الدرس 4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-2 تحديد المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا واستخدامها في المثلثات.

الدرس 4-2 تحديد الوسيطات والارتفاعات واستخدامها في المثلثات.

بعد الدرس 4-2 التعرف على خواص متباينات زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما معنى حركي؟ يتحرك
- من أي نقطة ينبغي تعليق الهاتف المحمول لكي يوازي الأرض؟ نقطة التوازن
- هل تقع نقطة توازن الهاتف المحمول دائمًا عند مركزه؟ لماذا؟ الإجابة النموذجية: لا، فهي في الصورة ليست كذلك، وهذا بسبب اختلاف أوزان الأجسام.

السابق

- لقد تعرفت على المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث وقمت باستخدامها.

الحالي

1. تحديد المتوسطات في المثلثات واستخدامها.
2. تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.

لماذا؟

- المنحوتة المتحركة هي جسم حركي أو متحرك تستخدم مبادئ التوازن والاتزان. تتكون المنحوتة المتحركة البسيطة من عدة قضبان متصلة بخيوط تُعلق عليها أجسام لها أوزان مختلفة. تتوازن الأجسام المعلقة مع بعضها ويمكن أن تدور بحرية. ولضمان تعليق مثلث على المنحوتة المتحركة بحيث يكون موازي للأرض، فعلى الفنانين معرفة نقطة توازن المثلث.

المفردات الجديدة

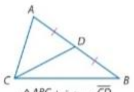
متوسط المثلث (median)
النقطة المركزية للمثلث (centroid)
ارتفاع المثلث (altitude)
ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المتوسطات

متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة يمثل أحد طرفيها أحد رؤوس المثلث والآخر نقطة منتصف الضلع المقابل.

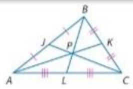


$\overline{CD}$ هو متوسط $\triangle ABC$.

لكل مثلث ثلاثة متوسطات متلاقية.
وتُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث **النقطة المركزية للمثلث** وتقع دائمًا داخل المثلث.

النظرية 4.7 نظرية النقطة المركزية للمثلث

تتقاطع متوسطات المثلث في النقطة تُسمى النقطة المركزية للمثلث، وهي تقع على بعد ثلثي المسافة من الرأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل.

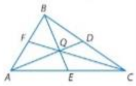


مثال إذا كانت النقطة P هي نقطة المركزية لـ $\triangle ABC$.
إذًا $BP = \frac{2}{3}BL$، $AP = \frac{2}{3}AK$ و $CP = \frac{2}{3}CJ$.

سوف تقوم بإثبات النظرية 4.7 في التمرين 36.

مثال 1 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle ABC$ إذا كان Q هي النقطة المركزية للمثلث و $BE = 9$. أوجد BQ و QE.



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية النقطة المركزية
$= \frac{2}{3}(9)$ or 6	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	بإضافة قطعة مستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	بطرح 6 من كل طرف.

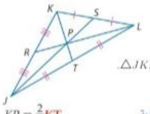
تمرين موجه في $\triangle ABC$ أعلاه، $FC = 15$. أوجد قياس كل من ما يلي.

1A. FQ 5

1B. QC 10

مثال 2 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle JKL$ إذا كان $PT = 2$ فأوجد KP.



بما أن $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ و $\overline{LR}$ تمثل متوسط $\triangle JKL$. وبالمثل، S و T هما نقطتا منتصف $\overline{KL}$ و $\overline{LJ}$ على التوالي، لذا $\overline{JS}$ و $\overline{KT}$ هما أيضًا متوسطا $\triangle JKL$. وعليه، فالنقطة P هي النقطة المركزية لـ $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية النقطة المركزية
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	بالتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصية التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من كل طرف
$KP = 4$	اضرب كل طرف في 3

تمرين موجه

في $\triangle JKL$ أعلاه، $RP = 3.5$ و $JP = 9$. أوجد قياس كل مما يلي

2A. PL 7

2B. PS 4.5

نصيحة دراسية

الاستنتاج في المثال 2، يمكنك أيضًا استخدام الحس العددي لمعرفة KP. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$، $PT = \frac{1}{3}KT$ و $KP = 2PT$. بالتالي، إذا كان $PT = 2$. إذًا $KP = 2(2)$ أو 4.

