

حلّ نظم المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

درس

لماذا؟

الآن

السابق

التركيز

محاذاة رأسية

قبل درس 7-1 حل أنظمة المعادلات باستخدام الجبر.

درس 7-1 قيم المحددات. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

بعد درس 7-1 استخدم مصفوفات لحل أنظمة المعادلات.

2 التدريس

أسئلة متعددة دأعة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ في الدرس.

سؤال:

- كيف يتعلّق نظام تحديد المواقع بالإحداثيات؟ نموذج إجابة: يُظهر تعقب نظام تحديد المواقع إحداثيات خطوط العرض وخطوط الطول لكل نقطة على سطح الأرض.

- ما هي الطريقة التي تعرفها بالفعل لإيجاد مساحة المثلث؟

$$A = \frac{1}{2}bh$$

- لماذا من الصعب استخدام هذه الطريقة في هذا الموقف؟ سيكون من الصعب إيجاد ارتفاع المثلث.

- إيجاد قيمة المحددات. حلّ نظم المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.
- قامت عالمة حيوانات بوضع متعقب لتحديد المواقع على شُر كي تتمكن من تحديد منطقة معيشته. وبعد عدة أيام، حددت عالمة الحيوانات منطقة معيشة النمر على شكل مثلث. وباستخدام إحداثيات رؤوس هذا المثلث، تمكنت من استخدام المصفوفات والمحددات لمعرفة حجم المنطقة التي يعيش فيها النمر.



المحددات لكل مصفوفة مربعة **محدد**. يُسمى محدد المصفوفة 2×2 **محددًا من الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي محدد من الدرجة الثانية

التعريف قيمة محدد الدرجة الثانية هي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي.

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 4(6) - 5(-3) = 39$$

المفردات الجديدة

محدد determinant
محدد من الدرجة الثانية second-order determinant
محدد من الدرجة الثالثة third-order determinant
قاعدة القطر diagonal rule
قاعدة كرامر Cramer's Rule
مصفوفة المعاملات coefficient matrix

ممارسات رياضية
ابحث عن ترتيب واستخدم منه.

مثال 1 محدد من الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل من المحددات التالية.

$$\text{a. } \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)(8) = 45 + 32 = 77$$

تعريف المحدد
التبسيط.

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 6(4) = 0 - 24 = -24$$

تعريف المحدد
التبسيط.

تمارين موجهة

$$\text{1A. } \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 22$$

$$\text{1B. } \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = -73$$

نصيحة دراسية

قاعدة القطر لا يمكن استخدامها قاعدة القطر سوى مع المصفوفات من الرتبة 3×3 .

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محددات من الدرجة الثالثة**. ويمكن إيجاد قيمة تلك المحددات باستخدام **قاعدة القطر**.

مفهوم أساسي قاعدة القطر

الخطوة الأولى أعد كتابة أول عمودين إلى يمين المحدد.

الخطوة الثانية خطط الأقطار. بدءاً بالعنصر الأسير العلوي. اضرب عناصر كل قطر ببعضها. كرر العملية. بدءاً بالعنصر الأيمن العلوي.

الخطوة الثالثة أوجد مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر.

الخطوة الرابعة اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

2 محددات

مثال 1 يوضح كيفية إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية. **مثال 2** يوضح كيفية إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة.

مثال 3 يوضح كيفية استخدام مُحدد لتقييم مثلث في موقف من الحياة اليومية.

تقويم تكويني

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد فهم التلاميذ للمصطلحات.

أمثلة إضافية

1 قيم المُحدد

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

2 قيم

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \text{ باستخدام أقطار. } -8$$

التعليم باستخدام التكنولوجيا

السيورة التفاعلية قم بحل

أمثلة عديدة مع الصف، وحفظ ذلك كصفحات ملاحظات عديدة. في نهاية الحصة، أرسل ملاحظتك عبر البريد الإلكتروني إلى الطلاب أو انشرهم على صفحة موقع الصف. قد يساعد ذلك التلاميذ على التركيز خلال الدرس بدلاً من محاولة نسخ الحساب من السيورة.

