الدرس 4-1 منصفات المثلثات

السابق

- لقد استخدمت مُنصّفات القطع المستقيمة والزوايا.

الحالي

1. تحديد المُنصّفات العمودية في المثلثات واستخدمها.
2. تحديد مُنصّفات الزوايا في المثلثات واستخدمها.

لماذا؟

- إن إنشاء مثلث عمل في المطبخ من شأنه تحسين كفاءة عملية تحضير الطعام من خلال تقليل عدد الخطوات التي ينبغي اتخاذها. لتحديد النقطة التي تقع على مسافة واحدة من الحوض ومن الفرن ومن الثلاجة، يمكنك استخدام المُنصّفات العمودية للمثلث.

المفردات الجديدة

مُنصّف عمودي (perpendicular bisector)

المستقيمات المتقاطعة (concurrent lines)

نقطة التقاطع (point of concurrency)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

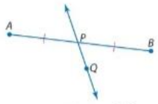
مركز الدائرة الداخلية (incenter)

ممارسات في الرياضيات

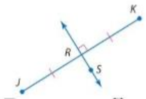
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المُنصّفات العمودية

لقدتعلمت أن المستقيم المُنصّف هو أي قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة بمنتصفها. إذا كان المُنصّف عمودي أيضًا على القطعة المستقيمة، فإنه يُسمى **مُنصّف عمودي**.



$\overleftrightarrow{PQ}$ هو منصف $\overline{AB}$.



$\overleftrightarrow{RS}$ هو منصف عمودي لـ $\overline{JK}$

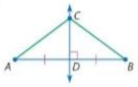
تذكر أن *المحل الهندسي* هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا مُعينًا. كما أن المُنصّف العمودي للقطعة المستقيمة هو محل هندسي لنقاط في مستوى تقع على مسافة واحدة من أطراف القطعة المستقيمة. هذا ينقلنا إلى النظريات التالية.

نظريات المُنصّفات العمودية

4.1 نظرية المُنصّفات العمودية

إذا وُجدت نقطة على المُنصّف العمودي لقطعة مستقيمة ما، إذًا فهي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.

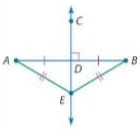
مثال: إذا كان $\overline{CD}$ هو مُنصّف ⊥ $\overline{AB}$، إذًا $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية المُنصّفات العمودية

إذا وُجدت نقطة تقع على مسافة واحدة من طرفي قطعة مستقيمة ما، إذًا فهي على المُنصّف العمودي للقطعة المستقيمة.

مثال: إذا كان $AE = BE$، إذًا E تقع على $\overline{CD}$، المُنصّف ⊥ لـ $\overline{AB}$.



سوف تقوم بإثبات نظريتي 4.1 و 4.2 من خلال التمرينين 39 و 37، على الترتيب.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-1 استخدام منصفات القطعة المستقيمة والزاوية.

الدرس 4-1 تحديد المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-1 الربط بين التمثيل الجبري والهندسي للوظائف.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا يمكن لمثلث عمل أن يكون مفيدًا في تصميم مطبخ؟ إنه يقلل من عدد الخطوات المطلوبة.
- أين يمكن وضع جزيرة في هذا المثلث؟ نقطة على مسافة مساوية من الثلاجة والموقد والحوض.
- هل تقع هذه النقطة دائمًا عند نقطة المنتصف لكل ضلع في المثلث؟ لماذا؟ الإجابة النموذجية: لا. فهي في الصورة ليست عند نقطة منتصف الضلع الواصل بين الموقد والحوض.

1 المنصفات العمودية

المثال 1 يوضح كيفية استخدام منصفات الزوايا لإيجاد القياسات في شكل.
المثال 2 يوضح كيفية استخدام مركز الدائرة المحيطة لتحديد موقع نقطة في شكل.

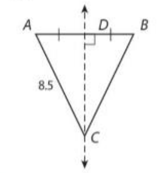
التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

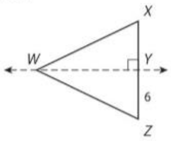
1 أوجد قياس كل مما يلي.

a. BC



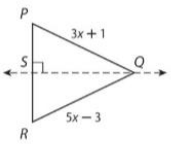
8.5

b. XY



6

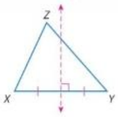
c. PQ



7

نصيحة دراسية

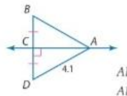
المُنصِّفات العمودية ليس بالضرورة أن يمر المُنصِّف العمودي لأحد أضلاع المثلث برأس المثلث. على سبيل المثال، في $\triangle XYZ$ أدناه، نجد أن المُنصِّف العمودي لـ $\overline{XY}$ لا يمر بالنقطة Z.



مثال 1 استخدام نظريات المُنصِّفات العمودية

أوجد قياس كل مما يلي.

a. AB

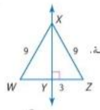


من المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{BD}$.