كل المضلعات لها نقطة توازن أو مركز متوسط. تعتبر النقطة المركزية أيضًا هي نقطة التوازن أو *مركز الجاذبية* للمنطقة المثلثة. مركز الجاذبية هو النقطة التي تستقر عندها المنطقة بفعل الجاذبية.

مثال من الحياة اليومية 3 إيجاد النقطة المركزية للمثلث في المستوى الإحداثي

الفنون الاستعراضية يخطط فنان استعراضي لموازنة قطع مثلثة معدنية خلال عرضه التالي. عند وضع هذا المثلث على المستوى الإحداثي، تقع رؤوس المثلث على النقاط (1,10) و (5,0) و (9,5). ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟

الاستيعاب تحتاج إلى إيجاد النقطة المركزية للمثلث على الإحداثيات المعطاة. تلك هي النقطة التي سوف يتوازن المثلث عندها.

التخطيط مثل المثلث بيانيًا مع تسمية رؤوسه كالتالي A(1, 10)، و B (5, 0)، و C(9, 5). بما أن النقطة المركزية هي نقطة التقاء متوسطات المثلث، استخدم نظرية النقطة المركزية لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث. تقع النقطة المركزية على بعد ثلثي المسافة من الرأس المقابلة إلى نقطة المنتصف تلك.

1 الوسيطات

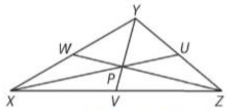
يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام نظرية النقطة المركزية لإيجاد أطوال القطع المستقيمة. يوضح **المثال 3** كيفية إيجاد النقطة المركزية باستخدام المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه الموجودة بعد كل مثال لتحديد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 في $\triangle XYZ$، P هي النقطة المركزية و $YV = 12$. أوجد YP و PV.



$YP = 8;\ PV = 4$

تدريس الممارسات في الرياضيات

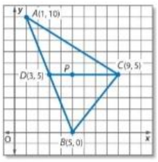
الاستنتاج يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات والعلاقة بينها في مواقف المسألة. شجّع الطلاب على فهم السياق المجرد في المسألة.

218 | الدرس 4-2 | متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

الربط بتاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما

(1601–1665) ثمة مركز آخر للمثلث وهو ما يعرف بنقطة فيرما. وهي النقطة التي تكون المسافة الكلية بينها وبين الرؤوس الثلاثة أقل ما يمكن. فيرما هو أحد أشهر علماء الرياضيات في تخصص البراهين الكتابية.



الحل مثل بيانيًا $\triangle ABC$.

أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ بطرفيه $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$.

$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$ مثل بيانيًا النقطة D.

لاحظ أن $\overline{DC}$ يُعد مستقيمًا أفقيًا. المسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تبلغ $9 - 3$ أو 6 وحدات.

إذا كانت P هي النقطة المركزية لـ $\triangle ABC$.

إذًا $PC = \frac{2}{3}DC$. إذًا تمثل النقطة المركزية $\frac{2}{3}(6)$ أو 4 وحدات على يسار C. وتكون إحداثيات النقطة P $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

ينبغي على الفنان الاستعراضي موازنة المثلث عند النقطة $(5,5)$.

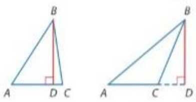
التحقق استخدم متوسطًا آخر للتحقق من الإجابة. إن نقطة المنتصف F للضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$. $\overline{BF}$ هو مستقيم عرضي. لذا فالمسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ أو 7.5. $\overline{PB} = \frac{2}{3}(7.5)$ أو 5. لذا تكون P أعلى بمقدار 5 وحدات عن B. تكون إحداثيات النقطة P $(5, 0 + 5)$ أو $(5, 5)$. ✓

تمرين موجه

3. تقع رؤوس مثلث آخر على النقاط $(0, 4)$ و $(6, 11.5)$ و $(12, 1)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

2 الارتفاعات

إن **ارتفاع** المثلث هو القطعة المستقيمة الممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يقع عليه الضلع المقابل وتتعامد على المستقيم الذي يقع عليه هذا الضلع. قد يكون ارتفاع المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على الضلع.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

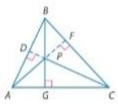
قراءة في الرياضيات

ارتفاع المثلث يُعرف بأنه المسافة بين قاعدة المثلث وقمته. يُستخدم ارتفاع المثلث لحساب مساحته.

لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات. إذا امتدت ارتفاعات المثلث فسوف تتقاطع في نقطة مشتركة.

المفهوم الأساسي ملتقى الارتفاعات

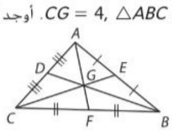
تتلاقى المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث وتتلاقى في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.



مثال تتقاطع المستقيمات التي تقع عليها الارتفاعات $\overline{AF}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{BG}$ عند النقطة P، ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$.

أمثلة إضافية

2 في $\triangle ABC$, $CG = 4$. أوجد GE.



2

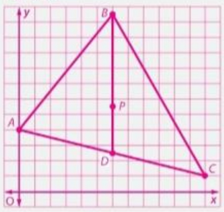
3 **النحت** يضع أحد الفنانين تصميمًا لمنحوتة توازن مثلثًا فوق عمود. في تصميم الفنان على المستوى الإحداثي، تقع الرؤوس عند $(1, 4)$ و $(3, 0)$ و $(3, 8)$. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان أن يضع عندها العمود تحت المثلث لكي يتوازن؟ $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$

انتبه!

ملتقى الارتفاعات قد لا يقع ملتقى الارتفاعات داخل المثلث.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

3. $(6, 5.5)$



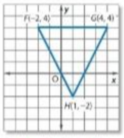
نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$ أو $D(6, 2.5)$. $\overline{BD}$ مستقيم رأسي بحيث تكون المسافة من B إلى D هي $11.5 - 2.5$ أو 9. $PB = \frac{2}{3}(9)$ أو 6. إذًا P تبلغ 6 وحدات نزولاً من B. إحداثيات P هي $(6, 11.5 - 6)$ أو $(6, 5.5)$.

219

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية **تقع رؤوس $\triangle FGH$ على النقاط $F(-2, 4), G(4, 4)$ و $H(1, -2)$.**
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$.

الخطوة 1 مثل بيانيًا $\triangle FGH$. لإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين أو ثلاثة ارتفاعات.



الخطوة 2 أوجد معادلة للارتفاع من F إلى $\overline{GH}$. ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}$ أو 2، إذًا فإن ميل الارتفاع، المتعامد على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$ $(x_1, y_1) = F(-2, 4)$ و $m = -\frac{1}{2}$.

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$ بسّط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$ خاصية التوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ أضف 4 لكل طرف

أوجد معادلة للارتفاع من G إلى $\overline{FH}$. ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)}$ أو -2، لذا فإن ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$ $(x_1, y_1) = G(4, 4)$ و $m = \frac{1}{2}$

$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + 2$ أضف 4 لكل طرف

الخطوة 3 حل نظام المعادلات الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

إضافة المعادلتين لحذف x ينتج $2y = 5$ أو $y = \frac{5}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + 2$ معادلة الارتفاع من G

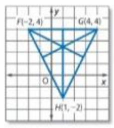
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$ $y = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$ بطرح $\frac{4}{2}$ أو 2 من كل طرف

$1 = x$ بضرب كل طرف في 2

إن إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle FGH$ تساوي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

نصيحة دراسية
تحقق من مدى صحة الحل
استخدم جانبًا من الورقة لرسم ارتفاعات كل ضلع بالمثلث.

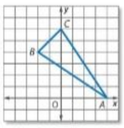


يقع التقاطع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$. إذًا، فالإجابة معقولة.

تمرين موجه

4. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ المرسوم بيانيًا على اليسار.

$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$

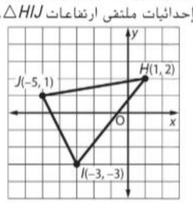


2 الارتفاعات

المثال 4 يوضح كيفية العثور على ملتقى ارتفاعات مثلث على المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

4 **هندسة الإحداثيات** رؤوس $\triangle HIJ$ هي $H(1, 2)$ و $I(-3, -3)$ و $J(-5, 1)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle HIJ$.



