1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-6 حل المعادلات كثيرة الحدود والنسبية.

الدرس 2-6 حل المتباينات كثيرة الحدود.حل المتباينات النسبية.

بعد الدرس 2-6 حل أنظمة المتباينات في الأمثلية الخطية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- جـد حلاً لـ $2x - 6 = 0$ 3
- هل $x = 2$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟ سالب
- هل $x = 3$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟ لا موجب ولا سالب، فهي تجعله يساوي 0.
- هل $x = 4$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟ موجب

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 2-6 المتباينات غير الخطية

:: السابق

- قمت بحل المعادلات كثيرة الحدود والمعادلات النسبية.

:: الحالي

1 حل المتباينات كثيرة الحدود.

2 حل المتباينات النسبية.

:: لماذا؟

- تكون العديد من العوامل متضمنة عند بدء عمل جديد، بما في ذلك مقدار من الاستثمار المبدئي وأعمال الصيانة وتكاليف العمالة وتكلفة تصنيع المنتج المراد بيعه وسعر البيع الفعلي المحدد للمنتج. يمكن استخدام المتباينات غير الخطية لتحديد السعر المحدد لبيع أحد المنتجات لتحقيق ربح معين.

مفردات جديدة

متباينة كثيرة الحدود polynomial inequality

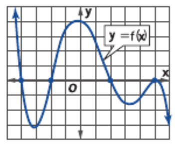
مخطط الإشارات Sign chart

متباينة نسبية rational inequality

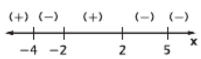
1 المتباينات كثيرة الحدود

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود، فعندئذٍ تأخذ **المتباينة كثيرة الحدود** الصورة العامة $f(x) \le 0, f(x) < 0, f(x) \ne 0$ أو $f(x) > 0$ أو $f(x) \ge 0$ وتكون المتباينة $f(x) < 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا سالبًا، بينما تكون $f(x) > 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا موجبًا.

في الدرس 2-1، تعلمت أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لدالة كثيرة الحدود ما هي إلا أصفار حقيقية للدالة. عند ترتيبها، تنقسم أصفار المحور الأفقي x إلى فترات تكون قيمة $f(x)$ إما موجبة بشكل كامل (تكون أعلى المحور الأفقي x) أو سالبة بشكل كامل (تكون أسفل المحور الأفقي x).



f(x)



بإيجاد إشارة $f(x)$ لقيمة واحدة فقط في كل فترة على المحور الأفقي x، يمكنك تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة موجبة أو سالبة. بداية من فترات الاختبار الممثلة من خلال **مخطط الإشارات** الموجود في الجانب الأيسر، تعرف ما يلي:

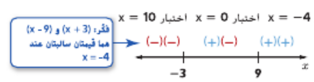
- $f(x) < 0$ بالفترة $(-4, -2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$
- $f(x) \le 0$ بالفترة $[-4, -2] \cup [2, \infty)$
- $f(x) = 0$ عند $x = -4, -2, 2, 5$
- $f(x) > 0$ بالفترة $(-\infty, -4) \cup (-2, 2)$
- $f(x) \ge 0$ بالفترة $(-\infty, -4] \cup [-2, 2] \cup [5, 5]$.

مثال 1 إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود

حُلّ المتباينة: لما يلي $x^2 - 6x - 30 > -3$

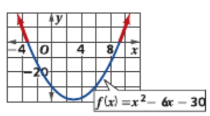
بجمع العدد 3 في كل طرف، تحصل على $x^2 - 6x - 27 > 0$ بافتراض أن $f(x) = x^2 - 6x - 27$ وينتج عن التحليل إلى العوامل ما يلي $f(x) = (x + 3)(x - 9)$، إذن تحتوي $f(x)$ على أصفار حقيقية عند -3 و 9. قم بإنشاء مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار، وبعد ذلك بقيمة ما على المحور الأفقي x في كل فترة اختبار داخل الصورة التي تم تحليلها إلى العوامل للدالة كثيرة الحدود لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة عند تلك النقطة.

$f(x) = (x + 3)(x - 9)$



$f(x) = (x + 3)(x - 9)$

لأن $f(x)$ موجبة على الفترات الأولى والأخيرة، فإن مجموعة الحل لـ $x^2 - 6x - 30 > -3$ هي $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج، نظرًا لوجود $f(x)$ أعلى المحور الأفقي x على هذه الفترات نفسها.



تمرين موجّه

حُلّ كل من المتباينات التالية.

1A. $x^2 + 5x + 6 < 20$ $(-7, 2)$

1B. $(x - 4)^2 > 4$ $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

■ بناءً على إجاباتك، ما الاستنتاج الذي يمكنك التوصل إليه لوضع حلول لـــ $2x - 6 > 0$؟ $x > 3$

■ لماذا في رأيك يعد 3 عددًا مهمًا للمتباينة $2x - 6 > 0$؟ الإجابة النموذجية: عندما تعرف القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة، يمكنك اختبار الفترات في كلا جانبي تلك القيمة لإيجاد ما يجعل المتباينة صحيحة. وتكون هذه المتباينة موجبة للقيم التي تزيد عن 3. إذًا فإن $x > 3$ هو الحل.

1 المتباينات كثيرة الحدود

الأمثلة 1–3 توضح كيفية حل المتباينات كثيرة الحدود باستخدام الأصفار الحقيقية للدالة كثيرة الحدود المرتبطة ومضاعفتها والسلوك الطرفي للدالة إلى جانب مخطط الاشارات.

التقويم التكويني

استخدام التمارين الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 جـد حلاً لـــ $x^2 - 8x + 16 \le 1$ $[3, 5]$

2 جـد حلاً لـــ $x^3 - 22x > 3x^2 - 24$ $(-4, 1) \cup (6, \infty)$

3 جـد حل كل من المتباينات التالية.

a. $x^2 + 2x + 3 < 0$ $\varnothing$

b. $x^2 + 2x + 3 \ge 0$ $(-\infty, \infty)$

c. $x^2 + 12x + 36 > 0$ $(-\infty, -6) \cup (-6, \infty)$

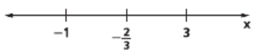
d. $x^2 + 12x + 36 \le 0$ $[-6]$

إذا كنت تعرف الأصفار الحقيقية لدالة ما، بما في ذلك مقدار التكرار، والسلوك الطرفي للدالة، فيمكنك تصميم مخطط إشارات بدون اختبار القيم.

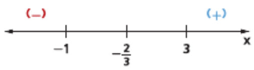
مثال 2 إيجاد حل متباينة كثيرة حدود باستخدام السلوك الطرفي

حُلّ المتباينة: $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \le 0$

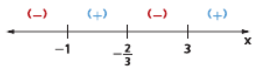
الخطوة 1 بافتراض أن $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ استخدم الأساليب الواردة في الدرس 1-4 لتحديد أن f يحتوي على أصفار حقيقية عند -1 و$-\frac{2}{3}$ و 3. قم بإنشاء مخطط الإشارات.



الخطوة 2 حدد السلوك الطرفي لـــ $f(x)$. لأن درجة f فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فأنت تعرف أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ يعني هذا أن الدالة تبدأ سالبة على اليسار وتنتهي موجبة على اليمين.

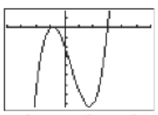


الخطوة 3 لأن كل صفر مدرج يمثل موقع تغيير الإشارة، يمكنك إكمال مخطط الإشارات.



تساوي حلول $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \le 0$ قيم المحور الأفقي x بحيث يكون $f(x)$ سالبًا أو مساويًا لـــ 0. من مخطط الإشارات، يمكنك معرفة أن مجموعة الحل تساوي $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, 3\right]$.

التحقق من الحل يكون التمثيل البياني لـــ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ على المحور الأفقي x على $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, 3\right]$. ✓



-4, 6] scl: 1 by [–25, 5] scl: 3

نصيحة دراسية

المتباينات كثيرة الحدود يمكنك التحقق من حل إحدى المتباينات كثيرة الحدود بتمثيل الدالة بيانيًا وتقدير القيمة الحقيقية للمتباينة لكل فترة في الحل.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المتباينات التالية.

2A. $2x^2 - 10x \le 2x - 16$ $[2, 4]$

2B. $2x^3 + 7x^2 - 12x - 45 \ge 0$ $\{-3\} \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

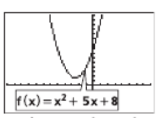
عندما لا تتقاطع دالة كثيرة الحدود مع المحور الأفقي x، يكون للمتباينات المرتبطة حلول غير عادية.

مثال 3 المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

حُـــلّ كل من المتباينات التالية.

a. $x^2 + 5x + 8 < 0$

لا تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ على أصفار حقيقية. إذًا لا توجد أي تغيرات في الإشارات. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x. لذلك، لا يوجد حل لـــ $x^2 + 5x + 8 < 0$. يدعم التمثيل البياني لـــ $f(x)$ هذا الاستنتاج، لعدم وجود التمثيل البياني على المحور الأفقي x أو أسفله. ومجموعة الحل هي $\varnothing$.



-12, 8] scl: 1 by [–5, 10] scl: 1

b. $x^2 + 5x + 8 \ge 0$

لأن الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ موجبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x، تساوي مجموعة الحل لـــ $x^2 + 5x + 8 \ge 0$ جميع الأعداد الحقيقية أو $(-\infty, \infty)$.

2 المتباينات النسبية

المثالان 4 و 5 يوضحان كيفية حل المتباينات النسبية من خلال كتابة المتباينة أولاً بالصيغة العامة بتعبير نسبي واحد على اليسار و 0 على اليمين. وتستخدم أصفار الدالة مع مخطط الاشارات لتحديد في أي الفترات تكون التعابير في الدالة موجبة أم سالبة أم تساوي صفرًا.

مثال إضافي

4 جـد حلاً لـ $\frac{3x+4}{x+2} - 3 \geq 0$

$(-\infty, -2)$

نصائح للمعلمين الجدد

تغيير العلامات يمكن أن تغير الدالة النسبية العلامات عند أصفارها الحقيقية أو عند نقاط الانفصال الخاصة بها، لذلك يتضمن مخطط الاشارات أصفار كل من البسط والمقام.

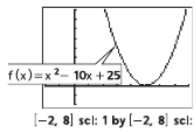
التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر عدة طلاب لكي يعرضوا ويوضحوا للفصل كيفية استخدام مخطط الاشارات لاختبار الفترات عند حل إحدى المتباينات.

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المتباينات النسبية لحل متباينة نسبية، جـد الأصفار أولاً من البسط والنقاط غير المحددة من المقام. واستخدم هذه الأصفار والنقاط غير المحددة لتقسيم خط أعداد إلى فترات ممثلة في مخطط اشارات. اختر عددًا واحدًا من كل فترة وجـد قيمة $f(x)$ لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجبًا أم سالبًا في تلك الفترة. إذا كان $f(x) < 0$، فإن المتباينة $f(x)$ تكون سالبة. إذا كان $f(x) > 0$، فإن المتباينة صحيحة عندما تكون $f(x)$ موجبة.

c. $x^2 - 10x + 25 > 0$



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

تحتوي الدالة المرتبطة التالية $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر واحد حقيقي 5، مُكرر مرتين. إذًا لا تتغير إشارة قيمة $f(x)$. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x باستثناء $x = 5$. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 > 0$ مساوية لـ $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج.

d. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر عند العدد 5. بالنسبة لجميع القيم الأخرى للمحور الأفقي x، تكون الدالة موجبة. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ مساوية لـ $\{5\}$.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المتباينات:

3A. $x^2 + 25 > 0$ $(-\infty, \infty)$ 3B. $x^2 + 25 \leq 0$ $\varnothing$

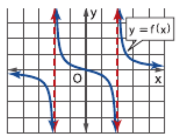
3D. $x^2 - 2x - 15 > -16$ $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 3C. $x^2 - 2x - 15 \leq -16$ $[1]$

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية تذكر تضمين جميع الأصفار والنقاط غير المحددة في دالة نسبية عند إنشاء مخطط الإشارات.

2 المتباينات النسبية

انظر في الدالة النسبية الموضحة على الجانب الأيسر. لاحظ الفترات التي تكون عليها $f(x)$ موجبة وسالبة. في حين يمكن أن تغير الدالة كثيرة الحدود من إشاراتها فقط في أصفارها الحقيقية، يمكن أن تغير الدالة النسبية من إشاراتها في الأصفار الحقيقية أو في نقاط الانقطاع لديها. لهذا السبب، عند حل أي **متباينة نسبية**، يجب عليك تضمين أصفار البسط والمقام في مخطط الإشارات.



يمكنك البدء في حل متباينة نسبية من خلال كتابة المتباينة أولاً بالصورة العامة مع تضمين تعبير نسبي واحد على اليسار وصفر على اليمين.

مثال 4 إيجاد حل متباينة نسبية

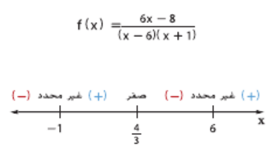
حُلّ المتباينة: $\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$

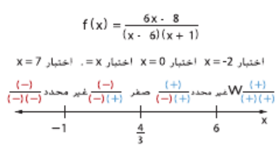
$\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$ متباينة أصلية

$\frac{4x + 4 + 2x - 12}{(x-6)(x+1)} > 0$ استخدم المقام المشترك الأصغر، $(x - 6)(x + 1)$، لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

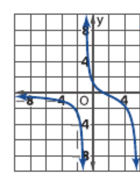
$\frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)} > 0$ بسّط.

لنفترض أن $f(x) = \frac{6x-8}{(x-6)(x+1)}$. إن الأصفار والنقاط غير المحددة في المتباينة تمثل أصفار البسط، $\frac{4}{3}$، والمقام، 6 و -1 قم بإنشاء جدول إشارات باستخدام هذه الأعداد. بعد ذلك اختر قيم المحور الأفقي x في كل فترة واختبره لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة.





تساوي مجموعة حل المتباينة الأصلية اتحاد تلك الفترات التي تكون لها $f(x)$ موجبة. $\left(-1, \frac{4}{3}\right) \cup (6, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1}$ في الشكل 1.6.1 هذا الاستنتاج.



الشكل 1.6.1

التعليم المتمايز BL

التوسُّع اطلب من الطلاب تحديد القيم الموجبة لـ n، حيث سيكون مكعب n أكبر 10 مرات من مربع n. $(10, \infty)$

تمرين **موجّه**

جد حلًا للمتباينات التالية.

4A. $\frac{x+6}{4x-3} \geq 1$ $\left(\frac{3}{4}, 3\right]$

4B. $\frac{x^2-x-11}{x-2} \leq 3$ $(-\infty, -1] \cup (2, 5]$

4C. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+5}$ $(-\infty, -5) \cup (0, \infty)$

يمكنك استخدام المتباينات غير الخطية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد حل متباينة نسبية

المتنزهات الترفيهية تقوم مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية بتأجير حافلة نظير دفع AED 600 لأخذهم إلى أحد المتنزهات الترفيهية في اليوم التالي لحفل التخرج. تبلغ تكلفة تذاكر المتنزه الترفيهي AED 60 وتقل بمقدار AED 0.50 في صورة خصم لكل فرد في المجموعة. اكتب متباينة يمكن استخدامها وإيجاد حل لها لتحديد كم عدد الطلاب الذين يجب عليهم الذهاب في رحلة نظير تكلفة إجمالية تكون أصغر من AED 40 لكل طالب.

لنفترض أن x يمثل عدد الطلاب.

تكلفة التذكرة لكل طالب	+	تكلفة الحافلة لكل طالب	يجب أن تكون أصغر من	AED 40.
$60 - 0.5x$	+	$\frac{600}{x}$	<	40

$60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$ اكتب المتباينة.

$60 - 0.5x + \frac{600}{x} - 40 < 0$ اطرح 40 من كل طرف.

$\frac{60x - 0.5x^2 + 600 - 40x}{x} < 0$ استخدم العامل المشترك الأصغر، x، لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

$\frac{-0.5x^2 + 20x + 600}{x} < 0$ بسّط.

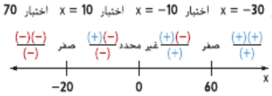
$\frac{x^2 - 40x - 1{,}200}{x} > 0$ اضرب كل طرف في -2. اعكس إشارة المتباينة.

$\frac{(x+20)(x-60)}{x} > 0$ حلل إلى العوامل.

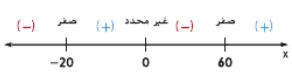
لنفترض أن $f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$. أصفار هذه المتباينة هي -20 و 60 و 0. استخدم هذه الأعداد لإنشاء مخطط الإشارات لهذه الدالة وإكماله.

$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$

اختبار $x = -30$ اختبار $x = -10$ اختبار $x = 10$ اختبار $= 70$



$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$



إذًا، مجموعة الحل لـــ $60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$ هي $(60, \infty) \cup (-20, 0)$

نظرًا لاستحالة وجود عدد سالب من الطلاب، يجب أن يذهب أكثر من 60 طالبًا إلى المتنزه الترفيهي نظير تكلفة إجمالية تبلغ أصغر من **AED 40** لكل طالب.

تمرين **موجّه** $\left(\frac{250 - 2l}{2}\right) \geq 1{,}000$ l: من 8.6 ft إلى 116.4 ft

5. **تنسيق الحدائق** يعمل مهندس تصميم الحدائق على تصميم سور يحيط بحديقة مستطيلة الشكل يبلغ محيطها 250 m. إذا كانت مساحة الحديقة تبلغ $1{,}000\ m^2$ على أقل تقدير. فاكتب متباينة وجد حلاً لها لإيجاد الأطوال المحتملة للسور.

الربط بالحياة اليومية

يعد القطار الأفعواني كينجدا كا رولر الموجود في متنزه سيكس فلاجز أدفانتشر أطول قطار أفعواني في العالم. يصل القطار إلى أقصى ارتفاع له في الهواء ويبلغ 139 m وبعد ذلك يهبط رأسيًا بمعدل 270 في حركة حلزونية. في حين تصل سرعته إلى 206 km/h.