$AB = AD$ نظرية المُنصِّف العمودي

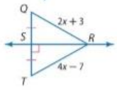
$AB = 4.1$ تعويض

b. WY



بما أن $WX = ZX$ و $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$, $\overleftrightarrow{XY}$ هو المُنصِّف العمودي لـ $\overline{WZ}$ وفقًا لعكس نظرية المُنصِّف العمودي. وفقًا لتعريف مُنصِّف القطعة المستقيمة، $WY = YZ$. بما أن $WY = 3$، $YZ = 3$.

c. RT



$\overleftrightarrow{SR}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظرية المُنصِّف العمودي

$4x - 7 = 2x + 3$ بالتعويض

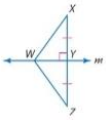
$2x - 7 = 3$ طرح $2x$ من كل طرف

$2x = 10$ اجمع 7 لكل طرف

$x = 5$ اقسم كل طرف على 2

فإن $RT = 4(5) - 7$ أو 13.

تمرين موجه



1A. إذا كان $WX = 25.3, YZ = 22.4$ و $WZ = 25.3$ أوجد XY. **22.4**

1B. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ و $WZ = 14.9$. فأوجد WX. **14.9**

1C. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ. $WX = 4a - 15$ و $WZ = a + 12$ فأوجد WX. **21**

عندما تتقاطع ثلاث مستقيمات أو أكثر عند نقطة مشتركة، فإن المستقيمات تُسمى **مستقيمات متقاطعة**. والنقطة التي تتقاطع بها المستقيمات المتقاطعة تُسمى **نقطة التقاطع**.

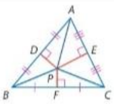
بما أن للمثلث ثلاثة أضلاع، فإن لديه ثلاث مُنصِّفات عمودية. تعتبر المُنصِّفات مستقيمات متقاطعة. وتُسمى نقطة تقاطع المُنصِّفات العمودية **نقطة تقاطع مُنصِّفات** أضلاع المثلث.

الخطوط a, b, c متقاطعة عند النقطة P.

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة المحيطة

الشرح تتقاطع المُنصِّفات العمودية لأضلاع المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة المحيطة* بحيث تكون على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

مثال إذا كانت P هي نقطة تقاطع المُنصِّفات لـ $\triangle ABC$، إذًا $PB = PA = PC$.

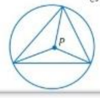


التدريس المتمايز OL AL

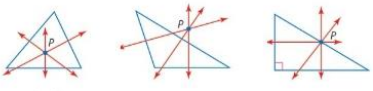
المتعلمون أصحاب النمط البصري توقع أن يجد بعض الطلاب المفاهيم والمفردات في هذا الدرس مربكة. امنح وقتًا إضافيًا لكل المفاهيم في هذا الدرس. بعد كل مفهوم، اقترح أن يساهم الطلاب في ملصق في الصف يوضح المفاهيم والحقائق المختلفة بشأنها. وراجع أيضًا المفاهيم أثناء استكمالك لها مع مناقشة أوجه التشابه والاختلاف بينها.

قراءة في الرياضيات

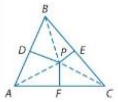
المحيط- كلمة المحيط- تعني الشيء الذي يكون من جميع الجهات أو الإطار الخارجي. فنقطة تقاطع المُنصِّفات هي مركز الدائرة التي تمس رؤوس المثلث من الخارج.



قد تقع نقطة تقاطع المُنصِّفات داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



إثبات نظرية مركز الدائرة المحيطة



المعطيات: $\overline{PD}$ و $\overline{PF}$ و $\overline{PE}$ هم مُنصِّفات عمودية لـ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$، على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

الفقرة الإثباتية:

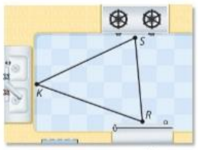
بما أن P يقع على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{AC}$، فإنها تكون على مسافة واحدة من A و C. باستخدام تعريف المسافة الواحدة، $AP = CP$. تقع P على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{BC}$، فإن، $CP = BP$. باستخدام خاصية التعدي في المساواة، $AP = BP$. فإن، $AP = CP = BP$.

الربط بالحياة اليومية

من إحدى القواعد الأساسية لمساحة العمل المثلثة بالمطبخ هي ألا تكون أضلاع المثلث أكبر من 9 أقدام وألا تكون أقل من 4 أقدام. كما لا ينبغي أن يكون محيط المثلث أكبر من 26 قدمًا أو أقل من 12 قدمًا.

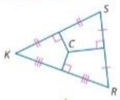
المصدر: شركة ميربلات

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة



تصميم داخلي فرن S، حوض K، و ثلاجة R موضوعة في مطبخ بالشكل الموضح. أوجد موقعًا متوسطًا لطاولة تحضير الطعام بحيث تكون على مسافة واحدة من هذه النقاط الثلاث.

باستخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة، يمكن إيجاد نقطة تقع على مسافة واحدة من ثلاث نقاط باستخدام المُنصِّفات العمودية للمثلث الذي تشكل هذه النقاط الثلاث رؤوسه.



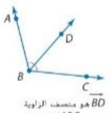
انسخ $\triangle SKR$، واستخدم مسطرة ومنقلة لرسم المُنصِّفات العمودية. موقع المركز الذي ستوضع فيه الطاولة هو C، نقطة تقاطع مُنصِّفات $\triangle SKR$.

