

# المعادلات الجذرية

## 3-2



### لماذا؟

- طول خط الباء للثارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنع حافة الباء عندما يكون الثارب مثبته وسرعة جسم الثارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها.
- يمكنك تقدير سرعة جسم الثارب  $h$  باستخدام الصيغة  $h = 1.34\sqrt{\ell}$  حيث  $\ell$  هو طول خط الباء للثارب الشراعي.

### الحالي

- حل المعادلات الجذرية.
- حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.

### السابق

- أجريت الجمع والطرح والضرب على المتغيرات الجذرية.

## 1 التركيز

### التخطيط الواسي

- قبل الدرس 3-2 جمع المتغيرات الجذرية وطرحها وضربها.
- الدرس 3-2 حل المعادلات الجذرية. حل المعادلات الجذرية بحلول دخيلة.
- بعد الدرس 3-2 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها.

### المفردات الجديدة

معادلات جذرية (radical equations)  
حلون دخيلة (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات  
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

## 2 التدريس

### أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا كنت تعرف قيمة  $h$ ، فما الذي تحتاج عزله بالمعادلة؟  $\sqrt{\ell}$
- يمكنك عزله اقسم كل طرف على 1.34.
- هل يمكنك إزالة إشارة الجذر؟ قم بتربيع كل طرف من أطراف بالمعادلة.

### المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح إذا قُسمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضًا.

الرموز إذا كان  $a = b$ ، فإن  $a^2 = b^2$ .

أمثلة إذا كان  $\sqrt{x} = 4$ ، فإن  $(\sqrt{x})^2 = 4^2$ .

### مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار يحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدوا أن سرعة جسم الثارب تبلغ 9 كيلومترات في الساعة بعد قياسها. فأوجد طول خط الباء للثارب الشراعي. قُرب إلى أقرب متر.

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك الثارب وأنها ترتبط بالطول.

التخطيط يقطع الثارب 9 كيلومترات في الساعة. صيغة سرعة جسم الثارب هي  $h = 1.34\sqrt{\ell}$ .

الحل صيغة سرعة جسم الثارب  $h = 1.34\sqrt{\ell}$

عوض بـ 9 عن  $h$ .  $9 = 1.34\sqrt{\ell}$

اقسم كل طرف على 1.34.  $\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$

بسط.  $6.72 \approx \sqrt{\ell}$

قم بتربيع طرفي المعادلة.  $(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$

بسط.  $45.16 \approx \ell$

طول خط الباء للثارب الشراعي يبلغ حوالي 45 مترًا.

التحقق تحقق من طريق التوحيض بالتقدير في الصيغة الأصلية.

صيغة سرعة جسم الثارب  $h = 1.34\sqrt{\ell}$

$9 \approx 1.34\sqrt{45}$   $\ell = 45$  و  $h = 9$

$9 \approx 8.98899327$  ✓

اضرب.

## 1 المعادلات الجذرية

**المثال 1** توضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية بمتغير في المتجذر. **المثال 2** توضح كيفية حل معادلة جذرية ذات تعبير جذري كالمستجدر.

### التقويم التكويني

استخدم تدريبات التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

### أمثلة إضافية

- ارتفاع السقوط الحر** إذا أسقط جسم من ارتفاع مجهول ووصل إلى الأرض في 5 ثوانٍ. استخدم المعادلة  $t = \sqrt{\frac{2h}{9.8}}$  علماً بأن  $t$  هو الوقت باللواني و  $h$  هو الارتفاع لإيجاد الارتفاع الذي أسقط منه الجسم. **120 m**
- الحل  $25. \sqrt{x-3} + 8 = 15$

## 2 حلول دخيلة

**المثال 3** يوضح كيفية تحديد حلول دخيلة عند حل معادلة جذرية بمتغير على كل طرف من طرفي إشارة المساواة.

### مثال إضافي

- أوجد حلّ  $\sqrt{2-y} = y$  تحقق من حلك. **1**

### التركيز على محتوى الرياضيات

**حلول المعادلات الجذرية** عند حل المعادلات الجذرية، فمن المهم دائماً التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية، لأنه يمكن أن يكون حلاً واحداً أو أكثر خارجياً.

