الدرس 1-5 الأعداد المركبة

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
قمت بتبسيط الجذور التربيعية.	1 إجراء العمليات باستخدام أعداد تخيلية بحتة. 2 إجراء العمليات باستخدام أعداد مركبة.	انظر إلى الرسم البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ الموجود على اليمين. لاحظ كيف أن هذا الرسم البياني لا توجد به تقاطعات على المحور x وبالتالي ليس به أي جذور. هل يعني هذا أنه ليس هناك حلول للمعادلة $0 = x^2 + 2x + 4$؟

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

استخدم ميزة **Solver** (أداة الحل) الموجودة في قائمة MATH (الرياضيات) بحاسبة التمثيل البياني. أدخل المعادلة وحدد $x = 2$ باعتبارها تخمينك للحل.

اضغط على ALPHA ENTER وسوف تحاول الآلة الحاسبة حل المعادلة، وتشير الحاسبة من خلال رسالة الخطأ إلى عدم وجود حل. لذلك لا توجد حلول حقيقية. ومع ذلك، توجد حلول تخيلية.

المفردات الجديدة
الوحدة التخيلية
imaginary unit
عدد تخيلي بحت
pure imaginary number
عدد مركب
complex number
مترافقات مركبة
complex conjugates

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 الأعداد التخيلية البحتة

لقد عملت في دراستك للرياضيات حتى الآن بأعداد حقيقية. وقد قادت المعادلات مثل المعادلة الواردة أعلاه علماء الرياضيات إلى تحديد أعداد تخيلية. ويتم تعريف **الوحدة التخيلية** بالعلاقة $i^2 = -1$. ويمثل العدد i الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 أي أن. $i = \sqrt{-1}$.

تسمى الأعداد التي بالصيغة $6i$، و $-2i$، و $i\sqrt{3}$ **الأعداد التخيلية البحتة**. والأعداد التخيلية البحتة هي جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. لأي عدد حقيقي موجب b، و $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط.

a. $\sqrt{-27}$

$$\sqrt{-27} = \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}$$
$$= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3i\sqrt{3}$$

b. $\sqrt{-216}$

$$\sqrt{-216} = \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}$$
$$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6}$$
$$= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 6i\sqrt{6}$$

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{-18}$ **1B.** $\sqrt{-125}$

خاصية التبديل وخاصية التجميع للضرب صحيحتان مع الأعداد التخيلية البحتة. موضح أدناه القوى الأسيّة القليلة الأولى لـ i أدناه.

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

1 التركيز

عمودي انحياز

قبل الدرس 1-5 تحويل الجذور التربيعية لأبسط صورة.

الدرس 1-5 تنفيذ عمليات على الأعداد التخيلية البحتة. تنفيذ عمليات على الأعداد المركبة.

بعد الدرس 1-5 حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.

2 التدريس

اسئلة تدريجية
اطلب من الطلاب قراءة قسم من الدرس **لماذا؟**

اسأل:
- على سطح الرسم البيانى أين يوجد $y = 0$؟ على محور x
- كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بالمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$؟ حلول المعادلة هي قيمة x التي تجعل الدالة تساوي صفر.
- لماذا تعنى رسالة"عدم تغير إشارة" أنه لا يوجد حلول للمعادلة؟ نموذج الإجابة: إذا مرت الدالة عبر محور x على الرسم البياني، تتغير قيمة الدالة من موجب إلى سالب، أو العكس

مثال 2 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

بسّط.

a. $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ — اضرب.

$= -15(-1)$ — $i^2 = -1$

$= 15$ — بسّط.

b. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$ — $i = \sqrt{-1}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$ — اضرب.

$= i^2\sqrt{90}$ — بسّط.

$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$ — اضرب.

$= -3\sqrt{10}$

تمرين موجّه

2A. $3i \cdot 4i$ **2B.** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C.** i^{31}

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستخدام **خاصية الجذر التربيعي**. ومثل الفرق بين المربعات، يمكن تحليل مجموع مربعين إلى العوامل في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 3 المعادلة باستخدام الحلول التخيلية البحتة

حُلّ $x^2 + 64 = 0$.

الطريقة 1 خاصية الجذر التربيعي

$$x^2 + 64 = 0$$
$$x^2 = -64$$
$$x = \pm\sqrt{-64}$$
$$x = \pm 8i$$

الطريقة 2 التحليل إلى العوامل

$$x^2 + 64 = 0$$
$$x^2 + 8^2 = 0$$
$$x^2 - (-8^2) = 0$$
$$(x + 8i)(x - 8i) = 0$$
$$(x + 8i) = 0 \text{ or } (x - 8i) = 0$$
$$x = -8i \qquad x = 8i$$

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

3A. $4x^2 + 100 = 0$ **3B.** $x^2 + 4 = 0$

مهنة من الحياة اليومية

المهندس الكهربائي

يصمم المهندسون الكهربائيون المعدات الكهربائية مثل مشغلات الموسيقى الرقمية والمحركات الكهربائية وأنظمة الإضاءة والرادار والملاحة ويطورون هذه المعدات ويختبرونها ويشرفون على صنعها. ويلزم الحصول على درجة البكالوريوس في الهندسة لجميع الوظائف الهندسية للخريجين الجدد تقريبًا.

