

العلاقات والدوال

1 التركيز

الرأسية المهاداة

قبل درس 2-1 تحديد مجال ومدى البواقف المعطاة.

الدرس 2-1 تحليل العلاقات والدوال. استخدم معادلات العلاقات والدوال.

بعد الدرس 2-1 تحديد ورسم الدوال الرئيسية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

هل قرأ الطلاب قسم "لماذا؟" من الدرس.

أسأل:

- ما هو متوسط درجة الحرارة المنخفضة في شهر مايو؟ 58°F
- كيف يمكن التعبير عن درجات الحرارة المتوسطة في شهر نوفمبر كزوج مرتب؟ $(42, 63)$
- كيف تتأكد من أن العدد الثاني في الأزواج المرتبة لهذه البيانات أكبر من أو يساوي العدد الأول دائماً؟ سيكون متوسط درجة الحرارة القطبي أكبر من متوسط درجة الحرارة القطبي أو مساوياً لها.

الشمس	الحدس	الحدس	الحدس	الحدس	الحدس
32	34	42	49	58	60
51	50	64	73	80	87
71	69	63	51	42	35
90	88	82	73	63	54

المصدر: The Weather Channel

يوضح الجدول أدناه المتوسط الشهري لدرجات الحرارة القطبية والشمس لثلاثين سنة. يمكن استخدام متوسط درجات الحرارة لكل شهر من خلال زوج مرتب (متوسط القطبي، متوسط المعظم). على سبيل المثال، يمكن التعبير عن متوسط درجات الحرارة للشهر يناير بالزوج المرتب $(32, 50)$.

العلاقات والدوال تذكر أن الدالة عبارة عن علاقة يكون فيها كل عنصر من المجال مقترن مع عنصر واحد فقط في المدى. تتطابق جميع الدوال عناصر المجال بعناصر المدى. ولكن قد تختلف في الطريقة التي يقترن بها المجال والمدى.

المفهوم الأساسي: الدالة

دالة واحدة - لواحد وشاملة

كل عنصر في المجال يقترن مع عنصر واحد فقط في المدى. كل عنصر في المدى يقابل عنصراً من المجال.

كل عنصر في المجال يقترن مع عنصر واحد في المدى. كل عنصر في المدى يقابل عنصراً من المجال.

مثال 1: المجال والمدى

اذكر مجال ومدى كل علاقة. ثم حدد ما إن كانت كل علاقة عبارة عن دالة. وإذا كانت دالة، فحدد إذا كانت واحد لواحد أم شاملة أم كليهما أم ليس أي منهما.

a. $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (6, -9)\}$

المجال: $\{-6, -5, -3, -1, 6\}$ المدى: $\{-9, -7, -1, 7\}$

نعم، لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط في المدى.

لا، لأن كل عنصر من المجال لا يقترن بعنصر واحد فريد في المدى.

نعم، لأن كل عنصر في المدى يقابل عنصراً من المجال.

المفردات الجديدة

دالة واحد لواحد
one-to-one function
دالة شاملة
onto function
علاقة منفصلة
discrete relation
علاقة متصلة
continuous relation
اختبار الخط الرأسي
vertical line test
متغير مستقل
independent variable
متغير تابع
dependent variable
رمز الدالة
function notation

مهارات في الرياضيات

فهم كيفية المشاكل والتفكير في حلها.

محاولة إيجاد البنية واستغلالها.

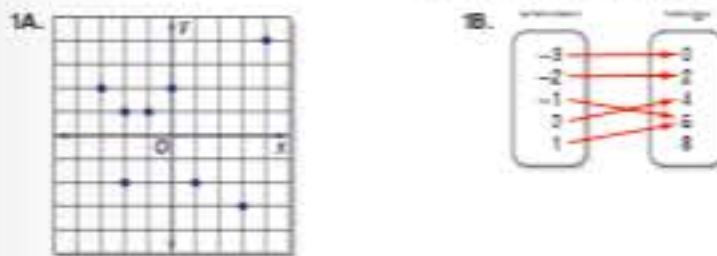
x	2	-1	-2	-1	2
y	-2	-1	0	1	2

المجال: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ المدى: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

العلاقة ليست دالة، حيث تقابلت 2 مع كل من -2 و 2 وتطابق -1 مع كل من -1 و 1.