$\left(-3\frac{6}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

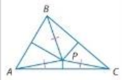
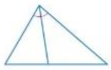
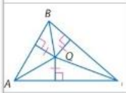
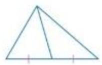
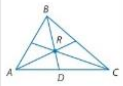
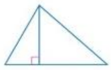
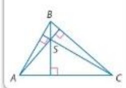
التركيز على محتوى الرياضيات

النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات
في مثلث حاد الزاوية، قد يبدو أن النقطة المركزية وملتقى الارتفاعات هما الشيء نفسه. لا يحدث هذا إلا عندما يكون كل وسيط في المثلث مشابهًا لكل منصف عمودي.

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب أن يطووا قطعة ورق إلى أربعة أقسام مكتوب عليها مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات. اجعل الطلاب يرسموا نسخة من المثلث نفسه في كل قسم من الورقة ويستخدموا مهاراتهم المساحية لتحديد الموضع التقريبي لمركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات في المثلث. ثم يستطيع الطلاب استخدام مسطرة قياس وفرجار ومنقلة لمعرفة مدى دقة تقديراتهم.

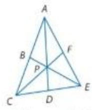
ملخص المفهوم القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلثات

الاسم	مثال	نقطة الالتقاء	خاصية خاصة	مثال
منصف عمودي		مركز الدائرة المحيطة	مركز الدائرة المحيطة P لــ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل رأس.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية	مركز الدائرة الداخلية Q لــ $\triangle ABC$ يقع على مسافة واحدة من كل أضلاع المثلث.	
متوسط المثلث		النقطة المركزية	النقطة المركزية R لــ $\triangle ABC$ تقع على بعد ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل لها.	
ارتفاع المثلث		ملتقى الارتفاعات	المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ تتقاطع مع ملتقى الارتفاعات S.	

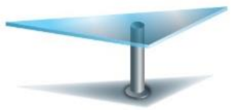
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **في $\triangle ACE$، إذا كان P هي النقطة المركزية، $PF = 6$، و $AD = 15$. أوجد قياس كل مما يلي.**

1. PC **12**
2. AP **10**



مثال 3
3. **تصميم داخلي** يقوم مهندس ديكور بتصميم طاولة قهوة مخصوصة لأحد زبائنه. سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجي تجب موازنته على دعامة واحدة. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث هي (3,6) و (5,2) و (7,10)، فبأي نقطة يجب وضع الدعامة؟ **(5, 6)**



مثال 4
4. **هندسة الإحداثيات** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle ABC$ مع رؤوس $A(-3, 3)$، $B(-1, 7)$ و $C(3, 3)$. **$(-1, 5)$**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 4-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

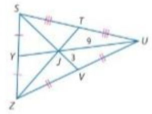
ثم استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي قد يكون من الصعب على الطلاب أن يميزوا بين نقاط الالتقاء الأربع في مثلث. اجعل الطلاب يرسموا رسمًا تخطيطيًا باستخدام منقلة ومسطرة لكل من النقاط. شجّع الطلاب على تكوين رابط بين القطع المستقيمة التي يرسمونها ونقطة الالتقاء المقابلة.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-2 في $\triangle SZU$ إذا كان $UJ = 9$ و $VJ = 3$ و $ZT = 18$. أوجد طول كل مما يلي.

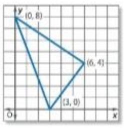


5. YJ **4.5**
6. SJ **6**
7. YU **13.5**
8. SV **9**
9. JT **6**
10. ZJ **12**

مثال 3 **الهندسة الإحداثية** حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث حسب الرؤوس المعطاة.

11. $A(-1, 11), B(3, 1), C(7, 6)$ **(3, 6)**
12. $X(5, 7), Y(9, -3), Z(13, 2)$ **(9, 2)**

13. **تصميم داخلي** صنعت حوريه ملصق عليه صور أصدقائها. تريد تعليق الملصق بسقف غرفتها بحيث يكون موازيًا للسقف. يتوفر الرسم التخطيطي للملصق بالتمثيل البياني الموجود على اليسار. بأي نقطة ينبغي أن تعلق الخيط؟ **(3, 4)**



مثال 4 **الهندسة الإحداثية** حدّد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لكل مثلث له رؤوس معلومة.