2 العمليات باستخدام الأعداد المركبة

انظر إلى $3i + 2$ حيث إن 2 هو عدد حقيقي و 3i عدد تخيلي بحت. فالحدود ليست متشابهة ولا يمكن جمعها. ويعرف هذا النوع من التعابير باسم **العدد المركب**.

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

الشرح	العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$، حيث a و b عددان حقيقيان وتكون i وحدة تخيلية. وتسمى a الجزء الحقيقي. وتسمى b الجزء التخيلي.
أمثلة	$1 - 3i = 1 + (-3)i$ $\quad 5 + 2i$

1 أعداد تخيلية بحتة

المثال 1 يبين كيفية تبسيط العبارات التي تحتوي على الجذور التربيعية للأعداد السالبة. **المثال 2** يبين كيفية الوصول الى النتيجة من أرقام تخليلية نقية. **المثال 3** يوضح كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بحلول تخيلية بحتة.

تقويم مستمر

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد ادراك الطلاب للمفاهيم

امثلة اضافية

1 بسط

a. $\sqrt{-28}$ $2i\sqrt{7}$

b. $\sqrt{-32}$ $4i\sqrt{2}$

2 بسط

a. $-3i \cdot 2i$ 6

b. $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-2}$ $-2\sqrt{6}$

3 حل $5y^2 + 20 = 0$. $y = \pm 2i$

انتبه!

منع الأخطاء احرص على ان يفهم الطلاب انه عندما يأخذ كل منهم الجذر التربيعي لكل من طرفي من المعادلة، يجب استخدام الرمز ± أمام اشارة الجذر

التدريس المتمايز ق.م ض.م أ.م

إذا كان الطلاب بحاجة إلى المساعدة لتذكر الخصائص الرياضية ل. i,

إذاً يجب على الطلاب كتابة قصائد عن عدد تخيلي وقيم تكرار جذره ,كما يمكن التلاعب بكلمات القيمة *الحقيقية والتخيلية*. يجب أن يكون مضمون القصائد مفيد لتذكر خصائص الرياضيات i.

2 العمليات على الأعداد المركبة

مثال 4 يوضح كيفية مساواة الأعداد المركبة. **مثال 5** يوضح كيفية جمع وطرح الأعداد المركبة. **مثال 7–6** يبين كيفية ضرب وقسمة الأعداد المركبة.

أمثلة إضافية

4 اوجد قيمة x و y التي تكون المعادلة $2x + yi = -14 - 3i$ حقيقي.
$x = -7,\ y = -3$

5 بسط

a. $(3 + 5i) + (2 - 4i)$ $5 + i$

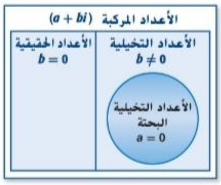
b. $(4 - 6i) - (3 - 7i)$ $1 + i$

انتبه!

منع الأخطاء أكد على أن عددين مركبين يكونا متساويين فقط فى حالة تساوى أجزائهم الحقيقية و التخيلية.

يظهر مخطط فن مجموعة الأعداد المركبة.

- إذا كان $b = 0$، فإن العدد المركب عددًا حقيقيًا.
- إذا كان $b \neq 0$، فإن العدد المركب تخيليًا.
- إذا كان $a = 0$، فإن العدد المركب عددًا تخيليًا بحتًا.



يتساوى عددان مركبان فقط إذا تساوت الأجزاء الحقيقية لهما وتساوت الأجزاء التخيلية لهما. أي أن $a + bi = c + di$ إذا كان $a = c$ و $b = d$.

نصيحة دراسية
الأعداد المركبة في حين أن الأعداد الحقيقية مركبة أيضًا، يشير مصطلح *العدد المركب* عادةً إلى عدد غير حقيقي.

مثال 4 معادلة الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x و y التي تجعل $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

اجعل الأجزاء الحقيقية مساوية لبعضها البعض والأجزاء التخيلية مساوية لبعضها البعض.

$3x - 5 = 7$	أجزاء حقيقية	$y - 3 = 6$	أجزاء حقيقية
$3x = 12$	أضف 5 إلى كل طرف.	$y = 9$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 3.		

تمرين موجّه **4.** $x = -1,\ y = -9$

4. أوجد قيمتي x و y التي تجعل $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

تكون خواص التبديل والتجميع والتوزيع للضرب والجمع صحيحة مع الأعداد المركبة. فعند جمع أو طرح أعداد مركبة، اجمع بين الحدود المتماثلة. أي اجمع بين الأجزاء الحقيقية، واجمع بين الأجزاء التخيلية.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

بسّط.

a. $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ — خاصية التبديل وخاصية التجميع

$= 7 - 3i$ — بسّط.

b. $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ — خاصية التبديل وخاصية التجميع

$= 1 - 2i$ — بسّط.

تمرين موجّه

5A. $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B.** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

نصيحة دراسية
قراءة في الرياضيات يستخدم المهندسون الكهربائيون j كوحدة تخيلية لتجنب الالتباس مع I الخاصة بالتيار.

