

# تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

# 4-4

السابق: الآن: لماذا؟

● استخدمت القيم القصوى والدنيا والتمثيلات البيانية لكثيرات الحدود.

1 ارسم تمثيلاً بيانياً لدوال كثيرة الحدود وحدد أماكن الأصغار بها.

2 أوجد القيم القصوى والدنيا للدوال كثيرة الحدود.

● اتسم الحضور السنوي بالانقلاب في دور السينما منذ افتتاح أول صالة سينما. نيكولديون، في بيتسبرج في عام 1906. حيث بلغ الحضور العام ذروته خلال عشرينيات القرن التاسع عشر، وكان في أدنى مستوياته خلال سبعينيات القرن ذاته. يمكن تمثيل رسماً بيانياً للحضور السنوي إلى دور السينما بدالة كثيرة الحدود.

## 1 التركيز

### الرأسي المحاذاة

**قبل الدرس 4-4** استخدم القيم القصوى والدنيا والرسوم البيانية لكثيرات الحدود.

**الدرس 4-4** ارسم رسماً بيانياً لدوال كثيرة الحدود وحدد أماكن الأصغار بها. أوجد القيم القصوى والدنيا للدوال كثيرة الحدود.

**بعد الدرس 4-4** استخدم بعض الأدوات مثل إيجاد العامل لتحويل المعادلات وحلها.

### مفردات جديدة

مبدأ الموقع (Location Principle)  
الحد الأقصى النسبي (relative maximum)  
الحد الأدنى النسبي (relative minimum)  
القيم القصوى (extrema)  
نقاط التحول (turning points)

تمارين رياضية  
ابن حجة قابلة للتطبيق  
وحلل وانقد الحجج الأخرى.

## 2 التدريس

### أسئلة دائمة

هل قرأ الطلاب قسم **لماذا؟** من الدرس.

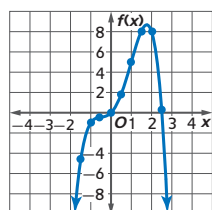
اسأل:

- إذا أنشأت رسماً بيانياً بأعوام على المحور  $x$  وحضور على المحور  $y$ . فماذا يكون تقاطع  $x$ . 1906
- ماذا يمكنك أن تقول عن متوسط ميل التمثيل البياني من عشرينيات القرن التاسع عشر وحتى سبعينيات نفس القرن؟ **سالب.**
- بفرض أن التمثيل البياني مال لأعلى جهة اليمين. ماذا يدل ذلك على الحضور السينمائي؟ **أن الحضور كان يزداد**

1. **تمثيلات بيانية لدوال كثيرة الحدود** لرسم تمثيل بياني لدالة كثيرة الحدود، قم بعمل جدول للقيم لإيجاد عدة نقاط، ثم اربط هذه النقاط لعمل منحنى مستمر سلس. ومن خلال معرفة السلوك الطرقي للتمثيل البياني، ستتمكن من استكمال الرسم.

### المثال الأول التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة  $f(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x$  عن طريق عمل جدول قيم.

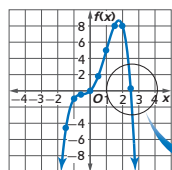


$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
-2.5	$\approx -41$	0.5	$\approx 1.8$
-2.0	-16	1.0	5.0
-1.5	$\approx -4.7$	1.5	$\approx 8.1$
-1.0	-1.0	2.0	8.0
-0.5	$\approx -0.4$	2.5	$\approx 0.3$
0.0	0.0	3.0	-21

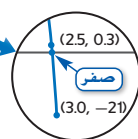
هذه كثيرة حدود زوجية الدرجة بمعامل رئيس سلبى، لذلك فإن  $f(x) \rightarrow -\infty$  لأن  $x \rightarrow +\infty$  و  $f(x) \rightarrow -\infty$  لأن  $x \rightarrow -\infty$ . لاحظ أن التمثيل البياني يتقاطع مع المحور  $x$  عند نقطتين، مشيراً إلى أن هناك صفرين لهذه الدالة.

### تمارين موجهة 1. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.

1. ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة  $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$  عن طريق عمل جدول قيم.



في المثال الأول، وُجد صفر في  $x = 0$ . كما وُجد صفر آخر بين  $x = 2.5$  و  $x = 3.0$  ولأن  $f(x)$  موجبة لـ  $x = 2.5$  وسالبة لـ  $x = 3.0$  ولأن جميع الدوال كثيرة الحدود مستمرة، فنحن نعرف أن هناك صفر بين هاتين القيمتين.



لذلك، إذا عملت قيمة  $f(x)$  على تغيير العلامات من قيمة  $x$  إلى القيمة التالية، فإنه يوجد صفر بين قيمتي  $x$  الاثنتين. تسمى هذه الفكرة باسم **مبدأ الموقع**.

## 1 الرسوم البيانية للدوال كثيرة الحدود

**المثال 1** يوضح كيفية التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود عن طريق إنشاء جدول قيم. **المثال 2** يوضح كيفية تمثيل دالة كثيرة حدود بيانياً عن طريق تحديد قيم  $x$  المتتالية التي يقع بينها كل صفر حقيقي للدالة.

### التقييم التقويمي

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

### أمثلة إضافية

1 ارسم  $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$

عن طريق إنشاء جدول قيم.

انظر الهامش السفلي للحصول على التمثيل البياني.

2 حدد قيم الأعداد المتتالية لـ  $x$

التي يقع بينها كل صفر حقيقي للدالة

$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$ .

ثم ارسم التمثيل البياني.

يوجد أصفار بين  $x = -2$  و

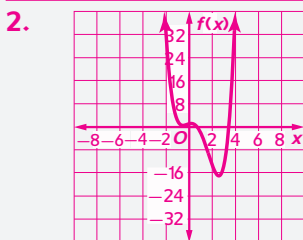
$x = -1$  وبين  $x = 0$  و  $x = 1$  وبين

$x = 0$  و  $x = 1$  وبين  $x = 2$  و

$x = 3$ . انظر الهامش السفلي

للحصول على التمثيل البياني.

### إجابة إضافية (تمارين موجهة)



**لمفهوم الرئيس مبدأ الموقع**

**الكلمات**

افترض أن  $f(x) = y$  يمثل دالة كثيرة الحدود و  $b$  و  $a$  عددين حقيقيين حيث  $f(a) < 0$  و  $f(b) > 0$ . كما أن الدالة بها على الأقل صفراً حقيقياً واحداً بين  $a$  و  $b$ .

**نموذج**

### نصيحة دراسية

**الدرجة** تذكر أن درجة الدالة هي أيضاً الحد الأقصى لعدد الأصفار التي قد توجد في الدالة.

### المثال 2 تحديد موقع أصفار الدالة

حدد قيم الأعداد الصحيحة المتتالية لـ  $x$  التي يقع بينها كل صفر حقيقي لـ  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ . ثم ارسم التمثيل البياني.

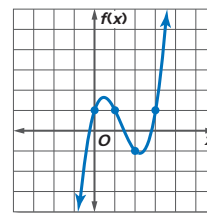
قم بإنشاء جدول قيم. بما أن  $f(x)$  هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، فإنه سيكون بها ثلاثة أصفار أو صفر واحد حقيقي. وانظر إلى قيم  $f(x)$  لتحديد موقع الأصفار. ثم استخدم النقاط لإنشاء التمثيل البياني للدالة.

$x$	$f(x)$
-2	-29
-1	-7
0	1
1	1
2	-1
3	1
4	13

تغيير في العلامة

تغيير في العلامة

تغيير في العلامة



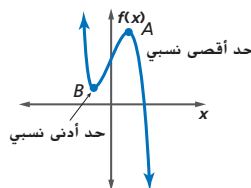
تشير تغييرات العلامة إلى وجود أصفار بين  $x = -1$  و  $x = 0$  وبين  $x = 0$  و  $x = 2$ .

2. بين 0 و 1 وبين 3 و 4 انظر الهامش لمعرفة التمثيل البياني.

2. حدد قيم الأعداد الصحيحة المتتالية لـ  $x$  التي يقع بينها كل صفر حقيقي للدالة  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ . ثم ارسم التمثيل البياني.

### 2 نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى من النقاط

العام لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة.



النقطة  $A$  على التمثيل البياني هي **حد أقصى نسبي** للدالة لأنه لا يوجد أي نقطة أخرى مجاورة لها إحداثي  $y$  أكبر. كما أن التمثيل البياني يزيد كلما اقترب من النقطة  $A$  ويقل كلما ابتعد عنها.

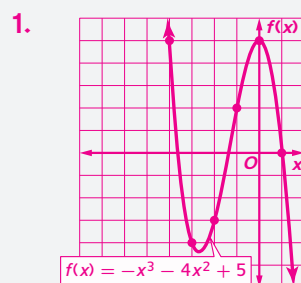
وعلى النقيض فإن النقطة  $B$  هي **حد أدنى نسبي** لأنه لا يوجد أي نقطة أخرى إحداثي  $y$  أقل. كما أن التمثيل البياني يقل كلما اقترب من النقطة  $B$  ويزيد كلما ابتعد عنها. ويطلق على قيم الحد الأقصى والحد الأدنى للدالة اسم **القيم القصوى**.

غالباً ما يشار إلى هذه النقاط باسم **نقاط التحول**. وفي معظم الأحيان يكون للتمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة  $n$  نقاط تحول  $n - 1$ .

