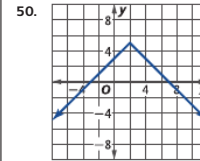
104 | الدرس 2-2 | الدوال كثيرة الحدود



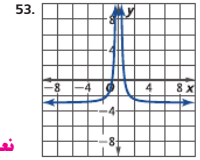
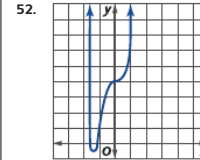
أرباع العام	المبيعات (بآلاف)
1	423
2	462
3	495
4	634
5	587
6	498
7	798
8	986
9	969
10	891
11	1,130
12	1,347

a-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

- a. توقع السلوك الطرقي للبيانات حيث تقترب  $x$  من اللانهاية.  
b. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل البيانات ورسمها بيانيًا. هل النموذج ملائم تمامًا؟ اشرح استدلالك.  
c. اشرح السلوك الطرقي للتمثيل البياني باستخدام الحدود. هل توقعك دقيق؟ اشرح استدلالك.
- حدد هل يمكن أن يوضح كل تمثيل بياني دالة كثيرة الحدود. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة هي لا، فاشرح السبب.



لا، يوجد رأس مُدبب عند  $x = 2$ .

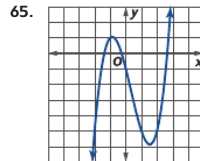
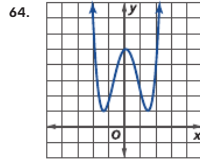


لا، غير محدد عند  $x = 0$ . 54-63. انظر الهامش.

جد دالة كثيرة الحدود من الدرجة  $m$  تحتوي على الأصفار الحقيقية التالية فقط. قد تكون أكثر من إجابة.

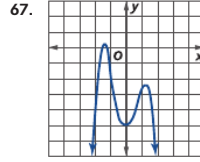
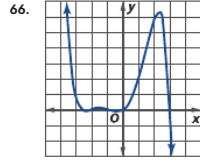
54.  $-1; n = 3$   
55.  $3; n = 3$   
56.  $6 - 3; n = 4$   
57.  $-5, 4; n = 4$   
58.  $7; n = 4$   
59.  $0, -4; n = 5$   
60.  $2, 1, 4; n = 5$   
61.  $0, 3, -2; n = 5$   
62.  $n = 4$ ; لا توجد أصفار حقيقية  
63.  $n = 6$ ; لا توجد أصفار حقيقية

حدد على عرجة  $m$  في الدالة كثيرة الحدود التي تمثيل بياني في الصورة أدناه. اشرح كيف يمكنك التحقق من صحة إجابتك.



$n$  عدد زوجي؛  $a_n$  عدد موجب.

$n$  عدد فردي؛  $a_n$  عدد موجب.



$n$  عدد فردي؛  $a_n$  عدد سالب.

$n$  عدد زوجي؛  $a_n$  عدد سالب.

68. التصنيع تصنع شركة عبوات الألمنيوم لمشروبات الطاقة.



a. اكتب معادلة  $V$  تمثل إجمالي حجم العبوة.

b. اكتب دالة  $A$  من حيث  $r$  التي تمثل مساحة سطح حاوية بحجم  $15 \text{ cm}^3$ .

c. استخدم حاسبة بيانية لتحديد أدنى حد ممكن من مساحة سطح العبوة.

b-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

حدد دالة كثيرة الحدود تحتوي على كل مجموعة من الأصفار. قد تكون هناك أكثر من إجابة. 69-74. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

69.  $5 - 3, 6$   
70.  $4, -8, -2$   
71.  $3, 0, 4, -1, 3$   
72.  $1, 1 - 4, 6, 0$   
73.  $\frac{3}{4}, -3, -4, -\frac{2}{3}$   
74.  $-1 - 1, 5, 0, \frac{5}{6}$

75. السكان زادت نسبة سكان التعداد السكاني لإحدى الدول الذين يعيشون في المناطق الحضرية.