المصدر: Six Flags

مثال إضافي

5 **التجارة** نجار يصنع المناضد. وتتخذ أسطح المناضد شكل مستطيل محيطه 20 قدمًا ومساحة لا تقل عن 24 قدمًا مربعة. اكتب وجد حلاً لمتباينة يمكن استخدامها لتحديد الأطوال الممكنة التي يمكن أن تُصنع بها المناضد. $\ell(10 - \ell) \geq 24$؛ 4 أقدام إلى 6 أقدام

إجابات إضافية

1. $[-4, 2]$
2. $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$
3. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [8, \infty)$
4. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup (4, \infty)$
5. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
6. $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, 6\right]$
7. $\left(-3, -\frac{3}{4}\right) \cup (0, \infty)$
8. $\left(-\frac{2}{5}, 3\right) \cup (6, \infty)$
9. $(-\infty, \infty)$
10. $\varnothing$
11. $\varnothing$
12. $(-\infty, \infty)$
13. $\{4\}$
14. $\{-3\}$
15. $\{-2\}$
16. $(-\infty, \infty)$
17. $-0.0004x^2 + 80x - 1{,}000{,}000 \geq 2{,}000{,}000$؛ $[50{,}000, 150{,}000]$ أو $50{,}000 \leq x \leq 150{,}000$
18. $\left(-\frac{15}{2}, -4\right)$
19. $(-\infty, 5)$
20. $\left(6, \frac{25}{2}\right]$
21. $\left(-\infty, -\frac{20}{3}\right) \cup (-3, \infty)$
22. $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{7}{27}, \infty\right)$
23. $\left(-\infty, \frac{14}{13}\right] \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$
24. $(-\infty, -1) \cup \left[-\frac{3}{4}, 3\right) \cup [4, \infty)$
25. $\left(-3, \frac{2}{3}\right] \cup (1, \infty)$
26. $[-5, -4) \cup \left(-4, -\frac{3}{5}\right]$

التعليم المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل معًا في مجموعات مختلفة القدرات مكونة من ثلاثة لتحليل البسط إلى عوامل في المتباينة النسبية $\frac{x^2 - x - 12}{x + 4} \geq 0$ اطلب من كل عضو في المجموعة أن يحدد عددًا مهمًا مختلفًا. ثم اطلب من المجموعات شرح السبب في إمكانية كتابة الحل بالصيغة $(-4, -3] \cup [4, \infty)$ $-3, 4, -4$؛ هو ترميز الفترة لـــ $\{x \mid -4 < x \leq -3$ أو $4 \leq x, x \in \mathbb{R}\}$

تمارين

حُلّ كل من المتباينات التالية. (الأمثلة 1-3) 1-16. انظر الهامش.

1. $(x+4)(x-2) \le 0$
2. $(x-6)(x+1) > 0$
3. $(3x+1)(x-8) \ge 0$
4. $(x-4)(-2x+5) < 0$
5. $(4-6y)(2y+1) < 0$
6. $2x^3 - 9x^2 - 20x + 12 \le 0$
7. $-8x^3 - 30x^2 - 18x < 0$
8. $5x^3 - 43x^2 + 72x + 36 > 0$
9. $x^2 + 6x > -10$
10. $2x^2 \le -x - 4$
11. $4x^2 + 8 \le 5 - 2x$
12. $2x^2 + 12x \ge 4x - 8$
13. $2b^2 + 16 \le b^2 + 8b$
14. $c^2 + 12 \le 3 - 6c$
15. $-a^2 \ge 4a + 4$
16. $3d^2 + 16 \ge -d^2 + 16d$

17. **أعمال تجارية** هناك مشروعات جديدة تقوم بها الشركة وستكون إيراداتها في العام الأول $r(x) = 120x - 0.0004x^2$ وستكون تكلفة بدء التشغيل $c(x) = 40x + 1{,}000{,}000$، حيث يمثل x عدد المنتجات المباعة. الربح الصافي p الذي سيتحقق في العام الأول يساوي $p = r - c$ اكتب متباينة وأوجِد حلها لتحديد كم عدد المنتجات التي يجب على الشركة بيعها لتحقيق ربح يصل إلى AED 2,000,000 على أقل تقدير. (مثال 1) **انظر الهامش.**

حُلّ كل من المتباينات التالية. (المثال 4) 18-27. انظر الهامش.

18. $\dfrac{x-3}{x+4} > 3$
19. $\dfrac{x+6}{x-5} \le 1$
20. $\dfrac{2x+1}{x-6} \ge 4$
21. $\dfrac{3x-2}{x+3} < 6$
22. $\dfrac{3-2x}{5x+2} < 5$
23. $\dfrac{4x+1}{3x-5} \ge -3$
24. $\dfrac{(x+2)(2x-3)}{(x-3)(x+1)} \le 6$
25. $\dfrac{(4x+1)(x-2)}{(x+3)(x-1)} \le 4$
26. $\dfrac{2x+65}{(x+4)^2} \ge 5$
27. $\dfrac{2x+4}{(x-3)^2} < 12$

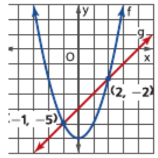
28. **أعمال خيرية** ينظم برنامج الخدمات في إحدى المدارس الثانوية حفل عشاء لجمع أموال توجه إلى الأعمال الخيرية. ستبلغ تكلفة استئجار قاعة الطعام التي يمكن أن تستوعب 80 شخصًا AED 1,000. إذا بلغت تكلفة كل تذكرة AED 20 تُدفَع بشكل مسبق أو AED 22 تُدفَع في يوم حفل العشاء، وكان عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر بشكل مسبق هو نفسه عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر في يوم حفل العشاء، فاكتب متباينة لإيجاد أدنى عدد من الأشخاص الذين يجب عليهم حضور الحفل لتحقيق ربح يصل إلى AED 500 على أقل تقدير وإيجاد حل لها. (المثال 5)
$500 \le 20\left(\frac{x}{2}\right) + 22\left(\frac{x}{2}\right) - 1{,}000$; 72 شخصًا

29. **التخرج** يقرر مجموعة من الأصدقاء تخصيص سيارة ليموزين لحضور حفل التخرج. تبلغ تكلفة استئجارها AED 750 بالإضافة إلى AED 25 لكل راكب. يوجد حد أدنى يبلغ راكبين، ويمكن أن تستوعب السيارة الليموزين حتى 14 شخصًا. اكتب متباينة لإيجاد كم عدد الأشخاص الذين يجب عليهم المشاركة في استئجار سيارة الليموزين علمًا بأن كل شخص سيدفع AED 120 على أقل تقدير وأوجِد حل للمتباينة. (المثال 5) **انظر الهامش.**

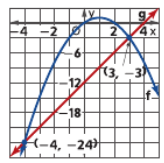
جد المجال لكل تعبير مما يلي. 30-35. انظر الهامش.

30. $\sqrt{x^2+5x+6}$
31. $\sqrt{x^2-3x-40}$
32. $\sqrt{16-x^2}$
33. $\sqrt{x^2-9}$
34. $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-25}}$
35. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{36-x^2}}$

جد مجموعة الحل للمتباينة: $f(x) - g(x) \ge 0$

36.


$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

37.


$[-4, 3]$

38. **مبيعات** يبيع البائع الشطائر في كل حدث رياضي تنظمه المدرسة. تبلغ تكلفة كل شطيرة AED 0.38 وتكلفة كل كعكة AED 0.12. يستأجر البائع عربة الشطائر التي يستخدمها نظير AED 1,000. إذا كان البائع يرغب في أن تكون التكاليف التي يتكبدها أقل من الإيرادات التي يحققها بعد بيع 400 شطيرة، فكم تبلغ التكلفة التي ينبغي عليه تخصيصها لكل شطيرة؟ **أكثر من AED 3**

39. **الحدائق والمراكز الترفيهية** يبلغ محيط ملعب الحديقة المجتمعية مستطيل الشكل 112 m وتساوي مساحته على الأقل 588 m
مربعًا. **a-c.انظر الهامش.**

a. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الأطوال الممكنة التي يمكن بها بناء الملعب وإيجاد حل لها.

b. أوجِد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء a وفسره.

c. كيف تتغير المتباينة والحل إذا كانت مساحة الملعب لا تتجاوز أكثر من 588 m^2؟ فسر الحل في سياق الحالة.

حُلّ كل من المتباينات التالية. (إرشاد: تحقق من أن كل فترة حل محتملة تقع ضمن المجال باستخدام المتباينة الأصلية.)

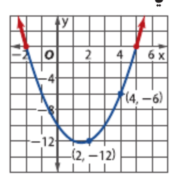
40. $\sqrt{9y+19} - \sqrt{6y-5} > 3$ **40. $\left[\frac{5}{6}, 5\right) \cup (9, \infty)$**

41. $\sqrt{4x+4} - \sqrt{x-4} \le 4$ **41. $\left[\frac{40}{9}, 8\right]$**

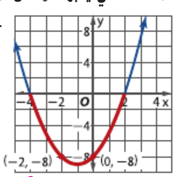
42. $\sqrt{12y+72} - \sqrt{6y-11} \ge 7$ **42. $\left[\frac{11}{6}, 6\right] \cup \left[\frac{46}{3}, \infty\right)$**

43. $\sqrt{25-12x} - \sqrt{16-4x} < 5$ **43. $\left(-12, \frac{25}{12}\right]$**

جد المعادلة التي يعبر عنها كل تمثيل بياني.

44.


$x^2 - 3x - 10 \ge 0$

45.


$x^2 + 2x - 8 < 0$

حُلّ كل من المتباينات التالية. **46-49. انظر الهامش.**

46. $2y^4 - 9y^3 - 29y^2 + 60y + 36 > 0$
47. $3a^4 + 7a^3 - 56a^2 - 80a < 0$
48. $c^5 + 6c^4 - 12c^3 - 56c^2 + 96c \ge 0$
49. $3x^5 + 13x^4 - 137x^3 - 353x^2 + 330x + 144 \le 0$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-35, 63, 64, 66, 68-82	1-35 فردي, 80-82	2-34 زوجي, 63, 64, 66, 68-79
OL ضمن المستوى	1-37 فردي, 38, 39, 41-49 فردي, 50, 51, 53, 55-57, 59, 61-64, 66, 68-82	1-35, 80-82	36-64, 66, 68-79
BL أعلى من المستوى	36-82		

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-35 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه !

خطأ شائع في التمارين 40-43. ذكر الطلاب بأنه عند حل المتباينات التي تتضمن حذف جذر من خلال رفع كل جانب إلى أس، من الضروري اختبار كل فترة حل ممكنة باستخدام المتباينة الأصلية. ورغم أن مخطط الاشارات يمكن أن يساعد في وضع مجموعة حلول، إلا انه قد لا يفسر جميع الحلول.

إجابات إضافية

27. $\left(-\infty, \frac{13}{6}\right) \cup (4, \infty)$

29. $\dfrac{750 + 25x}{x} < 120$; 8 إلى 14 شخصًا

30. $(-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$

31. $(-\infty, -5] \cup [8, \infty)$

32. $[-4, 4]$

33. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

34. $(-5, 0] \cup (5, \infty)$

35. $(-\infty, -6) \cup (-6, 6) \cup (6, \infty)$

39a. $\ell(56 - \ell) \ge 588$ أو $-\ell^2 + 56\ell - 588 \ge 0$

39b. $[14, 42]$؛ يبلغ طول الملعب 14 قدمًا على الأقل و 42 قدمًا على الأكثر.

39c. $0 < \ell(56 - \ell) \le 588$؛ $(0, 14] \cup [42, 56)$؛ الإجابة النموذجية: يجب أن تكون مساحة الملعب أكبر من 0 ولكن يجب ألا تزيد عن 588 قدمًا مربعًا. إذًا فإن $0 < \ell \le 14$ أو $42 \le \ell < 56$

46. $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (6, \infty)$

47. $\left(-5, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, 4)$

48. $[-6, -4] \cup [0, \infty)$

49. $(-\infty, -8] \cup \left[-3, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, 6]$

إجابات إضافية

50a. $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r}$

50b. $2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r} < 2{,}400$ أو

$2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r} - 2{,}400 < 0$

50c. $(-20.33, 0) \cup (1.68, 18.65)$؛ حيث إن نصف القطر لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن الأطوال الممكنة لنصف القطر تقع بين 1.68 cm و18.65 cm فقط.

---

50. **التعبئة** تبيع الشركة أوعية الزيت إسطوانية الشكل كهذا الوعاء المشار إليه. **a-c.انظر الهامش.**

a. استخدم حجم الوعاء للتعبير عن مساحة سطحه في صورة دالة ويكون نصف قطر المساحة بالسنتيمترات. (إرشاد: لتر واحد = 1,000 سنتيمتر مكعب)

b. تريد الشركة أن تكون مساحة سطح الوعاء أقل من $2{,}400\ cm^2$. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد أنصاف الأقطار للوفاء بهذا البند من المتطلبات.

c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء **b** وفسر الحل.

حُلّ كل من المتباينات التالية.

51. $(x + 3)^2(x - 4)^3(2x + 1)^2 < 0$ **$(-\infty, -3) \cup \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$**

52. $(y - 5)^2(y + 1)(4y - 3)^4 \geq 0$ **$[-1, \infty)$**

53. $(a - 3)^3(a + 2)^3(a - 6)^2 > 0$ **$(-\infty, -2) \cup (3, 6) \cup (6, \infty)$**

54. $c^2(c + 6)^3(3c - 4)^5(c - 3) \leq 0$ **$(-\infty, -6] \cup \left[\frac{4}{3}, 3\right] \cup \{0\}$**

55. **وقت الدراسة** يحدد جمال أنه بمساعدة المعلومات التي يعرفها في الوقت الحالي، يستطيع تحقيق مجموع درجات يصل إلى نسبة 75% من الاختبار الذي يخضع له. يعتقد جمال أن كل 5 دقائق كاملة يقضيها في الدراسة، سيرفع من مجموع درجاته بنسبة 1%. **$75 + \left[\!\left[\frac{t}{5}\right]\!\right] \geq 89.5$**

a. إذا كان جمال يرغب في الحصول على مجموع درجات يصل إلى 89.5% على أقل تقدير، فاكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الزمن t الذي سيقضيه في الدراسة.

b. أوجِد حلًا للمتباينة التي كتبتها في الجزء **a** وفسر الحل. **75; الإجابة النموذجية:لأن $t \geq 72.5$، سيجب على ياسر قضاء 75 دقيقة في الدراسة تحضيرًا للاختبار.**

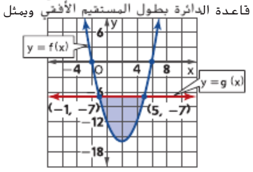
56. **ألعاب** تصرف آلة كرة السكي 3 بطاقات في كل مرة يلعب فيها أحد الأشخاص ثم بطاقتين إضافيتين لكل 80 نقطة يسجلها اللاعب.

a. اكتب دالة غير خطية لرسم نموذج لكمية البطاقات المستلمة لمجموع نقاط المحور الأفقي x. **$f(x) = 2\ \frac{x}{80}\ + 3$**

b. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد مجموع النقاط الذي سيحتاج إليه اللاعب للحصول على 11 بطاقة على أقل تقدير. **$11 \leq 2\ \frac{x}{80}\ + 3$**

c. أوجِد حلاً للمتباينة الموجودة في الجزء **b** وفسر الحل الذي تتوصل إليه. **انظر الهامش.**

57. مساحة دائرة محاطة بقطع مكافئ ومستقيم أفقي هي $A = \frac{2}{3}bh$، حيث يمثل b قاعدة الدائرة بطول المستقيم الأفقي ويمثل h ارتفاع الدائرة. جد المساحة المحاطة بـ f وg. **36 وحدة مربعة**



إذا كان k غير سالب، فجد الفترة لـ x الذي تكون له كل متباينة صحيحة. 58–61. انظر الهامش.

58. $x^2 + kx + c \geq c$

59. $(x + k)(x - k) < 0$

60. $x^3 - kx^2 - k^2x + k^3 > 0$

61. $x^4 - 8k^2x^2 + 16k^4 \geq 0$

62. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من المتباينات غير الخطية ذات القيم المطلقة.

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول الوارد أدناه وأكمله.

الدالة	الأصفار	النقاط غير المحددة
$f(x) = \frac{x - 1}{\lvert x + 2\rvert}$	**1**	**−2**
$g(x) = \frac{\lvert 2x - 5\rvert}{x - 3}$	**$\frac{5}{2}$**	**3**
$h(x) = \frac{\lvert x + 4\rvert}{\lvert 3x - 1\rvert}$	**−4**	**$\frac{1}{3}$**

b-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

b. **العرض البياني** مثّل كل دالة بيانيًا في الجزء **a**.

c. **العرض الرمزي** قم بإنشاء مخطط إشارات لكل متباينة. ضمّن الأصفار والنقاط غير المحددة وقدّر إشارة البسوط والمقامات كل على حدة.

i. $\frac{x - 1}{\lvert x + 2\rvert} < 0$

ii. $\frac{\lvert 2x - 5\rvert}{x - 3} \geq 0$

iii. $\frac{\lvert x + 4\rvert}{\lvert 3x - 1\rvert} > 0$

d. **العرض العددي** اكتب حلاً لكل متباينة موجودة في الجزء **c**.