تمرين موجه

2. يحتاج جاسم عند ري حديقته المثلثة إلى وضع آلة رش على مسافة واحدة من كل رأس من رؤوس مثلث الحديقة. أين ينبغي على جاسم وضع آلة الرش؟ **انظر الهامش.**

2 مُنصِّفات الزاوية

تذكر أن مُنصِّف الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. قد يكون مُنصِّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو شعاعًا.

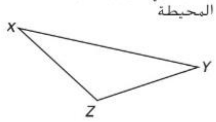


$\overrightarrow{BD}$ هو منصف الزاوية $\angle ABC$.

يمكن وصف مُنصِّف الزاوية بأنه محل هندسي للنقاط الموجودة داخل الزاوية التي تقطع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية. ينقلنا هذا الوصف إلى النظريات التالية.

مثال إضافي

2 الحديقة تظهر حديقة على شكل مثلث. هل يمكن وضع نافورة في مركز الدائرة المحيطة



لا، يقع مركز الدائرة المحيطة بمثلث منفرج الزاوية خارج المثلث.

إرشاد للمعلمين الجدد

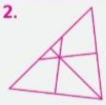
توضيح المفردات اشرح أن مركز الدائرة المحيطة لا يقع بالضرورة داخل المثلث. ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع منفرج الزاوية بزوايا تبلغ 10° و 10° و 160° لتوضيح مركز دائرة محيطة خارج مثلث.

التركيز على محتوى الرياضيات

فهم الكلمات يحتوي هذا الدرس على الكثير من المصطلحات التي لها سابقة أو لاحقة مرتبطة بجذر الكلمة. عليك أن تؤكد للطلاب أن كل سابقة أو لاحقة ستساعدهم في الفهم. على سبيل المثال، **circum** تعني "حول" أو "محيط". circumcenter (مركز الدائرة المحيطة) في مثلث هو مركز دائرة تحيط بالمثلث.

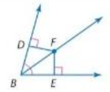
إجابات إضافية (تمرين موجّه)

2.



نظريات مُنصِّفات الزاوية

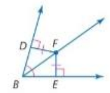
4.4 نظرية مُنصِّفات الزاوية



إذا وُجدت نقطة على مُنصِّف زاوية ما، فإنها تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$، $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ و $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$.
فإن $DF = FE$.

4.5 معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية



إذا وُجدت نقطة داخل الزاوية تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإنها تقع على مُنصِّف الزاوية.

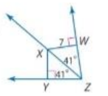
مثال: إذا كان $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$، $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ و $DF = FE$.
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.

سوف تقوم بإثبات النظريتين 4.4 و 4.5 من خلال التمرينين 43 و 40.

مثال 3 استخدام نظريات مُنصِّف الزاوية

أوجد قياس كل مما يلي.

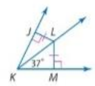
a. XY



$XY = XW$ — نظرية مُنصِّف الزاوية

$XY = 7$ — بالتعويض

b. $m\angle JKL$



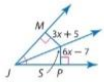
بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$، $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$، $\overline{LJ} \cong \overline{LM}$،
L يقع على مسافة واحدة من ضلعي $\angle JKM$.
باستخدام معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية
نظرية $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$ — تعريف مُنصِّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ — تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37$ — بالتعويض

c. SP



$SP = SM$ — نظرية مُنصِّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ — بالتعويض

$3x - 7 = 5$ — طرح $3x$ من كل جانب.

$3x = 12$ — اجمع 7 مع كل طرف.

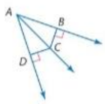
$x = 4$ — اقسم كل طرف على 3.

إذًا $SP = 6(4) - 7$ أو تساوي 17

نصيحة دراسية

مُنصِّف الزاوية بالنسبة للجزء **b**، فإن عدم توفر أي معطيات سوى أن $JL = LM$ لن يكون كافيًا لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

تمرين موجه



3A. إذا كان $m\angle BAC = 38, BC = 5, DC = 5$، فأوجد $m\angle DAC$. **38**

3B. إذا كان $m\angle BAC = 40, m\angle DAC = 40, DC = 10$، فأوجد BC. **10**

3C. إذا كان $\overrightarrow{AC}$ تنصف $\angle DAB$، $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$. فأوجد BC. **20**

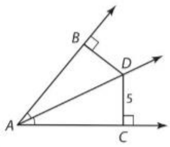
2 منصفات الزوايا

المثال 3 يوضح كيفية استخدام نظرية منصف الزاوية. **المثال 2** يوضح كيفية استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية.

مثال إضافي

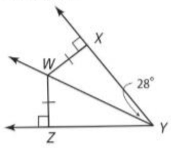
3 أوجد قياس كل مما يلي.

a. DB



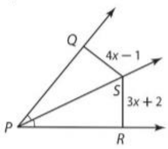
5

b. $m\angle WYZ$



28

c. QS



11

انتبه!

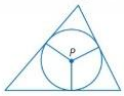
التعويض في الجزء c من المثال 3، لا يكفي أن تصل إلى قيمة المتغير x. لإيجاد طول $\overline{SP}$، تحتاج إلى إيجاد قيمة $6x - 7$.