مثال 2 استخدم الأقطار

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \text{ باستخدام الأقطار.}$$

الخطوة الأولى أعد كتابة أول عمودين إلى يمين المحدد.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 & 4 & -8 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & 9 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

الخطوة الثانية أوجد حاصل ضرب عناصر كل قطر.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4(2)(9) = 72$$

$$-8(6)(-4) = 192$$

$$3(-3)(5) = -45$$

$$72 + 192 + (-45) = 219$$

اطرح مجموع المجموعة الثانية من مجموع المجموعة الأولى.

$$219 - 312 = -93$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$-4(2)(3) = -24$$

$$5(6)(4) = 120$$

$$9(-3)(-8) = 216$$

$$-24 + 120 + 216 = 312$$

الخطوة الثالثة أوجد مجموع كل مجموعة.

الخطوة الرابعة

قيمة المحدد هي -93.

تمارين موجهة

أوجد قيمة كل من المحددات التالية.

$$2A. \begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -48$$

$$2B. \begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -60$$

التدريس المتمايز

استخدم الطلاب التقييم عن طريق الأقطار للمرة الأولى.

شجعهم على تدوين كل خطوة في الإجراء. اطلب منهم مقارنة عملهم مع أقرانهم لإيجاد أي أخطاء في حساباتهم أو استخدامهم للإجراء.

مثال إضافي

3 مسح حدد طاقم مسح ثلاثة نقاط على خريطة تُشكل رؤوس منطقة مثلث. شبكة إحداثيات يتطابق فيها وحدة واحدة مع 10 أميال موجودة فوق الخريطة ومن ثم الرؤوس توجد في (0, 1) و (-2, -2) و (-2, 3). استخدم مُحددًا لإيجاد مساحة المثلث.

850 ميل مُربع

التركيز على المحتوى الرياضي

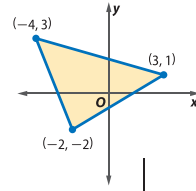
المُحددات كل مصفوفة مُربعة تحتوي على رقم حقيقي يرتبط بها يسمى مُحدد المصفوفة. مُحدد مصفوفة 2×2 يُسمى مُحدد من الدرجة الثانية ويساوي الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطرين. مُحدد مصفوفة 3×3 يُسمى مُحدد رتبة ثالثة ويمكن تقييمه باستخدام طريقة تُسمى قاعدة الأقطار.

كن حذرًا!

تجنب الأخطاء اطلب من الطلاب رسم ملصقات توضح عملية إيجاد مُحدد مصفوفة 3×3 باستخدام أقلام توضيح ملونة لتحديد الأقطار بوضوح.

يمكن أيضاً استخدام المحددات لإيجاد مساحة المثلثات. إن كانت إحداثيات رؤوس المثلث معروفة، فيمكن استخدام القاعدة أدناه لحساب مساحة المثلث. ولأن المساحة لا يمكن أن تكون سالبة القيمة، يتم استخدام القيمة المطلقة للمحدد.

مفهوم أساسي مساحة المثلث

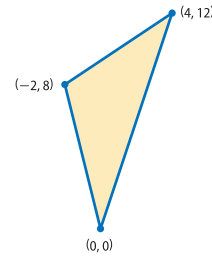


التعريف مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه هي $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$ حيث (a, b) و (c, d) و (e, f) هي رؤوس المثلث.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال

مثال 3 من الحياة اليومية استخدم المحددات



علم الحيوان ارجع إلى التطبيق في بداية الدرس. إحداثيات رؤوس منطقة معيشة النهر موضحة على اليسار. استخدم المحددات لإيجاد مساحة منطقة معيشة النهر.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (a, b) = (0, 0) \\ (c, d) = (12, 4) \\ (e, f) = (-8, 2) \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

قاعدة القطر

$$0 + 0 + 32 = 32$$

$$-24 + 0 + 0 = -24$$

مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

مساحة المثلث

$$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$$

بالتبسيط.

مساحة منطقة معيشة النهر هي 28 كيلومتر مربع.

تمارين موجهة

3. **غسيل سيارات** لجمع نقود من أجل نادي التجديف خاصتهم. أعلنت خلود، وفاطمة، ومحمد عن قيامهم بغسيل السيارات في ثلاث مناطق مختلفة في حيّ ما. إحداثيات تلك المناطق على الخريطة هي (3, 15) و (6, 4) و (11, 9). كل وحدة تُمثل 0.5 كيلومتر. ما هي مساحة الحيّ الذي يعلنون فيه؟ **8.75 km²**



رابط من الحياة اليومية

تعتبر النور من الحيوانات المتوحدة، المتعلّقة بالأرض للغاية. ويمكن أن تصل مساحة مناطق معيشتهم حتى 100 كيلومتر مربع. المصدر: ناشيونال جيوغرافيك

2 قاعدة كرامر

مثال 4 يوضح كيفية استخدام قاعدة
كرامر لحل نظام معادلتين خطيتين.