تستخدم الأعداد المركبة مع الكهرباء، وفي هذه المسائل، تمثل j عادةً وحدة تخيلية. في الدائرة ذات التيار المتردد، يمكن تمثيل الجهد والتيار ومقاومة أو ممانعة التيار، بأعداد مركبة. ولمضاعفة هذه الأعداد، استخدم طريقة فويل.

مثال من الحياة اليومية 6 ضرب الأعداد المركبة

الكهرباء في دائرة التيار المتردد، يكون الجهد V، والتيار C، والمقاومة I مرتبطين بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $2 + 4j$ أمبير والمقاومة $9 - 3j$ أوم.

$V = C \cdot I$	صيغة الكهرباء
$= (2 + 4j) \cdot (9 - 3j)$	$I = 9 - 3j$ و $C = 2 + 4j$
$= 2(9) + 2(-3j) + 4j(9) + 4j(-3j)$	طريقة فويل
$= 18 - 6j + 36j - 12j^2$	اضرب.
$= 18 + 30j - 12(-1)$	$j^2 = -1$
$= 30 + 30j$	اجمع.

يكون الجهد $30 + 30j$ فولت.

تمرين موجّه $-2 - 16j$ .6 فولت

6. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $4j - 2$ أمبير والمقاومة $2j - 3$ أوم.

يُطلق على عددين مركبين في الصيغة $a + bi$ و $a - bi$ اسم **عددان مركبان مترافقان**. ودائمًا ما يكون ناتج ضرب المرافقات المركبة عدداً حقيقيًا. ويمكنك استخدام هذه الحقيقة لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

بسّط.

a. $\dfrac{2i}{3 + 6i}$

$\dfrac{2i}{3+6i} = \dfrac{2i}{3+6i} \cdot \dfrac{3-6i}{3-6i}$	$3 + 6i$ و $3 - 6i$ مرافقان مركبان.
$= \dfrac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	اضرب.
$= \dfrac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \dfrac{6i + 12}{45}$	بسّط.
$= \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{15}i$	الصيغة $a + bi$

b. $\dfrac{4 + i}{5i}$

$\dfrac{4+i}{5i} = \dfrac{4+i}{5i} \cdot \dfrac{i}{i}$	اضرب في $\frac{i}{i}$
$= \dfrac{4i + i^2}{5i^2}$	اضرب.
$= \dfrac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5}i$	الصيغة $a + bi$

تمرين موجّه

7A. $\dfrac{-2i}{3 + 5i}$

7B. $\dfrac{2 + i}{1 - i}$

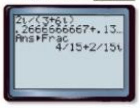
الربط بالحياة اليومية

يعتبر فرع مصابيح الأعياد المتسلسلة مثالا على دائرة التوالي. ويؤثر عدد المصابيح في الدائرة على قوة التيار مما يؤثر بالتالي على سطوع المصابيح.

المصدر: مجلة Popular Science

نصيحة دراسية

التكنولوجيا يمكن إجراء العمليات على الأعداد المركبة باستخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus. استخدم الدالة [2nd] [i] لإدخال التعبير. ثم اضغط على [MATH] [ENTER] [ENTER] لعرض الإجابة.



التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية على ضرب عددين مركبين اضرب مثالا على السبورة تستخدم فيه اللون ألاحمر للاشارة للجزء التخيلي والأزرق للجزء الحقيقي من كل عدد مركب. في كل عملية حسابية، استخدم اللون الأحمر والأزرق للاشارة الى الأجزاء التخيلية والحقيقية من الأعداد المركبة.

امثلة اضافية

6 **ترتبط الكهرباء** في دائرة التيار المتردد، وتيار الكهرباء والمقاومة بالمعادلة $E = I \times Z$,I. اوجد الجهد الكهربى فى دائرة بتيار شدته $1 + 4j$
$3 - 6j$ ohms . $27+6j$. أوم

7 بسط

a. $\dfrac{5i}{3 - 2i}$ $\dfrac{10}{13} + \dfrac{15}{13i}$

b. $\dfrac{5 + i}{2i}$ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2i}$

ركز على المحتوى الرياضي

الأعداد المركبة العدد المركب هو أي عدد يمكن أن يكتب في شكل a +b حيث يكون a و b أعداد حقيقية وi وحدة تخيلية. + , i. إذا كان $b = 0$. فالعدد المركب هو العدد الحقيقي إذا كان $b \neq 0$. فالعدد المركب هو التخيلي. اذا كانت $a=0$,يصبح العدد المركب عد تخيلي بحت تعد كل من الأعداد التخيلية البحتة و الحقيقية مجموعات جزئية لمجموعة الأعداد المركبة لذا. كل عدد حقيقي مركب، وكل عدد تخيلي بحت هو عدد مركب.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 بسّط.

1. $\sqrt{-81}$
2. $\sqrt{-32}$
3. $(4i)(-3i)$
4. $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$
5. i^{40}
6. i^{63}

مثال 3 حُلّ كل من المعادلات التالية.

7. $4x^2 + 32 = 0$
8. $x^2 + 1 = 0$

مثال 4 أوجد قيمتي a وb التي تجعل كل معادلة صحيحة.