مسائل مهارات التفكير العُليا — استخدام مهارات التفكير العُليا

63. **تحليل الخطأ** يقوم حارب وخالد بحل $\frac{x^2}{(3 - x)^2} \geq 0$. يعتقد حارب أن الحل هو $(-\infty, 0]$ أو $[0, \infty)$. ويعتقد خالد أن الحل هو $(-\infty, \infty)$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

64. **الاستنتاج** إذا كانت مجموعة الحل لمتباينة كثيرة الحدود هي $(-3, 3)$، فكم ستساوي مجموعة الحل إذا كان رمز المتباينة معكوسًا؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

65. **تحدٍ** جد القيم التي يكون لها $(c + d)^2 > (a + b)^2$ إذا كان $a < b < c < d$ **$\lvert a + b\rvert > \lvert c + d\rvert$ و $a < 0$**

66. **الاستنتاج** إذا كان $c < d > 0$، فجد الفترة التي يكون عليها $(x - c)(x - d) \leq 0$ صحيحًا. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

67. **تحدٍ** ما مجموعة الحل لـ $(x - a)^{2n} > 0$ إذا كان n عددًا طبيعيًا؟ **$(-\infty, a) \cup (a, \infty)$**

68. **الاستنتاج** ماذا يحدث لمجموعة الحل لـ $(x + a)(x - b) < 0$ إذا تغير التعبير إلى $-(x + a)(x - b) < 0$. حيث a و$b > 0$؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

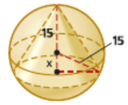
69. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكنك حل $\frac{3x + 1}{x - 2} < 6$ بضرب كل طرف في $x - 2$. **انظر الهامش.**

146 | الدرس 2-6 | المتباينات غير الخطية

مراجعة شاملة

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وجدت. **70–72. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

70. $f(x) = \frac{2x}{x + 4}$ 71. $h(x) = \frac{x^2}{x + 6}$ 72. $f(x) = \frac{x - 1}{(2x + 1)(x - 5)}$



73. **الهندسة** ينحصر مخروط بداخل كرة يساوي نصف قطرها 15 cm. إذا كان حجم المخروط يساوي $1{,}152\pi$ سنتيمترًا مكعبًا. فجد الطول الذي يمثله الرمز x.
حوالي 9 cm أو 0.37 cm

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

74. $(x^2 - 10x - 24) \div (x + 2)$ **$x - 12$**

75. $(3a^4 - 6a^3 - 2a^2 + a - 6) \div (a + 1)$ **$3a^3 - 9a^2 + 7a - 6$**

76. $(z^5 - 3z^2 - 20) \div (z - 2)$
$z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 5z + 10$

77. $(x^3 + y^3) \div (x + y)$ **$x^2 - xy + y^2$**

78. **الموارد المالية** تظهر أسعار الإقفال بالدراهم للسهم خلال فترة زمنية ممتدة إلى شهر واحد.
(الدرس 2-1) **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 2**

اليوم	السعر (الأسعار)	اليوم	السعر (الأسعار)
1	30.15	15	15.64
5	27.91	20	10.38
7	26.10	21	9.56
10	22.37	28	9.95
12	19.61	30	12.25

a. مثّل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. استخدم النموذج لتقدير سعر الإقفال في البورصة في اليوم 25.

79. **أمان المنازل** توفر الشركة نظام أمان للمنازل يستخدم الأعداد من 0 إلى 9، شاملة كلاً منهما، لرمز أمان مكون من 5 أرقام. (الدرس 0-7)

a. كم عدد رموز الأمان المختلفة المحتملة؟ **100,000**

b. في حالة عدم التمكن من تكرار الأعداد، فكم عدد رموز الأمان المتوفرة؟ **30,240**

c. بافتراض أن صاحب المنزل لا يريد استخدام 0 أو 9 كعدد في البداية ويريد أن يكون العدد 1 هو العدد الأخير. كم عدد الرموز التي يمكن تكوينها إذا أمكن تكرار الأعداد؟ في حالة عدم وجود تكرارات، فكم عدد الرموز المتوفرة؟ **8,000؛ 2,352**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **اختبارا SAT/ACT** تقع الدائرتان، A وB، في المستوى نفسه. إذا كان مركز الدائرة B يقع على الدائرة A، فعندئذٍ كم عدد النقاط التي يمكن أن تتقاطع فيها الدائرة A والدائرة B؟ **E**

I. 0 II. 1 III. 2

A I فقط C I وIII فقط E I، II، وIII

B III فقط D II وIII فقط

81. يكون طول المستطيل أكبر من عرضه بمقدار 6 سنتيمترات. جد قيم العرض المحتملة إذا كانت مساحة المستطيل تزيد عن 216 سنتيمترًا مربعًا. **F**

F $w > 12$ H $w > 18$

G $w < 12$ J $w < 18$

82. **إجابة حرة** يتم تمثيل كمية احتياطات مياه الشرب التي تقدر بملايين اللترات المتوفرة لإحدى المدن بواسطة $f(t) = 80 + 10t - 4t^2$. يتم تمثيل الحد الأدنى لكمية المياه التي يحتاج إليها قاطنو المدينة بواسطة $g(t) = (2t)^{\frac{4}{3}}$، حيث يمثل t الزمن بالأعوام. **a–g. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

a. حدد أنواع الدوال الممثلة بواسطة $f(t)$ و$g(t)$.

b. ما المجال والمدى المرتبطان بـــ $f(t)$ و$g(t)$؟ اشرح.

c. ما السلوك الطرفي لـــ $f(t)$ و$g(t)$؟

d. مثّل $f(t)$ و$g(t)$ بيانيًا لـــ $0 \leq t \leq 6$ على التمثيل البياني نفسه.

e. اشرح لماذا يجب أن تتوفر قيمة c لـــ $[0, 6]$ بحيث $f(c) = 50$

f. لأي قيمة في المجال ذي الصلة يحتوي f على صفر؟ ما أهمية الصفر في هذه الحالة؟

g. إذا كانت هذه الحالة صحيحة وهذه التوقعات دقيقة، فمتى يُتوقع حاجة القاطنين بالمدينة إلى مياه أكثر من احتياطاتهم؟

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 63، نبه الطلاب إلى نسخ المسألة بدقة. قد يكتب بعض الطلاب $x^2 - 3$ بدلاً من $(x - 3)^2$ في المقام. ذكر الطلاب أن البسط يمكن أن يساوي 0 إذا كانت المتباينة ≤ أو ≥

4 التقويم

التقويم التكويني

عيّن المصطلح الرياضي اجعل الطلاب يوضحوا الإجراءات الرياضية التي سوف يستخدمونها لحل $\frac{2}{x - 3} > 2$ الإجابة النموذجية: أعد كتابة المتباينة ككسر فردي يزيد عن 0. ثم استخدم مخطط علامات لاختبار القيم في كل فترة بين القيم الحرجة.

إجابات إضافية

56c. $[320, \infty)$؛ ستؤدي أي درجة تبلغ 320 أو أعلى منها إلى حصول اللاعب على عدد 11 بطاقة على الأقل.

58. $(-\infty, -k] \cup [0, \infty)$

59. $(-k, k)$

60. $(-k, \infty)$

61. $(-\infty, \infty)$

63. كلاهما على خطأ؛ الإجابة النموذجية: التعبير غير محدد عند 3، ولكنه موجب في كل مكان يتم تحديده به، لذلك تكون مجموعة الحل $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

64. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$؛ الإجابة النموذجية: إذا كان رمز المتباينة معكوسًا، فإن مجموعة الحل ستتكون من جميع الأعداد الحقيقية غير الواردة في مجموعة الحلول الأصلية.

66. $[c, d]$؛ الإجابة النموذجية: بما أن $c < d$. عندما تكون $x < c, x < d$، إذًا فإن $(x - c)$ و$(x - d)$ ستكون سالبة وستكون $(x - c)(x - d)$ موجبة. عندما تكون $x > d$، فسيكون كلا العاملين موجبًا، وبالتالي سيكون $(x - c)(x - d)$ موجبًا. عندما تكون $c \leq x \leq d$، فإن $(x - c)$ ستكون موجبة أو صفرًا، وستكون $(x - d)$ سالبة أو صفرًا، وستكون $(x - c)(x - d)$ إما سالبة أو صفرًا.

68. الإجابة النموذجية: ستظل الأصفار كما هي ولكن مجموعة الحل ستتكون من جميع الأعداد خارج مجموعة الحل الأصلية. على سبيل المثال، مجموعة حل المتباينة الأصلية هي $(-a, b)$، بينما مجموعة حل المتباينة الجديدة هي $(-\infty, -a) \cup (b, \infty)$

69. الإجابة النموذجية: ستكون هناك حالات تكون فيها $x - 2$ قيمة سالبة. إذا حدث ذلك، فإننا نضرب إحدى المتباينات في سالب ويجب عكس رمز المتباينة. تحدث المشكلة هنا لأن $x - 2$ قد تكون موجبة أو سالبة.

الوحدة 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

دوال القوة والدوال الجذرية (الدرس 2-1)

- *دالة القوة* هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$، حيث a و n أعداد حقيقية غير صفرية.
- *دالة أحادية الحد* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$ حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.
- *دالة جذرية* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$، حيث n و p أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1 الذي ليس لديه عوامل مشتركة.

الدوال كثيرة الحدود (الدرس 2-1)

- دالة كثيرة الحدود هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$، حيث $a_n \neq 0$. الدرجة تساوي n.
- يوجد في التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود n أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و $n - 1$ نقاط دوران على الأكثر.
- يعتمد سلوك التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود عند c الصفرية الخاصة به على عدد مرات تكرار العامل $(x - c)$.

نظريتا الباقي والعامل (الدرس 2-3)

- القسمة التركيبية: طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$
- في حالة قسمة f على $x - c$، فإن الباقي يساوي $f(c)$.
- $x - c$ هي عامل لدالة كثيرة الحدود f إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.

أصفار الدوال كثيرة الحدود (الدرس 2-4)

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ذات معاملات أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي لـ $f(x)$ يكتب بالصيغة $\frac{p}{q}$، حيث p و q ليس لديهما عوامل مشتركة، و p هي عامل a_0 و q هي عامل a_n.
- في الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n، يوجد n أصفار، بما في ذلك الأصفار المتكررة في نظام الأعداد المركبة. يوجد في هذه الدالة n عوامل:
$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

الدوال النسبية (الدرس 2-5)

- يتضمن التمثيل البياني لـ f خطًا تقاربيًا رأسيًا $x = c$ إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$
- يتضمن التمثيل البياني لـ f خط تقارب أفقي $y = c$ إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ قد يوجد بها خطوط تقارب رأسيّة أو خطوط تقارب أفقية أو خطوط تقارب مائلة أو نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط تقاطع مع المحور الرأسي y . يمكن تحديدهم جميعًا جبريًا.

المتباينات غير الخطية (الدرس 2 – 6)

- يجب أن يشمل مخطط إشارات المتباينة النسبية أصفارًا ونقاطًا غير محددة.

المفردات الأساسية

- المترافقات المركبة complex conjugates
- الحل الدخيل extraneous solution
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال irreducible over the reals
- معامل الحد الأكبر leading coefficientes
- اختبار الحد الرئيس leading-term test
- الحد الأدنى lower bound
- التكرار multiplicity
- خط التقارب المائل oblique asymptote
- الدالة كثيرة الحدود polynomial function
- دالة القوة power function
- الدالة التربيعية quartic function
- الدالة النسبية rational function
- الصفر المتكرر repeated zero
- مخطط-جدول- الإشارات sign chart
- القسمة التركيبية synthetic division
- التعويض التركيبي synthetic substitution
- نقطة دوران turning point
- الحد الأعلى upper bound
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote

مراجعة المفردات

حدد الكلمة أو العبارة التي تُكمِل كل جملة أفضل ما يمكن.

1. معامل الحد ذي أكبر أس للمتغير هو (معامل القيمة العظمى، الدرجة) لدالة الحدود. **معامل القيمة العظمى**
2. (دالة كثيرة الحدود، دالة أسيّة) هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$، حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية و n عدد طبيعي. **الدالة كثيرة الحدود**
3. يوجد في الدالة التي لديها عدة عوامل لـ $(x - c)$ (أصفار متكررة، نقاط دوران). **أصفار متكررة**
4. (قسمة كثيرات الحدود، القسمة التركيبية) هي أقصر طريقة لقسمة الدوال كثيرة الحدود على عوامل خطية. **القسمة التركيبية**
5. ترتبط (نظرية الباقي، نظرية العامل) بالعوامل الخطية لكثيرة الحدود ذات أصفار لدالتها المرتبطة. **نظرية العامل**
6. يمكن ذكر بعض الأصفار الممكنة لدالة كثيرة الحدود في قائمة باستخدام نظرية (العامل، الأصفار النسبية). **الأصفار النسبية**
7. يتم تحديد خطوط التقارب (الرأسيّة، الأفقية) عن طريق أصفار مقام دالة نسبية. **الرأسيّة**
8. تحدد أصفار (المقام، البسط) نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لتمثيل بياني لدالة نسبية. **البسط**
9. تحدث خطوط التقارب (الأفقية، المائلة) عندما تمتلك دالة نسبية مقامًا بدرجة أكبر من 0 وبسطًا بدرجة أكبر من درجة مقامها. **المائلة**
10. (الدالة التربيعية، دالة القوة) هي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$، حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية. **الدالة الأسيّة**

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لتنشيط ذاكراتهم بشأن المفردات.

إجابات إضافية

21. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$؛ الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب.
22. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$؛ الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب.
23. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$؛ الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب.
24. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$؛ الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب.
25. 3 أصفار حقيقية ونقطتا دوران؛ 0 و 3 و 4
26. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ -10 و 0 و 2
27. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ -3 و-1 و 1 و 3
28. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ $\sqrt{5}$ و$-\sqrt{5}$

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية تخبرهم أين تجب مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

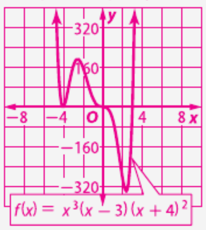
إجابات إضافية

29a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

29b. 0 (مكرر 3)، 3، ‎−4 (مكرر 2)

29c. الإجابة النموذجية: $(-1, 36), (0, 0), (1, -50), (2, -288)$

29d.

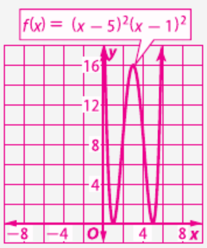


30a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

30b. 5 (مكرر 2)، 1(مكرر 2)

30c. الإجابة النموذجية: $(2, 9), (3, 16), (4, 9), (5, 0)$

30d.



مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسيّة والجذرية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.

16–11. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

11. $f(x) = 5x^6$
12. $f(x) = -8x^3$
13. $f(x) = x^{-9}$
14. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-4}$
15. $f(x) = \sqrt{5x-6} - 11$
16. $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{6x^2-1} + 2$

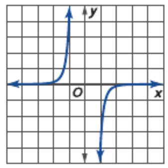
جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

17. $2x = 4 + \sqrt{7x-12}$ **4**
18. $\sqrt{4x+5} + 1 = 4x$
19. $4 = \sqrt{6x+1} - \sqrt{17-4x}$ **4**
20. $\sqrt[4]{x^2+31} - 1 = 3$ **15, −15**

مثال 1

مثِّل بيانيًا $f(x) = -4x^{-5}$ وقم بتحليلها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

x	$f(x)$
−3	0.016
−2	0.125
−1	4
0	غير محدد
1	−4
2	−0.125
3	−0.016



المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

نقاط التقاطع، لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

التزايد: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

2-2 الدوال كثيرة الحدود

وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي. **24–21. انظر الهامش.**

21. $f(x) = -4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 12x - 6$
22. $f(x) = -3x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 11x - 5$
23. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x - 3$
24. $f(x) = x^3(x-5)(x+7)$

28–25. انظر الهامش.

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

25. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
26. $f(x) = x^5 + 8x^4 - 20x^3$
27. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
28. $f(x) = x^4 - 25$

لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا. **30–29. انظر الهامش.**

29. $f(x) = x^3(x-3)(x+4)^2$
30. $f(x) = (x-5)^2(x-1)^2$

مثال 2

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لـ $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 8x^2 - 6$ باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

الدرجة تساوي 5 ومعامل القيمة العظمى يساوي −2. لأن الدرجة فردية ومعامل القيمة العظمى سالب،

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و أ $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

مثال 3

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف للدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ ونقاط الدوران لها. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

درجة f تساوي 3، لذلك فإن 3 تتضمن أصفارًا حقيقية مميزة على الأكثر و 3 − نقطة دوران واحدة أو نقطتي دوران على الأكثر. لإيجاد أصفار حقيقية، حل المعادلة المرتبطة $f(x) = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9)$$
$$= x(x+3)(x+3) \text{ أو } x(x+3)^2$$

يتضمن التعبير 3 عوامل وصفرين حقيقيين مميزين و 0 و−3

2 دليل الدراسة والمراجعة تابع

2-3 نظريتا الباقي والعامل

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

31. $(x^3 + 8x^2 - 5) \div (x - 2)$ $x^2 + 10x + 20 + \frac{35}{x-2}$

32. $(-3x^3 + 5x^2 - 22x + 5) \div (x^2 + 4)$ $-3x + 5 - \frac{10x + 15}{x^2 + 4}$

33. $(2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + x^2 - 18x + 10) \div (2x - 1)$ $x^4 + 3x^3 - x^2 - 9 + \frac{1}{2x - 1}$

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

34. $(x^3 - 8x^2 + 7x - 15) \div (x - 1)$ $x^2 - 7x - \frac{15}{x - 1}$

35. $(x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18) \div (x - 2)$ $x^3 + x^2 + 9x + 9$

36. $(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 16x - 6) \div (2x - 1)$ $x^3 + 2x^2 - 4x + 6$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$

37. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 24$، $(x + 3)$
نعم، $f(x) = (x + 3)(x^2 - 8)$

38. $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 4$, $(x - 1)$, $(x + 1)$
38. نعم، نعم، $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 4)(2x - 1)$

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$, $(x + 1)$, $(x - 2)$
نعم، نعم، $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$

مثال 4

اقسم $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div (2x - 1)$ باستخدام القسمة التركيبية.

أعد كتابة تعبير القسمة $\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$ بحيث يكون المقام بالصيغة $x - c$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1} = \frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div 2}{(2x - 1) \div 2}$$
$$= \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2}{x - \frac{1}{2}}$$

لذا، $c = \frac{1}{2}$ وقم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)}{(2x - 1)} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{(2x - 1)}$$

2-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة.
ثم حدد أي منها أصفار، إن وجدت.

40. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ± 1, 1 (التكرار: 2) و-1

41. $f(x) = x^3 - 14x - 15$ ± 1، ± 3، ± 5، ± 15 ، -3

42. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ ± 1، ± 2، ± 4، أصفار غير نسبية

43. $f(x) = 3x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 31x + 10$
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}; 2, -\frac{1}{3}$

جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

44. $x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$ 1, 2، 3 (التكرار: 2)

45. $6x^3 - 23x^2 + 26x - 8 = 0$ 2، $\frac{1}{2}$، $\frac{4}{3}$

46. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x = 48$ 2, 2، 3, 4−

47. $2x^4 - 11x^3 + 44x = -4x^2 + 48$ $\frac{3}{2}$، -2, 2، 4

$-7, 6, -i$, $f(x) = (x + 7)(x - 6)(x + i)(x - i)$

استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة.
ثم اكتب التحليل الى العوامل الخطية للدالة.

