

الدوال النسبية 3-4



لماذا؟

- حلقة تقرأ كتاباً من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرأها كل يوم y يعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$ حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.

الحالي

1. تحديد القيم المستبعدة.
2. تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

السابق

- كتبت معادلات التعبير العكسي.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 كتابة معادلات التعبير العكسي.

الدرس 3-4 تحديد القيم المستبعدة. تحديد خطوط التقارب لتمثيل الدوال النسبية بيانياً واستخدامها.

ما بعد الدرس 3-4 استخدام الدوال النسبية لحل المسائل.

المفردات الجديدة

دالة نسبية rational function
قيمة مستبعدة excluded value
خط تقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات معقبة والتحقق على طريقة استنتاج الآخرين.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

2 التدريس

أسئلة الدائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما متوسط عدد الصفحات التي تقرأها حلقة في كل يوم؟ عدد الأيام التي تقرأ فيها
- ماذا يحدث إذا كانت قيمة y مثل x تزداد؟ فإنها تقل.
- ما هي قيم x التي تم استبعادها ولم تؤخذ في الاعتبار؟ x لا يمكن أن تساوي 0 أو أي عدد سالب.

1 تحديد القيم المستبعدة الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال للدالة النسبية. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح

هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة $y = \frac{p}{q}$ معادلة لها الصيغة $y = \frac{p}{q}$ حيث $q \neq 0$ و p كثيرات الحدود و $q \neq 0$ الدالة الأصلية. $f(x) = \frac{1}{x}$

نوع التمثيل البياني: قطع زائد

النجال: $\{x | x \neq 0\}$

المدى: $\{y | y \neq 0\}$

التمثيل البياني

بما أن النسبة على صفر غير معرّفة، فأي قيمة للتعبير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية. يتم استبعادها من مجال الدالة. وتسمى هذه القيم بالقيم المستبعدة للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = \frac{2}{x}$

لا يمكن أن يساوي المقام 0 إذا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x+1}$

اجعل المقام يساوي 0.

$x+1 = 0$

$x = -1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$

c. $y = \frac{5}{4x-8}$

$4x-8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$

1B. $y = \frac{x}{x-7}$

1C. $y = \frac{4}{3x+9}$

بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفراً. من مجال الدالة النسبية. قد ينهي استبعاد قيم إضافية من المجال أيضاً. وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

السياق: إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمطار المبرمة y لكل شخص. مثل هذه الدالة بيانياً.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفراً أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.



عدد الأشخاص x	10	5	4	2
أمطار مبرمة لكل شخص y	2	4	5	10

لاحظ أنه كلما ازدادت x اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت الساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. **الهندسة:** مستطيل تبلغ مساحته 18 سنتيمتراً مربعاً. وتوضيح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثل الدالة بيانياً.



الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز، ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه. المصدر: مركز موارد لرحلات الفضاء

2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها في المثال 2. القيمة المستبعدة هي $x = 0$. لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المستقيم الرأسي $x = 0$. ولكن لا يسهه أبداً.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يسهه أبداً. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما خطين تقاربين. **خط التقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

المفهوم الأساسي: خطوط التقارب

الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x-b} + c$, $a \neq 0$ يكون لها خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفراً، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

الشرح:

خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفراً، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال

استخدام النماذج

مجال $y = \frac{a}{x-b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. البدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع العلم الرصاص عن الورقة، لذا اختر قيم x على كلا جانبي خط التقارب الرأسي لتمثيل جزئي الدالة.

1 تحديد القيم المستبعدة

المثال 1 يوضح كيفية العثور على القيم المستبعدة للدوال النسبية. **المثال 2** يوضح كيفية رسم تمثيل بياني لدوال نسبية واقعية وتحديد القيم التي يمكن استبعادها.

التقويم التكويني

استخدم تمرينات التحقق من تقدمك الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = \frac{3}{x} \quad x = 0$

b. $y = \frac{3}{x+2} \quad x = -2$

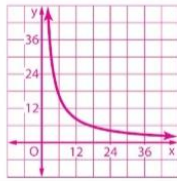
c. $y = \frac{8}{2x+1} \quad x = -\frac{1}{2}$

2 مساواة المواهب إذا كان x

سيكمل مساواة المواهب هذه التي تستمر 100 دقيقة، فإن الدالة $y = \frac{100}{x}$ التي تمثل عدد الدقائق متوفر لكل فعل.

اسم تمثيلاً بيانياً لكل لهذه الدالة. تمثيل بياني للقيم

الموجبة $y = \frac{100}{x}$ كما هو موضح أدناه من خلال (10, 10), (20, 5), (25, 4)



إرشاد للمعلمين الجدد

المتنصل مقابل المتصل الدوال المستخدمة في المثال من الحياة اليومية 2 والمثال الإضافي 2 متنصلة وغير متنصلة.