14. $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$ **(5, −1)**
15. $R(-4, 8), S(-1, 5), T(5, 5)$ **(−4, −4)**

حدد إذا ما كانت كل قطعة مستقيمة $\overline{BD}$ عبارة عن ارتفاع أم متوسط أم منصف عمودي.

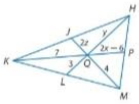
16. **الارتفاع**

17. **متوسط المثلث**

18. **عمودي منصف، ارتفاع المثلث متوسط المثلث**

19. **متوسط المثلث**

20. **الاستنتاج المنطقي** في الشكل الموجود على اليسار، إذا كانت J، P، و L هي نقاط منتصف $\overline{KH}$ و $\overline{HM}$، على الترتيب، أوجد x، y، و z.
$x = 4.75, y = 6, z = 1$



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	5-15, 37, 38, 40, 42-56	44-47 ,فردي 5-19	37, زوجي 6-18, 38, 40, 42, 43, 48-56
OL أساسي	5-25 فردي, 26, 27-37 فردي, 38, 40, 42-56	5-19, 44-47	20-38, 40, 42, 43, 48-56
BL متقدم	20-55, (56 اختياري)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبحث الطلاب المتفوقون في الرياضيات عن نقاط للتوصل إلى حل. يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. يخططون لمسار حل. في التمرين 20، شجّع الطلاب على وضع خطة لحل المسألة أولاً.

إجابات إضافية

31. **المعطيات:** $\triangle XYZ$ متساوي الساقين $\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.
المطلوب إثباته: $\overline{WY}$ وسيط.
البرهان: بما أن $\triangle XYZ$ متساوي الساقين $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$. بموجب تعريف منصف الزاوية، $\angle XYW \cong \angle ZYW$. $\overline{YW} \cong \overline{YW}$ بموجب خاصية الانعكاس. إذًا بموجب SAS، $\triangle XYW \cong \triangle ZYW$. بموجب CPCTC، $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$. بموجب تعريف نقطة المنتصف، W هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$. بموجب تعريف الوسيط، $\overline{WY}$ وسيط.

32. **المعطيات:** $\triangle XYZ$ بالوسيطات $\overline{XR}$، $\overline{YS}$ و $\overline{ZQ}$.
المطلوب إثباته: $\frac{XP}{PR} = 2$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\triangle XYZ$ بالوسيطات $\overline{XR}$ و $\overline{YS}$ و $\overline{ZQ}$. (معطى)
2. $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية النقطة المركزية)
3. $XR = XP + PR$ (مسلمة إضافة القطعة المستقيمة)
4. $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (التعويض).
5. $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)
6. $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)
7. $XP = 2PR$ (خاصية الضرب)
8. $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يفهم الطلاب المتفوقون في الرياضيات الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا المذكورة ويستخدمونها في إنشاء الفرضيات. في التمارين 27-30، شجّع الطلاب على رسم شكل لكل تمرين مع كتابة المعلومات المعطاة.

26. مركز الدائرة المحيطة، مركز الدائرة الداخلية، النقطة المركزية، ملتقى الارتفاعات؛ الإجابة النموذجية: يعمل منصف الزاوية لكل زاوية كذلك على تنصيف الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل من المثلث. لذا فإنه يمثل أيضًا المنصف العمودي والمتوسط والارتفاع. هذا يعني أن قطع اللعب الزرقاء تمثل جميع المراكز بما في ذلك مركز الدائرة المحيطة ومركز الدائرة الداخلية والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

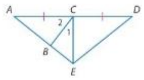
انسخ وأكمل كل عبارة للمثلث $\triangle RST$ والمتوسطات $\overline{RM}, \overline{SL}$ و $\overline{TK}$ والنقطة المركزية J.