النسبة المئوية للسكان	العام
56.1	1950
63	1960
68.6	1970
74.8	1980
74.8	1990
79.2	2000

a. الإجابة النموذجية:  $f(x) = 0.45x + 58.19$

b. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1950.

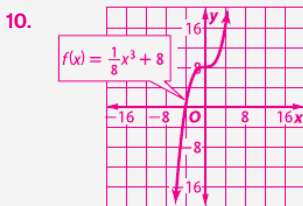
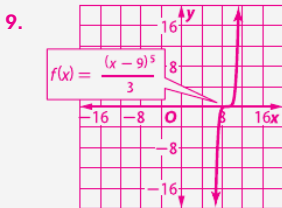
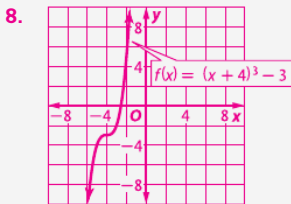
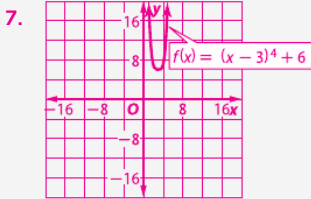
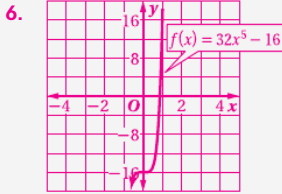
c. استخدم النموذج لتوقع النسبة المئوية للسكان الذين سيعيشون في المناطق الحضرية في 2015. 87.4%

c. الإجابة النموذجية: 2010 السكان في المناطق الحضرية.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 49. قد ترغب في أن تنشر للطلاب كيفية ارتباط الأرباع بالأعوام من 2005 إلى 2007. وقد يساوي بعض الطلاب عن طريق الخطأ الربع 1 بعام 2005. والربع 2 بعام 2006. وهكذا. ولكن لكل عام أربعة أرباع. وبالتالي تكون الأرباع 1-4 لعام 2005 والأرباع 5-8 لعام 2006 و 9-12 لعام 2007.

## إجابات إضافية



58. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^4 - 28x^3 + 294x^2 - 1,372x + 2,401$

59. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^5 + 4x^4$

60. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^5 - 13x^4 + 64x^3 - 148x^2 + 160x - 64$

61. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3$

62. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

63. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

43a. الإجابة النموذجية:  $f(x) = -0.017x^4 + 0.355x^3 - 2.276x^2 + 5.722x + 3.509$

54. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

55. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

56. الإجابة النموذجية:

$f(x) = x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 108x + 324$

57. الإجابة النموذجية:  $f(x) = x^4 + 11x^3 + 15x^2 - 175x - 500$

## إجابات إضافية

81a. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$  4;

81b.  $-6, -2$  (مكرر: 2), 4

81c. الإجابة النموذجية:  $f(x) = 0.5(x+2)^2 x(x+6)(x-4)$

82a. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} = -\infty$  4;

82b.  $-3, 2, 6$  (مكرر: 2)

صمم دالة بالخصائص التالية. ثم مثلها بيانيًا. 76-79. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

76. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$  3.5 أصغار حقيقية.

77. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow \infty} = -\infty$  4.6 أصغار حقيقية.

78. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$  2.5 أصغار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين.

79. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$  3.6 أصغار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين.

a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

80. الطقس فيما يلي درجات الحرارة بالدرجة المئوية من 10 صباحًا إلى 7 مساءً في يوم ما في مدينة بحيث  $x$  هو عدد الساعات منذ 10 صباحًا.

الزمن	درجة الحرارة	الزمن	درجة الحرارة
0	4.1	5	10
1	5.7	6	7
2	7.2	7	4.6
3	7.3	8	2.3
4	9.4	9	-0.4

a. مثل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. كرر الجزء b باستخدام دالة من الدرجة 4.