التدريس المتمايز OL AL

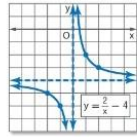
المتعلمون أصحاب النمط المنطقي يدرك معظم الطلاب أن الدالة ذات المقام الذي يساوي 10 غير محدد.

لمساعدة الطلاب في إدراك أن خطاً تقاربياً أفقياً يحدث في $y = c$ في دالة في شكل $y = \frac{a}{x-b} + c$ (حيث $a \neq 0$)، لديه طلاب يعقون جدول قيم لـ x و y وتمثيلاً بيانياً باستخدام المثال الموضح في المفهوم الأساسي.

1. $y = \frac{1}{x-2} + 1$ اطلب من الطلاب توسيع جدول القيم والتمثيل البياني حتى يوافقوا جميعاً أنه كلما زاد x أكثر فأكثر، y قارب 0، وأصبح y أقرب بشكل كبير لـ 1، الذي يشكل قيمة c .

مثال 3 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانياً

a. $y = \frac{2}{x} - 4$

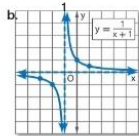


حدد خطوط التقارب وتمثيلها بيانياً باستخدام الخطوط المتقطعة.

خط تقارب رأسي: $x = 0$
خط تقارب أفقي: $y = -4$

أنشئ جدولاً للقيم وعين النقاط، ثم صل بينها.

x	-2	-1	1	2
y	-5	-6	-2	-3



الخطوة 1 لإيجاد خط التقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستعدة.

اجعل المقام يساوي 0.
 $x + 1 = 0$
اطرح 1 من كل طرف.
 $x = -1$

خط تقارب رأسي: $x = -1$
خط تقارب أفقي: $y = 0$

x	-3	-2	0	1
y	-0.5	-1	1	0.5

تمرين موجّه

3A. $y = \frac{6}{x}$

3B. $y = \frac{1}{x-3}$

3C. $y = \frac{2}{x+2} + 1$

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

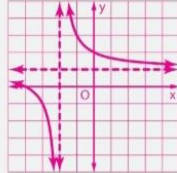
نسبية	جذرية	أسية	تربيعية
الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$ الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x-b} + c$	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$ الصيغة العامة: $y = \sqrt{x-b} + c$	الدالة الأصلية: تختلف الصيغة العامة: $y = ab^x$	الدالة الأصلية: $y = x^2$ الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$

180 | الدرس 3-4 | الدوال النسبية

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب تصوير تسجيلات فيديو توضح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانياً. اطلب منهم أولاً توضيح كيفية إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية ثم استخدام جدول قيم لرسم تمثيل بياني.

3C. $x = -2; y = 1$



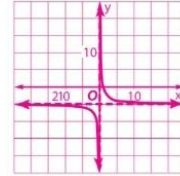
2 تحديد خط تقارب واستخدامه

المثال 3 توضيح كيفية تحديد خطوط تقارب لدالة واستخدامها لتمثيل الدالة بيانياً.

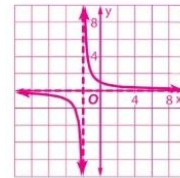
مثال إضافي

3 حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثل الدالة بيانياً.

a. $y = \frac{3}{x} - 4$ $x = 0; y = -4$

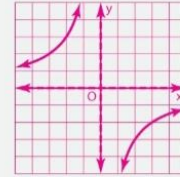


b. $y = \frac{2}{x+2}$ $x = -2; y = 0$

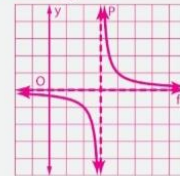


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3A. $x = 0; y = 0$



3B. $x = 3; y = 0$



180 | الدرس 3-4 | الدوال النسبية

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

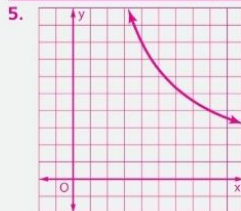
4 التقويم

بطاقة التحقّق من استيعاب الطلاب في قطع ورقية صغيرة، اكتب دالة من خمس دوال نسبية مختلفة مشابهة للدوال الموجودة في هذا الدرس. أعط واحدة لكل طالب. اطلب منهم أن يخبروك بخطوط التقارب الرأسية والأفقية.

تدريس ممارسات في الرياضيات

البنية يدقّق الطلاب الباهرون في الرياضيات لتمييز نمط أو بنية. في المثال 35، ذكّر الطلاب أن لديهم خبرة في تحويل التمثيلات البيانية لأنواع عديدة من الدوال.

إجابات إضافية



التحقّق من فهمك

مثال 1

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

1. $y = \frac{5}{x}$ 2. $y = \frac{1}{x+3}$ 3. $y = \frac{x+2}{x-1}$ 4. $y = \frac{x}{2x-8}$

مثال 2

5. التخطيط للحفل تبلغ تكلفة الزينة من أجل حفل عشاء AED 32. وسيتم هذا المبلغ بين مجموعة من الأصدقاء. المبلغ الذي سيدفعه كل شخص y يمثل في $y = \frac{32}{x}$ حيث x هو عدد الأشخاص. ممثّل الدالة بيانياً.