9. $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$
10. $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

الأمثلة 5 و 7 بسّط.

11. $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$
12. $(7 + 4i) - (1 + 2i)$
13. $(6 - 8i)(9 + 2i)$
14. $(3 + 2i)(-2 + 4i)$
15. $\frac{3 - i}{4 + 2i}$
16. $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

مثال 6 17. **الكهرباء** يبلغ التيار في جزء من دائرة متوالية $3i + 5$- أمبير. ويبلغ التيار في جزء آخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي التيار في الدائرة. **$12 + 6i$ أمبير**

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **البنية** بسّط.

18. $\sqrt{-121}$
19. $\sqrt{-169}$
20. $\sqrt{-100}$
21. $\sqrt{-81}$
22. $(-3i)(-7i)(2i)$
23. $4i(-6i)^2$
24. i^{11}
25. i^{25}
26. $(10 - 7i) + (6 + 9i)$
27. $(-3 + i) + (-4 - i)$
28. $(12 + 5i) - (9 - 2i)$
29. $(11 - 8i) - (2 - 8i)$
30. $(1 + 2i)(1 - 2i)$
31. $(3 + 5i)(5 - 3i)$
32. $(4 - i)(6 - 6i)$
33. $\frac{2i}{1 + i}$
34. $\frac{5}{2 + 4i}$
35. $\frac{5 + i}{3i}$

مثال 3 حُلّ كل من المعادلات التالية.

36. $4x^2 + 4 = 0$
37. $3x^2 + 48 = 0$
38. $2x^2 + 50 = 0$
39. $2x^2 + 10 = 0$
40. $6x^2 + 108 = 0$
41. $8x^2 + 128 = 0$

مثال 4 أوجد قيم x و y التي تجعل كل معادلة صحيحة.

42. $9 + 12i = 3x + 4yi$
43. $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$
44. $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$
45. $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$
46. $a + 3b + (3a - b)i = b + bi$
47. $(2a - 4b)i + a + 5b = 15 + 58i$

خيارات الواجب المنزلي المتمايز

المستوى	فروض	خيار ليومين	
أساسي م.أ	18-60, 66, 68-91	19-59 فردي، 71-74	18-60 زوجي، 66، 68-91
الأصل م.ض	19-59 فردي، 61-91	18-60, 71-74	61-66, 68-70, 75-91
متقدم م.ق	61-83		

3 التمرين

تقويم مستمر

استخدام تمارين 17–1 للتأكد من الفهم.

استخدام الرسم البياني في أسفل هذه الصفحة لتخصيص فروض لطلابك.

تدريس الممارسات الرياضية

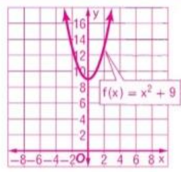
البنية يجب ان ينظر الطلاب الماهرون رياضيا عن كثب للتمييز بين النمط و البنية

تمثيلات متعددة

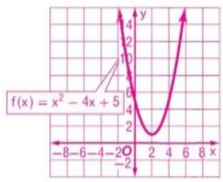
في التمرين 65, يستخدم الطلاب التمثيلات البيانية لتحليل المعادلات التربيعية التي لها جذور مركبة.

إجابات إضافية

65b.



65d.



65e. الاجابة النموذجية قد تشمل المعادلة التربيعية على حلول مركبة عند عدم وجود تقاطعات على المحور الرأسي X بالرسم البياني المتعلق بالدالة

46 | درس 1-5 | الأعداد المركبة

تعليم الممارسات الرياضية

نقدالطلاب الماهرون رياضيا قادرون على مقارنة فعالية اثنين من الحجج المعقولة و تمييز المنطق الصحيح من المنطق الزائف، وإذا كان هناك عيب في حجة—اشرحه

الأمثلة 5 و 7 **بسّط.**

48. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$
49. $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$
50. i^{41}
51. $(4 - 6i) + (4 + 6i)$
52. $(8 - 5i) - (7 + i)$
53. $(-6 - i)(3 - 3i)$
54. $\frac{(5 + i)^2}{3 - i}$
55. $\frac{6 - i}{2 - 3i}$
56. $(-4 + 6i)(2 - i)(3 + 7i)$
57. $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$
58. $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$
59. $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

مثال 6

60. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في جزء من دائرة متوالية $7 + 8i$ أوم. وتبلغ المقاومة في جزء آخر من الدائرة $-13 + 4i$ أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة. **$20 + 4j$ أوم**

B **الكهرباء** **استخدم الصيغة** $V = C \cdot I$. **63. $(3 + i)x^2 + (-2 + i)x - 8i + 7$**

61. يبلغ التيار في دائرة $3 + 6j$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - j$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $21 + 27j$ فولت

62. يبلغ الجهد في دائرة $-20 + 12i$ فولت، وتبلغ المقاومة $-6 + 4i$ أوم. كم يبلغ التيار؟ **$\frac{2}{13}j + \frac{42}{13}$ أمبير**

63. أوجد مجموع $ix^2 - (4 + 5i)x + 7$ و $3x^2 + (2 + 6i)x - 8i$.

64. بسّط $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$. **$(5 - 3i)x^2 + (-5 + 4i)x + i + 11$**

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة. سوف تستكشف المعادلات التربيعية التي فيها جذور مركبة.