مثال 5 يوضح كيفية استخدام قاعدة
كرامر لحل نظام ثلاثة معادلات خطية.

مثال إضافی

4 استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 4y & = & 28 \\ (4, 2) \quad 3x - 2y & = & 8 \end{array}$$

قراءة الرياضيات

المحددات تُستخدم
المحددات في تحديد ما إن
كان لنظام معادلات ما حل
وحيد أم لا.

نصيحة الاختبار

قاعدة كرامر عندما يكون
محدد مصفوفة المعاملات C
مساوياً للصفر، عندها لا يكون
للنظام حلّ وحيد.

مفهوم أساسي قاعدة كرامر

لنفترض أن C هي مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{cases} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \leftarrow$

الحلّ لنظام المعادلات هذا هو $x = \frac{\begin{vmatrix} b & m \\ g & n \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} m & a \\ n & f \end{vmatrix}}{|C|}$ إن كانت $|C| \neq 0$.

مثال 4 حل نظام من معادلتين

حلّ النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر.

$$\begin{array}{r} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|} && \text{قاعدة كرامر} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} && \text{بالتعويض بالقيم} \\
 &= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{5(4) - (3)(-6)} && \text{بإيجاد القيمة} \\
 &= \frac{60 - 174}{20 + 18} && \text{بالضرب} \\
 &= -\frac{114}{38} && \text{بالجمع والطرح} \\
 &= -3 && \text{بالتبسيط}
 \end{aligned}$$

حلّ النظام هو $(-3, -5)$.

$$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15 \quad x = -3, y = -5 \quad \text{التحقق}$$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$ بالتبسيط.

$15 = 15$ ✓

$$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29 \quad x = -3, y = -5$$

بالتبسيط: $-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$

$$-29 = -29 \quad \checkmark$$

تمارين موجهة

حلّ النظم التالية باستخدام قاعدة كرامر.

4A. $7x + 3y = 37$ (4, 3)
 $-5x - 7y = -41$

4B. $8x - 5y = 70$ (5, -6)
 $9x + 7y = 3$

مثال إضافي

5 حل النظام باستخدام قاعدة كرامر.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -2 \\ -x + 2y + z &= -0.5 \\ x + y + 2z &= 3.5 \end{aligned}$$

(0.5, -1, 2)

كن حذراً!

تجنب الخطأ عند حل نظام ثلاثة معادلات في ثلاثة متغيرات، فإنه من المهم توضيح أنه يتم إيجاد بسط X عن طريق استبدال مُعاملات X بحدود ثابتة من النظام. وبالمثل، يتم إيجاد بسط Y و Z عن طريق استبدال مُعاملات Y و Z ، على التوالي، بحدود ثابتة من النظام.

التركيز على المحتوى الرياضي

قاعدة كرامر أحد ميزات استخدام قاعدة كرامر لحل نظام ثلاثة معادلات خطية في ثلاثة متغيرات هو إذا كان للنظام حل فريد، يمكن أن تُعطي قاعدة كرامر قيمة لأي من المتغيرات دون حل الباقيين. إذا كان المُحدد صفراً، فإن قاعدة كرامر لا يمكن أن تُعطي حلاً، ولكنها تُحدد أن النظام إما تابع أو غير متسق.

يمكن أيضاً استخدام قاعدة كرامر لحل النظم المكونة من ثلاث معادلات.