48. $f(x) = x^4 + x^3 - 41x^2 + x - 42$, i

49. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$، $-2i$
$1, 3, 2i, -2i$, $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 2i)(x + 2i)$

مثال 5

حُــلّ المعادلة $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$

لأن معامل القيمة العظمى يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تكون عوامل لــ 32−. لذا تساوي جميع الأصفار النسبية الممكنة ± 1 و± 2 و± 4 و± 8 و± 16 و± 32. باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 2− تساوي صفرًا نسبيًا.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 2 & -16 & -32 \\ & & -2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

لذا، $f(x) = (x + 2)(x^2 - 16)$ ويمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود هذه بالصيغة $f(x) = (x + 2)(x - 4)(x + 4)$ والأصفار النسبية لــ f تساوي 2− و 4 و4−

إجابات إضافية

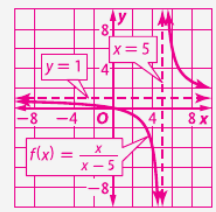
50. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$;
$x = -4$

51. $D = \{x \mid x \neq 5, -5, x \in \mathbb{R}\}$;
$x = 5, x = -5, y = 1$

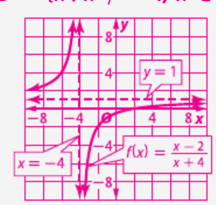
52. $D = \{x \mid x \neq 5, -3, x \in \mathbb{R}\}$;
$x = 5, x = -3, y = 0$

53. $D = \{x \mid x \neq -3, -9, x \in \mathbb{R}\}$;
$x = -3, x = -9, y = 1$

54. خطوط التقارب: $x = 5$, $y = 1$؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 0؛
نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛
$D = \{x \mid x \neq 5, x \in \mathbb{R}\}$



55. خطوط التقارب: $x = -4$, $y = 1$؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 2؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{1}{2}$؛
$D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$



2-5 الدوال النسبية

ابحث عن مجال كل دالة وكل معادلات خطوط التقارب الرأسيّة أو الأفقية، إن وُجدت. **50–53. انظر الهامش.**

50. $f(x)=\frac{x^2-1}{x+4}$
51. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-25}$
52. $f(x)=\frac{x(x-3)}{(x-5)^2(x+3)^2}$
53. $f(x)=\frac{(x-5)(x-2)}{(x+3)(x+9)}$

في كل دالة، حدد أي خطوط التقارب ونقاط تقاطع. ثم مثِّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها. **54–59. انظر الهامش.**

54. $f(x)=\frac{x}{x-5}$
55. $f(x)=\frac{x-2}{x+4}$
56. $f(x)=\frac{(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-6)}$
57. $f(x)=\frac{x(x+7)}{(x+6)(x-3)}$
58. $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$
59. $f(x)=\frac{x^2-16}{x^3-6x^2+5x}$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

60. $\frac{12}{x}+x-8=1$ $\frac{9\pm\sqrt{33}}{2}\approx 1.63, 7.37$
61. $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x}=-\frac{x}{x+2}$ -3
62. $\frac{1}{d+4}=\frac{2}{d^2+3d-4}-\frac{1}{1-d}$ $\varnothing$
63. $\frac{1}{n-2}=\frac{2n+1}{n^2+2n-8}+\frac{2}{n+4}$ $\frac{7}{3}$

مثال 6

ابحث عن مجال $f(x)=\frac{x+7}{x+1}$ وأي خطوط التقارب رأسيّة وأفقية.

الخطوة 1 جد المجال.

الدالة غير محددة عند الصفر الموجود في المقام $h(x)=x+1$، الذي يساوي -1. مجال f هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء $x=-1$.

الخطوة 2 ابحث عن خطوط التقارب، إن وجدت.

تحقق من خطوط التقارب الرأسيّة.

صفر المقام يساوي -1، لذا يوجد خط تقارب رأسي عند $x=-1$.

تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

درجة البسط تساوي درجة المقام. نسبة معامل الحد الأكبر تساوي $\frac{1}{1}=1$. لذا، $y=1$ هي خط تقارب أفقي.

2-6 المتباينات غير الخطية

حُلّ كل من المتباينات التالية.

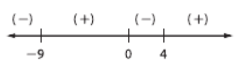
64. $(x+5)(x-3)\le 0$ $[-5, 3]$
65. $x^2-6x-16>0$ $(-\infty,-2)\cup(8,\infty)$
66. $x^3+5x^2\le 0$ $[-\infty,-5]\cup\{0\}$
67. $2x^2+13x+15<0$ $\left(-5,-\frac{3}{2}\right)$
68. $x^2+12x+36\le 0$ $\{-6\}$
69. $x^2+4<0$ $\varnothing$
70. $x^2+4x+4>0$ $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$
71. $\frac{x-5}{x}<0$ $(0, 5)$
72. $\frac{x+1}{(12x+6)(3x+4)}\ge 0$ $\left(-\frac{4}{3},-1\right]\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$
73. $\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x-4}>0$ $\left(3,\frac{26}{7}\right)\cup(4,\infty)$

مثال 7

حُلّ المتباينة: $x^3+5x^2-36x\le 0$

ينتج عن تحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل $f(x)=x^3+5x^2-36x$ تساوي $f(x)=x(x+9)(x-4)$. لذا تتضمن $f(x)$ أصفارًا حقيقية عند 0 و-9 و 4

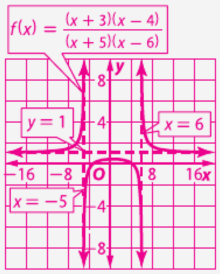
أنشئ مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار. ثم عوِّض عن قيمة x من كل فاصل زمني للاختبار في الدالة لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجبة أم سالبة عند هذه النقطة.



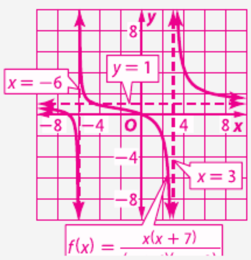
لأن $f(x)$ سالبة في الفترتين الزمنيتين الأول والثالث، فإن حل المعادلة $x^3+5x^2-36x\le 0$ يساوي $(-\infty,-9]\cup[0,4]$

151

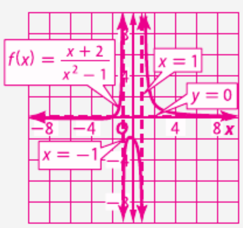
56. خطوط التقارب: $x=-5, x=6$, $y=1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: -3 و 4؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{2}{5}$؛ $D=\{x \mid x\ne -5, 6,\ x\in\mathbb{R}\}$



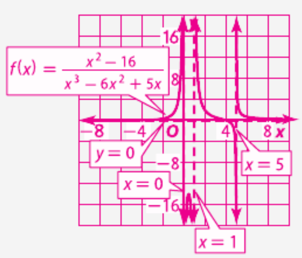
57. خطوط التقارب: $x=-6, x=3$, $y=1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: 0 و-7؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D=\{x \mid x\ne -6, 3,\ x\in\mathbb{R}\}$



58. خطوط التقارب: $x=-1, x=1$, $y=0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -2، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -2; $D=\{x \mid x\ne -1, 1,\ x\in\mathbb{R}\}$



59. خطوط التقارب: $x=0, x=1, x=5$, $y=0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 4 و-4. $D=\{x \mid x\ne 0, 1, 5,\ x\in\mathbb{R}\}$



الوحدة 2 دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

.74 **الفيزياء** ينص قانون كبلر الثالث، في الفيزياء ، الذي يتعلق بحركة الكواكب على أنه يتم تحديد الزمن الذي تستغرقه T للوصول إلى كوكب ما لإكمال دورة واحدة في مدارها حول الشمس عن طريق $T = R^{\frac{3}{2}}$، حيث R هي المتوسط الحسابي لمسافة بُعد الكوكب عن الشمس. يتم قياس الزمن بالسنوات الأرضية، ويتم قياس المسافة بوحدات فلكية. (الدرس 1-1)

a. حدد مجال الدالة ذات الصلة ومداها. $D = (0, \infty)$ ، $R = (0, \infty)$

b. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

c. يتم رصد الزمن الذي يستغرقه كوكب المريخ ليدور حول الشمس بـ 1.88 سنة أرضية. حدد متوسط بُعد كوكب المريخ عن الشمس بالأميال ، علمًا بأن الوحدة الفلكية الواحدة تساوي 93 مليون ميل. **حوالي 141.66 مليون ميل**

.75a انظر الهامش.

.75 **سباق الخيول** أقام فصل الرياضة التابع للأستاذ حمدي سباقًا سنويًا للخيول في الريف للتنافس بين الطلاب. تم تحديد سرعة v بالأميال لكل ساعة منذ إطلاق السباق بعد t ثوانٍ. (الدرس 2-1)

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v	85	50	30	20	15	12

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات. $v(t) = 43.63t^{-1.12}$

c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي يسير عندها الخيل بعد 1.2 ثانية. **حوالي 35.6 mi/h**

d. استخدم الدالة للتنبؤ بالوقت الذي تكون فيه سرعة الخيل هي 47 mi/h. **0.94 ثانية تقريبًا**

.76 **المتنزهات** يتم تحديد مستوى الارتفاع عن سطح الأرض لراكب الأقطار الأفعواني "بيج مونستر" في الجدول. (الدرس 2-2)

الزمن (بالثواني)	5	10	15	20	25
الارتفاع (بالقدم)	85	62	22	4	17

انظر الهامش.

a. صمم مخطط تشتت للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف واذكر معامل الارتباط. **انظر الهامش.**

c. استخدم النموذج لتقدير ارتفاع الراكب عند 17 ثانية. **الإجابة النموذجية: حوالي 12.7 ft**

d. استخدم النموذج لتحدد بصورة تقريبية أول وقت يرتفع فيه الراكب 50 قدمًا فوق سطح الأرض. **الإجابة النموذجية: حوالي 11.4 ثانية**

.77 **زراعة الحدائق** زرع والدا أيمن بستانهما الجديد في عام 2001. ومنذ عام 2001 إلى عام 2011، زادت كمية العشب الزاحف على النحو التالي $f(x) = 0.021x^3 - 0.336x^2 + 1.945x - 0.720$، حيث x تساوي عدد الأعوام منذ عام 2001 و $f(x)$ عدد الأقدام المربعة لكل عام. استخدم القسمة التركيبية لإيجاد عدد الأقدام المربعة للعشب الزاحف في البستان في عام 2011. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (الدرس 1-3) **$6.13\ ft^2$**

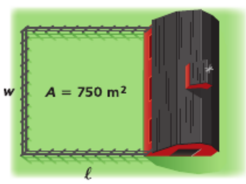
.78 **التجارة** يبيع محل كتب مستعملة 1,000 كتاب، في المتوسط، شهريًا بمتوسط سعر يبلغ 10 AED لكل كتاب. ونظرًا لارتفاع التكاليف ، ترغب صاحبة المحل في رفع أسعار جميع الكتب. وحسبت أن حجم مبيعاتها سيقل 50 كتابًا من الكتب التي رفعت سعرها AED 1. (الدرس 1-4)

a. اكتب دالة تمثل إجمالي حجم مبيعاتها بعد رفع أسعار كتبها بمقدار x درهم إماراتي. **انظر الهامش.**

b. كم عدد الدراهم الإماراتية التي تحتاجها لرفع أسعار كتبها بحيث يصل إجمالي قيمة مبيعاتها AED 11.250؟ **AED 5**

c. ما أقصى مبلغ يمكن أن ترفع به الأسعار وأن تحقق AED 10,000 من إجمالي المبيعات؟ اشرح. **انظر الهامش.**

.79 **الزراعة** ترغب إحدى الفلاحات في تطويق مساحة مستطيلة باستخدام جانب واحد من حظيرتها و 80 m من مادة السياج. حدد أبعاد مساحة التطويق. افترض أن عرض مساحة التطويق w لن يكون أكبر من جانب الحظيرة. (الدرس 1-4)



15 m على 50 m أو 25 m على 30 m

.80 **البيئة** تشتهر إحدى البرك باحتوائها على 0.40 % من الحمض. تحتوي البركة على 50,000 gal من الماء. (الدرس 1-5)

a. كم عدد جالونات الحمض في البركة؟ **200 gal**

b. افترض أنه تمت إضافة x جالونات من الماء النقي إلى البركة. اكتب $p(x)$، وهي النسبة المئوية للحمض في البركة بعد إضافة x جالونات من الماء. **انظر الهامش.**

c. جد خط التقارب الأفقي لـ $p(x)$. $y = 0$

d. هل تشتمل الدالة على أي خطوط التقارب رأسيّة؟ اشرح. **لا، الإجابة النموذجية: $p(x)$ يتم تحديدها لجميع الأعداد في الفاصل الزمني $[0, \infty)$.**

.81 **الأعمال التجارية** يقوم أحد الخبازين ببيع x كعكات، ونتيجة لذلك فإنه سيحقق معدل إيرادات يصل إلى $b(x) = x^2 - 5x - 150$ مئة درهم إماراتي. حدد أدنى عدد من الكعكات التي يحتاج الخباز أن يبيعها لتحقيق ربح. (الدرس 1-6) **16 كعكة**

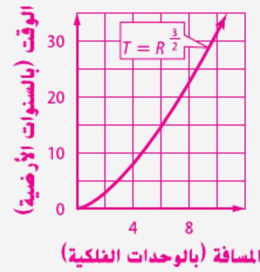
.82 **حفلة دينية** يرغب أحد الفصول الأولية في تنظيم حفلة دينية لجمع تبرعات. وتبلغ تكلفة القاعة التي يرغب الفصل في استئجارها AED 3,000 فضلاً عن رسم إضافي يقدر بـ AED 5 لكل فرد. (الدرس 1-6) **a-b. انظر الهامش.**

a. اكتب متباينة لتحديد كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة إذا أراد الفصل أن يجعل تكلفة الرسوم أصغر من 10 AED لكل فرد ثم جد حلاً لها.

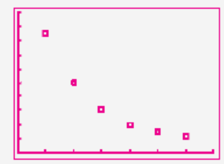
b. ستوفر الصالة مؤثرات DJ مقابل AED 1,000 إضافي. كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة لتصبح تكلفة الرسوم أصغر من AED 10 لكل فرد؟

إجابات إضافية

74b. حركة الكواكب

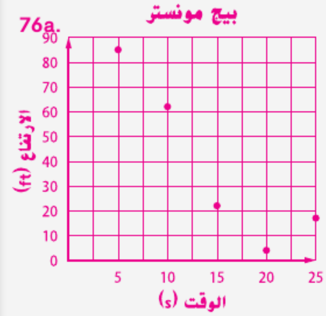


75a.



[0, 3.5] scl: 0.5 في [0, 100] scl: 10

76a. بيع مونستر



الإجابة النموذجية: الدالة التكعيبية

76b. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.032x^3 - 1.171x^2 + 6.943x + 76;\ r^2 = 0.997$

78a. $f(x) = -50x^2 + 500x + 10{,}000$

78c. 10 AED: الإجابة النموذجية: إذا رفعت سعر كتبها لأكثر من 10 AED، فستحقق أقل من 10,000 AED.

80b. $p(x) = \dfrac{200}{x + 50{,}000}$

82a. $\dfrac{3{,}000}{x} + 5 < 10$؛ يجب أن يحضر ما يزيد عن 600 فرد إلى الحفلة.

82b. يجب أن يحضر الحفلة أكثر من 800 فرد.

الوحدة 2 تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. 1-2. انظر الهامش.

1. $f(x) = 0.25x^{-3}$ 2. $f(x) = 8x^{\frac{4}{3}}$

جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

3. $x = \sqrt{4-x} - 8$ -5
4. $\sqrt{5x+4} = \sqrt{9-x} + 7$ 9
5. $-2 + \sqrt{3x+2} = x$ لا يوجد حل
6. $56 - \sqrt[3]{7x^2+4} = 54$ $-6, 6$
7. $x^4 - 5x^3 - 14x^2 = 0$ $-2, 7, 0$
8. $x^3 - 3x^2 - 10x = -24$ $-3, 4, 2$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي. 9–10. انظر الهامش.

9. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 11x - 8$
10. $f(x) = -3x^5 - 8x^4 + 7x^2 + 5$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

11. $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 60x$ 3 أصفار حقيقية ونقطتا دوران؛ -5 و 0 و 3
12. $f(x) = x^5 - 16x$ 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ -2 و 0 و 2

13. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال يوجد بها 3 نقاط دوران؟ D

A $f(x) = x^4 - 4$
B $f(x) = x^4 - 11x^3$
C $f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x$
D $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

14. **كرة البيسبول** يتم تحديد الارتفاع h بالقدم في كرة البيسبول، بعد ضرب الكرة من قبل أحد اللاعبين، عن طريق $h(t) = -32t^2 + 128t + 4$، حيث t هي الزمن بالثواني بعد ضرب الكرة. وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيسي. انظر الهامش.

لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا. 15–16. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

15. $f(x) = x(x-1)(x+3)$
16. $f(x) = x^4 - 9x^2$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تُعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.

17. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15,\ (x+3)$
نعم، $f(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$
18. $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 4x + 120,\ (x+5),\ (x-2)$
نعم، نعم، $f(x) = (x-2)(x+5)(x-6)(x+2)$

19. **الطقس** يبين الجدول متوسط درجة الحرارة العالية في مدينة باي شهريًا.

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
62.3°	66.5°	73.3°	79.1°	85.5°	90.7°
يوليو	**أغسطس**	**سبتمبر**	**أكتوبر**	**نوفمبر**	**ديسمبر**
93.6°	93.5°	89.3°	82.0°	72.0°	64.6°

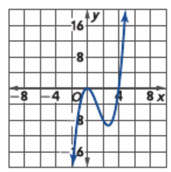
a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

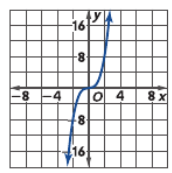
a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود درجتها 3.
استخدم $x = 1$ لشهر يناير وقرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف.
c. استخدم النموذج للتنبؤ بمتوسط درجة الحرارة الكبرى ليناير القادم. افترض أن $x = 13$

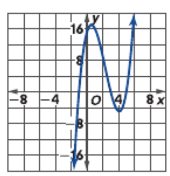
اكتب دالة كثيرة الحدود لأقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة.