21. $SL = x(JL)$ **3**

22. $JT = x(TK)$ $\frac{2}{3}$

23. $JM = x(RJ)$ $\frac{1}{2}$

الجبر **استخدم الشكل على اليمين.**

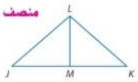


24. إذا كان $\overline{EC}$ هو ارتفاع المثلث $\triangle AED$، $m\angle 1 = 2x + 7$ و $m\angle 2 = 3x + 13$.
أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$. $m\angle 1 = 35, m\angle 2 = 55$

25 أوجد قيمة x إذا كان $AC = 4x - 3, DC = 2x + 9$، $m\angle ECA = 15x + 2$ و $\overline{EC}$ هو متوسط $\triangle AED$.
هل يعد $\overline{EC}$ أيضًا ارتفاعًا للمثلث $\triangle AED$؟ اشرح. **6؛ لا؛ لأن $m\angle ECA = 92$**

26. **ألعاب** لوحة الألعاب الموضحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. فيها فجوات لقطع اللعب. هدف اللعبة هو التخلص من قطع اللعب من خلال القفز عليهم حتى لا يتبقى إلا قطعة واحدة. انسخ رسمة لوحة اللعب. وحدد أيًا من نقاط الالتقاء تمثلها القطعة الزرقاء؛ *مركز الدائرة المحيطة*، أو *مركز الدائرة الداخلية*، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات. اشرح استنتاجك.

فرضيات **استخدم المعلومات المعطاة لتحديد ما إذا كان $\overline{LM}$ *منصف متعامد أو متوسط و/أو ارتفاع للمثلث $\triangle JKL$.***



27. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ **ارتفاع**

28. $\triangle JLM \cong \triangle KLM$ **منصف عمودي، متوسط، ارتفاع**

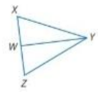
29. $\overline{JM} \cong \overline{KM}$ **متوسط**

30. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$، $\overline{JL} \cong \overline{KL}$ **منصف عمودي، متوسط، ارتفاع**

31. **الإثبات** اكتب فقرة إثباتية.

المعطيات: $\triangle$XYZ متساوي الساقين.
$\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.

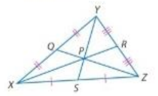
المطلوب: $\overline{WY}$ متوسط. **انظر الهامش.**



32. **الإثبات** اكتب إثبات جبري.

المعطيات: $\triangle$XYZ ومتوسطاته $\overline{XR}$ و $\overline{YS}, \overline{ZQ}$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$ **انظر الهامش.**



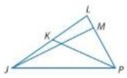
33. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف مكان نقاط الالتقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

a. **عمليًا** أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع على ورق شفاف وقصها. اطوِ كل مثلث لتحديد مكان مركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي ومركز المتوسطات وملتقى الارتفاعات.

b. **لفظيًا** خمن العلاقات بين أربع نقاط التقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.

c. **بيانيًا** ضع مثلثًا متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي والمركز المتوسط وملتقى الارتفاعات على المستوى الإحداثي مستخدمًا إحداثيات مختلفة. وحدد إحداثيات كل نقطة التقاء.

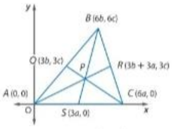
جبريًا **في $\triangle JLP, m\angle JMP = 3x - 6$ و $JK = 3y - 2$ و $LK = 5y - 8$.**



34. إذا كان $\overline{JM}$ هو ارتفاع في $\triangle JLP$، فأوجد x. **32**

35. أوجد LK إذا كان $\overline{PK}$ متوسطًا. **7**

36. البرهان اكتب برهانًا إحداثيًا
لإثبات نظرية النقطة المركزية.



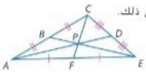
المعطيات: متوسطات $\triangle ABC$، هي $\overline{AR}, \overline{BS}$ و $\overline{CQ}$

البرهان: تتقاطع المتوسطات عند النقطة P، حيث P تساوي ثلثي المسافة بين كل رأس ونقطة منتصف الضلع المقابل.

(إرشاد: أولاً، أوجد معادلات المستقيمات التي بها متوسطات. ثم أوجد إحداثيات النقطة P وأثبت أن المتوسطات الثلاثة جميعها تتقاطع عند النقطة P.
بعد ذلك، استخدم قانون المسافة وعملية الضرب لإثبات أن $BP = \frac{2}{3}BS$، $AP = \frac{2}{3}AR$ و $CP = \frac{2}{3}CQ$.) **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

مسائل مهارات التفكير التفكير العليا

37 تحليل الخطأ وفقًا للشكل على اليسار، يقول حماد إن $AD = \frac{2}{3}AP$. لا يوافق بدر على ذلك. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**



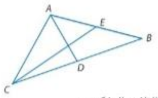
38. فرضيات حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا. **انظر الهامش.**

يقع ملتقى ارتفاعات المثلث دائمًا على رأس الزاوية القائمة.