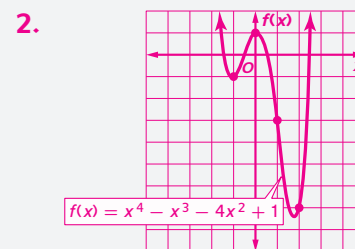
### نصيحة دراسية

**الدوال الفردية** بعض الدوال الفردية مثل  $f(x) = x^3$  ليس بها نقاط تحول.

### إجابات إضافية (أمثلة إضافية)



A2-TWE07-02-01-82

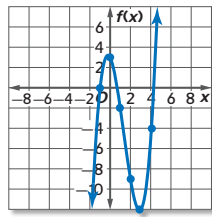


A2-TWE07-02-02-8

### المثال 3 نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى

ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$  وأوجد قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث عندها القيم القصوى والدنيا.

قم بإنشاء جدول قيم وارسم تمثيلاً بيانياً للدالة.



x	f(x)
-2	-17
-1	0
0	3
1	-2
2	-9
3	-12
4	-4
5	18

صفر

يشير إلى وجود حد أقصى نسبي

يشير إلى وجود حد أدنى نسبي نسبي

صفر بين 4 و5

انظر إلى جدول القيم والتمثيل البياني.

تغير قيمة  $f(x)$  العلامات بين  $x = 5$  و  $x = 4$  مشيرة إلى وجود صفر في الدالة.

قيمة  $f(x)$  في  $x = 0$  أكبر من النقاط المحيطة، لذا يجب أن يوجد حد أقصى نسبي قريب من  $x = 0$ .

قيمة  $f(x)$  في  $x = 3$  أقل من النقاط المحيطة، لذا يجب أن يوجد حد أدنى نسبي قريب من  $x = 3$ .

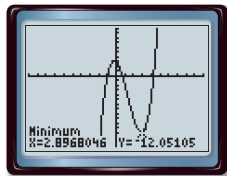
**تحقق** استخدم حاسبة تمثيلات بيانية لإيجاد الحد الأدنى والحد الأقصى النسبي للدالة وتأكد من تقديراتك.

أدخل  $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$  في قائمة Y وارسم الدالة بيانياً.

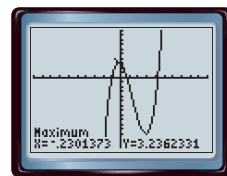
استخدم القائمة CALC لإيجاد كل حد أقصى وحد أدنى.

عند اختيار الحد الأعلى، حرك المؤشر إلى يسار الحد الأقصى أو الأدنى. عند اختيار الحد الأدنى، حرك المؤشر إلى يمين الحد الأقصى أو الأدنى.

اضغط **ENTER** مرتين.



[-10, 10] scl: 1 by [-15, 10] scl: 1



[-10, 10] scl: 1 by [-15, 10] scl: 1

تقديرات الحد الأقصى النسبي القريب من  $x = 0$  والحد الأدنى النسبي القريب من  $x = 3$  هي تقديرات دقيقة.

### تمارين موجهة

3. ارسم هذه الدالة بيانياً.  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$  وأوجد قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث عندها القيم القصوى والدنيا. **انظر الهامش.**

**نصيحة دراسية**  
الحد الأقصى والحد الأدنى  
قد يكون بكثرة الحدود ذات  
الدرجة الأكبر من 3 أكثر من حد  
أدنى نسبي وحد أقصى نسبي  
واحد.

**نصيحة دراسية**  
القيم النسبية لا تقع  
الأصغار ونقاط التحول دائماً  
عند القيم الصحيحة لـ  $x$ .

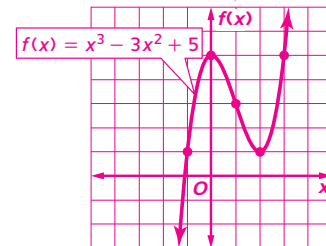
## 2 نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى

**المثال 3** يوضح كيفية تمثيل دالة كثيرة حدود بيانياً وإيجاد قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث عندها القيم القصوى والدنيا.

**المثال 4** يوضح كيفية استخدام التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود للكشف عن الاتجاهات في بيانات العالم الحقيقي.

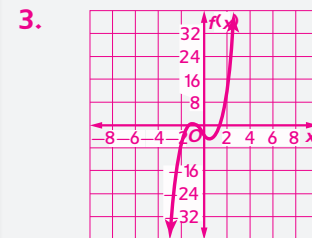
### مثال إضافي

3 ارسم ما يلي بيانياً  
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  وأوجد  
قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث  
عندها القيم القصوى والدنيا.



حد أقصى نسبي قريب من  $x = 0$ ،  
حد أدنى نسبي قريب من  $x = 2$

### إجابة إضافية (تمارين موجهة)



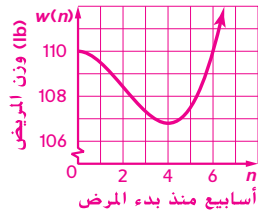
حد أقصى نسبي قريب من  
 $x = -1$ ، حد أدنى نسبي قريب  
من  $x = 1$

## التدريس بالتكنولوجيا

**نظام استجابة الطالب** قدم للطلاب عرض شرائح يوضح رسوماً بيانية مختلفة لدوال كثيرة الحدود. وعن كل رسم بياني أسأل الطلاب عما إذا كان الرسم يعرض دالة كثيرة حدود ذات درجة فردية أو زوجية. واطلب من الطلاب الإجابة بـ (أ) إذا كانت الدالة زوجية و(ب) إذا كانت فردية.

## مثال إضافي

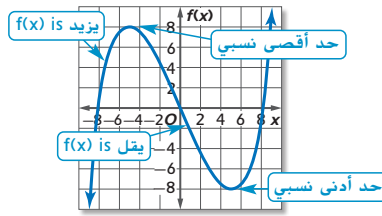
**4 الصحة** يمكن التعبير عن وزن  $w$  شخص مريض بالربط خلال فترة مرضية مدتها 7 أسابيع بهذا المعادلة التكعيبية  $w(n) = 0.1n^3 - 0.6n^2 + 110$  حيث إن  $n$  هو عدد الأسابيع منذ أن مرض المريض. **a.** ارسم المعادلة بيانياً.



**b.** صف نقاط التحول للممثل البياني وسلوكه الطرفي. يوجد نقطة حد أدنى نسبي عند الأسبوع 4. بالنسبة للسلوك الطرفي، يزداد  $w(n)$  بزيادة  $n$ .

**c.** ما هي اتجاهات وزن المريض التي يقترحها التمثيل البياني فقد المريض وزنه في الأربعة أشهر التالية لمرضه. وبعد أربعة أشهر زاد وزن المريض واستمر في الزيادة.

**d.** هل من المعقول افتراض استمرار الاتجاه إلى ما لا نهاية؟ قد يستمر الاتجاه لبضعة أسابيع، ولكن من غير المرجح أن يزداد وزن المريض إلى ما لا نهاية.



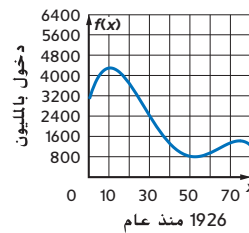
قد يكشف التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود عن اتجاهات في بيانات من الحياة اليومية. وغالباً ما يكون من المفيد أن نلاحظ متى يزداد أو يقل التمثيل البياني.

## مثال 4 من الحياة اليومية ارسم تمثيلاً بيانياً لنموذج لكثيرة حدود

**الأفلام** انظر إلى بداية الدرس. يمكن نمذجة حالات دخول دور السينما في الولايات المتحدة من خلال الدالة  $f(x) = -0.0017x^4 + 0.31x^3 - 17.66x^2 + 277x + 3005$ ، حيث أن  $x$  هو عدد الأعوام منذ عام  $f(x)$  و 1926 هو حالات الدخول السنوية بالمليون.

**a.** ارسم الدالة بيانياً.

قم بإنشاء جدول قيم للأعوام من 1926-2006 ثم اجمع النقاط واربطها مع بعضها بمنحنى سلس. فإيجاد وتجميع النقاط لكل عشرة أعوام يعطي توقعاً جيداً للتمثيل البياني.



x	f(x)
0	3005
10	4302
20	3689
30	2414
40	1317
50	830
60	977
70	1374
80	1229

**b.** صف نقاط التحول للممثل البياني وسلوكه الطرفي.

توجد قيمة قصوى نسبية قريبة من عام 1936 وعام 2000. وقيمة دنيا نسبية بين عام 1976 وعام 1981.  $f(x) \rightarrow -\infty$  لأن  $x \rightarrow -\infty$  و  $f(x) \rightarrow -\infty$  لأن  $x \rightarrow \infty$ .

**c.** اتجاهات دخول دور السينما التي يقترحها التمثيل البياني؟ هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى ما لا نهاية؟

بلغت حالات حضور دور السينما ذروتها في عام 1936 تقريباً وانخفضت حتى عام 1978 تقريباً. ثم زادت حتى عام 2000 وبدأت بعدها في الانخفاض.

**d.** هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى ما لا نهاية؟

قد يستمر هذا الاتجاه لبضع سنوات، إلا أن التمثيل البياني سيصبح غير منطقي قريباً لأنه يتوقع وجود حالة حضور سلبية في المستقبل.

## تمارين موجهة

**4. أجهزة الفاكس** يمكن كتابة المبيعات السنوية لأجهزة الفاكس المخصصة للاستخدام المنزلي بهذا الشكل  $f(x) = -0.17x^4 + 6.29x^3 - 77.65x^2 + 251x + 1100$ ، حيث أن  $x$  هو عدد الأعوام بعد عام 1990 و  $f(x)$  هي المبيعات السنوية بالمليون درهم.