### تمرين موجّه

1. القيادة المعادلة  $v = \sqrt{21.4t}$  تمثل السرعة المتجهة العصى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون جاذب إذا كانت  $v$  هي السرعة المتجهة القصوى بالكيلومترات و  $t$  هو نصف قطر الانعطاف بالأمطار. إذا ضُم الطريق لسرعة أقصىها 505 كيلومترات في الساعة، فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، ازل الجذر أولاً، ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

### مثال 2 التعبير في صورة مجذور

حلّ المعادلة:  $\sqrt{a+5} + 7 = 12$ .

$\sqrt{a+5} + 7 = 12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5} = 5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2 = 5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a+5 = 25$	بسط.
$a = 20$	اطرح 5 من كل طرف.

### تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية.

- $\sqrt{c-3} - 2 = 4$
- $4 + \sqrt{h+1} = 14$

### انتبه!

**تربيع كل طرف**  
تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرفي المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

## 2

**الحلول الدخيلة** في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلّ لا يُعتمد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

### مثال 3 المتغير عند كل طرف

حلّ المعادلة:  $\sqrt{k+1} = k-1$ . تحقق من صحة الحل.

$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2 = (k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k+1 = k^2 - 2k + 1$	بسط.
$0 = k^2 - 3k$	اطرح $k$ و 1 من كل طرف.
$0 = k(k-3)$	حلل إلى العوامل.
$k = 0$ or $k-3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k = 3$	الحل.
$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3-1$	بسط
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	صواب
$2 = 2 \checkmark$	
$\sqrt{k+1} = k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0-1$	بسط
$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	خطأ
$1 \neq -1 \times$	

بما أن  $0 \neq 1$  تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

### تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

- $\sqrt{t+5} = t+3 -1$
- $x-3 = \sqrt{x-1}$

### نصيحة دراسية

**الحلول الدخيلة**  
عند التحقق من الحلول بحثاً عن الحلول الدخيلة، فحين لا نعلم سون بالجذور الأساسية.

## التدريس المتميز

إن كان الطلاب على دراية بحسابات التمثيل البياني.

اطلب من الطلاب رسم تمثيل بياني للمثال 3 للتحقق من الحل. اطلب منهم طرح  $k-1$  من كلا طرفي المعادلة وأدخل بعد ذلك المعادلة بالصورة  $y_1 = \sqrt{x+1} - x + 1$  على **GRAPH**. اضغط على **2nd** **[CALC]** **2** لحساب نقطة الصفر أو نقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور  $x$ . حرك المؤشر إلى يسار نقطة التقاطع الحد الأيسر مع المحور  $x$ . اضغط على **ENTER**. وإلى يمين نقطة تقاطع الحد الأيسر مع المحور  $x$  واضغط على **ENTER**. اضغط على **ENTER** لتقديم إحداثيات نقطة التقاطع  $x$ .



### إجابة إضافية

37. الإجابة النموذجية: اجمع أو اطرح أي تعابير ليست في الجذور من كل طرف. اضرب أو اقسم أية قيم غير موجودة في المتجذر على كل طرف. قم بتربيع كل طرف من أطراف المعادلة. أوجد حل المتغير كما فعلت سابقاً. انظر أمثلة الطلاب.

### 29. التمثيلات المتعددة تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$

- بيانياً امسح الشاشة  $Y=$ . أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالتالي  $Y1 = \sqrt{2x-7}$ . وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالتالي  $Y2 = x-7$ . اضغط على **GRAPH**.
  - بيانياً ارسم ما هو مبين على الشاشة.
  - تحليلياً استخدم ميزة التقاطع مع المحور على شاشة **CALC** لإيجاد نقطة التقاطع.
  - تحليلياً حلّ المعادلة الجذرية جبرياً. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟
30. **التجربة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة. حجمها 162 سنتيمتراً مكعباً. يمكن إيجاد نصف قطر  $r$  الحاوية عن طريق استخدام الصيغة  $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ . حيث  $V$  هو حجم الحاوية و  $h$  هو الارتفاع.
- إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 سنتيمتر، فأوجد ارتفاعها. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.
  - إذا كان ارتفاع الحاوية 10 سنتيمترات، فأوجد نصف قطرها. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.