مفهوم أساسي استخدام قاعدة كرامر لحل النظم المكونة من ثلاث معادلات

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$$

لنفترض أن C هي مصفوفة المعاملات للنظام

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \text{ و } z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}, \text{ إذا كان } |C| \neq 0$$

مثال 5 حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر.

$$\begin{aligned} 4x + 5y - 6z &= -14 \\ 3x - 2y + 7z &= 47 \\ 7x - 6y - 8z &= 15 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3105}{621} \text{ أو } 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{1242}{621} \text{ أو } -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2484}{621} \text{ أو } 4$$

حل النظام هو (5, -2, 4).

$$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$$

$$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -15$$

$$-14 = -14 \quad \checkmark$$

$$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$$

$$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$$

$$15 = 15 \quad \checkmark$$

$$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$$

$$14 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$$

$$47 = 47 \quad \checkmark$$

تمارين موجهة

حل النظم التالية باستخدام قاعدة كرامر.

$$5A. 3x + 5y + 2z = -7 \quad \left(\frac{23}{22}, -\frac{57}{22}, \frac{31}{22} \right) \quad 5B. 6x + 5y + 2z = -1 \quad (-4, 5, -1)$$

$$-4x + 3y - 5z = -19$$

$$-x + 3y + 7z = 12$$

$$5x + 4y - 7z = -15$$

$$5x - 7y - 3z = -52$$

91

نصيحة دراسية
تحقق من صحة الحل
قم دوماً بالتعويض بإجاباتك
في المعادلات الأولية للتأكد
من صحة الحل.

التدريس المتميز

إذا أراد الطلاب مراجعة طريقة حل المصفوفات،

اطلب من التلاميذ كتابة توضيح مختصر بخصوص تفاعلهم مع الطرق المختلفة التي درسوها من أجل حل المصفوفات. اطلب منهم التعليق على الجوانب التي يرونها فعالة ومفيدة، وما هي الجوانب التي يجدونها صعبة أو مُحيرة.

3 مهارة

تقويم تكويني

استخدام تمارين 1-25 للتحقق من الفهم

استخدم المخطط في أسفل الصفحة التالية لتخصيص الواجبات لطلابك.

تعليم الممارسات الرياضية

المثابرة الطلاب المتميزة في الرياضيات تبدأ بالشرح لأنفسهم معنى المسألة والبحث عن نقاط إدخال لحلهم. ويضعون فرضيات حول تكوين ومعنى حلهم ويخططون طريقة حل بدلاً من الانتقال مباشرة إلى محاولة الحل.

نصائح للمدرسين الجدد

الفهم ذكر الطلاب أن قاعدة كرامر لا تُطبق عندما يكون مُحدد مصفوفة المعاملات صفراً، لأن الحل قد يحتوي على مقام 0، هو غير معرف.

تحقق من فهمك.

مثال 1

أوجد قيمة المحددات التالية.

$$1. \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad 26$$

$$2. \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \quad -12$$

$$3. \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \quad -128$$

$$4. \begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \quad 0$$

مثال 2

أوجد قيمة المحددات التالية باستخدام الأقطار.

$$5. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad -19$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} \quad -80$$

$$7. \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad -284$$

$$8. \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad 302$$

$$9. \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad 72$$

$$10. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix} \quad 139$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 7 & 9 & -4 \\ -6 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad 182$$

$$12. \begin{vmatrix} -5 & -6 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} \quad 562$$

مثال 4

استخدم قاعدة كرامر ل حل نظم المعادلات التالية.

$$13. \begin{cases} 4x - 5y = 39 \\ 3x + 8y = -6 \end{cases} \quad (6, -3)$$

$$14. \begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ -3x - 7y = -29 \end{cases} \quad (-2, 5)$$

$$15. \begin{cases} -8a - 5b = -27 \\ 7a + 6b = 22 \end{cases} \quad (4, -1)$$

$$16. \begin{cases} 10c - 7d = -59 \\ 6c + 5d = -63 \end{cases} \quad (-8, -3)$$

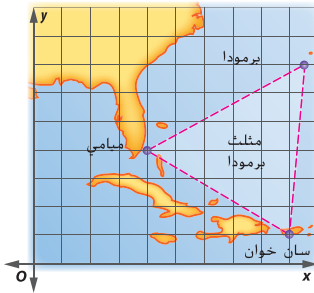
مثال 3-5

المثابرة مثلث برمودا هو منطقة

تقع في الجنوب الشرقي من ساحل المحيط الأطلسي للولايات المتحدة، وهي مشهورة بوجود بلاغات عن خسائر غير مفسرة للسفن، والقوارب الصغيرة، والطائرات.

a. أوجد مساحة المثلث على الخريطة. 15.75 وحدة²

b. بافتراض أن كل تربية تمثل 175 ميلاً. ما هي مساحة مثلث برمودا؟ 482,343.75 mi²



استخدم قاعدة كرامر ل حل نظم المعادلات التالية.