إرشاد للمعلمين الجدد

تعريفات اجعل الطلاب يبحثوا عن تعريفات المنصفات والوسيطات والارتفاعات. ينبغي أن يقارنوا بين تعريفات الرياضيات والتعريفات في الحياة اليومية ليصلوا إلى فهم شامل للمعاني.

قراءة في الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية هو مركز الدائرة التي تتقاطع مع كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. لهذا السبب، يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث.

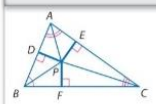


ونفس الشيء ينطبق على المُنصِّفات العمودية. فبما أن المثلث له ثلاث زوايا، فإن له أيضًا ثلاث مُنصِّفات زوايا. إن مُنصِّفات زاوية المثلث متقاطعة، ونقطة تقاطعها تُسمى **مركز الدائرة الداخلية** للمثلث.

نظرية 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية

الشرح تتقاطع مُنصِّفات زوايا المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة الداخلية* بحيث تكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث.

مثال إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.
فإن $PD = PE = PF$.

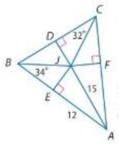


سوف تثبت النظرية 4.6 في تمرين 338

مثال 4 استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية

أوجد قياس كل مما يلي إذا علمت أنَّ J هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a. JF



باستخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية، بما أن $JF = JE$ وبما أن J تقع على مسافة واحدة من أضلاع $\triangle ABC$. أوجد JF باستخدام نظرية فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144$ و $15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	بطرح 144 من كل طرف
$JE = \pm 9$	بحساب الجذر التربيعي من كل طرف

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، استخدم الجذر التربيعي الموجب فقط وهو 9.
بما أن $JF = 9$ ،$JE = JF$.

b. $m\angle JAC$

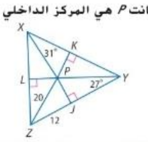
بما أن $\overrightarrow{BJ}$ تنصف $\angle CBE$، $m\angle CBE = 2m\angle JBE$. إذًا $m\angle CBE = 2(34)$ أو 68.
وبالمثل، $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$. إذًا $m\angle DCF = 2(32)$ أو تساوي 64.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$68 + 64 + m\angle FAE = 180$	$m\angle CBE = 68, m\angle DCF = 64$
$132 + m\angle FAE = 180$	بسِّط
$m\angle FAE = 48$	بطرح 132 من كل طرف

بما أن $\overrightarrow{AJ}$ تنصف $\angle FAE$، $2m\angle JAC = m\angle FAE$. فهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$ إذًا $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48)$ أو 24.

تمرين موجه

إذا كانت P هي المركز الداخلي لـ $\triangle XYZ$، أوجد قياس كل مما يلي.

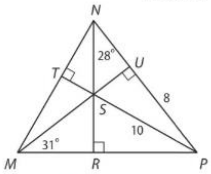


4A. PK 16

4B. $m\angle LZP$ 32

مثال إضافي

4 أوجد قياس كل مما يلي إذا كان S هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle MNP$.



a. SU 6

b. $m\angle SPU$ 31

210 | الدرس 4-1 | منصفات المثلثات

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

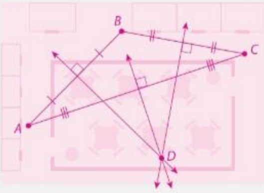
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسارًا للحل بدلًا من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمرين 8، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولًا.

إجابة إضافية

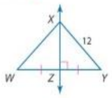
4.



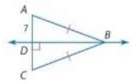
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

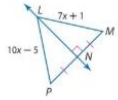
1. XW **12**



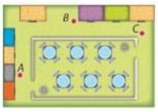
2. AC **14**



3. LP **15**

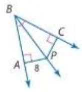


مثال 2 **.4** **إعلان** أربع صديقات يتبادلن النشرات الإعلانية بساحة طعام بأحد المراكز التجارية. أخذت ثلاث منهن ما استطعن جمعه من النشرات الإعلانية وجلسن كما هو موضح. تحتفظ الصديقة الرابعة بمخزون إضافي من النشرات الإعلانية. انسخ مواضع النقاط A, B, C. ثم عيّن موقع الصديقة الرابعة عند النقطة D حتى تكون على مسافة واحدة من الصديقات الثلاث الأخريات. **انظر الهامش.**

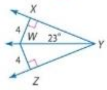


مثال 3 **أوجد قياس كل من الآتي.**

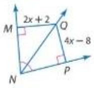
5. CP **8**



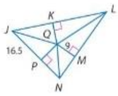
6. $m\angle WYZ$ **23**



7. QM **12**



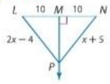
مثال 4 **.8** **الاستنتاج المنطقي** أوجد JQ إذا كانت Q هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$. **18.8**



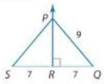
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