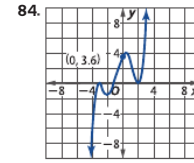
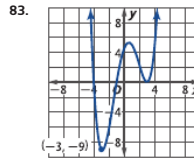
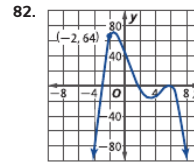
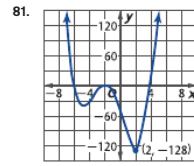
d. أي دالة تمثل نموذجًا أفضل؟ اشرح.

لكل من التمثيلات البيانية التالية: 81-84. انظر الهامش.

a. حدد أقل درجة ممكنة وحدد السلوك الطرفي.

b. حدد الأصغار وتكرارها. للتحقق: جميع الأصغار فيها متكاملة.

c. صمم دالة تلائم التمثيل البياني وتقطعة محددة.



اذكر عدد الأصغار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم جد جميع الأصغار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل. 85-88. انظر الهامش.

85.  $f(x) = 16x^4 + 72x^2 + 80$  86.  $f(x) = -12x^3 - 44x^2 - 40x$

87.  $f(x) = -24x^4 + 24x^3 - 6x^2$  88.  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

89. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتحقق من سلوك

توافق الدوال كثيرة الحدود.

a. العرض البياني مثل  $f(x)$  و  $g(x)$  و  $h(x)$  بيانيًا في كل صف على شاشة الحاسبة البيانية نفسها. فيما يتعلق بكل تمثيل بياني، عدّل النافذة لملاحظة سلوك كل منها على مقياس أكبر وقريب جدًا من الأصل.

$f(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$
$x^2 + x$	$x^2$	$x$
$x^3 - x$	$x^3$	$-x$
$x^3 + x^2$	$x^3$	$x^2$

a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

b. العرض التحليلي وضع سلوك كل تمثيل بياني للدالة  $f(x)$  من حيث  $g(x)$  أو  $h(x)$  بالقرب من الأصل.

c. العرض التحليلي وضع سلوك كل تمثيل بياني للدالة  $f(x)$  من حيث  $g(x)$  أو  $h(x)$  عند اقتراب  $x$  من  $\infty$  و  $-\infty$ .

d. العرض الكلامي توقع سلوك الدالة التي هي عبارة عن توافق بين دالتين  $a$  و  $b$  مثل  $f(x) = a + b$  بحيث تكون  $a$  حد الدرجة الأعلى.

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

90. تحليل الخطأ نهلة ووفاء يرسمان نموذجًا للبيانات الموضحة. تعتقد

نهلة أن النموذج ينبغي أن يكون  $f(x) = 5.754x^3 + 2.912x^2 - 7.516x + 0.349$  تعتقد وفاء أنه ينبغي أن يكون  $f(x) = 3.697x^2 + 11.734x - 2.476$  هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

x	f(x)	x	f(x)
-2	-19	0.5	-2
-1	5	1	15
0	0.4	2	43

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

91. الاستنتاج هل يمكن أن تحتوي دالة كثيرة الحدود على كل من القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

92. الاستنتاج وضع لماذا الدالة الثابتة  $c$   $c \neq 0$   $f(x) = c$  تحتوي على درجة 0. ولكن الدالة الصغرى  $f(x) = 0$  ليس لها درجة. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

93. تحد استخدم التحليل إلى العوامل بالتحديد أصغار  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x - 60$  اشرح كل خطوة. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

94. الاستنتاج كيف من الممكن تمثيل أكثر من دالة بنفس الدرجة والسلوك الطرفي والأصغار الحقيقية المختلفة؟ اشرح مثالًا لشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

95. الاستنتاج ما أدنى درجة لدالة كثيرة الحدود تحتوي على القيمة العظمى المطلقة والقيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

96. الكتابة في الرياضيات وضع كيف تحدد أفضل دالة كثيرة حدود يمكن استخدامها عند رسم نموذج للبيانات. انظر ملحق إجابات الوحدة 2

حل كل من المعادلات التالية.