39. التحدي يوجد في $\triangle ABC$ الرؤوس $A(-3, 3)$، و $B(2, 5)$، و $C(4, -3)$. فما إحداثيات النقطة المركزية في $\triangle ABC$؟ اشرح العملية المستخدمة للتوصل للإجابة. **انظر الهامش.**

40. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين المنصفات العمودية والمتوسطات والارتفاعات للمثلث. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

41. التحدي في الشكل على اليسار، القطعتان المستقيمتان $\overline{AD}$ و $\overline{CE}$ هما عبارة عن متوسطين في $\triangle ACB$، و $AB = 10$، $\overline{AD} \perp \overline{CE}$، و $AB = 10$، و $CE = 9$. أوجد CA. $2\sqrt{13}$



42. مسألة غير محددة الإجابة في هذه المسألة، إستكشف العلاقة بين نقاط الالتقاء الثلاث المذكورة. **a–d. انظر الهامش.**

a. ارسم مثلثًا حادًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

b. ارسم مثلثًا منفرجًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

c. ارسم مثلثًا قائمًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

d. خمّن العلاقة بين مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

43. الكتابة في الرياضيات استخدم المساحة لتوضيح سبب اعتبار النقطة المركزية للمثلث هي نفسها مركز جاذبيته. ثم استخدم هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل. **انظر الهامش.**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 37، قام حمد بتبديل القطع المستقيمة من نظرية النقطة المركزية. قم بتذكير الطلاب بأنه في الأسئلة التي تتضمن أشكالاً هندسية، ينبغي أن يستخدموا الشكل للتحقق من مدى صحة إجابتهم.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن يحللوا المواقف عن طريق تقسيمها إلى حالات ويستطيعون إدراك الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 38، يمكن استخدام برنامج الهندسة الديناميكية لتحليل العبارة المذكورة.

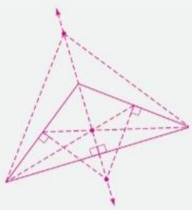
إجابات إضافية

37. الإجابة النموذجية: بدر على صواب. وفقًا لنظرية النقطة المركزية، $AP = \frac{2}{3}AD$. تم تغيير أطوال القطعة المستقيمة.

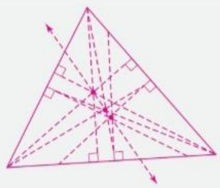
38. صحيح؛ الإجابة النموذجية: في مثلث قائم الزاوية، ستمثل الارتفاعات من رأسي زاويتين غير قائمتين ساقي المثلث دائمًا، واللذين يتقاطعان عند الرأس الذي يحتوي على الزاوية القائمة. يبدأ الارتفاع نحو وتر المثلث من الرأس. إذًا تتقاطع الارتفاعات الثلاثة هنا. ولهذا سيكون ملتقى الارتفاعات دائمًا رأس زاوية قائمة.

39. $\left(1, \frac{5}{3}\right)$؛ الإجابة النموذجية: وجدت نقطة منتصف $\overline{AC}$ واستخدمتها للتوصل إلى معادلة المستقيم الذي يحتوي على النقطة B ونقطة منتصف $\overline{AC}$، $y = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$. وجدت أيضًا نقطة منتصف $\overline{BC}$ ومعادلة المستقيم بين النقطة A ونقطة منتصف $\overline{BC}$، $y = -\frac{1}{3}x + 2$. وجدت حل نظام من معادلتين لقيمة x و y للوصول إلى إحداثيات النقطة المركزية، $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

42b.

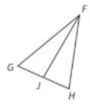


42a.



تمرين على الاختبار المعياري

44. بالشكل أدناه، $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$. أي مما يلي لا بد أن يكون صحيحًا؟ **C**



A $\overline{FJ}$ هو ارتفاع $\triangle FGH$.

B $\overline{FJ}$ هو منصف زاوية $\triangle FGH$.

C $\overline{FJ}$ هو متوسط في $\triangle FGH$.