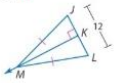
9 NP **14**



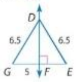
10. PS **9**



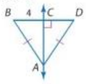
11. KL **6**



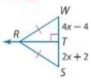
12. EG **10**



13. CD **4**



14. SW **16**



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

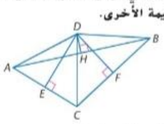
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-30, 48-51, 54-69	55-58 ,فردي 9-29	10-30 ,زوجي 48-51, 54. 59-69
OL أساسي	9-35 ,فردي 36, 37-43 ,فردي 44, 45, 47, 48-51, 54-69	9-30, 55-58	31-51, 54, 59-69
BL متقدم	32-67, (اختياري: 68, 69)		

مثال 2

15. **المعرض الوطني** تم تحديد مواقع جناح الملاهي ومسابقات الماشية وبائعي المواد الغذائية في المعرض الوطني.
قرر المخططون للمعرض وضع دورات المياه المتنقلة على مسافة واحدة من كل موقع. انسخ مواضع النقاط L، M و F.
ثم أوجد موقع دورات المياه وسمها النقطة R. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

16. **المدرسة** أنشأت إدارة مجمع مدارس مبنى للحلقة الاولى وآخر للحلقة الثانية وآخر للحلقة الثالثة كما هو موضح بالرسم التخطيطي. انسخ مواضع النقط M، E و H. ثم أوجد موقع ساحة الحافلات B التي ستخدم هذه المدارس الثلاثة بحيث تكون الساحة على نفس المسافة من كل المدارس. **انظر الهامش.**

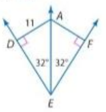
النقطة D هي مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$. اذكر أي القطع المستقيمة تتطابق مع القطع المستقيمة الأخرى.



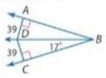
17. $\overline{AD}$ **$\overline{CD}$, $\overline{BD}$**
18. $\overline{BF}$ **$\overline{CF}$**
19. $\overline{AH}$ **$\overline{BH}$**
20. $\overline{DC}$ **$\overline{DA}$, $\overline{DB}$**

أوجد قياس كل مما يلي.

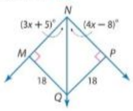
21. AF **11**



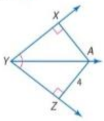
22. $m\angle DBA$ **17**



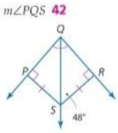
23. $m\angle PNM$ **88**



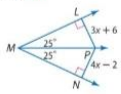
24. XA **4**



25. $m\angle PQS$ **42**

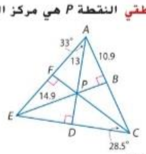


26. PN **30**



مثال 4

الاستنتاج المنطقي **النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$. أوجد قياس كل مما يلي.**



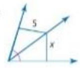
27. PB **7.1**
28. DE **13.1**
29. $m\angle DAC$ **33**
30. $m\angle DEP$ **28.5**

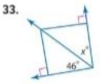
تدريس الممارسات في الرياضيات

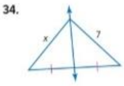
الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط التوصل إلى حل. إنهم يخططون مسارًا للحل بدلاً من القفز ببساطة إلى محاولة الحل. في التمارين من 27 إلى 30، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

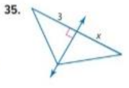
31 تصميم داخلي إذا أردت وضع مزهرية على طاولة ركنية بحيث تكون على مسافة واحدة من جميع حواف الطاولة، اصنع رسمًا تخطيطيًا لتوضيح موقع المزهرية. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

حدد ما إذا كانت المعلومات المعطاة بكل رسم تخطيطي كافية لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك. **32. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة عمودية على الأشعة.**

32. 

33. 

34. 

35. 

B

33. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت القطع المستقيمة العمودية متساوية.

34. لا؛ نريد معرفة ما إذا كان مُنصف القطعة المستقيمة هو مُنصف عمودي.

35. لا؛ نريد معرفة ما إذا كانت أوتار المثلث متطابقة.

36. **كرة قدم** يتجه لاعب كرة القدم P إلى مرمى الفريق الخصم كما هو موضح بالرسم التخطيطي. لإحراز الهدف، ينبغي على اللاعب ركل الكرة بين عارضتي المرمى عند النقطتين L و R. يقف حارس المرمى أمام اللاعب. ثم حاول الحارس الوقوف بطريقة تساعده على القفز بجسده لإيقاف الركلة، بحيث يبعد عن الضلع الأيسر لزاوية التسديد بنفس المسافة التي يبعد بها عن الضلع الأيمن لزاوية التسديد. **a–c. انظر الهامش.**

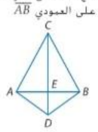
a. صف الموقع الذي ينبغي على الحارس الوقوف عنده. اشرح استنتاجك.
b. انسخ $\triangle PRL$. استخدم منقلة ومسطرة لتحديد النقطة G التي ينبغي على الحارس الوقوف عندها.
c. إذا تم ركل الكرة لتتبع المسار من P إلى R، حدد أقصر مسار ينبغي على حارس المرمى اتباعه لصد الركلة. اشرح استنتاجك.

الإثبات اكتب إثباتًا من عمودين. 37-38. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

37. النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

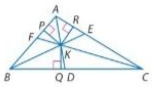
الإثبات: تقع النقطتان C و D على العمودي $\overline{AB}$



38. النظرية 4.6

معطى: مُنصّفات زوايا $\triangle ABC$، $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$
$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC},$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

الإثبات: $KP = KQ = KR$



الفرضيات اكتب الفقرة الإثباتية لكل نظرية.