97.  $\sqrt{x+3} = 7$  46

98.  $d + \sqrt{d^2 - 8} = 4$  3

99.  $\sqrt{x-8} = \sqrt{13} + x$  لا يوجد حل

**انتبه!**  
تحليل الخطأ في التمرين 90.  
ينبغي أن يلاحظ الطلاب أن نموذج  
مادلين يشتمل على درجة فردية.  
بينما يشتمل نموذج سمير على  
درجة زوجية.

100. إعادة رسم نموذج يستبدل عامل سجادة في غرفة المعيشة بمقاس 12 m في 15 m.  
تبلغ تكلفة السجادة الجديدة 13.99 AED لكل متر مربع. تحول الصيغة  $r(x) = 9x$  الباردات المربعة إلى قدم  
ربع.  
a. جد معكوس  $f^{-1}(x)$  ما أمية  $f^{-1}(x)$ .

b. كم ستبلغ تكلفة السجادة الجديدة؟ 279.80 AED  
إلى ياردات مربعة، ثم يمكن بعد ذلك حساب تكلفة السجادة الجديدة.

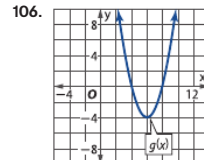
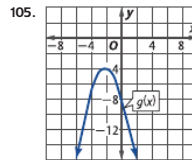
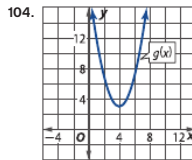
توجد  $3x^2 - 5x + 4 = 2x^2 - 5x + 4$  و  $g(x) = 6x + 4$  جد كل دالة.

101.  $(f+g)(x) = 2x^2 + x + 7$

102.  $[f \circ g](x) = 72x^2 + 66x + 15$

103.  $[g \circ f](x) = 12x^2 - 30x + 22$

وضح كيف ترتبط الدالتان  $f(x) = x^2$  و  $g(x)$  ببعضهما. ثم اكتب معادلة لـ  $g(x)$ .



107. الأعمال نتج شركة منتجًا جديدًا بتكلفة 25 AED لكل منتج. استأجرت محلل تسويق للمساعدة على تحديد  
سعر البيع. بعد جمع البيانات المرتبطة بسعر البيع  $s$  لطلب المستهلكين السنوي وتحليلها  $d$ ، يقدر المحلل طلب  
المنتج باستخدام  $15,000 + 200s - d$ .

a. إذا كان الربح السنوي هو الفرق بين إجمالي الإيرادات وتكاليف الإنتاج، فحدد سعر البيع  $s \geq 25$  الذي سيرفع أرباح الشركة السنوية  $P$ . 50 AED  
b. ما مخاطر تحديد سعر البيع باستخدام هذه الطريقة؟ الإجابة النموذجية: قد يوفر إقامة مساوية في الشركة نفس المنتج بتكلفة أقل.

فيما يلي نتائج أحد الاختبارات في صفوف الفيزياء. (الدرس 8-6)

82, 77, 84, 98, 93, 71, 76, 64, 89, 95, 78, 89, 65, 88, 54  
96, 87, 92, 80, 85, 93, 89, 55, 62, 79, 90, 86, 75, 99, 62

108. ارسم مخطط صندوق ذا عارضين.