$$18. \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 26 \\ 5x + 3y - 5z = -50 \\ -7x - 8y - 3z = 49 \end{cases} \quad (-3, -5, 4)$$

$$19. \begin{cases} -3x - 5y + 10z = -4 \\ -8x + 2y - 3z = -91 \\ 6x + 8y - 7z = -35 \end{cases} \quad \left(\frac{66}{7}, -\frac{116}{7}, -\frac{41}{7} \right)$$

$$20. \begin{cases} 6x - 5y + 2z = -49 \\ -5x - 3y - 8z = -22 \\ -3x + 8y - 5z = 55 \end{cases} \quad (-3, 7, 2)$$

$$21. \begin{cases} -9x + 5y + 3z = 50 \\ 7x + 8y - 2z = -60 \\ -5x + 7y + 5z = 46 \end{cases} \quad (-4, -2, 8)$$

$$22. \begin{cases} x + 2y = 12 \\ 3y - 4z = 25 \\ x + 6y + z = 20 \end{cases} \quad (6, 3, -4)$$

$$23. \begin{cases} 9a + 7b = -30 \\ 8b + 5c = 11 \\ -3a + 10c = 73 \end{cases} \quad (-1, -3, 7)$$

$$24. \begin{cases} 2n + 3p - 4w = 20 \\ 4n - p + 5w = 13 \\ 3n + 2p + 4w = 15 \end{cases} \quad (5, 2, -1)$$

$$25. \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 6x - 2y - z = 16 \\ 3x + 4y + 2z = 28 \end{cases} \quad (4, 0, 8)$$

كن حذرًا!

تحليل الخطأ في تمرين 58، ذكر الطلاب أن حاصل ضرب أقطار "الميل لأعلى" تُطرح عند تقييم المحدد.

مثال 2-1

أوجد قيمة المحددات التالية.

$$\begin{array}{lll} 26. \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -102 & 27. \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} = 3 & 28. \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 83 \\ 29. \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -135 & 30. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 124 & 31. \begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -459 \\ 32. \begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 63 & 33. \begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 & 34. \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -13 \\ 35. \begin{vmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 6 & 5 & -6 \\ -2 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 728 & 36. \begin{vmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -8 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -120 & 37. \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 10 & 12 & 9 \\ -6 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -952 \end{array}$$

38. سافر ذهب طلبة فصل الفنون الخاص بالأستاذ فيصل في رحلة بالحافلة إلى متحف للفنون. وكان متوسط سرعة الحافلة على الطرق السريعة 65 ميلاً في الساعة بينما بلغت في المدينة 25 ميلاً في الساعة. يبعد متحف الفنون 375 ميلاً عن المدرسة، واستغرقت الرحلة 7 ساعات كي يصل الطلاب إلى هناك. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد عدد الساعات التي قطعتها الحافلة على الطرق السريعة وعدد الساعات التي قطعتها داخل المدينة. **5 ساعات على الطرق السريعة، وساعتان داخل المدينة**

مثال 5-4

استخدم قاعدة كرامر لحلّ نظم المعادلات التالية.

$$\begin{array}{ll} 39. \begin{cases} 6x - 5y = 73 \\ -7x + 3y = -71 \end{cases} \quad (8, -5) & 40. \begin{cases} 10a - 3b = -34 \\ 3a + 8b = -28 \end{cases} \quad (-4, -2) \\ 41. \begin{cases} -4c - 5d = -39 \\ 5c + 8d = 54 \end{cases} \quad (6, 3) & 42. \begin{cases} -6f - 8g = -22 \\ -11f + 5g = -60 \end{cases} \quad (5, -1) \\ 43. \begin{cases} 9r + 4s = -55 \\ -5r - 3s = 36 \end{cases} \quad (-3, -7) & 44. \begin{cases} -11u - 7v = 4 \\ 9u + 4v = -24 \end{cases} \quad (-8, 12) \\ 45. \begin{cases} 5x - 4y + 6z = 58 \\ -4x + 6y + 3z = -13 \\ 6x + 3y + 7z = 53 \end{cases} \quad (4, -2, 5) & 46. \begin{cases} 8x - 4y + 7z = 34 \\ 5x + 6y + 3z = -21 \\ 3x + 7y - 8z = -85 \end{cases} \quad (-3, -4, 6) \end{array}$$