تمرين موجّه

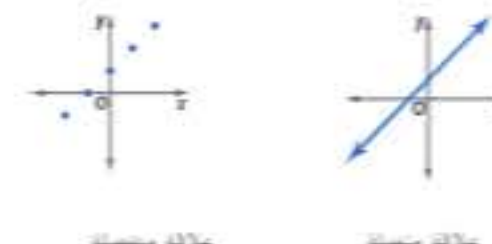
اذكر مجال ومدى كل علاقة. ثم حدد ما إن كانت كل علاقة عبارة عن دالة. وإذا كانت دالة، فحدد إذا كانت واحد لواحد أم شاملة أم كليهما أم ليست أي منهما.



1A. $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$, $R = \{-3, -2, 1, 2, 4\}$ ليست دالة

1B. $D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $R = \{0, 2, 4, 6\}$ دالة: واحد - لواحد، شاملة

يطلق على العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط الفردية مثل العلاقة البيانية في الشكل التالي **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تنظيرها التالي يتكون من نقاط غير متصلة بعضها البعض. وعندما يكون للمجال علاقة عدد لا نهائي من العناصر ويمكن تشكيل العلاقة بيانياً بخط أو منحني مستمر، تكون العلاقة **علاقة متصلة**.



نصيحة دراسية

الخط لا يمثل أن المدخل التالي يكون من النطاق الفريدة أو المتصلة يبدأ عنصر النطاق التالي B من نقطة إلى الدالة دون أي فواصل.

مع كل من التمثيلات البيانية المنفصلة والمتصلة، يمكنك استخدام **اختبار الخط الرأسي** لتحديد ما إن كانت العلاقة دالة أم لا.

المفهوم الأساسي: اختبار الخط الرأسي

إذا لم يتقاطع أي مستقيم رأسي الشكل التالي في أكثر من نقطة، فإنه يمثل دالة.

إذا قطع أحد المستقيمين الرأسين الشكل التالي في نقطتين أو أكثر، فلا يمثل دالة.

1 العلاقات والدوال

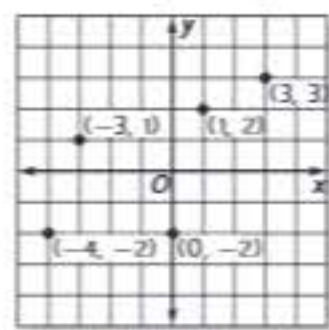
المثال 1 يشرح مجال ومدى العلاقة المنفصلة ويعرض كيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة. كما يعرض كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة وحدة إلى واحدة أو فوقية أو كلاهما أو لا هذا ولا ذلك. **المثال 2** يعرض كيفية استخدام اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان الرسم يمثل دالة. كما يعرض كيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة متصلة أو منفصلة عن طريق النظر في الرسم.

التقويم التكويني

استخدم الثبارين البوجيه بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد مجال ومدى العلاقة. ثم حدد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. فإذا كانت دالة، حدد ما إذا كانت واحدة إلى واحدة أو فوقية أو كلاهما أو لا هذا ولا ذلك.



المجال هو $\{-4, -3, 0, 1, 3\}$. المدى هو $\{-2, 1, 2, 3\}$. كل عضو مجال مقترن مع عضو مدى. إذا العلاقة دالة، هي دالة فوقية. وليست دالة أحادية.

تدريس الممارسات الرياضية

البنية ينظر الطلاب الباحثين رياضياً عن قرب لفهم النمط أو الهيكل. فشجع طلاب توصف حالات الحياة اليومية التي تمثل علاقات متصلة ومتصلة.

التدريس بالتكنولوجيا

السيورة التفاعلية اعرض الرسم على السيورة وشرح اختبار الخط الرأسي. وارسم خطأ رأسياً واسحب من اليسار إلى اليمين بالرسم. ووضح للطلاب أنه إذا كان هناك أي مكان يتقاطع فيه خط رأسي مع الرسم في أكثر من نقطة، فإن الرسم لا يكون دالة.

تمثيلات متعددة

في التمرين 34، يستخدم الطلبة حاسبة رسوم بيانية وجدول معلومات وفحصا برنيا لتعريف خواص الدوال.