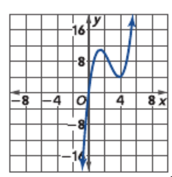
20. $-1, 4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$
$f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 9x + 12$
21. $5, -5, 1-i$
21. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50x - 50$

22. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال التي يتم تمثيلها بيانيًا أدناه يجب أن يكون لديها أصفار تخيلية؟ J

F


H


G


J


اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

23. $f(x) = (x^3 - 7x^2 + 13) \div (x - 2)$
$x^2 - 5x - 10 - \frac{7}{x-2}$
24. $f(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 8) \div (x + 3)$
$x^3 - 2x^2 + 4x - 9 + \frac{35}{x+3}$

حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

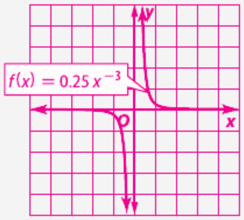
25. $f(x) = \frac{2x-6}{x+5}$
26. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-4}$

25–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

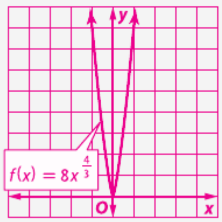
جد حلاً للمتباينات التالية.

27. $x^2 - 5x - 14 < 0$ $(-2, 7)$
28. $\frac{x^2}{x-6} \geq 0$ $\{0\} \cup (6, \infty)$

إجابات إضافية

.1


$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$،
$R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

.2


$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متواصل لجميع الأرقام الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

.9 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$؛ الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب.

.10 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$؛ الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب.

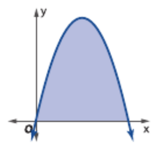
.14 الدرجة تساوي 2 والمعامل الرئيسي يساوي -32. لأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

2 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

الهدف

- تقريب المساحة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي x.

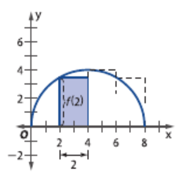
يُعد *حساب التفاضل* والتكامل أحد فروع التفاضل والتكامل الذي يركز على عمليات إيجاد المساحات والأحجام والأطوال. في الهندسة، تعلمت كيفية حساب محيطات ومساحات وأحجام المضلعات والمجسمات والأشكال المركبة عبر الاستعانة بمعرفتك المتعلقة بالأشكال الأساسية، مثل المثلثات والأهرامات والمخاريط. يمكن إيجاد محيطات ومساحات وأحجام الأشكال والأجسام غير المنتظمة التي لا تعد من ضمن مجموعة الأشكال الأساسية بطريقة متشابهة. يعد حساب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x، كما هو موضح على الجانب الأيسر، من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل.



نشاط 1 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

قرّب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$ والمحور الأفقي x باستخدام المستطيلات.

الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات تكون بعرض وحدتين بين $f(x)$ والمحور الأفقي x. ينبغي إيجاد ارتفاع المستطيل عندما تتقاطع **النقطة الطرفية** عندالجانب الأيسر مع $f(x)$، كما هو موضح في الشكل. لاحظ أن ارتفاع المستطيل الأول سوف يساوي $f(0)$ أو 0



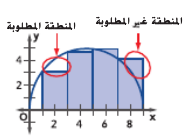
الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

الخطوة 3 قرّب مساحة المنطقة باستخدام ناتج جمع مساحات المستطيلات.

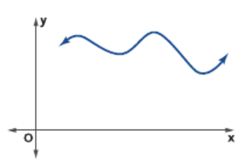
حلل النتائج

1. ما التقدير التقريبي للمساحة؟ **21.86 وحدة مربعة**
2. كيف تؤثر مساحة أحد المستطيلات الواقعة خارج التمثيل البياني على التقدير التقريبي؟ **انظر الهامش.**
3. احسب المساحة الفعلية لنصف الدائرة. كيف تتم مقارنة التقدير التقريبي مع المساحة الفعلية؟ **انظر الهامش.**
4. كيف يمكن استخدام المستطيلات لإيجاد عملية التقدير الأكثر دقة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

قد لا يؤدي استخدام المستطيلات الكبيرة نسبيًا في حساب المساحة الواقعة أسفل المنحنى إلى الحصول على تقدير تقريبي يتسم بالدقة مثل العدد 3 المطلوب. قد تكون قطاعات المساحة الملحوظة أسفل المنحنى غير محسوبة. وبالمثل، إذا تجاوزت المستطيلات المنحنى، فقد يتم تضمين كميات كبيرة من المساحات التي تقع أسفل أحد المنحنيات في التقريب.



بالإضافة إلى ذلك، لا تكون المناطق محاطة دائمًا بمنحنى يتقاطع مع المحور الأفقي x. لقد تناولت بالدراسة العديد من الدوال التي لها تمثيلات بيانية تتضمن سلوكيات طرفية مختلفة. لا يلزم أن تكون لهذه التمثيلات البيانية نقطتا تقاطع مع المحور الأفقي x تسمح بوجود نقاط بداية ونهاية واضحة. في تلك الحالات، نحسب غالبًا المساحة الواقعة أسفل المنحنى للفترة الموجودة على المحور الأفقي x.



1 التركيز

الهدف تقريب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x.

نصيحة دراسية

بالنسبة إلى النشاط 1، قد ترغب في أن يستخدم الطلاب بوصلة لرسم الرسم بياني. ويكون مركز نصف الدائرة عند $(4, 0)$. ويبلغ نصف القطر 4. وتكون الرؤوس اليسرى السفلى للمستطيلات الأربعة هي $(0, 0)$ و$(2, 0)$ و$(4, 0)$ و$(6, 0)$. أما الرؤوس اليسرى العليا للمستطيلات فهي $(0, f(0))$، و$(2, f(2))$، و$(4, f(4))$، و$(6, f(6))$. وعرض كل مستطيل يساوي 2. أما الأطوال فهي $f(0)$ و$f(2)$ و$f(4)$ و$f(6)$.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

في النشاط 1، نظم الطلاب في مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. اطلب من الطلاب التفكير في الخطوات من 1 إلى 3 ثم الإجابة عن تحليل النتائج في التمارين من 1 إلى 4.

اسأل:

- ما قاعدة مساحة الدائرة؟ $A = \pi r^2$
- ما قاعدة مساحة نصف الدائرة؟ $A = \frac{1}{2}\pi r^2$

إجابات إضافية

2. الإجابة النموذجية: تساعد المساحة الإضافية التي يتم إيجادها خارج المنحنى المضمن في المجموع في تقدير المساحة التي يتم إيجادها أسفل المنحنى غير المُضمَّن.
3. 25.13 وحدة 2؛ الإجابة النموذجية: تكون المساحة المقربة أصغر من المساحة الفعلية. ومع استخدام المزيد من المستطيلات، تقترب المساحة المقربة من المساحة الفعلية.
4. الإجابة النموذجية: يؤدي استخدام مستطيلات ذات عرض أصغر في تقريب أكثر دقة. وتتناسب المستطيلات الأصغر حجمًا بشكل أفضل مع شكل المنحنى وتساعد في تقليل المساحات التي لا يتم تقديرها.
6. الإجابة النموذجية: لا توجد مساحة إضافية فوق المنحنى المضمن في التقريب الذي يمكن أن يفسر المساحة التي تقع أسفل المنحنى غير المضمن. وبالتالي، يجب أن يكون التقريب أصغر من المساحة الفعلية
7. نعم؛ الإجابة النموذجية: فيما يتعلق بهذا المثال، ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى للمستطيلات مستطيلات تتداخل مع المنحنى وتتضمن المساحة التي تقع فوق المنحنى. وينتج عن ذلك تقريب أعلى. ولكن، لا يحدث ذلك دائمًا. وإذا كان هذا المنحنى متناظرًا، كما في المثال السابق، فسوف تكون عمليات التقريب متماثلة بغض النظر عن نقطة النهاية المستخدمة.

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية لحل النشاط 2 الخطوات من 1 إلى 4 ثم الإجابة عن تحليل النتائج في التمارين من 5 إلى 9.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمرينين 10 و 11.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم الجزء b من التمرين 11 لتقييم فهم الطلاب لكيفية تقريب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه عن المساحة أسفل المنحنى. اجعلهم يذكروا وصفًا لكيفية تأثير عرض المستطيلات المستخدمة على التقريب.

توسيع المفهوم

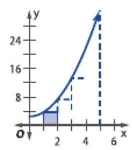
وضح للطلاب الصيغة الرمزية للتعبير عن المساحة أسفل المنحنى $f(x) = x^2 + 2$ في الفترة من 1 إلى 5 من النشاط 2.

وضح لهم أن الرمز $\int_{1}^{5} (x^2 + 2)\,dx$ عبارة عن حرف S مطول، الذي تبدأ به كلمة "sum" (المجموع).

اطلب من الطلاب أن يضغطوا على MATH 9 لفتح نافذة تسمح لهم بإيجاد قيمة العدد الصحيح. وبمجرد إدخالهم للقيم $x^2 + 2$ و x و 1 و 5 ثم الضغط على ENTER. ستعرض نوافذهم ما يلي.

نشاط 2 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2 + 2$ والمحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام المستطيلات.



الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات بعرض وحدة واحدة بين $f(x)$ و المحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ كما هو موضح في الشكل. استخدم **النقطة الطرفية** عند الجانب الأيسر لكل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع كل مستطيل.

الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

الخطوة 3 قرّب مساحة المنطقة عن طريق إيجاد ناتج جمع مساحات المستطيلات.

الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 باستخدام 8 مستطيلات، يساوي عرض كل منها 0.5 وحدة، و 16 مستطيلاً، يساوي عرض كل منها 0.25 وحدة.

نصيحة دراسية

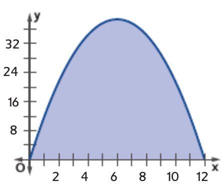
نقاط طرفية قد تستخدم أي نقطة داخل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع المستطيلات المستخدمة لتقريب المساحة. النقاط المستخدمة بشكل شائع أكثر هي النقاط الطرفية عند الجانب الأيسر والنقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والنقاط الموجودة في المنتصف.

حلل النتائج

5. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟ **الإجابة النموذجية: 48 وحدة²**
6. باستخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر، تقع جميع المستطيلات بالكامل أسفل المنحنى. كيف يؤثر هذا على التقدير التقريبي لمساحة المنطقة؟ **انظر الهامش.**
7. هل تختلف التقديرات التقريبية إذا تم إيجاد كل ارتفاع محدد للمستطيل باستخدام النقطة النهائية له عند الجانب الأيمن؟ هل هذا حقيقي دومًا؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
8. ما الذي سيحدث للتقديرات التقريبية إذا قمنا بالاستمرار في زيادة عدد المستطيلات المراد استخدامها؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
9. قدم فرضية تمثل العلاقة بين المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات وعدد المستطيلات المستخدمة لإيجاد التقدير التقريبي. اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

التمثيل والتطبيق

10. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور الأفقي x.



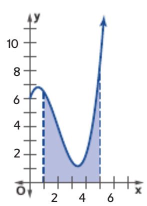
a. قرّب المساحة باستخدام 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً و 24 مستطيلاً. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.

10a. 6 مستطيلات: 280 وحدة مربعة، 12 مستطيلاً: 286 وحدة مربعة؛ 24 مستطيلاً: 287.5 وحدة مربعة

b. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟ **الإجابة النموذجية: 288 وحدة مربعة**

c. هل يؤدي استخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك. **لا، الإجابة النموذجية: التمثيل البياني متماثل. سيؤدي استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيمن إلى الوصول إلى التقدير التقريبي نفسه عند استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر.**

11. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ والمحور الأفقي x عند الفترة $[1, 5]$.



a. قرّب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أولاً ومن ثمّ استخدام 8 مستطيلات. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.

4 مستطيلات: 14 وحدة مربعة؛ 8 مستطيلات: 13.75 وحدة مربعة

b. هل يكون ناتج حساب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات مساويًا لتقديرات تقريبية كافية؟ اشرح استنتاجك.

c. هل يؤدي استخدام نقاط النقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.

11b. الإجابة النموذجية: ليس من المحتمل أن يؤدي تقريب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات إلى تمثيل جيد للمساحة الفعلية. تمنع طبيعة المنحنى المستطيلات التي يساوي عرضها وحدة واحدة و 0.5 وحدة من التوافق بشكل مناسب أسفلها.

11c. نعم؛ الإجابة النموذجية: التمثيل البياني غير متماثل. سيؤدي استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيمن في إيجاد ارتفاع المستطيلات إلى إنشاء مستطيلات مختلفة ذات مساحات مختلفة.

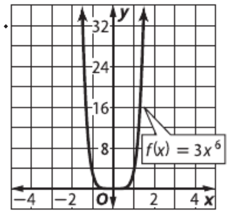
إجابات إضافية

8. الإجابة النموذجية: ينبغي أن يكون كل تقريب تم العثور عليه باستخدام المزيد من المستطيلات تمثيلاً أفضل للمساحة الفعلية. ستملأ المستطيلات الأصغر المنطقة المنحنية بشكل أفضل وتساعد على ضمان دخول معظم المساحة أسفل المنحنى في التقريب.

9. الإجابة النموذجية: كلما زاد عدد المستطيلات المستخدمة، كان تقريب المساحة أفضل. تتناسب المستطيلات الأصغر حجمًا مع المنطقة المطلوبة بشكل أفضل من المستطيلات كبيرة الحجم، وبالتالي ينتج عنها عمليات تقريب أكثر دقة.

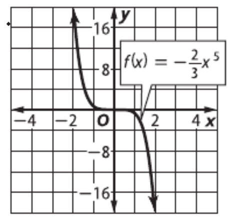
الدرس 2-1 (تمرين موجه)

1A.



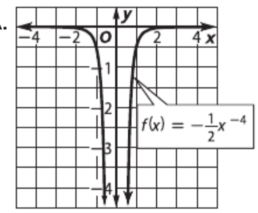
$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

1B.



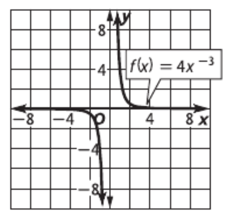
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, \infty)$

2A.



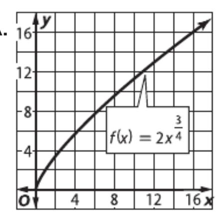
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

2B.



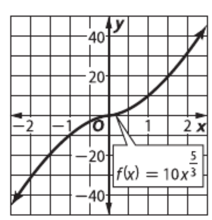
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

3A.



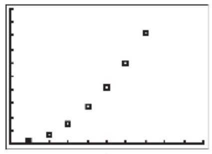
$D = [0, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند $[0, \infty)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

3B.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, \infty)$

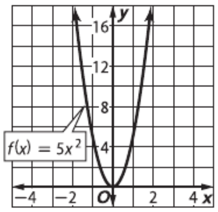
4A.



[0, 100] scl: 10 في [0, 250] scl: 25

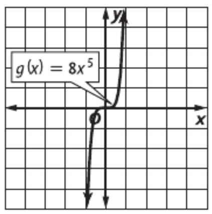
الدرس 2-1

1.



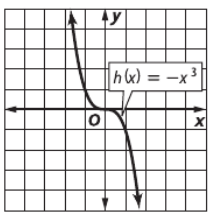
$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

2.



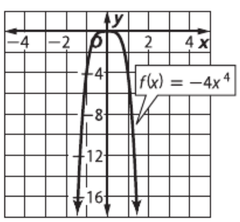
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, \infty)$

3.



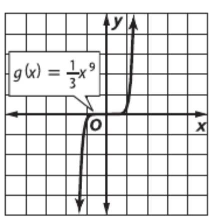
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, \infty)$

4.



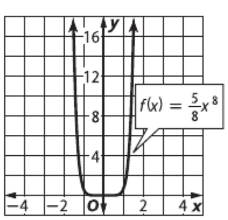
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

5.



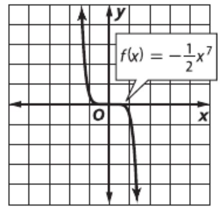
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, \infty)$

6.

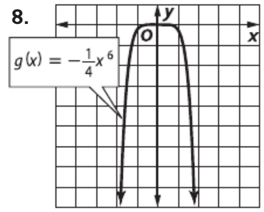


$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

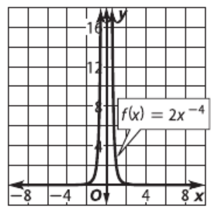
الوحدة 2 ملحق الإجابات

7.


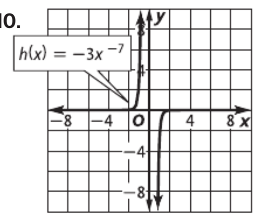
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, \infty)$

8.


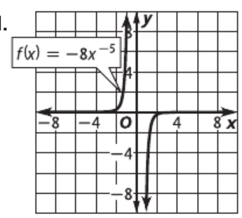
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

9.


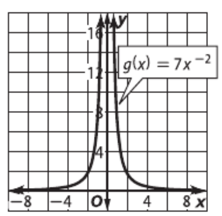
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

10.


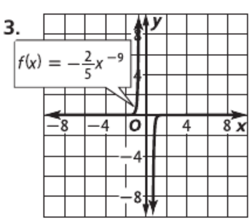
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

11.


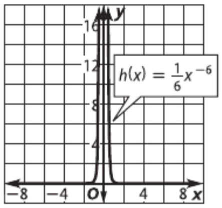
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

12.


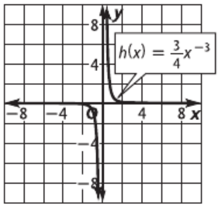
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

13.


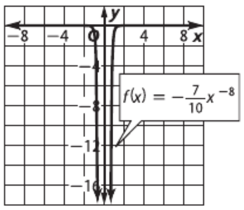
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

14.


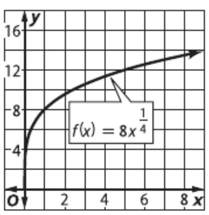
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

15.


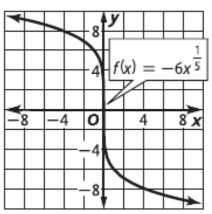
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

16.


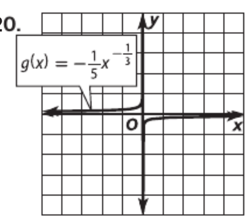
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

18.


$D = [0, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند $[0, \infty)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

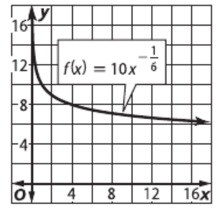
19.


$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, \infty)$

20.


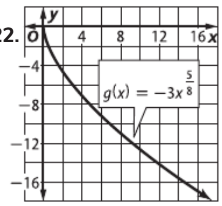
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

21.



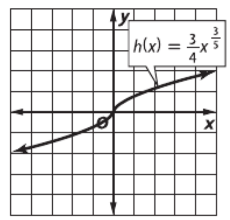
D = (0, ∞), R = (0, ∞)؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ متصلة عند (0, ∞)؛ التناقص: (0, ∞)

22.