أ. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $3i$ و $-3i$ كجذور لها. **الإجابة النموذجية: $x^2 + 9 = 0$**

ب. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء a عن طريق التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

ج. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $2 + i$ و $2 - i$ كجذور لها. **الإجابة النموذجية: $x^2 - 4x + 5 = 0$**

د. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء c عن طريق التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

هـ. **تحليليًا** كيف تعرف متى ستحتوي المعادلة التربيعية على حلول مركبة فقط؟ انظر الهامش.

68. الإجابة النموذجية: دائمًا؛ يمكن تمثيل قيمة 5 عن طريق $5 + 0i$، ويمكن تمثيل قيمة $3i$ عن طريق $0 + 3i$.

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

66. **النقد** تقوم أماني وميسون بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$. أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **ميسون؛ $i^3 = -i$، وليس -1.**

أماني	ميسون
$24i^3 = -24$	$24i^3 = -24i$

67. **تحدٍّ** بسّط $(1 + 2i)^3$. **$-11 - 2i$**

68. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا أو أحيانًا* أو *ليست صحيحة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

يحتوي كل عدد مركب على جزء حقيقي وجزء تخيلي.

69. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عددين مركبين ناتج ضربهما 20. **الإجابة النموذجية: $(4 + 2i)(4 - 2i)$**

70. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية.

70. تحتوي بعض المعادلات التربيعية على حلول مركبة ولا يمكن حلها باستخدام الأعداد الحقيقية فقط.

4 التقويم

التحقق من فهم الطلاب يجب على الطلاب كتابة عددين مركبين حصيلتهم 10 على قطع صغيرة من الورق وتسليمها لك عند خروجهم من الوحدة الدراسي. نموذج الاجابة: $1 + 3i$ و $1 - 3i$

إجابات إضافية

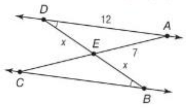
71b. $\angle AED \cong \angle CEB$ (زوايا رأسي)
$\overline{DE} \cong \overline{BE}$ (طولهما x.)
$\angle ADE \cong \angle CBE$ ()(معطى)
تطابق كل الزوايا المتتالية والضلع المحصور بينها أدى ذلك الى تطابق المثلثات وفقا لخاصية ASA

71c. $\overline{EA} \cong \overline{EC}$ في CPCTC (تطابق الأجزاء المقابلة من المثلثات المتطابقة) $EA = 7$, إذن $EC = 7$.

78. اجابة نموذجية حوالي 6.1 ثانية. هذه الإجابة تبدو معقولة. للمعادلة اجابتين الحل الأول، 0.01 ثانية، وهو الوقت اللازم للكرة لترتفع من 1.4 m إلى 1.7 m. والوقت اللازم لها لتعود مرة اخرى الى 1.7 m هو 6.1 ثانية

تدريب على الاختبار المعياري

71. إجابة موسعة انظر الشكل للإجابة على ما يلي. **b, c. انظر الهامش.**



أ. حدد مثلثين متطابقين من خلال ذكر الرؤوس بالترتيب الصحيح. **$\triangle CBE \cong \triangle ADE$**

ب. اشرح سبب تطابق المثلثين.

ج. ما طول $\overline{EC}$؟ اشرح إجراءاتك.

72. $= (3 + 6)^2$ **b**

A $2 \times 3 + 2 \times 6$
B 9^2
C $3^2 + 6^2$
D $3^2 \times 6^2$

73. SAT/ACT يتقاضى أحد المتاجر 49 AED للبنطلون. يزيد هذا السعر بنسبة 40% عن المبلغ الذي يتكلفه المتجر لشراء البنطلون. بعد التخفيضات، يسمح لأي موظف بشراء أي بنطلونات متبقية بخصم 30% من تكلفة المتجر. كم ستبلغ تكلفة شراء البنطلونات على الموظف بعد التخفيضات؟ **J**

F AED 10.50
G AED 12.50
H AED 13.72
J AED 24.50
K AED 35.00

74. ما قيمتي x و y عندما يكون $(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$؟ **A**

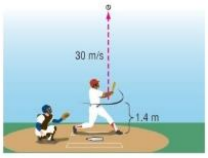
A $x = 6, y = 7$
B $x = 4, y = i$
C $x = 6, y = i$
D $x = 4, y = 7$

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 1-2)

75. $2x^2 + 7x = 15$
76. $4x^2 - 12 = 22x$
77. $6x^2 = 5x + 4$

78. البيسبول ضرب لاعب بيسبول الكرة لأعلى بسرعة ابتدائية بلغت 30 مترًا في الثانية، وعلى ارتفاع 1.4 متر فوق سطح الأرض. يمثل ارتفاع $h(t)$ الكرة بالمتر والزمن t بالثواني بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.4$. ما مقدار الوقت لدى اللاعب المنافس للوصول أسفل الكرة إذا التقطها على ارتفاع 1.7 متر فوق سطح الأرض؟ هل تبدو إجابتك منطقية؟ اشرح. (الدرس 1-2) **انظر الهامش.**