33. **المعلومات الصوتية** لدى مازن مجموعة من 35 موزونة صوتية قام بتحميلها على مشغل الصوت الرقمي الخاص به. وقد قرر تحميل 3 موزونات أخرى كل شهر. وتحتسب الدالة $P(t) = 15 + 3t$ عدد الموزونات الصوتية $P(t)$ التي أصبحت لديه بعد t أشهر. فكم عدد الموزونات الصوتية التي ستكون لديه بعد 8 أشهر؟ **39**

34. **تمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستخدم الدوال الوارد - الواحد وشاشتك. **34a-e** انظر ملحق إجابات الوحدة 2.
- a. بيانيًا، مكن كل دالة بيانية على شاشة حاسبة بيانية منفصلة.
- b. جدوليًا، استخدم التمثيل البياني لوضع جدول بين عدد التمرات التي يستطيع شيا مستقيم أفقي قطع التمثيل البياني لكل دالة. اشرح جميع الاحتمالات.
- c. تحليليًا، تكون الدالة واحد - الواحد يمكن استخدامها أفقي على التمثيل البياني أن يتطرق في نقطة واحدة بعد أقصى. أي الدوال تتطابق هذا الشرط؟ وأيها لا تتطابق؟ اشرح استنتاجك.
- c. تحليليًا، تكون الدالة شاملة، يجب أن يتطرق كل مستقيم أفقي محتمل على التمثيل البياني في نقطة واحدة على الأقل. أي الدوال تتطابق هذا الشرط؟ وأيها لا تتطابق؟ اشرح استنتاجك.
- e. بيانيًا، ضع جدولاً يوضح إن كانت كل دالة واحد - الواحد أم شاملة أم كلاهما.

35. **الإجابة النموذجية، عمر: لو يتم محمد بتربيع العدد 3 قبل الضرب في -4-**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **التفكير النقدي** يمثل كل من عمر ومحمد على إيماء $f(x)$ للدالة $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$ شيل أي منهم على صورة؟ اشرح استنتاجك.

ماجد	عمر
$f(x) = -4x^2 - 2x + 1$	$g(x) = -4(5x)^2 - 2(5x) + 1$
$= -12x^2 - 6x + 1$	$= -4(25x^2) - 6x + 1$
	$= -100x^2 - 6x + 1$

37. **ليست كذلك على الإطلاق، إذا قطع التمثيل البياني المحاور الأفقي y مرتين، فسوف توجد قيمتان منفصلتان على المحور الرأسي y تقابل $x = 0$. مما لا يتفق مع نجاح اختبار الخط الرأسي.**

36. **نعم** ذكر في الدوال $f(x)$ و $g(x)$ $f(5) = 33$ و $g(5) = 19$ $f(8) = 31$ و $g(8) = 51$ إذا كانت $a = 5$ و $b = 8$ حد دائس مستقيم ليمثل $f(x)$ و $g(x)$ **الإجابة النموذجية:** $f(x) = 4x - 1$ و $g(x) = 6x + 3$

37. **التبرير** إذا كان التمثيل البياني لعلاقة يتطرق المحور y في أكثر من نقطة، فهنا العلاقة دالة أمباتك أم دالة أم ليست كذلك على الإطلاق؟ اشرح استنتاجك.

38. **مسألة غير محددة الإجابة** مكن بيانية علاقة يمكن استخدامها لتمثيل كل مما يلي.

a. ارتفاع كرة يسقط تم خربها إلى السطح الخارجي.

b. سرعة سيارة تتحرك إلى المتجر. توقف عند إشارات مرور أثناء الطريق.

c. طول شخص من عمر 5 أعوام إلى 80 عامًا.

d. درجة الحرارة في أحد الأيام من الساعة 6 صباحًا إلى 11 مساءً.

40. **التبرير** حدد ما إذا كانت المعادلات التالية صواب أم خطأ. اشرح استنتاجك.

إذا كانت الدالة شاملة، فلا بد أن تكون واحد - الواحد. لوامد كذلك.

40. **التحدي في الرياضيات** اشرح السبب في أن اختبار الخط الرأسي يحدد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. انظر التمارين.

مثال 4

جد قيمة كل دالة.

9. $f(-3)$ if $f(x) = -4x - 8$

10. $g(5)$ if $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

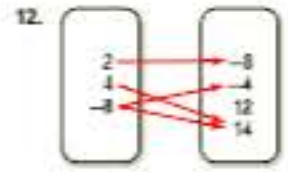
التبرير وحل المسائل

مثال 1

اذكر مجال ومدى كل علاقة. ثم حدد ما إن كانت كل علاقة عبارة عن دالة. وإذا كانت دالة، فحدد إذا كانت واحد - الواحد أم شاملة أم كليهما أم ليست أيًا منهما.

11.

x	y
-0.3	-6
0.4	-3
1.2	-1
1.2	4



13. $\{(-3, -4), (-1, 0), (3, 0), (5, 3)\}$

مثال 2

14. **السياسة** بين الجدول أدناه عدد سكان عدد ولايات وعدد ممثلي الولايات المتحدة من هذه الولايات.