47. كعك قامت خلود بطلب كعك من أجل حفلة للفصل. وكان صندوق الكعك يحتوي على دزيتين من الكعك، بعضه غير محشو بينما البعض الآخر محشو بالمربي. يبلغ سعر الكعكة غير المحشوة \$0.50 بينما يبلغ سعر الكعكة المحشوة \$0.60. فإذا كانت التكلفة الإجمالية \$12.6، استخدم قاعدة كرامر لإيجاد كم كعكة محشوة بالمربي طلبتها خلود. **6**

مثال 4-3

48. مثابة يبلغ مرتب كل نجم من نجوم فيلم جديد 5 ملايين دولار. بينما يبلغ مرتب كل ممثل من الممثلين المساعدين مليون دولار. ويبلغ إجمالي ما تم إنفاقه على مرتبات الممثلين والممثلات 19 مليون دولار. فإن كان طاقم الممثلين يضم 7 أعضاء، استخدم قاعدة كرامر لإيجاد عدد الممثلين النجوم في هذا الفيلم. **3**

49. علم الآثار عثر أحد علماء الآثار على عظام حوت بالإحداثيات (0, 3) و(4, 7) و(5, 9). فإن كانت وحدات تلك الإحداثيات بالمتري، أوجد مساحة المثلث الذي تشكله هذه الإحداثيات. **2 m²**

خيارات الفروض المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار يومي
ابتدائي	49-26، 58-56، 75-60	48-26 زوجي، 58-56، 61-60، 75-66
أساسي	53-27، 58-54، 75، 60	49-26، 65-62، 58-50، 61-60، 75-66
متقدم	72-50 (اختياري: 75-73)	

تعليم الممارسات الرياضية

نقد يستطيع الطلاب المتميزون في الرياضيات أيضاً مقارنة فعالية حجتين منطقيتين، والتمييز بين المنطق الصحيح والمعيب وتوضيح الخلل إن وجد.

B استخدم قاعدة كرامر لحلّ نظم المعادلات التالية.

$$50. \begin{cases} 6a - 7b = -55 \\ 2a + 4b - 3c = 35 \\ -5a - 3b + 7c = -37 \end{cases} \quad (-1, 7, -3)$$

$$51. \begin{cases} 3a - 5b - 9c = 17 \\ 4a - 3c = 31 \\ -5a - 4b - 2c = -42 \end{cases} \quad (4, 8, -5)$$

$$52. \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 7x + 3z = -47 \\ 8y - 5z = -63 \end{cases} \quad (-8, -6, 3)$$

$$53. \begin{cases} 7x + 8y + 9z = -149 \\ -6x + 7y - 5z = 54 \\ 4x + 5y - 2z = -44 \end{cases} \quad \left(-\frac{6187}{701}, -\frac{2904}{701}, -\frac{4212}{701}\right)$$

54. **بستنة** يريد فهد بناء حديقة زهور مثلثة الشكل. ولتخطيط حديقته، يستخدم فهد شبكة إحداثيات حيث يمثل كل مربع منها قدم مربع. إحداثيات رؤوس حديقته هي $(-1, 7)$ و $(6, 2)$ و $(4, -3)$. أوجد مساحة الحديقة. 12.5 ft^2

55. **ثقافة مالية** يبيع بائع المشروبات صغيرة الحجم مقابل $1.15\$$ ، والمشروبات متوسطة الحجم مقابل $1.75\$$ ، والمشروبات كبيرة الحجم مقابل $2.25\$$. وخلال أسبوع باع فيه من المشروبات صغيرة الحجم ضعف ما باعه من المشروبات متوسطة الحجم. بلغ إجمالي مبيعاته $2238.75\$$ مقابل 1385 مشروب. **صغير: 650؛ متوسط: 325؛ كبير: 410**

a. استخدم قاعدة كرامر لتحديد ما العدد الذي بيع من كل مشروب.
b. قرر البائع زيادة سعر المشروبات صغيرة الحجم إلى $1.25\$$ في الأسبوع التالي. وفي الأسبوع التالي، قلت مبيعاته من المشروبات صغيرة الحجم 140 مشروباً. بينما زادت مبيعاته من المشروبات متوسطة الحجم 125 مشروباً. ومن المشروبات كبيرة الحجم 35 مشروباً. احسب مبيعاته لذلك الأسبوع. **2426.25 \$**

c. هل كان قرار زيادة سعر المشروبات صغيرة الحجم خطوة تجارية ناجحة؟ فشر إجابتك.