مثال 3

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم ممثّل الدالة بيانياً.

6. $y = \frac{2}{x}$ 7. $y = \frac{3}{x} - 1$ 8. $y = \frac{1}{x-2}$
9. $y = \frac{-4}{x+2}$ 10. $y = \frac{3}{x-1} + 2$ 11. $y = \frac{1}{x+2} + 5$

التبرين وحل المسائل

مثال 1

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

12. $y = \frac{-1}{x}$ 13. $y = \frac{8}{x-8}$ 14. $y = \frac{x}{x+2}$
15. $y = \frac{x+1}{x-3}$ 16. $y = \frac{2x+5}{x+5}$ 17. $y = \frac{7}{5x-10}$

مثال 2

18. **الظياء** تستطيع الظياء من ذوات الغرون أن تجري 40 كيلومتراً دون توقف. وينتقل متوسط السرعة في المعادلة $y = \frac{40}{x}$ حيث x هو الزمن المستغرق لجري هذه المسافة.
a. ممثّل $y = \frac{40}{x}$ بيانياً.
b. اذكر خطوط التقارب.

19. **قيادة الدراجات** قائد دراجة يقطع 10 كيلومترات كل صباح. متوسط سرعته y يعطى بالمعادلة $y = \frac{10}{x}$ حيث x هو الزمن الذي يستغرقه لقطع مسافة 10 كيلومترات بالدراجة. ممثّل الدالة بيانياً.

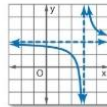
مثال 3

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم ممثّل الدالة بيانياً.

20. $y = \frac{5}{x}$ 21. $y = \frac{-3}{x}$ 22. $y = \frac{2}{x} + 3$
23. $y = \frac{1}{x} - 2$ 24. $y = \frac{1}{x+3}$ 25. $y = \frac{1}{x-2}$
26. $y = \frac{-2}{x+1}$ 27. $y = \frac{4}{x-1}$ 28. $y = \frac{1}{x-2} + 1$
29. $y = \frac{3}{x-1} - 2$ 30. $y = \frac{2}{x+1} - 4$ 31. $y = \frac{-1}{x+4} + 3$

32. **القراءة** راجع التطبيق في بداية الدرس.

a. ممثّل الدالة بيانياً. فسر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.
b. اختر نقطة على التمثيل البياني. واذكر مدلولها في سياق الحالة.



33. **البنية** يوضح التمثيل البياني إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$.

a. اذكر خطوط التقارب.
b. اكتب دالة ممكنة للتمثيل البياني.

خيارات الواجب المنزلي المتهايزة

الخيار اليومي	الواجب	الثقة
12-32 زوجي 43-47, 52-65	13-33 فردي 48-51	12-33, 43-65 مبتدئ AL
34-41, 43-47, 52-65	12-33, 48-51	13-33 فردي 34-37, 39, 41, 43-65 أساسي OL
		34-65 متقدم BL

تدريس ممارسات في الرياضيات

الفرضيات يمكن للطلاب الماهرين في مادة الرياضيات تحليل المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويمكنهم تعريف أمثلة مضادة واستخدامها. في التمرين 45، اقترح أن يرسم الطلاب تمثيلاً بيانياً لدالة نسبية وصوّر تحريك التمثيل البياني لاختبار الفرضية.

34. **الطيور** الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لبيئات 5000 كيلومتر أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة t بواسطة المعادلة $t = \frac{5000}{f}$ ، حيث f هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 ساعة في الطيران.



35. **رحلة ضمنية** سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيمسح كل شخص أيضاً بـ 100 مليمتر من الماء لتغطية أحد النجوم.
- a. أكتب وصفاً لعملياً لتكلفة الشخص الواحد.
- b. أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.
- c. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانياً. فسر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.
- d. قدر عدد الأشخاص المطلوبين لیساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي 15 AED.

مثّل كل دالة بيانياً. حدد خطوط التقارب.

$$36. y = \frac{4x+3}{2x-4}$$

$$37. y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$38. y = \frac{x}{x^2-9}$$

41. **الهندسة** المعادلة $h = \frac{2(64)}{9v + 8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 وحدة مربعة. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين متقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة، ويبلغ طول أحدهما b_1 وحدات والآخر 8 وحدات.

- a. اذكر مجالاً ومدى منطقيين للدالة.
- b. مثل الدالة بيانياً في الربع الأول.
- c. استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b_1 = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. **التحدي** مثل $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ بيانياً. واذكر مجال الدالة ومداه.

40. **التحويل** دون عمل التمثيل البياني. اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x+5} - 2$.

41. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان التفاضليان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

42. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضاداً.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

43. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة** حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$$y = \frac{4}{x}$$

$$y = \frac{6}{x+1}$$

$$y = \frac{8}{x} + 1$$

$$y = \frac{10}{2x}$$

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