الولاية	السكان (بلايين)	عدد الممثلين
كاليفورنيا	33.93	53
فلوريدا	16.03	25
البنسلفانيا	12.44	19
نيويورك	19.00	29
كارولاينا الشمالية	8.07	13
تكساس	20.90	32

المصدر: مكتب التعداد الأمريكي

- a. مكن بيانات عدد السكان بيانية على المحور الأفقي. وبيانات الممثلين على المحور الرأسي. انظر التمارين.
- b. حدد المدى والمجال.
- c. هل العلاقة منفصلة أم متصلة؟ اشرح استنتاجك.
- c. هل التمثيل البياني يعبر عن دالة؟ اشرح استنتاجك.

مثال 3

البينة مكن كل معادلة بيانيًا ثم حدد المجال والمدى. حدد إن كانت المعادلة دالة. وإن كانت واحد - الواحد أم شاملة أم كليهما أم ليست أيًا منهما. ثم اذكر إن كانت منفصلة أم متصلة. **15-20** انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

15. $y = -3x + 2$

16. $y = 0.5x - 3$

17. $y = 2x^2$

18. $y = -5x^2$

19. $y = 4x^2 - 8$

20. $y = -3x^3 - 1$

جد قيمة كل دالة.

مثال 4

21. $f(-8)$ if $f(x) = 5x^3 + 1$

22. $f(2.5)$ if $f(x) = 16x^2$

23. **الغوص** بين الجدول أدناه الضغط المبدول على الغواص بأعمق مختلف.

العمق (قدم)	0	20	40	60	80	100
الضغط (لبنات)	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a-d. انظر التمارين.

- a. اكتب علاقة شكل هذه البيانات.
- b. مكن العلاقة بيانية.
- c. حدد المجال والمدى. وهل العلاقة منفصلة أم متصلة؟
- d. هل العلاقة دالة؟ اشرح استنتاجك.

جد كل قيمة مما يلي إذا كان $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = -2x^2$ و $h(x) = -4x^2 - 2x + 5$

24. $f(-5)$

25. $f(9)$

26. $g(-3)$

27. $g(-6)$

28. $h(3)$

29. $h(8)$

30. $f\left(\frac{2}{3}\right)$

31. $g\left(\frac{3}{2}\right)$

32. $h\left(\frac{1}{3}\right)$

خيارات واجب منزلي متباينة

المستوى	الواجب	خيار ليومين
أساسي م-5	11-32, 35, 37-64	35, زوجي 12-32, 37-40, 45-64
متوسط م-6	11-32, 33-35, 37-64	33-35, 37-40, 45-64
متقدم م-7	33-55, (اختياري) 56-64	

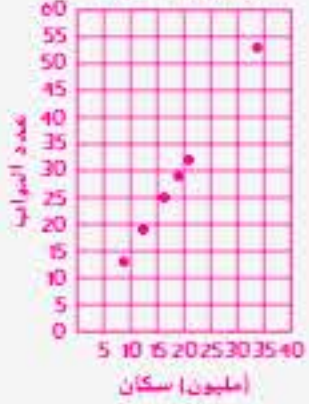
تدريس الممارسات الرياضية

البينة ينظر الطلاب الباحثين رياضياً عن قرب لفهم التبط أو الهيكل.

إجابات إضافية

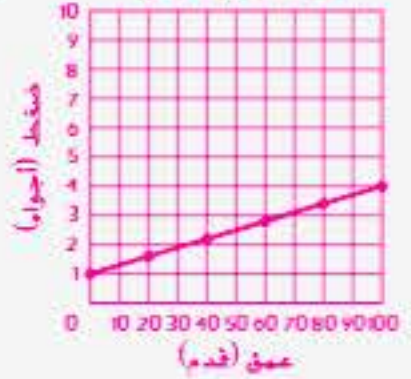
13. $D = \{-3, -1, 3, 5\}$;
دالة، فوقية: $R = \{-4, 0, 3\}$

14a. **تواب الولاية**



23a. $\{(0, 1), (20, 1.6), (40, 2.2), (60, 2.8), (80, 3.4), (100, 4)\}$

23b. **ضغط الغوص**



23c. $D = \{x : x \geq 0\}$;
منصلة: $R = \{y : y \geq 1\}$

23d. نعم. كل قيمة مجال مقترنة بقيمة. جدي واحد. إذا العلاقة دالة.