39. النظرية 4.1 **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

40. النظرية 4.5 **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة بالأطراف المعطاة. علل إجابتك.

41. $A(-3, 1)$ و $B(4, 3)$ **انظر الهامش.**

42. $C(-4, 5)$ و $D(2, -2)$ **انظر الهامش.**

ملاحظات لحل التمرين

الفرجار والحافة المستقيمة

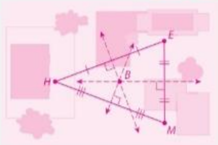
تتطلب التمارين 4 و 15 و 16 و 36 و 44 و 49 استخدام فرجار وحافة مستقيمة.

تدريس الممارسات في الرياضيات

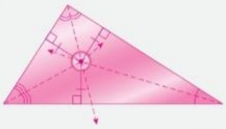
الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمرينين 39 و 40، شجّع الطلاب على رسم كل شكل قبل البدء في وضع البرهان.

إجابات إضافية

16.



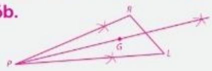
31.



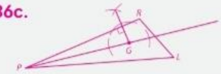
أوجد نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث، مركز الدائرة الداخلية. تقع هذه النقطة على مسافة متساوية من كل ضلع في المثلث.

36a. ينبغي أن يقف حارس المرمى بطول منصف زاوية ركلة الخصم بما أن المسافة لأي من ضلعي الزاوية واحدة بطول هذا الخط.

36b.



36c.



أقصر مسافة بين مستقيم ونقطة ليست على هذا المستقيم هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من هذه النقطة.

41. $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$؛ يقطع المنصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. ميل القطعة المستقيمة المذكورة هو $\frac{2}{7}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو $-\frac{7}{2}$.

42. $y = \frac{6}{7}x + \frac{33}{14}$؛ يقطع المنصف العمودي القطعة المستقيمة عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة. نقطة المنتصف هي $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$. ميل القطعة المستقيمة المحددة هو $-\frac{7}{6}$. إذًا ميل المنصف العمودي هو $\frac{6}{7}$.

43. **الإثبات** اكتب إثباتًا من عمودين للنظرية 4.4. **انظر الهامش.**

44. **تصميم بياني** تقوم خولة بتصميم علم مثلث لمدرستها. فهي تريد وضع صورة لشعار المدرسة داخل دائرة في العلم الرياضي. انسخ رسمة العلم المثلث وحدد موقع النقطة التي ستكون مركز الدائرة لعمل أكبر دائرة ممكنة. علل رسمك. **انظر الهامش.**

هندسة إحداثية حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة للمثلث ذي الرؤوس المعطاة. اشرح.

45. $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$ **انظر الهامش.**

46. $J(5, 0), K(5, -8), L(0, 0)$ **انظر الهامش.**

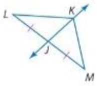
47. **محل هندسي** فكر في $\overline{CD}$. صف مجموعة كل النقاط الموجودة في الفراغ الواقع على مسافة واحدة من C و D.

ثمة مستوى عمودي على مستوى آخر حيث $\overline{CD}$ يقع على $\overline{CD}$ وينصفها

48. أسماء. النقطة K تقع فقط على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{LM}$ إذا كان $\overline{LK} \cong \overline{MK}$ ولكن لا توجد هذه المعلومات في الرسم التخطيطي.

مهارات التفكير العليا مسائل

48. **تحليل الخطأ** يقول حليم إنه بعد اطلاعه على المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، يمكنه استنتاج أن K تقع على المُنصّف العمودي لـ $\overline{LM}$. لا يوافق حمادة على هذا الرأي. هل أحدهما على صواب؟
اشرح استنتاجك.



49. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثًا به مركز دائرة داخلية يقع داخل المثلث ولكن مع وجود مركز الدائرة المحيطة خارج المثلث. برر رسمك باستخدام مسطرة ومنقلة لإيجاد نقطتي التقاطع. **انظر الهامش.**

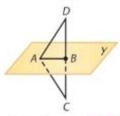
فرضيات حدّد ما إن كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا* أو *صحيحة دائمًا*، أو *غير صحيحة على الإطلاق*. برر استنتاجك باستخدام مثال مضاد أو إثبات.

50. تتقاطع مُنصّفات زوايا المثلث في نقطة تقع على مسافة واحدة من رؤوس المثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

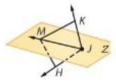
51. في المثلث المتساوي الساقين، يكون المُنصّف العمودي للقاعدة هو أيضًا مُنصّف زاوية الرأس المقابل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

تحدٍّ اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ من التالي.