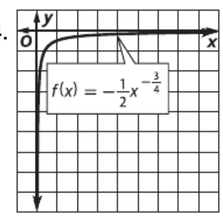
D = [0, ∞), R = (−∞, 0]؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة عند (0, ∞)؛ التناقص: (0, ∞)

23.



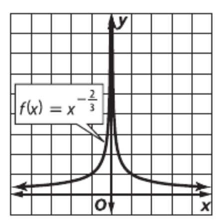
D = (−∞, ∞), R = (−∞, ∞)؛ نقطة التقاطع: 0 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: (−∞, ∞)

24.



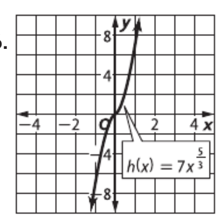
D = (0, ∞), R = (−∞, 0)؛ لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ متصلة عند (0, ∞)؛ التزايد: (0, ∞)

25.



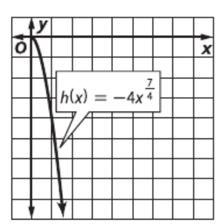
D = (−∞, 0) ∪ (0, ∞), R = (0, ∞)؛ لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند x = 0؛ التزايد: (−∞, 0)؛ التناقص: (0, ∞)

26.



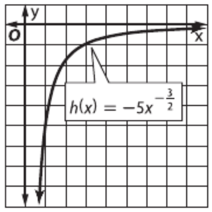
D = (−∞, ∞), R = (−∞, ∞)؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: (−∞, ∞)

27.



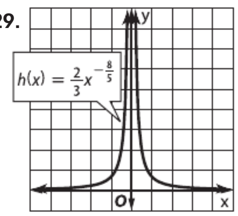
D = [0, ∞), R = (−∞, 0]؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة عند (0, ∞)؛ التناقص: (0, ∞)

28.



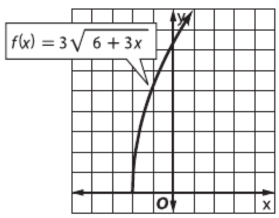
D = (0, ∞), R = (−∞, 0)؛ لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ متصلة عند (0, ∞)؛ التزايد: (0, ∞)

29.



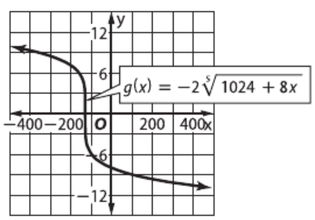
D = (−∞, 0) ∪ (0, ∞), R = (0, ∞)؛ لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند x = 0؛ التزايد: (−∞, 0)؛ التناقص: (0, ∞)

34.



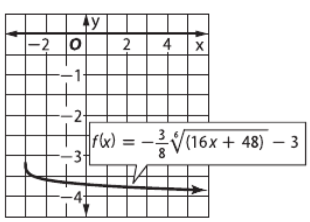
D = [−2, ∞), R = [0, ∞)؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: −2. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $3\sqrt{6}$؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند [−2, ∞)؛ التزايد: (−2, ∞)

35.



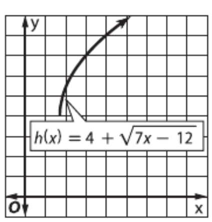
D = (−∞, ∞), R = (−∞, ∞)؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: −128. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: −8؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: (−∞, ∞)

36.



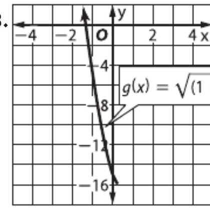
D = [−3, ∞), R = (−∞, −3]؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: −3.71؛ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة عند [−3, ∞)؛ التناقص: (−3, ∞)

37.



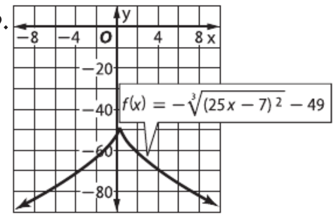
$D = \left[\frac{12}{7}, \infty\right)$, R = [4, ∞)؛ لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند $\left[\frac{12}{7}, \infty\right)$؛ التزايد: $\left(\frac{12}{7}, \infty\right)$

.38



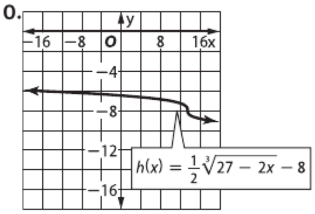
$D = (-\infty, 0.25]$، $R = [-16, \infty)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -1.34. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -15؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند $(-\infty, 0.25]$؛ التناقص: $(-\infty, 0.25)$

.39



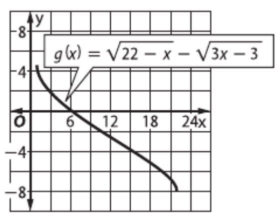
$D = (-\infty, \infty)$، $R = (-\infty, -49.00]$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -52.66؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, 0.28)$؛ التناقص: $(0.28, \infty)$

.40



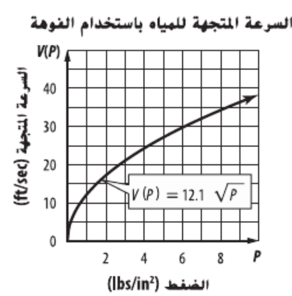
$D = (-\infty, \infty)$، $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: $-2{,}034.5$، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -6.5؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty, \infty)$

.41



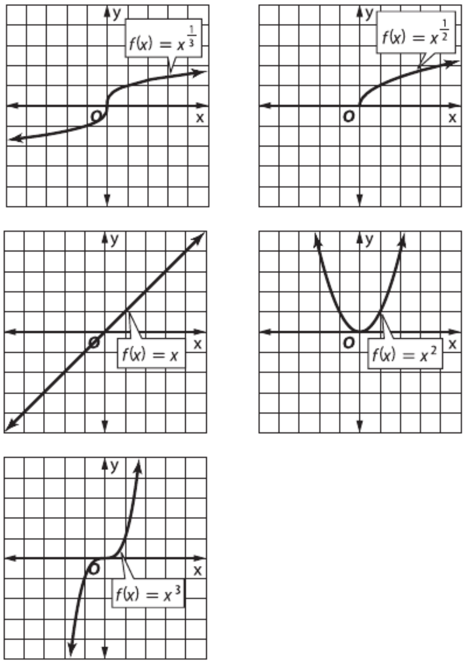
$D = [1, 22]$، $R = [-\sqrt{63}, \sqrt{21}]$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 6.25؛ متصلة عند $[1, 22]$؛ التناقص: $(1, 22)$

42a.



.42b $D = [0, \infty)$، $R = [0, \infty)$؛ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة عند $[0, \infty)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

.80a الإجابات النموذجية المعطاة.



.80c الإجابة النموذجية: إذا كان $0 < n < 1$، فإن متوسط معدل تغير الدالة يتناقص مع اقتراب x من اللانهاية. إذا كان $n = 1$، فإن متوسط معدل تغير الدالة يكون ثابتًا مع اقتراب x من اللانهاية. إذا كان $n > 1$، فإن متوسط معدل تغير الدالة يزداد مع اقتراب x من اللانهاية.

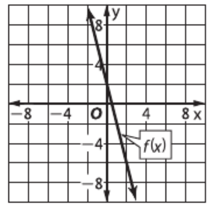
81.

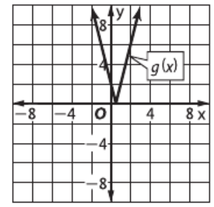
$$\sqrt{\frac{8^n \times 2^7}{4^{-n}}} = \sqrt{\frac{(2^3)^n \times 2^7}{(2^2)^{-n}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2^{3n} \times 2^7}{2^{-2n}}}$$
$$= \sqrt{2^{(3n+7)-(-2n)}}$$
$$= \sqrt{2^{5n+7}}$$
$$= \sqrt{2^{4n+6} \times 2^{n+1}}$$
$$= \sqrt{2^{4n+6}} \times \sqrt{2^{n+1}}$$
$$= 2^{2n+3}\sqrt{2^{n+1}}$$

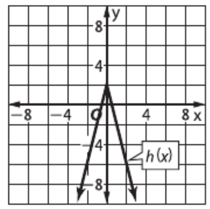
.82d الإجابة النموذجية: إذا كان الأس أصغر من صفر، تكون القوة الأسية أكبر من 0 وأصغر من 1. وإذا كان الأس أكبر من صفر، وأصغر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من 1 وأصغر من الأساس. إذا كان الأس أكبر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من الأساس. أي عدد غير صفري إلى القوة الأسية الصفرية يساوي 1. لذا، إذا كان الأس أصغر من 0، تكون القوة الأسية أصغر من 1. ولا تكون القوة الأسية للعدد الموجب سالبة أبدًا، لذلك تكون القوة الأسية أكبر من 0. أي عدد غير صفري إلى القوة الأسية الصفرية يساوي 1 وإلى القوة الأسية الأولى يكون هو ذاته. إذًا، إذا كان الأس أكبر من صفر، وأصغر من 1، فإن القوة الأسية تكون بين 1 والأساس. وأي عدد إلى القوة الأسية الأولى يساوي ذاته. إذن، إذا كان الأس أكبر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من الأساس.

85. الإجابة النموذجية: بما أن n يزداد، فإن قيمة $\frac{1}{n}$ تقترب من 0. وهذا يعني أن قيمة $x^{\frac{1}{n}}$ ستقترب من 1 إذا كانت قيمة x موجبة و -1 إذا كانت قيمة x سالبة. ولذلك، بالنسبة للقيم الموجبة لـ x، ستقترب $f(x)$ من $5 + 1$ أو 6 وستكون مشابهة للخط $y = 6$ أما بالنسبة للقيم السالبة للمحور x، ستقترب $f(x)$ من $-5 + 1$ أو 4 وستكون مشابهة للخط $y = 4$

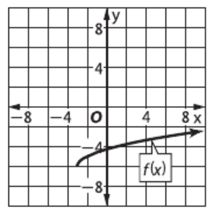
91.

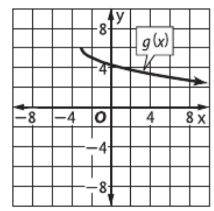


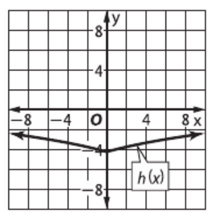




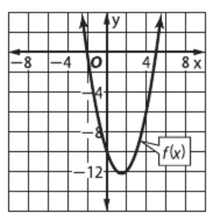
92.

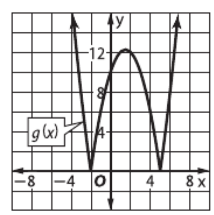


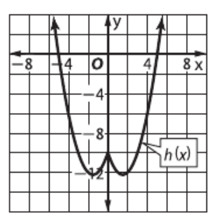




93.







الاستكشاف 2-2

3. الإجابة النموذجية:

المعامل الرئيسي	درجة كثيرة الحدود	السلوك الطرفي
سالب	فردي	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
سالب	زوجية وغير صفرية	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
موجب	فردية	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
موجب	زوجية وغير صفرية	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الدرس 2-2 (تمرين موجه)

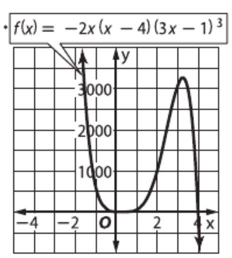
6A. a. الدرجة تساوي 5، والمعامل الرئيسي يساوي -54. إذًا فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b. الأصفار الحقيقية المميزة هي $x = 0$ و $x = 4$ و $x = \frac{1}{3}$
الصفر الموجود في $x = \frac{1}{3}$ يشتمل على مضاعفة 3.

c.

الفترة	قيمة x	f(x)	(x, f(x))
$(\infty, 0)$	-1	$f(-1) = 640$	$(-1, 640)$
$(0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{4}$	$f(\frac{1}{4}) \approx -0.03$	$(\frac{1}{4}, -0.03)$
$(\frac{1}{3}, 4)$	1	$f(1) = 48$	$(1, 48)$
$(4, -\infty)$	5	$f(5) = -27{,}440$	$(5, -27{,}440)$

d.



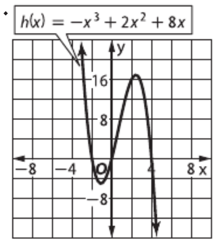
6B. a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي -1. إذًا فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b. الأصفار الحقيقية المميزة هي $x = -2$ و $x = 0$ و $x = 4$ و لا يوجد تكرار.

c.

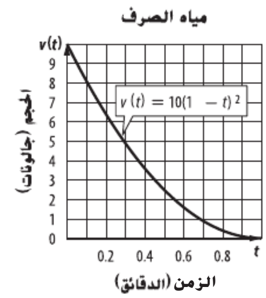
الفترة	قيمة x	f(x)	(x, f(x))
$(\infty, -2)$	-4	$f(-4) = 64$	$(-4, 64)$
$(-2, 0)$	-1	$f(-1) = -5$	$(-1, -5)$
$(0, 4)$	2	$f(2) = 16$	$(2, 16)$
$(4, -\infty)$	10	$f(10) = -720$	$(10, -720)$

d.



الدرس 2-2

11.



.12 الدرجة تساوي 7 والمعامل الرئيسي يساوي -5. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.13 الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي 2. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.14 الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي 7 ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

.15 الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي -6. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

.16 الدرجة تساوي 3 والمعامل الرئيسي يساوي -4. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.17 الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي -2. لأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

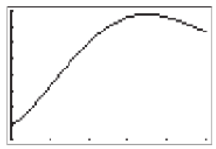
.18 الدرجة تساوي 3 والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

.19 الدرجة تساوي 4 والمعامل الرئيسي يساوي -2. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

.20 الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي -1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.21 الدرجة تساوي 6، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.22a



[0, 5] scl: 1 في [6000, 14000] scl: 1000

.22b الدرجة تساوي 4، المعامل الرئيسي يساوي 43.77. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.23 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ 0 و-1 و-2

.24 6 أصفار حقيقية و 5 نقاط دوران؛ 0 و 6 و 2

.25 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ $\pm\sqrt{3}$

.26 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ 0 و 8 و-4

.27 6 أصفار حقيقية و 5 نقاط دوران؛ 2 و $\sqrt[3]{-2}$

.28 8 أصفار حقيقية و 7 نقاط دوران؛ ولا توجد أصفار حقيقية

.29 6 أصفار حقيقية و 5 نقاط دوران؛ 0 و-2 و 2

.30 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ 0 و 5 و-5

.31 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ 0 و$-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$

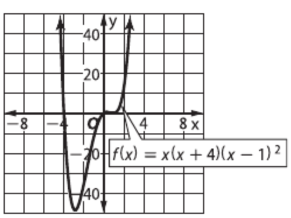
.32 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ 0 و $\frac{4}{3}$ و-5

.33a الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.33b 1 ,-4 ,0 (مكرر: 2)

.33c الإجابة النموذجية: (2, 12)، (0.5, 0.5625)، (−2, −36)، (−5, 180)

.33d

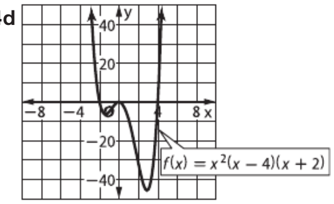


.34a الدرجة تساوي 4، المعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

.34b 0 (مكرر: 2)، -2 ,4

.34c الإجابة النموذجية: (5, 175)، (2, −32)، (−1, −5)، (−3, 63)

34d.

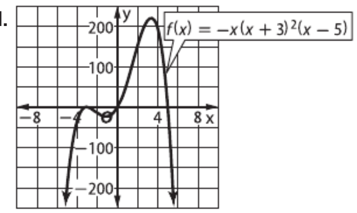


35a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي (معامل الحد الأكبر) يساوي -1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

35b. -3, 0, (مكرر: 2) 5,

35c. الإجابة النموذجية: $(6, -486)$, $(2, 150)$, $(-1, -24)$, $(-4, -36)$

35d.

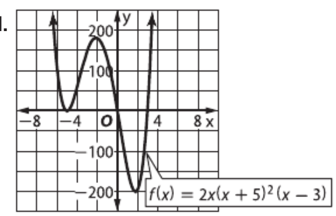


36a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي 2. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

36b. -5, 0, (مكرر: 2) 3,

36c. الإجابة النموذجية: $(4, 648)$, $(1, -144)$, $(-1, 128)$, $(-6, 108)$

36d.

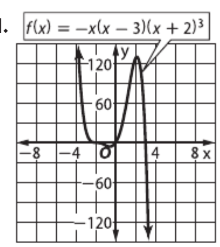


37a. الدرجة تساوي 5، والمعامل الرئيسي يساوي -1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

37b. -2, 0, 3, (مكرر: 3)

37c. الإجابة النموذجية: $(4, -864)$, $(1, 54)$, $(-1, -4)$, $(-3, 18)$

37d.

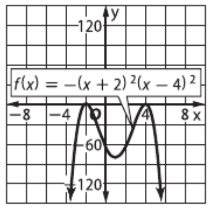


38a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي -1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

38b. -2 (مكرر: 2)، 4 (مكرر: 2)

38c. الإجابة النموذجية: $(5, -49)$, $(-1, -25)$, $(-3, -49)$

38d.

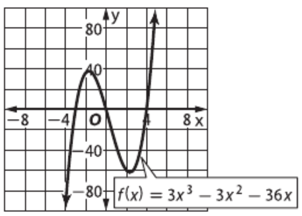


39a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي 3. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

39b. -3, 4, 0

39c. الإجابة النموذجية: $(5, 120)$, $(2, -60)$, $(-2, 36)$, $(-4, -96)$

39d.

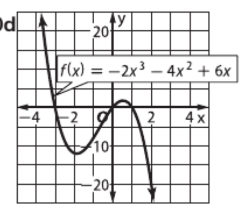


40a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي -2. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

40b. 0، -1، 3

40c. الإجابة النموذجية: $(2, -20)$, $(0.5, 1.75)$, $(-2, -12)$, $(-4, 40)$

40d.

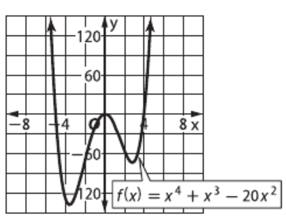


41a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

41b. 0 (مكرر: 5)، 4، -2

41c. الإجابة النموذجية: $(5, 250)$, $(2, -56)$, $(-2, -72)$, $(-6, 360)$

41d.