### مسابك مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان  $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$ . فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

إيمان	أسماء
$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$	$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$
$\sqrt{6-b}^2 = \sqrt{b+10}^2$	$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$
$6-b = b+10$	$6-b = b+10$
$2b = 4$	$-2b = 4$
$b = 2$	$b = -2$
<b>التحقق</b> $\sqrt{6-(2)} \neq \sqrt{(2)+10}$ $\sqrt{4} \neq \sqrt{12}$ لا يوجد حل	<b>التحقق</b> $\sqrt{6-(-2)} \neq \sqrt{(-2)+10}$ $\sqrt{8} \neq \sqrt{8}$ ✓

32. **التبوير** أي معادلة مما يلي حلها هو  $\sqrt{x+2} = \sqrt{4}$ ؟ اشرح.  
A.  $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$       B.  $4 = x + 2$       C.  $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$
33. **التبوير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل  $5 = \sqrt{x} + 1$  وحل  $5 = \sqrt{x+1}$ .
34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.
35. **التبوير** هل المعادلة التالية صحيحة أحياناً أم دائماً أم غير صحيحة على الإطلاق؟ اشرح.  
 $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$
36. **التحدي** حلّ المعادلة  $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$ .
37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

## 4 التقييم

**حصاد الأمس** اطلب من الطلاب توضيح كيف ساعد درس أمس في العمليات ذات التعابير الجذرية في درس اليوم في المعادلات الجذرية.

### التدريس باستخدام التكنولوجيا

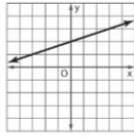
**الهدوء** اطلب من الطلاب كتابة مداخل في مدونة الفصل الدراسي عن الحلول الدخيلة. اطلب منهم توضيح طبيعة الحلول الدخيلة وكيف يمكنهم التحقق من حلولهم بيانياً وجبرياً.

### إجابات إضافية

49. نعم؛ 12 هو العدد حقيقي ومن ثم أحادي الحد.
50. نعم؛  $4x^3$  هو ناتج عدد وثلاثة متغيرات.
51. لا؛  $a - 2b$  بوضوح الطرح وليس فقط الضرب في الأعداد والمتغيرات.
52. لا؛  $4n + 5p$  بوضوح الجمع وليس الضرب فقط في الأعداد والمتغيرات.
53. لا؛  $\frac{x}{y^2}$  يحتوي على متغير في الجذر.
54. نعم؛  $\frac{1}{5}abc^{14}$  هو ناتج عدد،  $\frac{1}{5}$  وعدة متغيرات.

### تدريب على الاختبار المعياري

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3  
G  $-\frac{1}{3}$

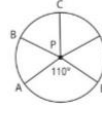
H  $\frac{1}{3}$   
J 3

41. ما حلول  $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$  ؟

A 1, 6  
B -1, -6

C 1  
D 6

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقب عند A و B و C و D و E على الدائرة P.



إذا حفر حسن الثقب بحيث تكون  $m\angle APE = 110^\circ$  وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس  $m\angle CPD$  ؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون  $w = 3$  ؟

A  $\frac{w-3}{w+1}$   
B  $\frac{w^2-3w}{3w}$

C  $\frac{w+1}{w^2-3w}$   
D  $\frac{3w}{3w^2}$

### مراجعة شاملة

42. الكهرياء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية تعطى بالمعادلة  $V = \sqrt{PR}$ . حيث P هو القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأمم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

43.  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$

44.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

45.  $7\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$

46.  $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$

47.  $\sqrt{\frac{3c^2}{4d^3}}$

48.  $\frac{\sqrt{9x^2y}}{\sqrt{16x^2y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية الحد. أكتب نعم أو لا؛ اشرح.