52. **المعطيات:** المستوى Y عمودي على مُنصّف $\overline{DC}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
الإثبات: $\angle ADB \cong \angle ACB$



53. **المعطيات:** المستوى Z هو مُنصّف زاوية $\angle KJH, \overline{KJ} \cong \overline{HJ}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**
اثبت أن: $\overline{MH} \cong \overline{MK}$



54. **الكتابة في الرياضيات** قارن بين المُنصّفات العمودية ومُنصّفات زوايا المثلث. ما أوجه الشبه بينها؟ وما أوجه الاختلاف بينها؟ تأكد من مقارنة نقاط تقاطعها. **انظر الهامش.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 48، ينبغي أن يدرك الطلاب أنه لا توجد معلومات متاحة بخصوص الزاوية التي يشكلها المنصف. ترى حليمة أن المستقيم ينصف القطعة المستقيمة إلى طولين متساويين، لكنها تعتقد أنه عمودي لمجرد أنه يبدو كذلك.

إجابات إضافية

43. المعطيات: $\overline{PX}$ تنصف $\angle QPR$ و $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب إثباته: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{PX}$ **تنصف** $\angle QPR, \overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$. (معطى)
2. $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)
3. $\angle PYX$ و $\angle PZX$ زاويتان قائمتان. (تعريف المنصف العمودي)
4. $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزوايا القائمة متطابقة.)
5. $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)
6. $\triangle PYX \cong \triangle PZX$ (AAS)
7. $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (CPCTC)

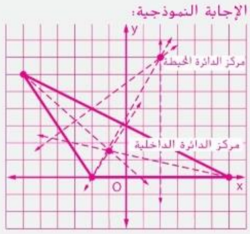
44. 

عندما تكون الدائرة كبيرة قدر الإمكان، ستلمس كل الأضلاع الثلاثة للعلم المثلث. نحتاج إلى إيجاد مركز الدائرة الداخلية للمثلث عن طريق إيجاد نقطة تقاطع منصفات الزوايا.

45. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات العمودية هي $y = 3$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند $(5, 3)$. يقع مركز الدائرة المحيطة عند $(5, 3)$.

46. معادلة المستقيم الخاص بأحد المنصفات العمودية هي $y = -4$. معادلة المستقيم الخاص بمنصف عمودي آخر هي $x = 2.5$. يتقاطع هذان المستقيمان عند $(2.5, -4)$. يقع مركز الدائرة المحيطة عند $(2.5, -4)$.

49. الإجابة النموذجية:



تمرين على الاختبار المعياري

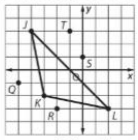
55. **الجبر** تم رمي جسم لأعلى بسرعة ابتدائية v متر في الثانية ومن ارتفاع ابتدائي s متر. يُقدر الارتفاع h بالأمتار للجسم بعد t ثانية بالمعادلة $h = -10t^2 + vt + s$. تقف رنا على حافة شرفة ترتفع 54 مترًا عن سطح الأرض ورمت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 12 مترًا في الثانية. بعد كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض؟ **A**

A 3 ثوانٍ
B 4 ثوانٍ
C 6 ثوانٍ
D 9 ثوانٍ

56. SAT/ACT حيث **K** $= \frac{3x+9}{x+3}$, $x \neq -3$

F $x + 12$ J x
G $x + 9$ K 3
H $x + 3$

57. أيّ من النقاط التالية يمكن رسم مستقيم يمر بها بحيث يكون المستقيم مَنصِّفًا عموديًا لـ $\triangle JKL$؟ **D**

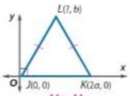


A T و K C J و R
B L و Q D S و K

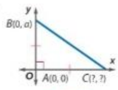
58. **إجابة مختصرة** اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تصف المستقيم الذي تقع عليه النقطتين (0 ,1−) و (4 ,2).

مراجعة شاملة

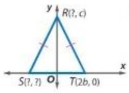
عين الإحداثيات المفقودة لكل مثلث.

59.


$L(a, b)$

60.


$C(a, 0)$

61.


$S(-2b, 0)$
$R(0, c)$

هندسة إحداثية ارسم كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق. **63–62. انظر الهامش.**

62. $A(-2, 4), B(-2, -2), C(4, 1);$
$R(12, 4), S(12, -2), T(6, 1)$

63. $J(-3, 3), K(-3, 1), L(1, 1);$
$X(-3, -1), Y(-3, -3), Z(1, -3)$

أوجد المسافة من المستقيم إلى النقطة المعطاة.

64. $y = 5, (-2, 4)$ **1**

65. $y = 2x + 2, (-1, -5)$ **$\sqrt{5}$**

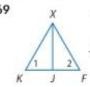
66. $2x - 3y = -9, (2, 0)$ **$\sqrt{13}$**

67. **الهندسة الصوتية** يقوم مهندس الاستوديو بتحصيل رسوم ثابتة بمقدار AED 450 مقابل تأجير المعدات و AED 42 مقابل ساعة من التسجيل والتجهيز. اكتب المعادلة التي توضح تكلفة تأجير مهندس الاستوديو كدالة زمنية. كم قد يُكلف تأجير مهندس الاستوديو لمدة 17 ساعة؟ (الدرس 4-3) **$m = 42t + 450$; AED 1164**

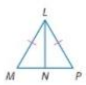
مراجعة المهارات

إثبات **اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ مما يلي. 69-68. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

68. **المعطيات:** $\triangle XKF$ متساوي الأضلاع.
$\overline{XJ}$ تنصف $\angle X$.
المطلوب: J هي نقطة منتصف $\overline{KF}$.