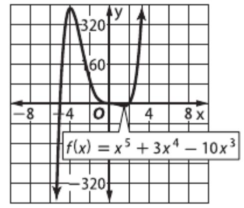


42a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

42b. 0 (مكرر 3)، -2, 5

42c. الإجابة النموذجية: $(-6, -1{,}728), (-3, 270), (1, -6), (3, 216)$

42d.



44. الإجابة النموذجية: $f(x) = -1.25x + 5$

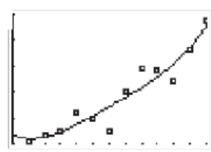
45. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.09x^3 - 2.70x^2 + 24.63x - 65.21$

46. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.88x^4 + 0.89x^3 - 1.71x^2 - 2.99x + 4.89$

47. الإجابة النموذجية: $f(x) = 4.05x^4 - 0.09x^3 + 6.69x^2 - 222.03x + 2{,}697.74$

49a. وفقًا للبيانات، تزيد القيم عندما يزيد x، لذلك، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

49b. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.146x^4 - 3.526x^3 + 32.406x^2 - 63.374x + 473.255$؛ الخط ليس ملائمًا بشكل جيد. هناك الكثير من النقاط البعيدة عن المركز.

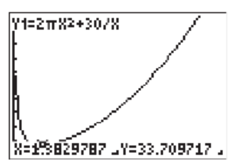


[0, 12] scl: 1 في [400, 1400] scl: 200

49c. المعامل الرئيسي يساوي 0.146، لذلك فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
الإجابة النموذجية: كان التنبؤ دقيقًا لأن المعامل الرئيسي موجب، حيث $f(x) \to \infty$ ،$x \to \infty$.

68b. $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{30}{r}$

68c. حوالي 33.7 in^2



[0, 10] scl: 1 في [0, 500] scl: 50

69. $f(x) = x^3 - 8x^2 - 3x + 90$

70. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 24x - 64$

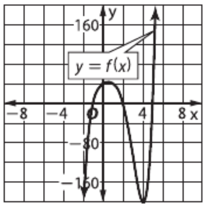
71. $f(x) = x^5 - 9x^4 + 23x^3 - 3x^2 - 36x$

72. $f(x) = x^5 - 4x^4 - 19x^3 + 46x^2 - 24x$

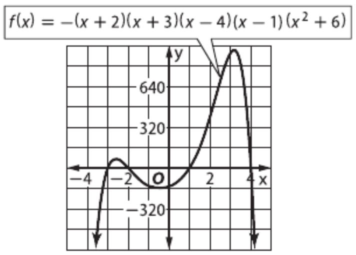
73. $f(x) = 12x^4 + 83x^3 + 131x^2 - 54x - 72$

74. $f(x) = 6x^5 - 23x^4 - 39x^3 + 15x^2 + 25x$

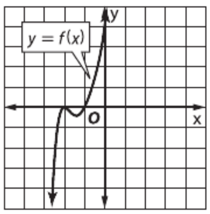
76. الإجابة النموذجية:
$f(x) = (x - 2)(x - 5) \times (x + 1)(x^2 + 4)$



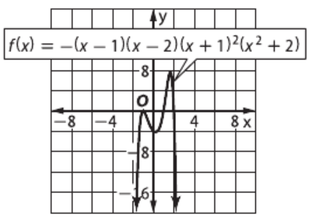
77. الإجابة النموذجية:
$f(x) = -(x + 2) \times (x + 3)(x - 4) \times (x - 1)(x^2 + 6)$



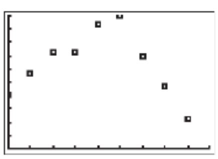
78. الإجابة النموذجية:
$f(x) = (x + 1) \times (x + 2)^2(x^2 + 1)$



79. الإجابة النموذجية:
$f(x) = -(x - 1) \times (x - 2)(x + 1)^2 \times (x^2 + 2)$



80a.



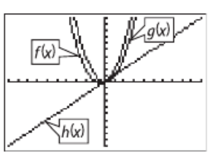
[0, 9] scl: 1 في [0, 10] scl: 1

80b. $f(x) = -0.009x^3 - 0.230x^2 + 2.305x + 3.796$

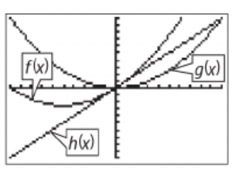
80c. $f(x) = 0.012x^4 - 0.225x^3 + 0.978x^2 + 0.152x + 4.312$

80d. الإجابة النموذجية: وفقًا لمعاملات الارتباط الخاصة بكل نموذج، فإن $r^2 = 0.94$ للدالة التكعيبية و $r^2 = 0.96$ للدالة الرباعية. وبالتالي، تعد الدالة الرباعية نموذجًا أفضل.

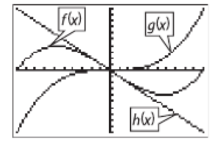
89a.



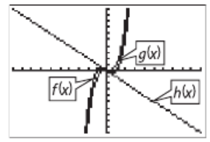
[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1



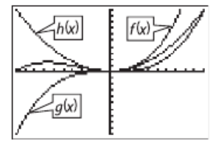
[−1, 1] scl: 0.1 by [−1, 1] scl: 0.1



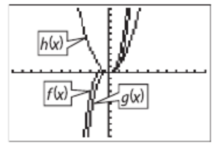
[−1, 1] scl: 0.1 في [−1, 1] scl: 0.1



[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1



[−1, 1] scl: 0.1 في [−1, 1] scl: 0.1



[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1

89b. الإجابة النموذجية: قريب جدًا من الأصل، تقرب الدالة سلوك الحد ذي الدرجة الأدنى أو $h(x)$.

89c. الإجابة النموذجية: بما أن $x \to \infty$ و$-\infty$، فإن الدالة تقرب سلوك الحد ذي الدرجة الأعلى، أو $g(x)$

89d. الإجابة النموذجية: بما أن $x \to \infty$ و$-\infty$، فإن الدالة تقرب سلوك الدالة a وقريبًا جدًا من الأصل، تقرب الدالة سلوك الدالة b.

90. مادلين؛ الإجابة النموذجية: تفيد البيانات أن هناك نقطتي دوران. ولذلك، تعد الدالة التكعيبية تمثيلاً أفضل من الدالة التربيعية. وعند إدخال الجدول في حاسبة تمثيل بياني أيضًا، فإن $r^2 = 0.99$ للدالة التكعيبية و$r^2 = 0.75$ للدالة التربيعية. تدعم هذه الدالة نموذج مادلين.

91. الإجابة النموذجية: لا؛ لا يمكن أن تشتمل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على كل من حد أقصى مطلق وحد أدنى مطلق لأن $x \to \infty$، $f(x)$ ستقترب إما من ∞ أو$-\infty$. إذا كان $f(x) \to \infty$ لأن $x \to \infty$، فحينها تكون القيمة العظمى المطلقة غير ممكنة. إذا كان $f(x) \to -\infty$ لأن $x \to \infty$، فحينها تكون القيمة الصغرى المطلقة غير ممكنة.

92. الإجابة النموذجية: لا تشتمل الدالة $f(x) = 0$ على درجة لعدم وجود أي حدود لكثيرة الحدود. تشتمل الدالة $g(x) = c, c \neq 0$، على درجة تساوي 0 لأن $c = cx^0$ لجميع x.

93. ينتج عن إعادة ترتيب الحدود $f(x) = x^3 - x^2 - 12x + 5x^2 - 5x - 60$ لاحظ كيف تشتمل المجموعة الأولى من الحدود الثلاثة على العامل المشترك x وتشتمل المجموعة الثانية للحدود الثلاثة على العامل المشترك 5. بعد تحليل العوامل باستخدام خاصية التوزيع، فإن $f(x) = x(x^2 - x - 12) + 5(x^2 - x - 12)$ لاحظ الآن مدى تطابق العوامل داخل الأقواس. باستخدام خاصية التبديل،فإن $f(x) = (x + 5)(x^2 - x - 12)$ بعد تحليل العامل الثاني، يكون $f(x) = (x + 5)(x - 4)(x + 3)$ تم تحليل الدالة الآن تمامًا وأصفار الدالة هي -5 و 4 و -3 تم تحديد ذلك من خلال ضبط كل عامل ليساوي صفرًا وإيجاد قيمة x.

94. الإجابة النموذجية: هذا ممكن لأنه يمكن ضغط أحد التمثيلات البيانية بشكل أكبر من الآخر. على سبيل المثال، $f(x) = a(x - 1)(x + 4)(x - 5)$ و$g(x) = 5a(x - 1)(x + 4)(x - 5)$ تشتمل على نفس الأصفار والدرجة والسلوك الطرفي، بافتراض أن $a > 0$. سيكون التمثيل البياني لـ $g(x)$ أكثر امتدادًا بسبب عامل 5.

95. الإجابة النموذجية: توجد نقطة دوران واحدة عند القيمة العظمى المطلقة، وواحدة عند القيمة الصغرى النسبية وواحدة عند القيمة العظمى النسبية. لذلك، فإن درجة الحد الأدنى تساوي $1 + 3$ أو 4 .

96. الإجابة النموذجية: ارسم مخطط انتشار (تمثيلاً بيانيًا بالنقاط المبعثرة) للبيانات. استخدم مخطط التشتت لتحديد الدرجة التي تتشابه عندها كثيرة الحدود بشكل أكبر مع البيانات. أوجد معادلة الانحدار لكثيرة الحدود وقارن القيمة المطلقة لمعامل الارتباط الخاص بها بالرقم 1. مثِّل هذه المعادلة بيانيًا على نفس شاشة مخطط الانتشار للتأكد من تشابهها. إذا كان النموذج لا يتناسب مع البيانات أو كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط غير قريبة من 1، فيمكن إيجاد معاملات الارتباط لكثيرات الحدود الأخرى لمعرفة ما إذا كان هناك نموذج أكثر ملاءمة.

104. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مزاحًا 4 وحدات لليمين و 3 وحدات لأعلى؛ $g(x) = (x - 4)^2 + 3$.

105. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ منعكسًا في المحور الأفقي x ومزاحًا وحدتين لليسار و 4 وحدات لأسفل؛ $g(x) = -(x + 2)^2 - 4$.

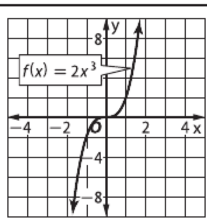
106. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مزاحًا 6 وحدات لليمين و 4 وحدات لأسفل؛ $g(x) = (x - 6)^2 - 4$.

الدرس 2-3

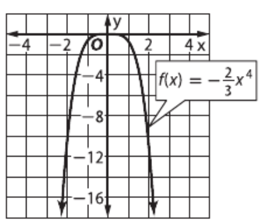
62. الإجابة النموذجية: سوف أستخدم حاسبة التمثيلات البيانية لتمثيل كثيرة الحدود وتحديد الأصفار الثلاثة الصحيحة a وb وc. بعد ذلك، سوف أستخدم القسمة التركيبية لقسمة كثيرات الحدود على a. وسأقسم بعد ذلك كثيرة الحدود المنخفضة الناتجة على b، ثم كثيرة الحدود المنخفضة الجديدة على c . ستشتمل كثيرة الحدود المنخفضة الثالثة على الدرجة 2. وفي النهاية، سأحلل كثيرة الحدود من الدرجة الثانية إلى عوامل لإيجاد الصفرين النسبيين غير الصحيحين d وe. لذلك، تكون كثيرة الحدود إما ناتجًا لـ $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$ أو هذا الناتج مضروبًا في عدد نسبي.

68. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام كل من القسمة المطولة والقسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على عامل خطي. ويمكن استخدام القسمة المطولة أيضًا لقسمة كثيرة حدود على عامل غير خطي. في القسمة التركيبية، تُستخدم المعاملات فقط. وفي كل من القسمة المطولة والقسمة التركيبية، تكون العناصر النائبة مطلوبة إذا كانت القوة لأحد المتغيرات مفقودة.

اختبار منتصف الوحدة

1. 

$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, \infty)$

2. 

$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, 0]$؛ نقطة التقاطع: 0؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ ؛ التناقص: $(0, \infty)$

الوحدة 2 ملحق الإجابات

54. $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ 3+i,\ 3-i;\ g(x)=(x-2-\sqrt{3})\times(x-2+\sqrt{3})(x-3-i)(x-3+i)$

72b. i. $3i,\ -3i,\ 1$

ii. $-\frac{1}{2},\ -2i,\ 2i,\ -2,\ 2$

iii. $-2,\ \frac{3}{5},\ 1$

iv. $-3i,\ 3i,\ -4i,\ 4i,$

v. $4i,\ -4i,\ -2,\ 0$ (مكرر: 2)، $\frac{1}{3}$

vi. $i,\ -i,\ \frac{3}{4},\ 2$

72c. تشتمل الدالة كثيرة الحدود ذات الدرجة الفردية دائمًا على عدد فردي من الأصفار وتشتمل الدالة كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية على أصفار تخيلية تظهر في أزواج متقارنة. وبالتالي، ستشتمل الدالة الفردية ذات المعاملات الحقيقية دائمًا على صفر حقيقي واحد على الأقل.

75a. التمثيلات البيانية لـ $-f(x)$ هي التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ منعكسة في المحور الأفقي x. والأصفار هي نفسها.

75b. الرسوم البيانية لـ $f(-x)$ هي الرسوم البيانية لـ $f(x)$ منعكسة في المحور الرأسي y. والأصفار متقابلة.

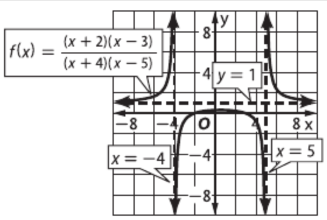
77. خطأ؛ الإجابة النموذجية: تشتمل كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة $x^3+x^2-17x+15$ على ثلاثة أصفار حقيقية ولا تشتمل على أصفار غير حقيقية.

82. الإجابة النموذجية: يجب أن يكون c أكبر من أو يساوي $\frac{a_2}{a_1}$ إذا كان c أصغر من $\frac{a_2}{a_1}$، إذن سيكون الحد الثاني لكثيرة الحدود المنخفضة سالبًا وسيفشل اختبار الحد الأعلى.

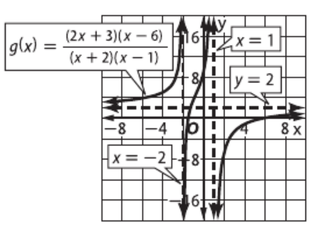
83. الإجابة النموذجية: إذا كانت كثيرة الحدود تشتمل على صفر تخيلي، فحينها يكون مرافقه المركب صفرًا لكثيرة الحدود أيضًا. وبالتالي، فإن أي كثيرة حدود تشتمل على صفر تخيلي واحد تشتمل على صفرين تخيليين على الأقل.

الدرس 2-5

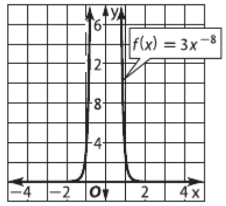
9. خطوط التقارب: $x=-4,\ x=5,\ y=1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $-2,\ 3$؛ نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{3}{10}$؛ $D=\{x \mid x \neq -4, 5, x\in\mathbb{R}\}$



10. خطوط التقارب: $x=1,\ x=-2,\ y=2$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $-\frac{3}{2}$، 6؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 9؛ $D=\{x \mid x\neq 1, -2, x\in\mathbb{R}\}$

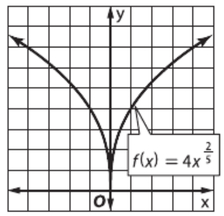


3.



$D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$، $R=(0,\infty)$؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$؛ انفصال لانهائي عند $x=0$؛ التزايد: $(-\infty,0)$؛ التناقص: $(0,\infty)$

4.