79. الكهرباء تساوي المقاومة في أحد أجزاء دائرة موصولة على التوالي $3 + 4j$ من وحدة الأوم، وتساوي المقاومة في جزءٍ آخر من الدائرة $2 - 6j$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة. (الدرس 1-3) **$5 - 2j$ أوم**

بسّط. (الدرس 1-3)

80. $(8 + 5i)^2$ **$39 + 80i$**
81. $4(3 - i) + 6(2 - 5i)$ **$24 - 34i$**
82. $\frac{5 - 2i}{6 + 9i}$ **$\frac{4}{39} - \frac{19}{39}i$**

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 1-2)

83. $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ **$20x^2 - 31x + 12 = 0$**
84. $-\frac{2}{5}, 6$ **$5x^2 - 28x - 12 = 0$**
85. $-\frac{1}{4}, -\frac{6}{7}$ **$28x^2 + 31x + 6 = 0$**

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا .

86. $x^2 + 16x + 64$ **نعم**
87. $x^2 - 12x + 36$ **نعم**
88. $x^2 + 8x - 16$ **لا**
89. $x^2 - 14x - 49$ **لا**
90. $x^2 + x + 0.25$ **نعم**
91. $x^2 + 5x + 6.25$ **نعم**

التدريس المتمايز ض.م أ.م

التوسّع أخبر الطلاب أنك تفكر في عددين مركبين حصيلة جمعهم $3 + i$ و فارق $-5 + 7i$. اطلب منهم ايجاد محصلة العددين **$8 + 19i$**

1 التركيز

الهدف تمثيل الأعداد المركبة بيانياً في مستوى مركب وتحديد القيم المطلقة للأعداد المركبة.

نصيحة التدريس

يجب أن يكون الطلاب على علم بقانون المسافة قبل البدء في هذا المختبر.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. ثم اطلب من كل ثنائي العمل على حل الأمثلة.

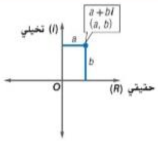
اسأل:

- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي كعدد مركب؟ اشرح. نعم، نموذج للإجابة: يمكن كتابة أي عدد حقيقي كالتالي $a + 0i$.
- ما هي الصلة بين القيمة المطلقة للعدد المركب والقيمة المطلقة للعدد الحقيقي؟ نموذج للإجابة: تمثل كلٌّ من القيمة المطلقة للعدد المركب والقيمة المطلقة للعدد الحقيقي مسافة الأعداد من الصفر.

التوسع 1-5

مختبر الجبر
المستوى المركب

يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ بيانيًا في **المستوى المركب** من خلال تمثيله باستخدام النقطة (a, b). وبصورة مشابهة للمستوى الإحداثي، يتكوّن المستوى المركب من محورين اثنين. تمثّل المركّبة الحقيقية على **المحور الحقيقي**، وهو الأفقي. وتمثّل المركّبة التخيلية على **المحور التخيلي**، وهو الرأسي. ويمكن الإشارة إلى المستوى المركّب أيضًا باسم **بمستوى أرجاند (ar GON)**.



مثال 1 التمثيل البياني في المستوى المركب

مثل بيانيًا $z = 3 + 4i$ في المستوى المركب.

الخطوة 1 مثّل z بالنقطة (a, b).

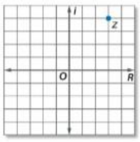
المركّبة الحقيقية a لـ z هي العدد 3.

المركّبة التخيّلية bi لـ z هي $4i$.

يمكن تمثيل z بالنقطة (a, b) أو $(3, 4)$.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا z في المستوى المركب.

أنشئ المستوى المركب وعيّن النقطة $(3, 4)$.



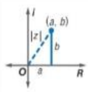
تذكّر أنه في الأعداد الحقيقية، تمثّل القيمة المطلقة مسافة العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبصورةٍ مماثلة، فإن **القيمة المطلقة لعددٍ مركب** هي مسافته عن نقطة الأصل في المستوى المركب. وعند تمثيل $a + bi$ بيانيًا في المستوى المركب، فإن القيمة المطلقة لـ $a + bi$ هي المسافة من (a, b) إلى نقطة الأصل. ويمكن إيجادها من خلال قانون المسافة.

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة للعدد المركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



مختبر الجبر
المستوى المركب يتبع

مثال 2 القيمة المطلقة لعدد مركب

أوجد القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$.

الخطوة 1 حدّد قيمتي a و b.

المركبة الحقيقية a لـ z هي -5، والمركبة التخيلية bi لـ z هي $12i$.

وهكذا $a = -5$ و $b = 12$.

الخطوة 2 أوجد القيمة المطلقة لـ z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{القيمة المطلقة لعدد مركب}$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \quad a = -5 \text{ و } b = 12$$
$$= \sqrt{169} \text{ or } 13 \quad \text{بسّط.}$$

القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$ هي 13.

يمكن بجمع الأعداد المركبة وطرحها بيانيًا.

مثال 3 التبسيط بالتمثيل البياني

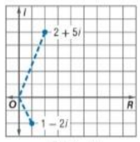
بسّط $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 اكتب $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالصورة $(1 - 2i) + (2 + 5i)$.