69. **المعطيات:** $\triangle MLP$ متساوي الساقين.
N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$.
المطلوب: $\overline{LN} \perp \overline{MP}$



تدريس الممارسات في الرياضيات

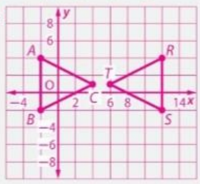
الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحللوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرينين 50 و 51، شجّع الطلاب على رسم كل شكل أولاً.

4 التقويم

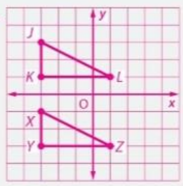
تعيين مصطلح الرياضيات اجعل الطلاب يرسموا شكلاً غير منتظم بخمسة أضلاع. اجعلهم يصفوا طريقة لإيجاد مركز جاذبيته.

إجابات إضافية

54. كل منصف ينصف شيئًا، لكن المنصفات العمودية تنصف القطع المستقيمة بينما منصفات الزوايا تنصف الزوايا. سيتقاطعون عند نقطة التقاء. نقطة التقاء المنصفات العمودية هي مركز الدائرة المحيطة. نقطة التقاء منصفات الزوايا هي مركز الدائرة الداخلية. يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث، بينما مركز الدائرة المحيطة يمكن أن يكون داخل المثلث أو خارجه أو على ضلعه.

62.


$\triangle RST$ هو انعكاس للمثلث $\triangle ABC$؛
$AB = 6, BC = \sqrt{45}, AC = \sqrt{45},$
$TR = \sqrt{45}, RS = 6, TS = \sqrt{45}.$
$\triangle ABC \cong \triangle RST$ بموجب SSS.

63.


$\triangle JKL$ هو إزاحة للمثلث $\triangle XYZ$;
$JK = 2, KL = 4, JL = \sqrt{20},$
$XY = 2, YZ = 4, XZ = \sqrt{20}$
$\triangle JKL \cong \triangle XYZ$. بموجب SSS.

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع اجعل الطلاب يناقشوا في مجموعات المصطلح الهندسي الذي يمثل مركز نجمة ويشرحوه.

الإجابة النموذجية: يقع مركز الدائرة المحيطة لشكل على مسافة متساوية من رؤوس الشكل.

4-2 مختبر الهندسة
إنشاء المتوسطات والارتفاعات

المتوسط في المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء متوسط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.

لف طرف خيط حول قلم رصاص. واستخدم دبوسًا لتثبيت الخيط بالرأس.

الإنشاء 1 متوسط المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{DE}$. اكتب على نقاط التقاطع R و S.

الخطوة 2

استخدم مسطرة لإيجاد النقطة الناشئة من تقاطع $\overline{RS}$ مع $\overline{DE}$. اكتب على النقطة M. هذه هي نقطة المنتصف في $\overline{DE}$.

الخطوة 3

ارسم مستقيمًا يمر عبر F و M. $\overline{FM}$ هو متوسط في $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل.

الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1

ضع الدبوس على الرأس B وارسم قوسين يتقاطعان عند $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.

الخطوة 2

عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسمار على X وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين H.

الخطوة 3

استخدم مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$. اكتب على النقطة الناشئة عن تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ اسم D. $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ وعمودي على $\overline{AC}$.

استخدام النماذج والتحليل 2-1. انظر الهامش.

1. أنشئ متوسطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بشأن متوسطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

1 التركيز

الهدف إنشاء وسيطات وارتفاعات المثلثات.

المواد الخاصة لكل مجموعة
- مسطرة عدلة
- حبل
- دبوس

نصيحة للتدريس
يعرض النشاط إنشاءين مختلفين على مثلث مختلف الأضلاع حاد الزاوية. يستطيع الطلاب استخدام ورق صغير الحجم لرسم وتتبع مثلثين مختلفي الأضلاع حادي الزاوية بنفس أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية والاتجاه في ثلاثة أماكن مختلفة على ورقة واحدة. عندما ينتهي الطلاب من الإنشاءين، يستطيعون رؤية الاختلافات بين الوسيطات والارتفاعات في المثلث نفسه.

الطريقة البديلة
يمكن أيضًا استكمال الإنشاءات المعروضة في هذا الدرس باستخدام أسلوب المسطرة العادية والفرجار.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
قسّم الطلاب إلى مجموعات من 3 مختلفي القدرات. ينتقي كل طالب إحدى هذه الخطوات في نشاطات الإنشاء. حدد يتناوب الطلاب خطوات الإنشاء 1 و 2.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمرينين 1 و 2.

3 التقويم

التقويم التكويني
استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستوعبون إنشاء الوسيطات والارتفاعات.

من العملي إلى النظري
اجعل الطلاب يقارنوا تقاطعات الوسيطات والارتفاعات التي أنشأوها بمركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة الخارجية للمثلث.

إجابات إضافية
1. يتقاطعون عند النقطة نفسها.
2. يتقاطعون عند النقطة نفسها.