55c. مما يبدو أنها كانت خطوة ناجحة من البائع. بالرغم من أنه باع عدداً أقل من المشروبات صغيرة الحجم، إلا أن مبيعاته من المشروبات متوسطة وكبيرة الحجم زادت، وحتى نقوداً أكثر في هذا الأسبوع عن الأسبوع السابق.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

56. **استدلال** لا يمكن حلّ بعض نظم المعادلات باستخدام قاعدة كرامر.

a. أوجد قيمة $\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$ متى تساوي القيمة 0؟ **a, b. انظر ملحق الإجابة للوحدة 1.**

b. اختر قيمة لكل من a ، و b ، و f ، و g كي يصبح محدد مصفوفة المعاملات مساوياً للصفر. ما نوع النظام المُشكل؟

57. **استدلال** ما الذي يمكنك تحديده من حل نظام من المعادلات الخطية إن كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي 0؟
الإجابة النموذجية: لا يوجد حلّ وحيد للنظام. إما أنه لا يوجد حلّ أو أن هناك عدداً لا نهائياً من الحلول.

$$58. \text{نقد} \text{ يحاول أحمد وفاطمة إيجاد قيمة } \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}. \text{أحمد: لأن } 3(-5) = -15$$

$$\text{أحمد} \quad \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - (-15) = 31$$

$$\text{فاطمة} \quad \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$$

0 إن كانت $m + n$ زوجية
 $m + n$ إن كانت $m + n$ فردية

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{زوجية } m + n \text{ إن كانت } 0 \\ m + n & \text{فردية } m + n \text{ إن كانت } 0 \end{cases}$$

هل إجابة أي منهما صحيحة؟ فسر استدلالك.

59. **تحجّر** أوجد محدد مصفوفة 3×3 المعرفة بواسطة

60. **نهاية مفتوحة** اكتب مصفوفة 2×2 لكل من الخصائص التالية.

a. المحدد يساوي 0. **a-c. انظر ملحق الإجابة للوحدة 1.**

b. المحدد يساوي 25.

c. جميع العناصر أرقام سالبة والمحدد يساوي -32.

61. **الكتابة في الرياضيات** صف التمثيلات البيانية المحتملة لنظام معادلات خطية 2×2 إن كان محدد مصفوفة معاملاته يساوي 0.

61. **الإجابة: النموذجية:**

بفرض وجود

نظام معادلات

خطية 2×2

إن كان محدد

مصفوفة

المعاملات

يساوي 0،

فليس هناك

حل وحيد

لنظام. قد لا

يكون للنظام

حل وعندها

سيظهر

التمثيل البياني

على هيئة

مستقيمين

متوازيين.

أو قد يكون

لنظام عدد

لا نهائي

من الحلول

وعندها

سيكون التمثيل

البياني هو

ذات المستقيم.

نصائح للمدرسين الجدد

المفردات وضح للطلاب أن "جانب" يعني "جانب". تُشير المساحة الجانبية إلى مجموع مساحة جميع أوجه الشكل باستثناء القاعدة أو القواعد.

4 التقييم

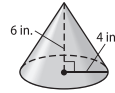
تحديد المهارة الرياضية اطلب من الطلاب إخبار آبائهم نصائح وأساليب تذكر الترتيب الحالي للعمليات الحسابية المطلوب حلها في عملية متعددة الخطوات تم مناقشتها في هذا الدرس.

إجابات إضافية

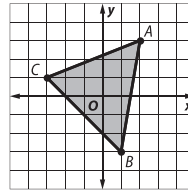
- 69a. $\begin{bmatrix} \$4.50 & \$6.75 & \$9.50 \\ \$4.50 & \$6.75 & \$9.50 \\ \$4.00 & \$6.25 & \$8.75 \\ \$4.75 & \$7.50 & \$10.25 \end{bmatrix}$
- 69b. $\begin{bmatrix} \$3.60 & \$5.40 & \$7.60 \\ \$3.60 & \$5.40 & \$7.60 \\ \$3.20 & \$5.00 & \$7.00 \\ \$3.80 & \$6.00 & \$8.20 \end{bmatrix}$
- 69c. $\begin{bmatrix} \$0.90 & \$1.35 & \$1.90 \\ \$0.90 & \$1.35 & \$1.90 \\ \$0.80 & \$1.25 & \$1.75 \\ \$0.95 & \$1.50 & \$2.05 \end{bmatrix}$

تمرين اختبار معياري

64. **إجابة قصيرة** يبلغ قطر قاعدة مخروط دائري قائم 4 بوصات بينما يبلغ ارتفاعه 6 بوصات.