109. ما الانحراف المعياري لدرجات الامتحان؟  $\approx 12.54$

## 4 التقويم

عين المصطلح الرياضي اطلب من  
الطلاب وصف التمثيل البياني لدالة كثيرة  
الحدود. الإجابة النموذجية: منحنى منتظم  
محدد ومتصل لجميع الأعداد الحقيقية

### إجابات إضافية

82c. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = -0.25x(x-6)^2(x-2)(x+3)$$

83a. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

83b. 3, -4, (مكرر: 2), -1

83c. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x-3)^2 x(x+1)(x+4)$$

84a. الدرجة  $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

84b. -3 (مكرر: 2), 2, -1 (مكرر: 2)

84c. الإجابة النموذجية:  $f(x) = \frac{1}{10}x(x-2)^2(x+1)(x+3)^2$

85. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ لا  
توجد أصفار حقيقية

86. 3 أصفار حقيقية ونقطتان دوران؛ 0،  
-2،  $-\frac{5}{3}$

87. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ 0، و  $\frac{1}{2}$   
88. 3 أصفار حقيقية ونقطتان دوران؛ -6، -2، و 2

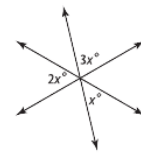
### مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

112. الاختيار من متعدد أي من المعادلات التالية يمثل نتيجة تحريك  
الدالة الأم  $y = x^2$  لأعلى 4 وحدات ولليمين 5 وحدات؟ D

A  $y + 4 = (x + 5)^2$  C  $y + 4 = (x - 5)^2$   
B  $y - 4 = (x + 5)^2$  D  $y - 4 = (x - 5)^2$

113. المراجعة أي مما يلي يوضح الأعداد في مجال

H  $\frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$   
F  $x \neq 5$  M  $x \geq \frac{3}{2}$ ,  $x \neq 5$   
G  $x \geq \frac{3}{2}$  J  $x \neq \frac{3}{2}$



110. SAT/ACT يوضح الشكل تقاطع ثلاثة  
مستقيمتين، الشكل ليس مرسومًا بمقياس  
رسم. C

$x =$   
A 16 D 60  
B 20 E 90  
C 30

111. على المجال  $2 < x \leq 3$  أي من الدوال التالية تحتوي على  
أكبر قيمة لـ  $y$ ؟ F

F  $y = \frac{x+3}{x-2}$  H  $y = x^2 - 3$   
G  $y = \frac{x-5}{x+1}$  J  $y = 2x$

107

### التعليم المتمايز

التوسع اطرح السؤال التالي على الطلاب. هل من المناسب دائمًا أن تستخدم نموذجًا لدالة كثيرة  
الحدود لمخطط انتشار من أجل التنبؤ بما وراء مجال البيانات المعطاة؟ اطلب من الطلاب أن يقدموا  
أمثلة تدعم إجاباتهم. لا، لأن الظروف الواقعية قد لا توجد وراء البيانات المعطاة؛ الإجابة النموذجية:  
قد يوضح مخطط التشتت (التمثيل البياني بالنقاط المبعثرة) لتسجيلات الألعاب الرياضية أن زمن  
التسجيل لإكمال سباق 100 متر قد انخفض بمرور السنين. وسينخفض نموذج مخطط التشتت بشكل  
لا نهائي، حتى يصبح صفرًا، ثم عددًا سالبًا. ولكن، لن يتم إجراء السباق أبدًا بصفر أو بوقت سالب.

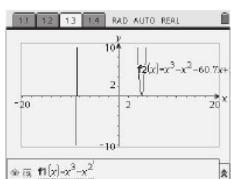
# مختبر تقنية التمثيل البياني

## 2-2 السلوك الخفي للتمثيلات البيانية



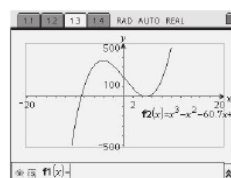
بعد استخدام تقنيات التمثيل البياني مثل الحواسيب والآلات الحاسبة طريقة فعالة للحدرة على تمثيل دوال بيانية وإيجاد قيمتها. ومع ذلك، من المهم أن نضع في الاعتبار حدود تقنية التمثيل البياني عند تفسير التمثيلات البيانية.

### النشاط السلوك الخفي للتمثيلات البيانية



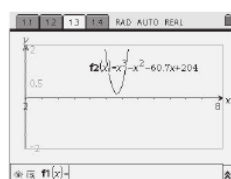
حدد أصفار  $f(x) = x^3 - x^2 - 60.7x + 204$  بيانياً.