**A.** ارسم الدالة بيانياً. **انظر الهامش.**

**B.** صف نقاط التحول للممثل البياني وسلوكه الطرفي.

**C.** هي اتجاهات مبيعات أجهزة الفاكس التي يقترحها التمثيل البياني؟

**D.** هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى ما لا نهاية؟



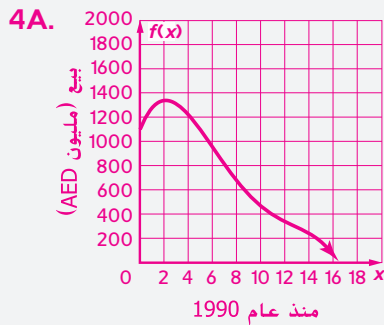
## رابط من الحياة اليومية

تم بيع أكثر من 1.4 مليون تذكرة سينما في الولايات المتحدة في عام 2006.

المصدر: سي إن إن

**4B.** يبلغ التمثيل البياني ذروته عند  $x = 2$  تقريباً، ثم ينخفض بثبات مع انخفاض قيمة  $x$ . **4C.** بلغت مبيعات أجهزة الفاكس ذروتها في عام 1992، ثم انخفضت منذ ذلك الحين. وبحلول عام 2006، وصلت مبيعات أجهزة الفاكس إلى الصفر. **4D.** نموذج الإجابة: يعتبر التمثيل البياني منطقياً ليقترح وجود انخفاض حاد في المبيعات، ولكنه يبدو غير منطقي عندما اقترح وصول المبيعات إلى الصفر في عام 2006.

## إجابة إضافية (تمارين موجهة)



## التدريس المتمايز

أ.م

ص.م

ق.م

سأل الطلاب كيف يمكن للدوال وصف حالات من الحياة الحقيقية.

ينبغي أن تطلب منهم مناقشة مدى ملائمة وصف حالات الحياة اليومية بدوال رياضية. وساعدهم على فهم أن الدالة عادة ما تكون مجرد تقريب لبيانات العالم الحقيقي، وغالباً ما تكون نموذجاً معقولاً لنطاق محدود من القيم.

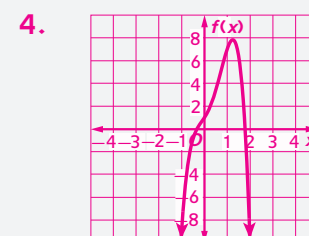
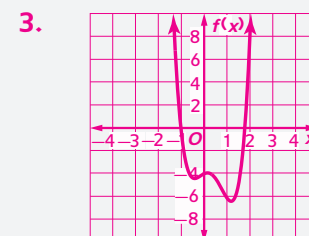
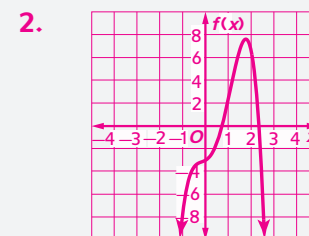
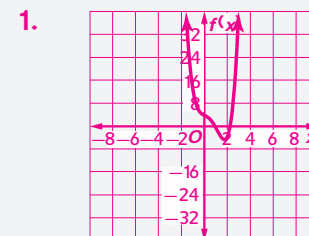
## 3 تمرين

### التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-13 للتحقق من الفهم.

استخدام التمثيل البياني الموجود أسفل هذه الصفحة لتخصيص المهام لطلابك.

### إجابات إضافية



### تأكد من أنك فهمت.

المثال 1

ارسم تمثيلاً بيانياً لكل معادلة كثيرة حدود عن طريق إنشاء جدول قيم. 4-1. انظر الهامش.

- $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x + 4$
- $f(x) = -2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 3$
- $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 4$
- $f(x) = -4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

المثال 2

حدد قيم الأعداد الصحيحة المتتالية لـ  $x$  التي يقع بينها كل صفر حقيقي لكل دالة ثم ارسم التمثيل البياني. 8-5. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
- $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$
- $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x - 8$
- $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 4$

المثال 3

ارسم تمثيلاً بيانياً لكل دالة كثيرة حدود. وأوجد قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث عندها القيم القصوى والدنيا. حدد مجال ومدى كل دالة.

- 9-12. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.
10.  $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 2x + 2$
11.  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 1$
12.  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

المثال 4

13. كن منطقيًا. يمكن كتابة المبيعات السنوية للأقراص المدمجة باستخدام الدالة الرباعية التالية  $f(x) = 0.48x^4 - 9.6x^3 + 53x^2 - 49x + 599$ , حيث  $x$  هو عدد الأعوام بعد عام 1995، و  $f(x)$  هي حجم المبيعات السنوية بالملايين.

- ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة  $0 \leq x \leq 10$ . انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.
- صف نقاط تحول التمثيل البياني وسلوكه الطرفي. والفترات الزمنية التي يزيد فيها الرسم ويقل.
- استمر في التمثيل البياني لـ  $x = 11$  و  $x = 12$ . ما هي اتجاهات مبيعات الأقراص المدمجة التي يقترحها التمثيل البياني؟ انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.

d. هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى ما لا نهاية؟ اشرح. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.

13b. نموذج الإجابة: الحد الأقصى النسبي عند  $x = 5$  والحد الأدنى النسبي عند  $x \sim 9.5$   $f(x) \rightarrow \infty$  و  $x \rightarrow -\infty$  و  $f(x) \rightarrow \infty$  لأن  $x \rightarrow \infty$ . يزيد التمثيل البياني عندما تكون  $x > 9.5$  و  $x < 5$  و يقل عندما تكون  $5 < x < 9.5$ .

### تمارين وحل مسائل

الأمثلة 3-1

أكمل ما يلي. 21-14. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.

- ارسم تمثيلاً بيانياً لكل معادلة عن طريق إنشاء جدول قيم.
  - حدد قيم الأعداد المتتالية لـ  $x$  التي يقع بينها كل صفر حقيقي.
  - أوجد قيمة إحداثيات  $x$  التي تحدث عندها القيم القصوى والدنيا النسبية.
14.  $f(x) = x^3 + 3x^2$
  15.  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$
  16.  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$
  17.  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$
  18.  $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 8x$
  19.  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 4$
  20.  $f(x) = x^4 + 2x - 1$
  21.  $f(x) = x^4 + 8x^2 - 12$

23. الحد الأقصى النسبي:

$$x = -2.73$$

الحد الأدنى النسبي:

$$x = 0.73$$

المثال 4

25. الحد الأقصى النسبي:

$$x = 1.34$$

لا يوجد حد أدنى نسبي

26. الحد الأقصى النسبي:

$$x = -1.87$$

الحد الأدنى النسبي:

$$x = 1.52$$

لا يوجد حد أقصى أو أدنى نسبي

220 | الدرس 4-4 | تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

### خيارات واجب منزلي متباينة

المستوى	المهمة	خيار ليومين
أساسي ق.م	14-32, 47-70	15-31, 54-57, 70-71, 72-73, 74-75, 76-77, 78-79, 80-81, 82-83, 84-85, 86-87, 88-89, 90-91, 92-93, 94-95, 96-97, 98-99, 100-101, 102-103, 104-105, 106-107, 108-109, 110-111, 112-113, 114-115, 116-117, 118-119, 120-121, 122-123, 124-125, 126-127, 128-129, 130-131, 132-133, 134-135, 136-137, 138-139, 140-141, 142-143, 144-145, 146-147, 148-149, 150-151, 152-153, 154-155, 156-157, 158-159, 160-161, 162-163, 164-165, 166-167, 168-169, 170-171, 172-173, 174-175, 176-177, 178-179, 180-181, 182-183, 184-185, 186-187, 188-189, 190-191, 192-193, 194-195, 196-197, 198-199, 200-201, 202-203, 204-205, 206-207, 208-209, 210-211, 212-213, 214-215, 216-217, 218-219, 220-221, 222-223, 224-225, 226-227, 228-229, 230-231, 232-233, 234-235, 236-237, 238-239, 240-241, 242-243, 244-245, 246-247, 248-249, 250-251, 252-253, 254-255, 256-257, 258-259, 260-261, 262-263, 264-265, 266-267, 268-269, 270-271, 272-273, 274-275, 276-277, 278-279, 280-281, 282-283, 284-285, 286-287, 288-289, 290-291, 292-293, 294-295, 296-297, 298-299, 300-301, 302-303, 304-305, 306-307, 308-309, 310-311, 312-313, 314-315, 316-317, 318-319, 320-321, 322-323, 324-325, 326-327, 328-329, 330-331, 332-333, 334-335, 336-337, 338-339, 340-341, 342-343, 344-345, 346-347, 348-349, 350-351, 352-353, 354-355, 356-357, 358-359, 360-361, 362-363, 364-365, 366-367, 368-369, 370-371, 372-373, 374-375, 376-377, 378-379, 380-381, 382-383, 384-385, 386-387, 388-389, 390-391, 392-393, 394-395, 396-397, 398-399, 400-401, 402-403, 404-405, 406-407, 408-409, 410-411, 412-413, 414-415, 416-417, 418-419, 420-421, 422-423, 424-425, 426-427, 428-429, 430-431, 432-433, 434-435, 436-437, 438-439, 440-441, 442-443, 444-445, 446-447, 448-449, 450-451, 452-453, 454-455, 456-457, 458-459, 460-461, 462-463, 464-465, 466-467, 468-469, 470-471, 472-473, 474-475, 476-477, 478-479, 480-481, 482-483, 484-485, 486-487, 488-489, 490-491, 492-493, 494-495, 496-497, 498-499, 500-501, 502-503, 504-505, 506-507, 508-509, 510-511, 512-513, 514-515, 516-517, 518-519, 520-521, 522-523, 524-525, 526-527, 528-529, 530-531, 532-533, 534-535, 536-537, 538-539, 540-541, 542-543, 544-545, 546-547, 548-549, 550-551, 552-553, 554-555, 556-557, 558-559, 560-561, 562-563, 564-565, 566-567, 568-569, 570-571, 572-573, 574-575, 576-577, 578-579, 580-581, 582-583, 584-585, 586-587, 588-589, 590-591, 592-593, 594-595, 596-597, 598-599, 600-601, 602-603, 604-605, 606-607, 608-609, 610-611, 612-613, 614-615, 616-617, 618-619, 620-621, 622-623, 624-625, 626-627, 628-629, 630-631, 632-633, 634-635, 636-637, 638-639, 640-641, 642-643, 644-645, 646-647, 648-649, 650-651, 652-653, 654-655, 656-657, 658-659, 660-661, 662-663, 664-665, 666-667, 668-669, 670-671, 672-673, 674-675, 676-677, 678-679, 680-681, 682-683, 684-685, 686-687, 688-689, 690-691, 692-693, 694-695, 696-697, 698-699, 700-701, 702-703, 704-705, 706-707, 708-709, 710-711, 712-713, 714-715, 716-717, 718-719, 720-721, 722-723, 724-725, 726-727, 728-729, 730-731, 732-733, 734-735, 736-737, 738-739, 740-741, 742-743, 744-745, 746-747, 748-749, 750-751, 752-753, 754-755, 756-757, 758-759, 760-761, 762-763, 764-765, 766-767, 768-769, 770-771, 772-773, 774-775, 776-777, 778-779, 780-781, 782-783, 784-785, 786-787, 788-789, 790-791, 792-793, 794-795, 796-797, 798-799, 800-801, 802-803, 804-805, 806-807, 808-809, 810-811, 812-813, 814-815, 816-817, 818-819, 820-821, 822-823, 824-825, 826-827, 828-829, 830-831, 832-833, 834-835, 836-837, 838-839, 840-841, 842-843, 844-845, 846-847, 848-849, 850-851, 852-853, 854-855, 856-857, 858-859, 860-861, 862-863, 864-865, 866-867, 868-869, 870-871, 872-873, 874-875, 876-877, 878-879, 880-881, 882-883, 884-885, 886-887, 888-889, 890-891, 892-893, 894-895, 896-897, 898-899, 900-901, 902-903, 904-905, 906-907, 908-909, 910-911, 912-913, 914-915, 916-917, 918-919, 920-921, 922-923, 924-925, 926-927, 928-929, 930-931, 932-933, 934-935, 936-937, 938-939, 940-941, 942-943, 944-945, 946-947, 948-949, 950-951, 952-953, 954-955, 956-957, 958-959, 960-961, 962-963, 964-965, 966-967, 968-969, 970-971, 972-973, 974-975, 976-977, 978-979, 980-981, 982-983, 984-985, 986-987, 988-989, 990-991, 992-993, 994-995, 996-997, 998-999, 1000-1001, 1002-1003, 1004-1005, 1006-1007, 1008-1009, 1010-1011, 1012-1013, 1014-1015, 1016-1017, 1018-1019, 1020-1021, 1022-1023, 1024-1025, 1026-1027, 1028-1029, 1030-1031, 1032-1033, 1034-1035, 1036-1037, 1038-1039, 1040-1041, 1042-1043, 1044-1045, 1046-1047, 1048-1049, 1050-1051, 1052-1053, 1054-1055, 1056-1057, 1058-1059, 1060-1061, 1062-1063, 1064-1065, 1066-1067, 1068-1069, 1070-1071, 1072-1073, 1074-1075, 1076-1077, 1078-1079, 1080-1081, 1082-1083, 1084-1085, 1086-1087, 1088-1089, 1090-1091, 1092-1093, 1094-1095, 1096-1097, 1098-1099, 1100-1101, 1102-1103, 1104-1105, 1106-1107, 1108-1109, 1110-1111, 1112-1113, 1114-1115, 1116-1117, 1118-1119, 1120-1121, 1122-1123, 1124-1125, 1126-1127, 1128-1129, 1130-1131, 1132-1133, 1134-1135, 1136-1137, 1138-1139, 1140-1141, 1142-1143, 1144-1145, 1146-1147, 1148-1149, 1150-1151, 1152-1153, 1154-1155, 1156-1157, 1158-1159, 1160-1161, 1162-1163, 1164-1165, 1166-1167, 1168-1169, 1170-1171, 1172-1173, 1174-1175, 1176-1177, 1178-1179, 1180-1181, 1182-1183, 1184-1185, 1186-1187, 1188-1189, 1190-1191, 1192-1193, 1194-1195, 1196-1197, 1198-1199, 1200-1201, 1202-1203, 1204-1205, 1206-1207, 1208-1209, 1210-1211, 1212-1213, 1214-1215, 1216-1217, 1218-1219, 1220-1221, 1222-1223, 1224-1225, 1226-1227, 1228-1229, 1230-1231, 1232-1233, 1234-1235, 1236-1237, 1238-1239, 1240-1241, 1242-1243, 1244-1245, 1246-1247, 1248-1249, 1250-1251, 1252-1253, 1254-1255, 1256-1257, 1258-1259, 1260-1261, 1262-1263, 1264-1265, 1266-1267, 1268-1269, 1270-1271, 1272-1273, 1274-1275, 1276-1277, 1278-1279, 1280-1281, 1282-1283, 1284-1285, 1286-1287, 1288-1289, 1290-1291, 1292-1293, 1294-1295, 1296-1297, 1298-1299, 1300-1301, 1302-1303, 1304-1305, 1306-1307, 1308-1309, 1310-1311, 1312-1313, 1314-1315, 1316-1317, 1318-1319, 1320-1321, 1322-1323, 1324-1325, 1326-1327, 1328-1329, 1330-1331, 1332-1333, 1334-1335, 1336-1337, 1338-1339, 1340-1341, 1342-1343, 1344-1345, 1346-1347, 1348-1349, 1350-1351, 1352-1353, 1354-1355, 1356-1357, 1358-1359, 1360-1361, 1362-1363, 1364-1365, 1366-1367, 1368-1369, 1370-1371, 1372-1373, 1374-1375, 1376-1377, 1378-1379, 1380-1381, 1382-1383, 1384-1385, 1386-1387, 1388-1389, 1390-1391, 1392-1393, 1394-1395, 1396-1397, 1398-1399, 1400-1401, 1402-1403, 1404-1405, 1406-1407, 1408-1409, 1410-1411, 1412-1413, 1414-1415, 1416-1417, 1418-1419, 1420-1421, 1422-1423, 1424-1425, 1426-1427, 1428-1429, 1430-1431, 1432-1433, 1434-1435, 1436-1437, 1438-1439, 1440-1441, 1442-1443, 1444-1445, 1446-1447, 1448-1449, 1450-1451, 1452-1453, 1454-1455, 1456-1457, 1458-1459, 1460-1461, 1462-1463, 1464-1465, 1466-1467, 1468-1469, 1470-1471, 1472-1473, 1474-1475, 1476-1477, 1478-1479, 1480-1481, 1482-1483, 1484-1485, 1486-1487, 1488-1489, 1490-1491, 1492-1493, 1494-1495, 1496-1497, 1498-1499, 1500-1501, 1502-1503, 1504-1505, 1506-1507, 1508-1509, 1510-1511, 1512-1513, 1514-1515, 1516-1517, 1518-1519, 1520-1521, 1522-1523, 1524-1525, 1526-1527, 1528-1529, 1530-1531, 1532-1533, 1534-1535, 1536-1537, 1538-1539, 1540-1541, 1542-1543, 1544-1545, 1546-1547, 1548-1549, 1550-1551, 1552-1553, 1554-1555, 1556-1557, 1558-1559, 1560-1561, 1562-1563, 1564-1565, 1566-1567, 1568-1569, 1570-1571, 1572-1573, 1574-1575, 1576-1577, 1578-1579, 1580-1581, 1582-1583, 1584-1585, 1586-1587, 1588-1589, 1590-1591, 1592-1593, 1594-1595, 1596-1597, 1598-1599, 1600-1601, 1602-1603, 1604-1605, 1606-1607, 1608-1609, 1610-1611, 1612-1613, 1614-1615, 1616-1617, 1618-1619, 1620-1621, 1622-1623, 1624-1625, 1626-1627, 1628-1629, 1630-1631, 1632-1633, 1634-1635, 1636-1637, 1638-1639, 1640-1641, 1642-1643, 1644-1645, 1646-1647, 1648-1649, 1650-1651, 1652-1653, 1654-1655, 1656-1657, 1658-1659, 1660-1661, 1662-1663, 1664-1665, 1666-1667, 1668-1669, 1670-1671, 1672-1673, 1674-1675, 1676-1677, 1678-1679, 1680-1681, 1682-1683, 1684-1685, 1686-1687, 1688-1689, 1690-1691, 1692-1693, 1694-1695, 1696-1697, 1698-1699, 1700-1701, 1702-1703, 1704-1705, 1706-1707, 1708-1709, 1710-1711, 1712-1713, 1714-1715, 1716-1717, 1718-1719, 1720-1721, 1722-1723, 1724-1725, 1726-1727, 1728-1729, 1730-1731, 1732-1733, 1734-1735, 1736-1737, 1738-1739, 1740-1741, 1742-1743, 1744-1745, 1746-1747, 1748-1749, 1750-1751, 1752-1753, 1754-1755, 1756-1757, 1758-1759, 1760-1761, 1762-1763, 1764-1765, 1766-1767, 1768-1769, 1770-1771, 1772-1773, 1774-1775, 1776-1777, 1778-1779, 1780-1781, 1782-1783, 1784-1785, 1786-1787, 1788-1789, 1790-1791, 1792-1793, 1794-1795, 1796-1797, 1798-1799, 1800-1801, 1802-1803, 1804-1805, 1806-1807, 1808-1809, 1810-1811, 1812-1813, 1814-1815, 1816-1817, 1818-1819, 1820-1821, 1822-1823, 1824-1825, 1826-1827, 1828-1829, 1830-1831, 1832-1833, 1834-1835, 1836-1837, 18

## إجابة إضافية

40a.