49. 12

50.  $4x^3$

51.  $a - 2b$

52.  $4n + 5p$

53.  $\frac{x}{y^2}$

54.  $\frac{1}{5}$

### مراجعة المهارات

بسط.

55.  $9^2$

56.  $10^6$

57.  $4^5$

58.  $(8v)^2$

59.  $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$

60.  $(10y^2)^3$

### التدريس المتمايز

**التوسع** وضح أن الوسط الهندسي لعددتين صحيحتين موجبتين هو الجذر التربيعي الموجب لنتاجهما. اطلب من الطلاب إيجاد زوج من الأعداد الزوجية المتتالية التي يكون الوسط الهندسي لها هو  $4\sqrt{5}$ . لأن  $4\sqrt{5} = \sqrt{x(x+2)}$ ، أو  $x = 8$  أو  $x = -10$ . نظراً لأن العددين موجبتين، فإن  $x$  يجب أن يساوي 8 ومن ثم،  $x + 2 = 10$ . العددين هما 8 و 10.

### التقويم التكويني

استخدام الاختبار القصير بنصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل البجاء عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

### مطويات منظّم الدراسة

#### Dinah Zike® مطويات

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة القصير، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 3-1 إلى 3-2 المكتوبة في مطوياتهم.

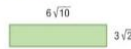
14. اختيار من متعدد أي من التعبيرات التالية يكافئ التعبير  $\sqrt{\frac{16}{32}}$  (الدروس 3-2)

- F  $\frac{1}{2}$   
G  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
H 2  
J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدروس 3-3)

15.  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$   
16.  $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$   
17.  $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$   
18.  $\sqrt{27} - \sqrt{48}$   
19.  $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$   
20.  $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$   
21.  $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

22. هندسة أوجد مساحة المستطيل. (الدروس 3-3)



خسّل كل من المعادلات التالية، تحقق من صحة الحل. (الدروس 3-2)

23.  $\sqrt{5x} - 1 = 4$   
24.  $\sqrt{a-2} = 6$   
25.  $\sqrt{15-x} = 4$   
26.  $\sqrt{3x^2-32} = x$   
27.  $\sqrt{2x-1} = 2x-7$   
28.  $\sqrt{x+1} + 2 = 4$

29. الهندسة المساحة الجانبية  $S$  للخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون  $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$ ، حيث  $r$  هو نصف قطر القاعدة و  $h$  هو ارتفاع الخروط. (الدروس 3-2)



مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي، واذكر المجال وال المدى. (الدروس 3-1)

1.  $y = 2\sqrt{x}$   
2.  $y = -4\sqrt{x}$   
3.  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$   
4.  $y = \sqrt{x} - 3$   
5.  $y = \sqrt{x-1}$   
6.  $y = 2\sqrt{x-2}$

7. اختيار من متعدد طول ضلع المربع يُعطى بالدالة  $s = \sqrt{4}$ ، حيث  $A$  هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة 121 سنتيمترًا مربعًا؟ (الدروس 3-1)

A 121 سنتيمتر  
B 11 سنتيمتر  
C 44 سنتيمتر  
D 10 سنتيمترات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدروس 3-2)

8.  $2\sqrt{25}$   
9.  $\sqrt{12} \sqrt{8}$   
10.  $\sqrt{72xy^5z^6}$   
11.  $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$   
12.  $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. الأقمار الصناعية أطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 كيلومتر. وتُعطى السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصيغة  $v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$ ، حيث  $v$  هي السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و  $G$  هو ثابت تسمى  $6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg}$ ، و  $M_E$  هي كتلة الأرض.  $r$  هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدروس 3-2)

a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 متر. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟  
b. كتلة الأرض هي  $5.97 \times 10^{24}$  كيلوجرام، والثابت  $G$  هو  $6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg}$ . يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.