**الخطوة 1** افتح صفحة جديدة للتمثيلات البيانية والهندسة، ومثل الدالة بيانياً. يبدو أن للدالة صفرين، أحدهما بين -10 و -8 والآخر بين 4 و 6.



**الخطوة 2** من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيّر أبعاد النافذة على النحو المبين.

يبدو سلوك التمثيل البياني أوضح كثيرًا في النافذة الأكبر. لا يزال يبدو أن الدالة لها صفرين، أحدهما بين -10 و -8 والآخر بين 4 و 6.



**الخطوة 3** من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيّر النافذة إلى [2, 8] على [2, -2].

من خلال تكبير التمثيل البياني في المساحة التي يوجد فيها الصفر، يتضح أنه لا يوجد صفر بين القيمتين 4 و 6. لذا، يحتوي التمثيل البياني على صفر واحد.

### حلل النتائج

1. بالإضافة إلى الحدود التي تم اكتشافها في الخطوات السابقة، كيف يمكن أن تفيد الحاسبة البيانية قدرتك على تفسير التمثيلات البيانية؟

2. ما الطرق الأخرى لتجنب هذه الحدود؟

### تمارين

حدد أصفار كل الدوال كثيرة الحدود بيانياً. لاحظ السلوك الخفي.

- $x^3 + 6.5x^2 - 46.5x + 60$  -11.2, 2.2, 2.5
- $x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 6x - 7$  -0.89, 0.58
- $x^5 + 7x^3 + 4x^2 - x + 10.9$  -1.3
- $x^4 - 19x^3 + 107.2x^2 - 162x + 73$  8.1, 8.9

### الهدف

- استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

### نصيحة دراسية

**إعدادات النافذة (Window Settings)** (إعدادات النافذة) يمكنك اختيار قيم للنافذة حسب معاينة تمثيلك البياني أو يمكنك استخدام إحدى أدوات التكبير والتصغير مثل مربع التكبير/التصغير الذي يسمح لك بتكبير مساحة معينة من التمثيل البياني.

- الإجابة النموذجية: قد لا تسمح إعدادات النافذة بعرض التمثيل البياني بالكامل. قد تتسبب أيضًا في انحراف التمثيل البياني حسب الفواصل الزمنية للمعاير ومتابعتها.
- الإجابة النموذجية: يمكن استخدام أدوات التكبير والتصغير وإعدادات النافذة لعرض الفواصل الزمنية اللازمة.

## 1 التركيز

**الهدف** استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

### نصيحة دراسية

تفتح حاسبة التمثيلات البيانية في نفس الشاشة التي تم إيقاف تشغيلها بها. اجعل الطلاب يضغطوا على مفتاح الشاشة الرئيسية لبدء المختبر.

## 2 التدريس

### العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. اجعل الطلاب يفكرون في خطوات النشاط 1-3.

### أسأل:

- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي يمكن أن تشتمل عليها الدالة التكعيبية؟ 1 أو 2 أو 3
- إذا كانت هذه الدالة تشتمل على صفر حقيقي واحد فقط، فما نوع أصفار الدالتين الأخرين؟ الأصفار التخيلية
- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي يمكن أن تشتمل عليها الدالة التربيعية؟ 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4

**تمرين** اطلب من الطلاب حل التمارين 3-6.

## 3 التقويم

### التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستخدمون حاسبة تمثيل بياني لتمثيل الدوال بيانياً وإيجاد الأصفار.

### من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب أن يوضحوا متى يكونون متأكدين أن القيمة صفر لدالة مرسومة بيانياً.

### توسيع المفهوم

اسأل الطلاب كيف استطاعوا الحفاظ على التمثيل البياني عن نفس ما ورد في الخطوة 1 ولكنهم حصلوا على صفرين أو ثلاثة أصفار في الخطوة 3.