ارسم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود بالخصائص التالية.

27. دالة فردية لها أصفار عند 4 و 2 و 0 و -3 و -5. **انظر الوحدة 4**

28. دالة زوجية لها أصفار عند 5 و 3 و 1 و -2. **ملحق الإجابات.**

29. دالة من الدرجة الرابعة لها صفر واحد عند -3، وحد أقصى عند  $x = 2$ ، وحد أدنى عند  $x = -1$

30. دالة من الدرجة الخامسة لها أصفار عند 3 و -1 و -4، وحد أقصى عند  $x = -2$

31. دالة فردية لها أصفار عند 5 و 2 و -1، ومعامل رئيس سالب

32. دالة زوجية بحد أدنى عن  $x = 3$  ومعامل رئيس موجب

33. **الفوص** يمكن حساب الانحناء  $d$  للوحة الفوص البالغ

طولها 10 أقدام باستخدام الدالة،  $d(x) = 0.015x^2 - 0.0005x^3$

حيث أن  $x$  هي المسافة بين الفواص والطرف الثابت من اللوحة بالقدم.

a. قم بإنشاء جدول قيم للدالة لـ  $0 \leq x \leq 10$ . **انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

b. ارسم الدالة بيانيًا. **انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

c. ماذا يقترح السلوك الطرفي للرسم البياني كلما زاد  $x$ ؟ **يزيد  $d(x)$ .**

d. هل سيستمر هذا الاتجاه إلى ما لا نهاية؟ اشرح تعليلك. **نموذج الإجابة: لا؛ لا يمكن أن عن 10  $x$  يزيد**

أكمل ما يلي. **34-39. انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

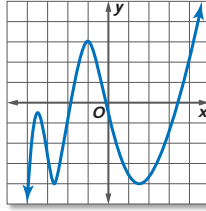
a. أوجد قيمة الاحداثي  $x$  لكل نقطة تحول وحدد ما إذا كانت تلك الإحداثيات حد أقصى أو حد أدنى نسبي.

b. أوجد قيمة الاحداثي  $x$  لكل صفر.

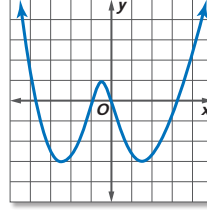
c. حدد أقل درجة ممكنة للدالة.

d. حدد مجال ومدى الدالة.

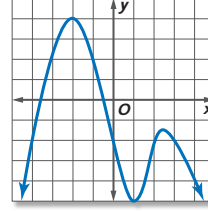
34.



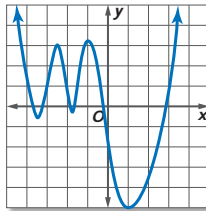
35.



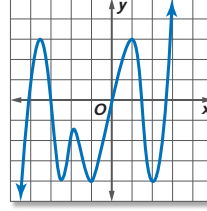
36.



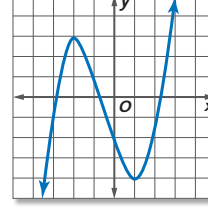
37.



38.



39.



40. **التعليق** يمكن كتابة عدد المشتركين المستخدمين لأجهزة الاستدعاء في الولايات المتحدة بهذا الشكل  $f(x) = 0.015x^4 - 0.44x^3 + 3.46x^2 - 2.7x + 9.68$ ، حيث إن  $x$  هو عدد الأعوام بعد عام 1990 و  $f(x)$  هو عدد المشتركين بالمليون.

a. ارسم الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

b. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني. **زيادة  $x$ ، يزيد  $f(x)$ .**

c. ما هو اقتراح السلوك الطرفي بشأن عدد المشتركين في أجهزة الاستدعاء؟

d. هل سيستمر هذا الاتجاه إلى ما لا نهاية؟ اشرح تعليلك.

40c. نموذج

الإجابة:

يقترح التمثيل

البياني

أن عدد

المستخدمين

في أجهزة

الاستدعاء

سيزيد

بشكل كبير

وسيستمر في

الزيادة.

40d. نموذج

الإجابة:

يعتبر التمثيل

البياني

منطقيًا إذا

كانت  $x \geq 15$

لأن استخدام

أجهزة

الاستدعاء

يتناقص

حاليًا بسرعة

ويتم استبدال

هذه الأجهزة

بمنتجات

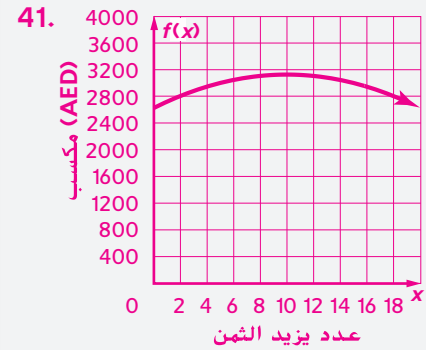
أكثر كفاءة.



## تمثيلات متعددة

في التمرين 46، يستخدم الطلاب جدول قيم وحاسبة رسوم بيانية لفحص خواص دالة عالية الرتبة.

## إجابات إضافية



1.25AED

42a. الأصفار:  $x = \pm 2$ ; تقاطعات مع المحور  $x: \pm 2$ ; تقاطع مع المحور  $y: 16$ ; نقاط التحول:  $x = -2, 0, 2$

42b.  $x = 0$

42c. انخفاض:  $x < -2$  و  $x > 0$ ; زيادة:  $-2 < x < 0$

43a. الأصفار:  $x \approx 1.75$ ; تقاطع مع المحور  $x: \approx 1.75$ ; تقاطع مع المحور  $y: -4$ ; نقاط التحول:  $x \approx -1.25, -0.5, 0.5, 1.25$

43b. لا يوجد محور تماثل

43c. انخفاض:  $-1.25 \leq x \leq 0.5$ ; زيادة:  $0.5 \leq x \leq 1.25$

44a. الأصفار:  $x \approx -1$  و  $x \approx 0$ ; تقاطع مع المحور  $y: 0$ ; نقطة التحول:  $x \approx -0.5$

44b. لا يوجد محور تماثل

44c. انخفاض:  $x \geq -0.5$ ; زيادة:  $x \leq -0.5$

45a. لا توجد أصفار، لا توجد تقاطعات مع المحور  $x$ ، تقاطع مع المحور  $y: 5$ ; لا توجد نقاط تحول

45b. لا يوجد محور تماثل

45c. انخفاض:  $x \leq -4$ ; ثبوت:  $-4 < x \leq 0$ ; زيادة:  $x > 0$

41. **الأسعار** تقوم ماكينات البيع الخاصة بخالد حالياً ببيع 3,500 مشروباً في الأسبوع بسعر 0.75 AED للعلبة. إلا أن خالد يفكر في زيادة الأسعار. ويمكن تمثيل أرباحه الأسبوعية بهذه الدالة  $f(x) = -5x^2 + 100x + 2,650$  حيث أن  $x$  هو عدد الزيادات البالغة 0.05 AED. ارسم الدالة بيانياً وحدد أكثر الأسعار ربحاً لخالد. **انظر الهامش.**

لكل دالة. 42-45. **انظر الهامش.**

a. حدد الأصفار والتقاطع مع المحور  $x$  و  $y$  ونقاط التحول.

b. حدد محور التماثل.

c. وحدد الفترات التي يزيد فيها أو يقل أو يثبت.

42.  $y = x^4 - 8x^2 + 16$

43.  $y = x^5 - 3x^3 + 2x - 4$

44.  $y = -2x^4 + 4x^3 - 5x$

45.  $y = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq -4 \\ 5 & \text{if } -4 < x \leq 0 \\ x^3 & \text{if } x > 0 \end{cases}$

46. **تمثيلات متعددة** انظر الدالة التالية. **انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

$f(x) = x^4 - 8.65x^3 + 27.34x^2 - 37.2285x + 18.27$

a. **التمثيل التحليلي** ما هي الدرجة، والمعامل الرئيس، والسلوك الطرفي؟

b. **التمثيل الجدولي** قم بإنشاء جدول قيم للأعداد الصحيحة  $f(x)$  إذا  $-4 \leq x \leq 4$  كانت كم عدد الأصفار التي توجد بالدالة كما يبدو من الجدول؟

c. **التمثيل البياني** قم بإنشاء تمثيلاً بيانياً للدالة باستخدام حاسبة رسوم بيانية.

d. **التمثيل البياني** غير نافذة العرض إلى  $[-0.4, 0.4]$  بمعدل 1:100. ما هي النتائج التي قد تستخلصها من هذا العرض الجديد للتمثيل البياني؟

47. **باقتراب قيم  $x$  من الأرقام الإيجابية أو السلبية الكبيرة، يصبح الحد ذو الدرجة الأكبر أكثر سيطرة على تحديد قيمة  $f(x)$ .**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

47. **التحليل** اشرح لماذا يعتبر المعامل الرئيس والدرجة هما العاملان الوحيدان للتحديد في السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

48. **التحليل** بين الجدول التالي قيم  $g(x)$ . وهي دالة تكعيبية. هل من الممكن أن يوجد صفر بين  $x = 2$  و  $x = 3$ ؟ اشرح تعليلك.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	4	-2	-1	1	-2	-2

48. **نموذج الإجابة: لا؛ الدالة التكعيبية هي دالة من الدرجة الثالثة ولا يمكن أن يكون بها أكثر من ثلاثة أصفار. وتتبع هذه الأصفار بين -2 و -1، 0 و 1، 1 و 2.**

49. **النهاية المفتوحة** ارسم تمثيلاً بيانياً لكثيرة حدود فردية بها 6 نقاط تحول وجذرين مزدوجين. **انظر الهامش.**

50. **الحجج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحياناً أم دائماً أم غير صحيحة أبداً. اشرح تعليلك.