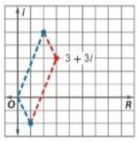
الخطوة 2 مثّل $1 - 2i$ و $2 + 5i$ بيانيًا على المستوى المركب نفسه. صل كل نقطة بنقطة الأصل باستخدام قطعةٍ مستقيمةٍ متقطّعة.

الخطوة 3 أكمل متوازي الأضلاع الذي يضم القطعتين المستقيمتين بمثابة اثنين من أضلاعه. عيّن نقطةً يلتقي فيها الضلعان الإضافيان.

حلّ $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ هو $3 + 3i$.



الخطوة 2



الخطوة 3

التمارين

مثّل كلّ عددٍ في المستوى المركب. 1–3. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

1. $z = 3 + i$
2. $z = -4 - 2i$
3. $z = 2 - 2i$

أوجد القيمة المطلقة لكل عدد مركب.

4. $z = -4 - 3i$
5. $z = 7 - 2i$
6. $z = -6 - i$

بسّط بالتمثيل البياني. 7–9. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

7. $(6 + 5i) + (-2 - 3i)$
8. $(8 - 2i) - (4 + 7i)$
9. $(5 + 6i) + (-4 + 3i)$

تمرين: على الطلاب إكمال التمارين 1-9.

3 التقويم

التقويم المستمر

استخدم التمارين 4-6 لتقويم قدرة الطلاب على إيجاد القيمة المطلقة لعدد مركب.

من المادي إلى المعنوي:

اسأل:

- ما هي القيمة المطلقة للتالي $z = a + bi$ عندما تكون $b = 0$؟ اشرح. $|a|$؛ نموذج للإجابة: عندما تكون $b = 0$، فإن القيمة المطلقة لـ z تكون $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2}$ or $\sqrt{a^2}$، $\sqrt{a^2}$ يمكن كتابتها كالتالي $|a|$.
- هل يمكن للنقطة (x, y) في مستوى مركب؟ الإحداثي أن تمثل بيانيا في المستوى مستوى مركب؟ اشرح. لا، نموذج للإجابة: النقطة (x, y) لها مكونات وهي x و y. النقط التي يمكن مستوى مركب المستوى العقدي لها مكونات حقيقية و تخلبلية.

1 التركيز

الهدف استخدم آلة حاسبة تحتوي نظام حاسوب جبري لحل المعادلات التربيعية.

المواد اللازمة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيلات البيانية بتقنية CAS

نصيحة التدريس

حاسبة التمثيلات البيانية تفتح علي نفس الشاشة التي تم غلقها عليها. على الطلاب الضغط علي زر الصفحة **الرئيسية** للبدء في المختبر.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من فردين أو ثلاث أفراد، وبقدرات متنوعة و ذلك لإكمال النشاط و التمارين 3–1.

- X المشار اليها في**المفاتيح** خطوات تشير الى الزر **X** . تأكد أن الطلاب لم يخطئوا الزر باشارة الضرب و التي لا حاجة إليها في هذه الامثلة.
- يتم عرض الحلول في شكل دقيق. للتحويل إلى الشكل العشري؛ تحت **قائمة**، اختر**عدد**، ثم أختر **تحويل الي شكل عشري**

تدريب على الطلاب إكمال التمارين 9–4.

3 التقويم

تقويم مستمر

قم باستخدام التمرين 1 لتقويم اذا كان الطلاب باستطاعتهم استخدام إختيارات القائمة ثم حل المعادلة التربيعية.

من العملي إلى النظري

حاسبة التمثيلات البيانية ذات تقنية ال CAS يمكن أن تستخدم لحل التمارين 9–7 دون كتابة المعادلة أولا بالشكل القياسي ($ax^2 + bx + c = 0$).

توسيع المفهوم

اسأل:

- هل إشارات الأعداد في معادلة تربيعية في النموذج القياسي تقدم أي أدلة حول ما إذا كانت حلولها مركبة؟ إجابة نموذجية إذا كان معامل x^2 و الحد الثابت لهما نفس الإشارة، فقد تكون الحلول مركبة.

توسع 1-5B

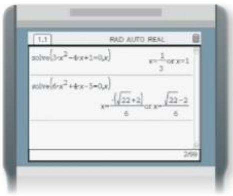
مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات التربيعية

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية المزودة بتقنية CAS لحل المعادلات التربيعية.

النشاط إيجاد الجذور

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** (حاسبة) جديدة.

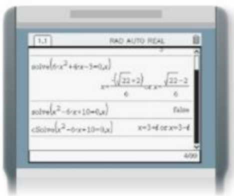
الخطوة 2 اختر الأداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra**.

الخطوة 3 اكتب $3x^2 - 4x + 1 = 0$ متبوعة بفاصلة. *x*. ثم اضغط **Enter** *(إدخال)*.
الحلّان هما $x = \frac{1}{3}$ أو $x = 1$.

b. $6x^2 + 4x - 3 = 0$

الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $6x^2 - 4x - 3 = 0$ متبوعة بفاصلة. *x*. ثم أدخل.
الحلّان هما $x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$.



c. $x^2 - 6x + 10 = 0.$

الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر) .