D $\overline{FJ}$ هو المنصف العمودي لـ $\triangle FGH$.

45. إجابة شبكية ما نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني لـ $4x - 6y = 12$؟ **3**

46. جبريًا تطوع أربعة طالبات لطي كتيبات لصالح مجموعة عمل مجتمعي محلية. أي طالبة هي الأسرع؟ **H**

الطالب	سرعة الطي
أماني	صفحة واحدة كل 3 ثوانٍ
سهيلة	صفحتان كل 10 ثوانٍ
منى	30 صفحة في الدقيقة
منال	45 صفحة كل دقيقتين

F منال
G أماني
H منى
J سهيلة

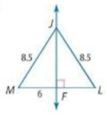
47. SAT/ACT 80 بالمائة من 42. ما نسبتها المئوية من 16؟ **B**

A 240
B 210
C 150
D 50
E 30

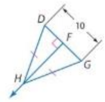
مراجعة شاملة

أوجد قياس كل منها.

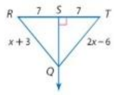
48. LM **12**



49. DF **5**



50. TQ **12**



ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها. **51-52. انظر الهامش.**

51. المثلث $\triangle XYZ$ قائم الزاوية وله وتر $\overline{XZ}, ZY$. ويبلغ ضعف قياس XY، و $\overline{XY}$، ويبلغ طوله b وحدة

52. $\triangle QRT$ مثلث متساوي الساقين وقياس قاعدته $\overline{QR}$ يبلغ b وحدة طولاً

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{JK}$ *متوازيان*، أم *متعامدان*، أم *خلاف ذلك*. مثّل كل مستقيم بيانيًا للتأكد من صحة إجابتك. **53-54. انظر الهامش.**

53. $R(5, -4), S(10, 0), J(9, -8), K(5, -13)$

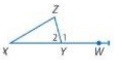
54. $R(1, 1), S(9, 8), J(-6, 1), K(2, 8)$

55. طرق سريعة بالقرب من مدينة هوبويل بولاية فيرجينيا، يقع الطريق 10 عموديًا على الطريقين المحوريين 95 و 295. اثبت أن زوايا تقاطع الطريق 10 مع الطريق المحوري 95 والطريق المحوري 295 متطابقان.

بما أن المستقيمات عمودية، فإن الزوايا المتكونة هي عبارة عن زوايا قائمة. جميع الزوايا القائمة متطابقة. لذلك، $\angle 1$ متطابقة مع $\angle 2$.

مراجعة المهارات

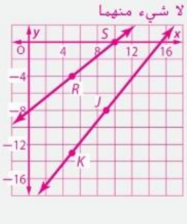
اكتب برهانًا تسلسليًا لإثبات نظرية الزاوية الخارجية.



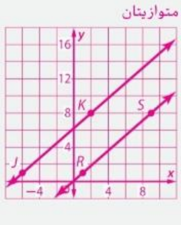
56. المعطيات: $\triangle XYZ$

المطلوب: $m\angle X + m\angle Z = m\angle 1$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

53. لا شيء منهما



54. متوازيتان

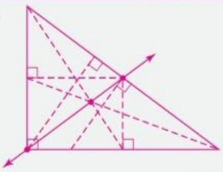


4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
اجعل الطلاب يكتبوا وصفًا قصيرًا يوضح الاختلافات بين الوسيط والارتفاع، وبين النقطة المركزية ملتقى ارتفاعات المثلث.

إجابات إضافية

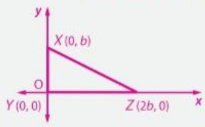
42c.



42d. الإجابة النموذجية: مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات كلهم على خط واحد.

43. الإجابة النموذجية: كل وسيط يقسم المثلث إلى مثلثين أصغر متساويين في المساحة. إذًا يمكن موازنة المثلث بطول أي من تلك الخطوط. لموازنة المثلث على نقطة، تحتاج إلى إيجاد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط التوازن الثلاثة هذه. نقطة التوازن في مثلث هي تقاطع القطعتين المستقيمتين الموصلتين بين نقطتي منتصف الضلعين المتقابلين. بما أن كل قطعة مستقيمة توصل بين نقطتي المنتصف هاتين في ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين لهما المساحة نفسها.

51.



52.