في أي دالة كثيرة حدود مستمرة، يكون أيضاً الإحداثي  $y$  لنقطة تحول حد أقصى نسبي أو حد أدنى نسبي.

51. **نموذج الإجابة: لا؛  $f(x) = x^2 + x$  هي درجة زوجية، لكن  $f(1) \neq f(-1)$ .**

52. **نموذج الإجابة: لا؛  $f(x) = x^3 + 2x^2$  هي درجة فردية، لكن  $-f(1) \neq f(-1)$ .**

53. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خصائص دالة كثيرة الحدود لإنشاء رسماً بيانياً لها؟ **انظر الهامش.**

50. **نموذج الإجابة: دائماً؛ تعرف نقطة تحول التمثيل البياني بالنقطة التي يتوقف فيها التمثيل البياني عن الزيادة ويبدأ في الانخفاض، مما يتسبب في وجود حد أقصى أو يتوقف عن الانخفاض ويبدأ في الزيادة، مما يتسبب في وجود حد أدنى.**

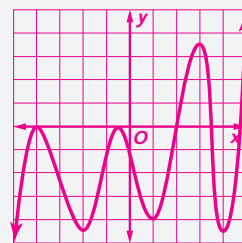
51. **التحليل** تكون الدالة زوجية إذا كان  $f(x) = f(-x)$  لكل  $x$  في مجال  $f$ . هل كل دالة كثيرة حدود زوجية الدرجة هي دالة زوجية أيضاً؟ اشرح.

52. **التحليل** تكون الدالة فردية إذا كان  $-f(x) = f(-x)$  لكل  $x$  في المجال. هل كل دالة كثيرة حدود فردية الدرجة هي دالة فردية أيضاً؟ اشرح.

53. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خصائص دالة كثيرة الحدود لإنشاء رسماً بيانياً لها؟ **انظر الهامش.**

222 | الدرس 4-4 | تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

49. **إجابة نموذجية**



53. **إجابة نموذجية من الدرجة يمكنك تحديد** ما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية والحد الأقصى لعدد الأصفار ونقاط التحول للتمثيل البياني ويمكنك إنشاء جدول قيم لمساعدتك في إيجاد المواقع التقريبية لنقاط التحول والأصفار. كما يمكن استخدام المعامل الرئيسي لتحديد السلوك الطرفي والدرجة للتمثيل البياني وبناء شكل التمثيل البياني.

## 4 التقويم

**أخبار الأمس** اطلب من الطلاب كتابة كيفية عمل درس الأمس المعني بتقييم الدوال كثيرة الحدود لتحديد قيم معطاة على مساعدتهم على رسم الدوال كثيرة الحدود بيانها في درس اليوم.



استكشفت الطلاب كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود.

### أسأل:

■ متى تكون الدالة غير الخطية نموذجاً جيداً؟ إجابة نموذجية عندما تكون العلاقة بين الكميات غير ثابتة.

■ ما هي مزايا استخدام الدوال كثيرة الحدود للنمذجة؟

إجابة نموذجية بها خواص معروفة ومفهومة، وهناك نماذج متعددة يمكن اعتبارها ضمن نفس عائلة الدوال، كما أن الحساب الذي يتم لوضع التوقعات من السهل نسبياً إجراؤه.

### إجابات إضافية

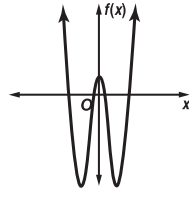
**58.**  $f(x) \rightarrow +\infty$  لأن  $f(x) \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow +\infty$  نظراً لأن السلوك الطرفي في نفس الاتجاه، فهذه دالة زوجية الدرجة. يتقاطع التمثيل البياني مع المحور  $x$  في نقطتين، لذلك يوجد صفرين حقيقيين.

**59.**  $f(x) \rightarrow -\infty$  لأن  $f(x) \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow +\infty$  نظراً لأن السلوك الطرفي في نفس الاتجاه، فهذه دالة زوجية الدرجة. يتقاطع التمثيل البياني مع المحور  $x$  في ست نقاط، لذلك يوجد ست أصفار حقيقية.

**60.**  $f(x) \rightarrow +\infty$  لأن  $f(x) \rightarrow +\infty$   $x \rightarrow +\infty$  نظراً لأن السلوك الطرفي في نفس الاتجاه، فهذه دالة زوجية الدرجة. يتقاطع التمثيل البياني مع المحور  $x$  في أربع نقاط، لذلك يوجد أربعة أصفار حقيقية.

**56.** ما كثيرة الحدود التي تمثل  $(2x-7)(4x^2+5x-3)$ ؟

- F  $8x^3 - 18x^2 - 41x - 21$   
G  $8x^3 + 18x^2 + 29x - 21$   
H  $8x^3 - 18x^2 - 41x + 21$   
J  $8x^3 + 18x^2 - 29x + 21$



**57.** اختبار SAT/ACT يوضح

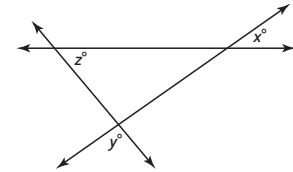
الشكل المعروض على اليمين التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود  $f(x)$ . أي مما يلي قد تكون درجة  $f(x)$ ؟

- A 2 D 5  
B 3 E 6  
C 4

**54.** أي مما يلي يعد عاملاً لـ  $x^2 + 2x - 15$ ؟

- A  $(x-3)(x-5)$   
B  $(x-3)(x+5)$   
C  $(x+3)(x-5)$   
D  $(x+3)(x+5)$

**55.** جواب مختصر في الشكل الوارد أدناه، إذا كان  $x = 35$  و  $z = 50$ ، فما قيمة  $y$ ؟



### مراجعة شاملة

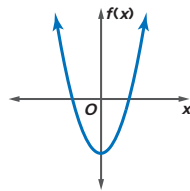
في كل رسم بياني،

a. صف السلوك الطرفي،

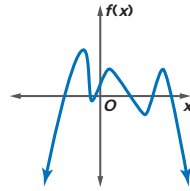
b. وحدد ما إذا كان يمثل دالة فردية أو زوجية الدرجة،

c. وحدد عدد الأصفار الحقيقية. (الدرس 3-4) 58-60. انظر الهامش.

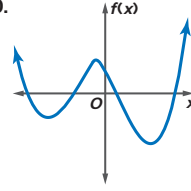
58.



59.



60.



بسط. (الدرس 2-4)

61.  $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \div (x + 1)$   
 $(x - 2)(x + 3)$

62.  $(4y^3 + 18y^2 + 5y - 12) \div (y + 4)$   
 $4y^2 + 2y - 3$

63.  $(2a^3 - a^2 - 4a) \div (a - 1)$   
 $2a^2 + a - 3 - \frac{3}{a-1}$

**64. الكيمياء** تحتاج هند إلى 200 مللي لتر من محلول حمضي بتركيز 48%. مع العلم بأن لديها

محاليل بتركيز 60% و 40% في المختبر، كم مللي لتر من محلول حمضي بتركيز 40%

يجب خلطه بمحلول حمضي بتركيز 60% لعمل الكمية المطلوبة من

المحلول الحمضي بتركيز 48%؟ (الدرس 3-6) **المحلول الذي تركيزه 60% و 120 mL لتر من المحلول الذي تركيزه 40%.**

### مراجعة المهارات

حلل إلى عوامل.

65.  $x^2 + 6x + 3x + 18$  ( $x + 6$ )( $x + 3$ ) 66.  $y^2 - 5y - 8y + 40$  ( $y - 5$ )( $y - 8$ ) 67.  $a^2 + 6a - 16$  ( $a + 8$ )( $a - 2$ )  
68.  $b^2 - 4b - 21$  ( $b - 7$ )( $b + 3$ ) 69.  $6x^2 - 5x - 4$  ( $3x - 4$ )( $2x + 1$ ) 70.  $4x^2 - 7x - 15$  ( $4x + 5$ )( $x - 3$ )

223

### التدريس المتميز

أ.م.

ض.م.

■ أوجد متوسط (نصف) الفترة من 0 إلى 1.

$$\frac{0+1}{2} = 0.5$$

■ قيم الدالة فيما يخص 0.5 لتحديد نصف الفترة الذي يقع فيه الصفر.  $f(0.5) = -2.25$

■ استخدم مبدأ الموقع لإثبات أن الصفر يجب أن يقع بين 0 و 0.5.