ما هي المساحة الجانبية للمخروط؟ (المساحة الجانبية لمخروط = $\pi r \ell$ ، حيث ℓ = الارتفاع الجانبي)
65. SAT/ACT أوجد مساحة $\triangle ABC$.



- A 10^2 وحدات D 14^2 وحدة
B 12^2 وحدة E 16^2
C 13^2 وحدة

62. دفع خالد 25.25\$ كي يلعب ثلاث جولات من الغولف المصغر ويقتود لجولتين بسيارات السباق. بينما دفع فهد 25.75\$ كي يلعب أربعة جولات من الغولف المصغر ويقتود لجولة واحدة بسيارات السباق. كم تبلغ تكلفة الجولة الواحدة من الغولف المصغر؟ **C**

- A \$4.25 C \$5.25
B \$4.75 D \$5.75

63. استخدم الجدول لتحديد أنسب تعبير يمثل عدد أوجه أي منشور تتكون قاعدته من عدد n من الجوانب. **H**

أوجه المنشور	عدد جوانب القاعدة	القاعدة
5	3	مثلثة
6	4	رباعية
7	5	خماسية
8	6	سداسية
9	7	سباعية
10	8	ثمانية

- F $2(n-1)$ H $n+2$
G $2(n+1)$ J $2n$

مراجعة شاملة

حدد ما إن كان حاصل ضرب كل مصفوفة معرّف أم لا. وإن كان كذلك، فاذكر أبعاد حاصل الضرب. (درس 1-6)

66. $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 6}$ نعم: 6×4 لا: $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 3}$ نعم: 1×2 لا: $E_{2 \times 7} \cdot F_{7 \times 1}$

69. **أعمال** يسرد الجدول التالي أسعار أحد متاجر الشطائر. (درس 1-5) **a-c**. انظر الهامش.

- a. اسرد الأسعار في مصفوفة 4×3 .
b. قرر المدير خفض أسعار كل بند بنسبة 20%. اسرد مجموعة البيانات الجديدة هذه في مصفوفة 4×3 .
c. اطرح المصفوفة الثانية من المصفوفة الأولى وحدد ما سيوفره العميل في كل شطيرة.

كبيرة	متوسطة	صغيرة	شطيرة
9.50 \$	6.75 \$	4.50 \$	نونة
9.50 \$	6.75 \$	4.50 \$	سلامي
8.75 \$	6.25 \$	4.00 \$	خضروات
10.25 \$	7.50 \$	4.75 \$	كرات لحم

مثّل الدوال التالية بيانياً. (درس 2-6) 70-72. انظر ملحق الإجابة للوحدة 1.

70. $f(x) = 2|x-3| - 4$ 71. $f(x) = -3|2x| + 4$ 72. $f(x) = |3x-1| + 2$

مراجعة المهارات

حلّ نظم المعادلات التالية.

73. $2x - 5y = -26$ $(-8, 2)$ 74. $4y + 6x = 10$ $(\frac{79}{25}, -\frac{56}{25})$ 75. $-3x - 2y = 17$ $(-3, -4)$
 $5x + 3y = -34$ $2x - 7y = 22$ $-4x + 5y = -8$

95

التدريس المتميز

$$2x + 4y = 10$$

توسع اكتب النظام التالي على السبورة.

$$-x - 2y = 3$$

اسأل الطلاب هل باستطاعتهم استخدام قاعدة كرامر لحل النظام. اطلب منهم توضيح لماذا أو لم لا.

قاعدة كرامر لا يمكن استخدامها لأن المحدد صفر.

ثم اطلب منهم القيام بالتمثيل البياني لكل معادلة والشرح لماذا لا يوجد حل للنظام.

التمثيلان البيانيان للمعادلتين متوازيان.