$D=(-\infty,\infty)$، $R=(0,\infty)$؛ نقطة التقاطع: $0;0$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التناقص: $(-\infty,0)$؛ التزايد: $(0,\infty)$

الدرس 2-4

42a. $g(x)=(x-4)(x-3)(x+2)^2$

42b. $g(x)=(x-4)(x-3)(x+2)^2$

42c. 4, 3, −2 (multiplicity: 2)

43a. $g(x)=(x+2)(x+1)(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$

43b. $g(x)=(x+2)(x+1)(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$

43c. $-2, -1, 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}$

44a. $h(x)=(x^2+9)(x-4)(x+6)$

44b. $h(x)=(x-3i)(x+3i)(x-4)(x+6)$

44c. $3i, -3i, 4, -6$

45a. $f(x)=(x^2-4x+13)(4x-3)(x-4)$

45b. $f(x)=(4x-3)(x-4)(x-2+3i)(x-2-3i)$

45c. $\frac{3}{4}, 4, 2-3i, 2+3i$

46a. $f(x)=(4x+5)(x+3)(x^2-8x+41)$

46b. $f(x)=(4x+5)(x+3)(x-4+5i)(x-4-5i)$

46c. $-\frac{5}{4}, -3, 4+5i, 4-5i$

47a. $h(x)=(x+3)(x-5)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

47b. $h(x)=(x+3)(x-5)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

47c. $-3, 5, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

48a. $g(x)=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+36)$

48b. $g(x)=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+6i)(x-6i)$

48c. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 6i, -6i$

49. $3, -4, \frac{1}{2}, 3i, -3i;\ h(x)=(x-3)(x+4)(2x-1)(x+3i)(x-3i)$

50. $-5, 6, \frac{2}{3}, 5i, -5i;\ h(x)=(x+5)(x-6)(3x-2)(x+5i)(x-5i)$

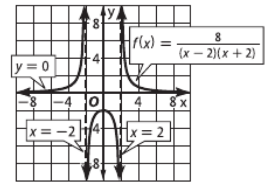
51. $-3, -2, 1, 3+i, 3-i;\ g(x)=(x+3)(x+2)(x-1)\cdot(x-3+i)(x-3-i)$

51. $-3,\ -2,\ 1,\ 3+i,\ 3-i;\ g(x)=(x+3)(x+2)(x-1)\times(x-3+i)(x-3-i)$

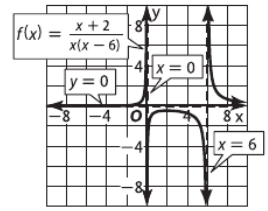
52. $5,\ -\frac{3}{4},\ 2,\ 4+i,\ 4-i;\ g(x)=(x-5)(4x+3)(x-2)\times(x-4-i)(x-4+i)$

53. $3,\ 2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 2i,\ -2i;\ f(x)=(x-3)(x+2\sqrt{2})\times(x-2\sqrt{2})(x+2i)(x-2i)$

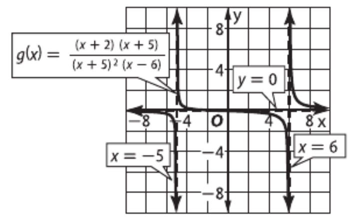
11. خطوط التقارب: $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -2؛ $D = \{x \mid x \neq -2, 2, x \in \mathbb{R}\}$



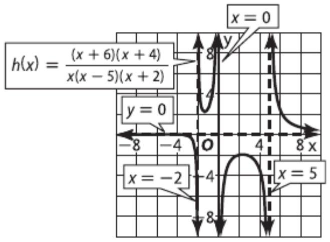
12. خطوط التقارب: $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -2؛ $D = \{x \mid x \neq 0, 6, x \in \mathbb{R}\}$



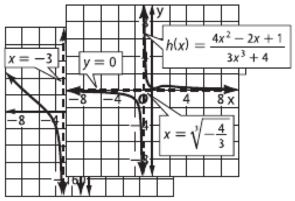
13. خطوط التقارب: $x = -5$, $x = 6$, $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -2؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{1}{15}$؛ $D = \{x \mid x \neq -5, 6, x \in \mathbb{R}\}$



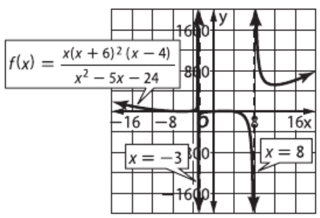
14. خطوط التقارب: $x = 0$, $x = 5$, $x = -2$, $y = 0$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: -6, -4؛ $D = \{x \mid x \neq -2, 0, 5, x \in \mathbb{R}\}$



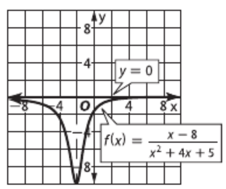
15. خطوط التقارب: $x = -3$, $x = -1$؛ نقاط التقاطعات مع المحور الأفقي x: -5, 2, 0؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq -3, -1, x \in \mathbb{R}\}$



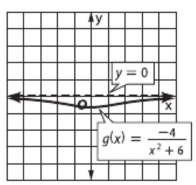
16. خطوط التقارب: $x = -3$, $x = 8$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: -6, 0, 4؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq -3, 8, x \in \mathbb{R}\}$



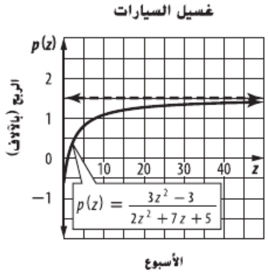
17. مستقيم التقارب: $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 8؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{8}{5}$؛ $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



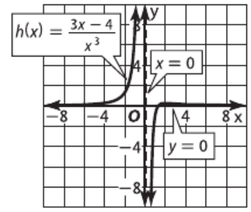
18. مستقيم التقارب: $y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{2}{3}$؛ $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



19c. غسيل السيارات

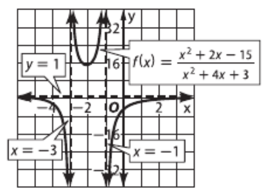


20. خطوط التقارب: $x = 0,\ y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: $\frac{4}{3}$؛ $D = \{x \mid x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

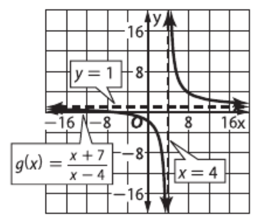


21. خطوط التقارب: $x = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}},\ y = 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{1}{4}$؛ $D = \left\{x \,\middle|\, x \neq \sqrt[3]{-\frac{4}{3}},\ x \in \mathbb{R}\right\}$

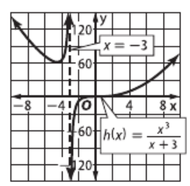
22. خطوط التقارب: $y = 1$، $x = -3,\ x = -1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $3,\ -5$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: -5؛ $D = \{x \mid x \neq -3, -1,\ x \in \mathbb{R}\}$



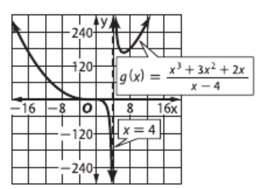
23. خطوط التقارب: $x = 4,\ y = 1$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -7؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{7}{4}$؛ $D = \{x \mid x \neq 4,\ x \in \mathbb{R}\}$



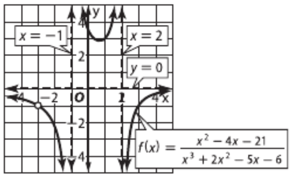
24. مستقيم التقارب: $x = -3$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 0؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq -3,\ x \in \mathbb{R}\}$



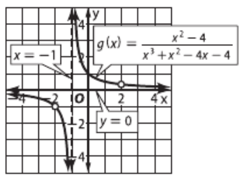
25. مستقيم التقارب: $x = 4$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: $-2,\ -1,\ 0$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq 4,\ x \in \mathbb{R}\}$



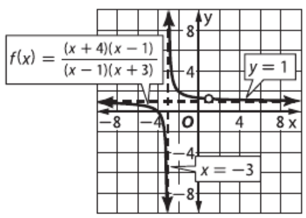
26. **خطوط التقارب: $x = -1,\ x = 2;\ y = 0$؛ الفجوة: $(-3, -1)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 7؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y:** $\frac{7}{2}$؛ $D = \{x \mid x \neq -3, -1, 2,\ x \in \mathbb{R}\}$



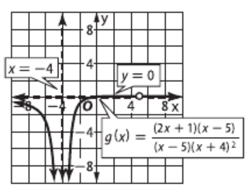
27. خطوط التقارب: $x = -1,\ y = 0$؛ الفجوات: $(-2, -1),\ \left(2, \frac{1}{3}\right)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 1؛ $D = \{x \mid x \neq -2, -1, 2,\ x \in \mathbb{R}\}$



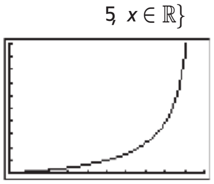
28. خطوط التقارب: $x = -3;\ y = 1$؛ الفجوة: $\left(1, \frac{5}{4}\right)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: -4؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{4}{3}$؛ $D = \{x \mid x \neq -3, 1,\ x \in \mathbb{R}\}$



29. خطوط التقارب: $x = -4,\ y = 0$؛ الفجوة: $\left(5, \frac{11}{81}\right)$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: $-\frac{1}{2}$؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{1}{16}$؛ $D = \{x \mid x \neq -4, 5,\ x \in \mathbb{R}\}$

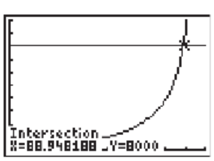


42a.



[0, 100] scl: 10 في [0, 10,000] scl: 1000

42b.

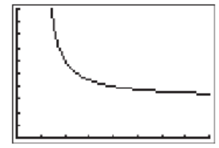


[0, 100] scl: 10 في [0, 10,000] scl: 1000

88.9% تقريبًا

.42c لا؛ الإجابة النموذجية: تكون الدالة غير معرفة إذا كانت $x = 100$. يشير ذلك إلى أنه من غير الممكن ماديًا إزالة 100% من الأملاح في المصنع.

.45a يوجد مستقيم تقارب رأسي عند $r_1 = 30$ وخط التقارب أفقي عند $r_2 = 30$.



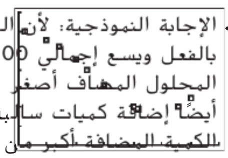
[0, 240] scl: 30 في [0, 100] scl: 10

.45c لا؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت $r_1 < 30$، إذًا ستكون r_2 سالبة. تكون المقاومة السالبة غير ممكنة.

.52a الإجابة النموذجية: تركيز المحلول الإجمالي هو مجموع كمية حمض الخليك في اللترات الـ 10 الأصلية والكمية في a لترات من المحلول الذي تبلغ نسبته 60%، مقسومة على إجمالي كمية المحلول أو $\frac{0.60a + 0.20(10)}{a + 10}$ ينتج عن ضرب كل من البسط والمقام في 5 $\frac{3a + 10}{5(a + 10)}$ أو $\frac{3a + 10}{5a + 50}$.

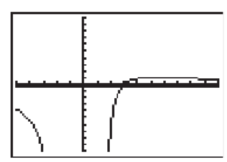
52b المجال ذو الصلة: الأعداد الحقيقية a مثل $0 \leq a \leq 90$؛ خط التقارب الأفقي: $y = 0.6$

.52c الإجابة النموذجية: لأن الخزان به 10 لترات من المحلول بالفعل ويسع إجمالي 100 لتر فقط، يجب أن تكون كمية المحلول المضاف أصغر من أو تساوي 90 لترًا. ولا يمكن أيضًا إضافة كميات سالبة من المحلول، لذلك يجب أن تكون الكمية المضافة أكبر من أو تساوي 0. وبما أنك تضيف المزيد من محلول 60%، فسوف يقترب إجمالي المحلول من 60%، ولكن لأن تركيز المحلول الموجود بالفعل في الخزان أقل، فلا يمكن أن يصل تركيز إجمالي المحلول أبدًا إلى 60%. لذلك، يوجد مستقيم التقارب أفقي عند $y = 0.6$.

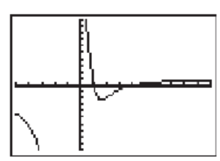


.52d نعم؛ الإجابة النموذجية: الدالة غير معرفة عند $a = -10$، ولكن لأن القيمة ليست في المجال المناسب، لا يتصل الخط المقارب بالدالة. وإذا لم تكن هناك قيود للمجال، فسيكون هناك مستقيم تقارب رأسي عند $a = -10$.

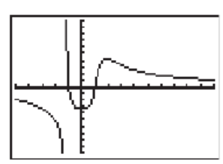
53b.



[−5, 10] scl: 1 في [−1, 1] scl: 0.1



[−5, 10] scl: 1 في [−1, 1] scl: 0.1



[−5, 10] scl: 1 في [−1, 1] scl: 0.1

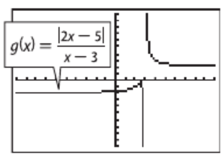
.53d الإجابة النموذجية: إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام ويشتمل البسط على صفر حقيقي واحد على الأقل، فسيشتمل التمثيل البياني للدالة على $y = 0$ حيث سيتقاطع خط التقارب مع خط التقارب عند الأصفار الحقيقية للبسط.

.54 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان $a = d$، فسوف تشتمل الدالة على مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$. إذا كان $a \neq d$، فلن تشتمل الدالة على مستقيم تقارب أفقي عند $y = 1$.

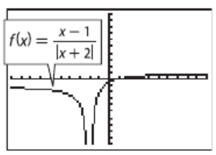
.59 الإجابة النموذجية: تستخدم فترات الاختبار لتحديد موقع النقاط على التمثيل البياني. ولأن الكثير من الدوال النسبية، غير متصلة، قد تشتمل الفترة الواحدة على قيم y التي تختلف كثيرًا عن الفترة التالية. لذلك، يجب توفر نقطة واحدة على الأقل ويفضل أكثر من نقطة، لكل فترة لتمثيل رسم بياني دقيق للدالة بشكل مقبول.

الصفحات من 145 إلى 147، الدرس 6-2

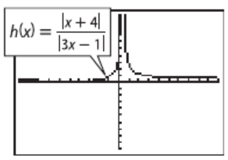
62b.



[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1

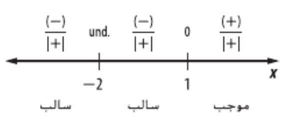


[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1

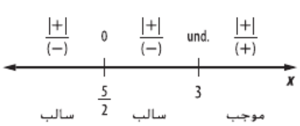


[−10, 10] scl: 1 في [−10, 10] scl: 1

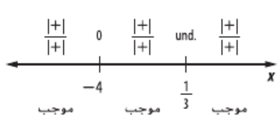
62c .i. $f(x) = \frac{x - 1}{|x + 2|}$



ii. $g(x) = \frac{|2x - 5|}{x - 3}$



iii. $h(x) = \frac{|x + 4|}{|3x - 1|}$



62d .i. $f(x) < 0$ عند $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$

ii. $g(x) \geq 0$ عند $\left\{\frac{2}{5}\right\} \cup (3, \infty)$

iii. $h(x) > 0$ عند $(-\infty, -4) \cup \left(-4, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

70. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$; $x = -4$; $y = 2$

71. $D = \{x \mid x \neq -6, x \in \mathbb{R}\}$; $x = -6$

72. $D = \left\{x \;\; x \neq -\frac{1}{2}, 5, x \in \mathbb{R}\right\}$; $x = -\frac{1}{2}$, $x = 5$, $y = 0$

78a.

78b. $f(x) = 0.003x^3 - 0.111x^2 + 0.019x + 30.259$

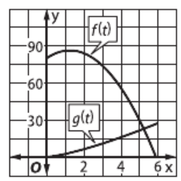
78c 8.42 AED تقريبًا.

82a. $f(t)$ عبارة عن دالة كثيرة الحدود تربيعية. $g(t)$ عبارة عن دالة قوة أو دالة جذرية.

82b. الإجابة النموذجية: لأن الوقت وكمية الماء لا يمكن أن يكونا سالبين، فإن المجالات المناسبة لـ $f(t)$ و $g(t)$ تقتصر على القيم السالبة لـ t التي ينتج عنها قيم غير سالبة لـ $f(t)$ و $g(t)$ بالنسبة إلى $D = [0, 5.89]$ و $R = [0, 86.25]$، $f(t)$، بالنسبة إلى $R = [0, \infty)$ و $D = [0, \infty)$، $g(t)$.

82c. $\lim\limits_{t \to 5.89} f(t) = 0$; $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 80$; $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0$
$\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = \infty$

82d.



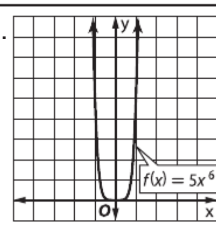
82e. الإجابة النموذجية: $f(x)$ عبارة عن دالة كثيرة الحدود، ولذلك فهي متصلة أيضًا وتنطبق نظرية القيمة المتوسطة. لذلك، نظرًا لأن $f(3) = 74$ و $f(5) = 30$ فإنه يترتب على ذلك أن هناك عددًا c، بحيث أن $3 < c < 5$ و $f(c) = 50$.

82f. 5.89 تقريبًا؛ الإجابة النموذجية: يعني هذا أن احتياطيات الماء ستنفد من المدينة بعد 5.89 أعوام تقريبًا.

82g. 5.23 أعوام تقريبًا

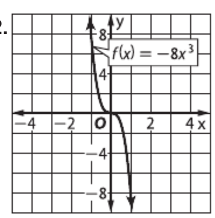
الصفحة 149، دليل الدراسة والمراجعة

11.



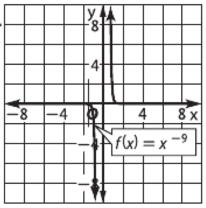
$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$؛
نقطة التقاطع: 0؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛
التناقص: $(-\infty, 0)$؛ التزايد: $(0, \infty)$

12.



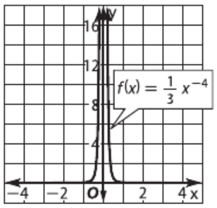
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$؛
نقطة التقاطع: 0؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛
التناقص: $(-\infty, \infty)$

13.



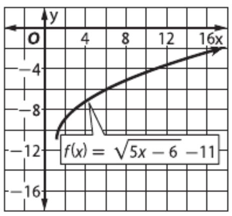
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛
لا توجد نقاط تقاطع؛
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$؛ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

14.



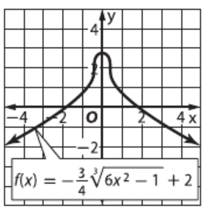
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$؛
لا توجد نقاط تقاطع؛
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$؛ انفصال لانهائي عند $x = 0$؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

15.



$D = [1.2, \infty)$, $R = [-11, \infty)$؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 25.4؛
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ؛ متصلة عند $[1.2, \infty)$؛ التزايد: $(1.2, \infty)$

16.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 2.75]$؛
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: حوالي -1.82 و 1.82؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: 2.75؛
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ التزايد: $(-\infty, 0)$؛ التناقص: $(0, \infty)$

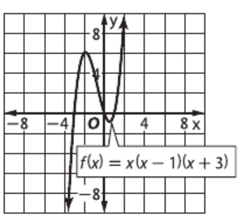
الصفحة 153، تمرين على الاختبار

15a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

15b. $0, 1, -3$

15c. الإجابة النموذجية: $(-1, 4), (-2, 6), (2, 10), (3, 36)$

15d.



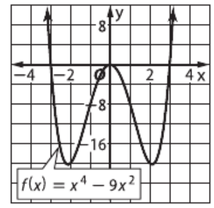
16a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي 1. لأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

16b. $-3, 3, 0$ (مكرر 2)

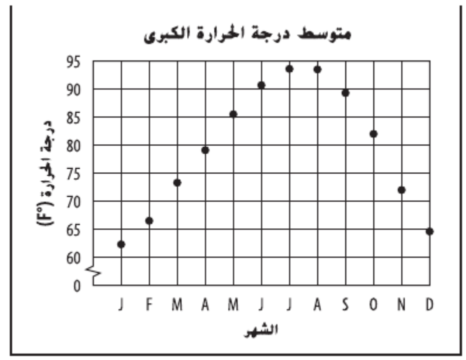
خطوط التقارب: $x = 4$, $y = 1$؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x: 5 و 3؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $\frac{3}{2}$؛ $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

16c. الإجابة النموذجية: $(-1, -8), (1, -8), (2, -20), (4, 112)$

16d.



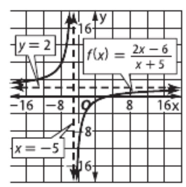
19a.



19b. $f(x) = -0.071x^3 + 0.415x^2 + 5.909x + 54.646$

19c. 44.9°

25.



خطوط التقارب: $x = -5$, $y = 2$؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x: 3؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y: $-\frac{6}{5}$; $D = \{x \mid x \neq -5, x \in \mathbb{R}\}$

26.