ويمكن تكرار هذا الإجراء حتى يتم الحصول على دقة الصفر المطلوبة.

**توسع** الأصفار الحقيقية لدالة مثل

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 11x + 3$$

بطريقة تعرف باسم طريقة التنصيف. تأكد من أن هذه الدالة بها أصفار حقيقية بين -2 و -1، 0 و 1،

$$f(-2) = -11, f(-1) = 9; 2, 1$$

$$f(0) = 3, f(1) = -5, f(2) = 9$$

ذلك الخطوات التالية للطلاب لتقريب الصفر بين 0 و 1.





# التمثيل البياني لمختبر التكنولوجيا: تمثيل البيانات باستخدام الدالات كثيرة الحدود

# 4-4

# التوسع

تمارين رياضية  
استخدم الأدوات الملائمة بشكل استراتيجي.

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة للتمثيل البياني لتمثيل  
نقاط البيانات عندما يكون المنحنى الأكثر ملائمة  
هو دالة كثيرة الحدود.

## 1 التركيز

**الهدف** استخدام حاسبة رسوم بيانية  
لنمذجة بيانات يكون المنحنى الأنسب  
بها هو دالة كثيرة حدود

### المواد

- حاسبة رسوم بيانية

### نصيحة تدريسية

يجب أن يسمح الطلاب القائمة L1  
والقائمة L2 قبل إدخال البيانات من  
الجدول في الخطوة 1. وهذا نهج موثوق  
به أكثر من "استبدال" البيانات القديمة  
بالبينات الجديدة.

## 2 التدريس

### العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب إلى أزواج. لمرج القدرات.  
واطلب من الأزواج استكمال الخطوات  
المذكورة في المثال.

### أسأل:

- في الخطوة 3 سوف يتناسب  
منحنى رباعي مع البيانات بأفضل  
صورة. وللتحقق من ذلك بطريقة  
سهلة ينبغي إيجاد معادلات الانحدار  
التربيعية والتكعيبية ثم نسخها  
إلى قائمة Y= جنباً إلى جنب مع  
معادلة الانحدار التربيعية. وقم بتغيير  
إعدادات النافذة الخاصة بالمحور  
x إلى  $[-0.2, 18.6]$ . وقم بإغلاق  
مخطط التشتت وارسم معادلات  
الانحدار الثلاث على نفس الشاشة.  
ثم استخدم TRACE للذهاب إلى كل  
قيمة x في الصف الأول من الجدول.  
وعند كل قيمة x، استخدم مفاتيح  
أسهم up/down (أعلى/أسفل)  
للتنقل بين المنحنيات، ومقارنة قيم  
y لكل منحنى انحدار مع قيمة y  
الواردة في الجدول.

**تدريب** اطلب من الطلاب استكمال  
التمارين 1-3.

### مثال

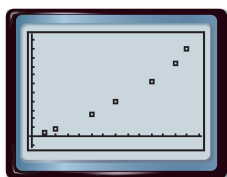
زمن الإنتقال (min)	1	2	5	7	10	12	13
المسافة (km)	400	800	2500	3900	6250	8400	10,000

جامعة أريزونا: المصدر

يوضح الجدول مسافة الموجة الزلزالية الناتجة  
عن هزة أرضية انتقلت من المركز السطحي للزلزال.  
ارسم خريطة التشتت والمنحنى الأكثر ملائمة لتوضيح  
علاقة المسافة بالزمن. ثم حدد بشكل تقريبي  
المسافة من المركز السطحي التي يمكن عندها الشعور  
بالموجة الزلزالية بعد 8.5 دقائق من وقت  
حدوث الهزة الأرضية.

**الخطوة 1** أدخل الزمن في L1 والمسافة في L2.

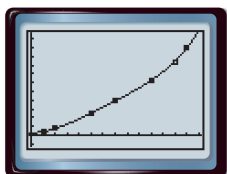
ترتيب الضغط على الأزرار: **STAT** **11** **ENTER** **2** **ENTER** **5** **ENTER** **7** **ENTER** **10** **ENTER** **12** **ENTER** **13** **ENTER** **400** **ENTER** **800** **ENTER** **2500** **ENTER** **3900** **ENTER** **6250** **ENTER** **8400** **ENTER** **10000** **ENTER**



by  $[-1232, 116321]$  scl: 1000

**الخطوة 2** ارسم تمثيلاً بيانياً للوحة التبعثر.

ترتيب الضغط على الأزرار: **2nd** **ISTAT** **PLOT1** **1** **ENTER** **9** **ZOOM**



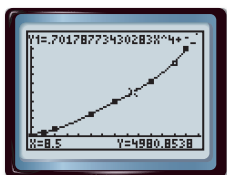
ترتيب الضغط على الأزرار: **STAT** **7** **ENTER** **Y=** **VARS** **5** **1** **GRAPH**

**الخطوة 3** حدد وارسم التمثيل البياني لمعادلة المنحنى الأكثر ملائمة.  
استخدم انحدار من الدرجة الرابعة للبيانات.

المعادلة موضحة على الشاشة **Y=**. إذا تم تقريبها، يمكن كتابة معادلة  
الانحدار الواضحة على الآلة الحاسبة من خلال المعادلة الجبرية  
 $y = 0.7x^4 - 17x^3 + 161x^2 - 21x + 293$

**الخطوة 4** استخدم خاصية **[ICALC]** لإيجاد قيمة الدالة  $x = 8.5$ .

ترتيب الضغط على الأزرار: **2nd** **ICALC** **1** **8.5** **ENTER**  
بعد مرور 8.5 دقائق، يتوقع أن يتم الشعور بالموجة الزلزالية  
على بعد 4980 كيلومتراً تقريباً من المركز السطحي للزلزال.



(يتبع في الصفحة القادمة)

### تحقق ذهني

يعطي الجدول المسافة خلال 7 دقائق وهي 3900 والمسافة  
خلال 10 دقائق هي 6250. بما أن 8.5 هي نقطة المنتصف بين  
7 و 10، فإن التقدير المنطقي للمسافة هي نقطة المنتصف  
بين 3900 و 6250. ✓

224 | ملحق 4-4 | التمثيل البياني لمختبر التكنولوجيا: تمثيل البيانات باستخدام الدالات كثيرة الحدود

## التدريس المتمايز

أ.م. ح.م.

**توسع** إن طبيعة الدوال كثيرة الحدود تجعلها مثالية لابتكار قصص مضحكة حول كيفية تغير الأمور  
بمرور الوقت. فشجع الطلاب على ابتكار قصص عن شيء ينمو أو يتقلص (أو كليهما) واعرض النمو  
بيانياً. ثم وسّع المشكلة عن طريق مطالبة الطلاب بإنشاء مقاييس للرسوم البيانية تتناسب مع سياق  
قصصهم.

## 3 التقويم

### التقويم التكويني

استخدم التمارين 10-4 للتأكد من أن الطلاب على معرفة بكيفية تحديد أي من المنحنيات العديدة المرسومة بيانياً يتناسب مع البيانات في أفضل صورة. واطلب من الطلاب تبرير الاختيار النهائي.

في التمارين 3 و6 و9، قد تتنوع إجابات الطلاب قليلاً اعتماداً على أفضل تناسب للمنحنيات.

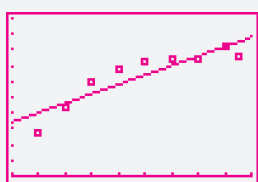
### من الحسي إلى المعنوي أسأل:

بالنظر إلى الوصف والأمر، ما هي صيغة كل مما يلي؟

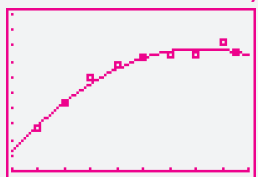
الوصف	الأمر	الصيغة
انحدار خطي	LinReg ( $ax + b$ )	$y = ax + b$
انحدار تربيعي	QuadReg	$y = ax^2 + bx + c$
انحدار تكعيبي	CubicReg	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

### إجابات إضافية

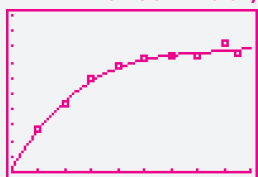
1. رسوم بيانية عينة:



20 [200, 0] scl: 20  
10 [10, 20] scl: 10 في



20 [200, 0] scl: 20  
10 [10, 20] scl: 10 في



20 [200, 0] scl: 20  
10 [10, 20] scl: 10 في

### التمارين

يوضح الجدول عدد الدقائق لكل يوم عمل من ثماني ساعات تستخدم لعداد قيمة يوم من الضرائب.

الدقائق	العام
56	1930
86	1940
119	1950
134	1960
144	1970
147	1980
148	1990
163	2000
151	2005

المصدر: مؤسسة الضرائب

عدد المركبات	العام	عدد المركبات	العام
533,999	2003	295,030	1998
565,492	2004	322,302	1999
592,122	2005	394,664	2000
634,559	2006	425,457	2001
695,763	2007	471,098	2002

المصدر: وزارة الطاقة الأمريكية

المسافة (وحدات فضائية)	الشهر
0.9840	يناير
0.9888	فبراير
0.9962	مارس
1.0050	إبريل
1.0122	مايو
1.0163	يونيو
1.0161	يوليو
1.0116	أغسطس
1.0039	سبتمبر
0.9954	أكتوبر
0.9878	نوفمبر
0.9837	ديسمبر

المصدر: موقع: مقهى الغضائفة

1. ارسم لوحة التبعية للبيانات. ثم ارسم التمثيل البياني لبعض المنحنيات الأكثر ملائمة التي تربط عدد الدقائق بعدد الأعوام. جرب LinReg، QuadReg، و CubicReg. **انظر الهامش.**

2. اكتب معادلة المنحنى الأكثر ملائمة للبيانات.

3. استناداً إلى المعادلة، كم عدد الدقائق التي يجب أن تعمل خلالها كل يوم في العام 2020 لعداد ضرائب يوم واحد؟ استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من منطقية تقديرك. **حوالي 164 min.**

2. نموذج الإجابة:  $y = (3.24 + 10^{-4})x^3 - 1.94x^2 + 3861.99x - 2,566,944.04$

يوضح الجدول العدد التقديري للمركبات ذات الوقود البديل المستخدمة في الولايات المتحدة الأمريكية في العام خلال الفترة من عام 1998 إلى عام 2007.

4. ارسم لوحة التبعية للبيانات. ثم ارسم التمثيل البياني لبعض المنحنيات الأكثر ملائمة التي تربط المسافة إلى الشهر. **انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

5. أي منحنى هو الأكثر ملائمة للبيانات؟ هل يعد هذا المنحنى هو الأفضل لتوقع القيم المستقبلية؟ **انظر الهامش.**

6. استخدم المعادلة الأكثر ملائمة التي ستعطي من وجهة نظرك التوقع الأكثر دقة لعدد المركبات ذات الوقود البديل التي سوف تستخدم في العام 2018. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من منطقية تقديرك. **انظر الهامش.**

يوضح الجدول متوسط المسافة من الشمس إلى الكرة الأرضية خلال كل شهر في العام.

7. ارسم لوحة التبعية للبيانات. ثم ارسم التمثيل البياني لبعض المنحنيات الأكثر ملائمة التي تربط المسافة بالشهر. **انظر الوحدة 4 ملحق الإجابات.**

8. اكتب معادلة المنحنى الأكثر ملائمة للبيانات. **انظر الهامش.**

9. استناداً إلى معادلة الانحدار، كم تبلغ المسافة بين الشمس والأرض في منتصف شهر سبتمبر؟ **حوالي 1.003**

10. هل ستستخدم هذا النموذج لإيجاد المسافة من الشمس إلى الأرض في الأعوام اللاحقة؟ اشرح تعليلك.

**نموذج الإجابة: لا؛ ينبغي أن تكون المسافات دائرية، ومتكررة من عام إلى العام الذي يليه.**

**ملحق 11-13. انظر عمل الطلاب.**

11. اكتب السؤال الذي يمكن أن يتم الإجابة عنه عن طريق فحص البيانات. على سبيل المثال، يمكنك تقدير عدد الأشخاص الذين يسكنون في مدينتك بعد مرور 5 أعوام من الآن أو توقع القيمة المستقبلية لسيارة ما.

12. اجمع ونظم البيانات التي تحتاجها للإجابة على السؤال الذي قمت بكتابته. يمكن أن تحتاج إلى القيام ببحث عن موضوعك على شبكة الإنترنت أو أن تقوم بعمل دراسة لجمع البيانات التي تحتاج إليها.

13. ارسم لوحة التبعية و أوجد معادلة الانحدار لبياناتك. ثم استخدم معادلة الانحدار للإجابة على سؤالك.

6. باستخدام النموذج الخطي، فإن حوالي 1175301 مركبة تعمل بالوقود البديل ستكون مستخدمة في عام 2018.

8. [13, 0] scl: 1 في [1, 1, 0, 8] scl: 0.05  
إجابة عينة:  $y = 0.0000065x^3 - 0.0012x^2 + 0.0147x + 0.967$

5. إجابة عينة: المنحنيات الثلاث بها معاملات ارتباط قوية أكبر من 0.99. ومع ذلك وبتوسيع النافذة للرسوم البيانية يتضح أن الانحدار التربيعي يقل بشكل ملحوظ بينما يزيد الانحدار التكعيبي بشكل كبير مع مرور الوقت. وربما تكون هذه غير واقعية، وبالتالي فإن الانحدار الخطي هو الأفضل للتنبؤ بالمستقبل.

# اختبار منتصف الوحدة

## الدروس 4-1 إلى 4-4

### التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقييم التقدم الذي أحرزه الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

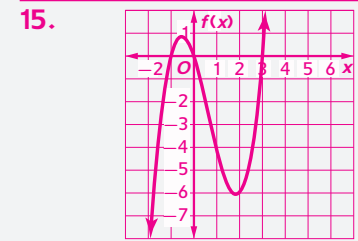
وبالنسبة للأسئلة المجاب عنها بشكل غير صحيح، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين قوسين.

### مطويات الدراسة منظم

### مطويات دينة ذكي®

قبل أن يكمل الطلاب اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات المتعلقة بالدروس من 4-1 حتى 4-4 والواردة في المطويات الخاصة بهم.

### إجابة إضافية



12. **البندولات** القاعدة التالية  $L(t) = \frac{8t^2}{\pi}$  يمكن استخدامها لإيجاد طول البندول بالقدم عندما تتأرجح ذهاباً وإياباً في  $t$  ثانية. أوجد طول البندول التي تقوم بتأرجح واحد كامل في 4 ثواني. (الدروس 4-3)

حوالي 12.97 ft

13. اختبار من متعدد أوجد  $3f(a-4) - 2h(a)$  إذا كانت  $f(x) = x^2 + 3x$  و  $h(x) = 2x^2 - 3x + 5$ .

(الدروس 4-3) D

A  $-a^2 + 15a - 74$

B  $-a^2 - 2a - 1$

C  $a^2 + 9a - 2$

D  $-a^2 - 9a + 2$

14. **الطاقة** القوة التي تتولد من طاحونة هوائية هي دالة لسرعة الرياح. يمكن تمثيل القوة التقريبية من خلال الدالة  $P(s) = \frac{1000}{3}s^3$  حيث أن  $s$  تمثل سرعة الرياح بالكيلومتر في الساعة. أوجد وحدات القوة  $P(s)$  المولدة من طاحونة هوائية عندما تصل سرعة الرياح إلى 18 كيلومتراً في الساعة. (الدروس 4-3 و 5.832 وحدة)

استخدم  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$  للتمارين 15-17. (الدروس 4-4)

15. ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة. **انظر الهامش.**

16. قم بتقدير إحداثيات  $X$  التي يحدث فيها الحد الأقصى النسبي والحد الأدنى النسبي.  $x = -0.5$  و  $2$

17. حدد المجال والمدي الخاص بالدالة.

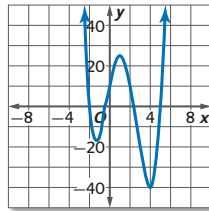
18. حدد قيم الأعداد الصحيحة المتتالية  $X$  التي يقع بينها الأصغار الحقيقية

لـ  $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$  (الدروس 4-4)

بين -1 وصفر وبين 1 و 2

ارجع إلى التمثيل البياني. (الدروس 4-4)

17. {كل الأعداد الحقيقية} D =  
{كل الأعداد الحقيقية} R =



الحد الأقصى على  $x \approx 1$ ; الحد الأدنى على  $x \approx -1.5$  و  $x \approx 4$   
19. أوجد قيمة الاحداثي  $X$  لكل نقطة تحول وحدد ما إذا كانت تلك الإحداثيات حد أقصى أو حد أدنى نسبي.

20. قم بتقدير إحداثيات  $X$  لكل صفر.  $-2, -0.5, 2.5, 5$

21. ما هي أدنى درجة محتملة للدالة؟ 4

بسط. افترض عدم وجود أي متغير يساوي صفراً. (الدروس 4-1)

1.  $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5) - 6x^5y^2$  2.  $4t(3rt - r) - 12rt^2 - 4rt$

3.  $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3} \cdot \frac{a^2}{2b^2c^2}$  4.  $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2 \cdot \frac{p^2}{r^2}$

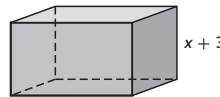
5.  $(4m^2 - 6m + 5) - (6m^2 + 3m - 1) - 2m^2 - 9m + 6$

6.  $(x + y)(x^2 + 2xy - y^2) - x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3$

7. اختيار من متعدد حجم متوازي المستطيلات هو

$6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$ . ما التعبير كثير الحدود الذي يمثل

مساحة القاعدة؟ (الدروس 4-1) C



A  $6x^4 + 37x^3 + 59x^2 + 3x - 9$

B  $6x^2 + x + 1$

C  $6x^2 + x - 1$

D  $6x + 1$

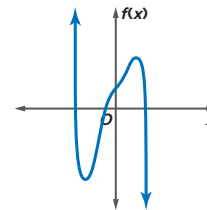
بسط. (الدروس 4-2)

8.  $(4r^3 - 8r^2 - 13r + 20) \div (2r - 5) - 2r^2 + r - 4$

9.  $\frac{3x^3 - 16x^2 + 9x - 24}{x - 5} - 3x^2 - x + 4 - \frac{4}{x - 5}$

10. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني. ثم حدد ما إذا كان يمثل دالة كثيرة حدود ذو درجة فردية أو درجة زوجية واذكر عدد الأصغار الحقيقية. (الدروس 4-3)

السلوك الطرفي:  
 $f(x) \rightarrow \infty$  حيث  $x \rightarrow -\infty$   
 $f(x) \rightarrow -\infty$  حيث  $x \rightarrow \infty$   
درجة فردية ذو 3 أصغار حقيقية



11. اختيار من متعدد أوجد  $p(-3)$

إذا كانت  $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x$  (الدروس 4-3) F

G 11

H 30

J 36