الخطوة 2 اكتب $x^2 - 6x + 10 = 0$ متبوعة بفاصلة. و *x*. ثم **enter** اضغط **Enter** (إدخال).
تُرجع الآلة الحاسبة القيمة *false* (خطأ). ويعني ذلك أنه لا توجد حلول حقيقية.

الخطوة 3 في القائمة. اختر **Algebra** (الجبر). ثم **Complex** (مركب).
ثم **Solve** (الحل). أعد إدخال المعادلة.
الحلّان هما $x = 3 \pm i$.

تدريب

حُلّ كل من المعادلات التالية.

1. $x^2 - 2x - 24 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $0 = -3x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 - 2x + 5 = 0$
5. $0 = 4x^2 - 8$
6. $0 = 2x^2 - 4x + 1$
7. $x^2 + 3x + 8 = 5$
8. $25 + 4x^2 = -20x$
9. $x^2 - x = -6$

اختبار الوحدة الثاني

الدروس من 1-4 إلى 1-5

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 1-4)

1. 7, 2
2. 0, 3
3. −5, 8
4. −7, −8
5. −6, −3
6. 3, −4
7. $1, \frac{1}{2}$

8. **نظرية الأعداد** أوجد عددين صحيحين موجبين متتاليين ناتج ضربهما 624. (الدرس 1-4)

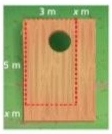
9. **الهندسة** يزيد طول مستطيل بمقدار مترين عن عرضه. أوجد أبعاد المستطيل إذا علمت أن مساحته تساوي 63 مترًا مربعًا . (الدرس 1-4)

حلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 1-3)

10. $x^2 - x - 12 = 0$
11. $3x^2 + 7x + 2 = 0$
12. $x^2 - 2x - 15 = 0$
13. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

14. اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية لها الجذران 6− و $\frac{1}{4}$. (الدرس 1-4)

15. **الألعاب** أنشأ عبيد منصةً للعبة رمي أكياس الفاصوليا. وكان بعدا المنصة الأصلية في المخططات 3 أمتارٍ في 5 أمتار. ولكنّه جعل منصّته أكبر بإضافة x متر إلى كل ضلع. مساحة المنصّة الجديدة تساوي 35 مترًا مربعًا. (الدرس 1-4)

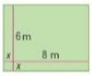


a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثل مساحة هذه المنصّة. $x^2 + 8x + 15 = 35$

b. أوجد بعدي المنصّة التي صنعها جلال. 5 m في 7 m

16. **المثلثات** أوجد أبعاد مثلثٍ إذا علمت أن قياس قاعدته يساوي $\frac{2}{3}$ من قياس ارتفاعه وتساوي مساحته 12 سنتيمترًا مربعًا. (الدرس 1-4) القاعدة = 4 cm،
الارتفاع = 6 cm

17. **البناء** يركّب علي بلاطةً إسمنتيةً في فنائه الخلفي. وكان ينوي أن يكون للبلاطة الأصلية البعدان 8 أمتار في 6 أمتار. ولكنّه ارتأى أن يجعل بلاطته أكبر بإضافة x قدمًا إلى كل ضلع. تساوي مساحة البلاطة الجديدة 120 مترًا مربعًا. (الدرس 1-4)



a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثّل مساحة البلاطة الجديدة. $x^2 + 14x + 48 = 120$

b. أوجد أبعاد البلاطة. 12 مترًا في 10 أمتار

بسّط. (الدرس 1-5) 19. $11 + 9i$

18. $\sqrt{-81}$
19. $\sqrt{-25x^4y^5}$
20. $(15 - 3i) - (4 - 12i)$
21. i^{37}
22. $(5 - 3i)(5 + 3i)$
23. $\frac{3 - i}{2 + 5i}$

24. تساوي المقاومة في أحد أجزاء دارةٍ موصولةٍ على التوالي $3 + 4j$ من وحدة الأوم وتساوي المقاومة في جزءٍ آخر من الدارة $6 - 7j$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكليّة في الدارة. (الدرس 1-5) $9 - 3j$ أوم

بسّط. (الدرس 1-5)

25. $(3 - 4i) - (9 - 5i)$ $-6 + i$
26. $\frac{4i}{4 - i}$ $-\frac{4}{17} + \frac{16}{17}i$

التقييم المستمر

استخدم اختبار الوحدة الثاني لتقييم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

فيما يتعلق بالمسائل الخاطئة، على الطلاب مراجعة الدروس المحددة بين الأقواس.

التقييم الإليكتروني: عدِّل اختبار الوحدة الثاني بما يتسق مع قدرات الطلاب وأعدَّ نسخاً متعددة وألحق معها مفاتيح الإجابة.

مطويات تخطيط الدراسة

مطويات دينا زايك®

قبل إكمال الطلاب لاختبار الوحدة الثاني، حثهم على الرجوع لمراجعة المعلومات الواردة في درس 1-2 للمطويات 2-2.

إجابة إضافية

1. $x^2 - 9x + 14 = 0$
2. $x^2 - 3x = 0$
3. $x^2 - 3x - 40 = 0$
4. $x^2 + 15x + 56 = 0$
5. $x^2 + 9x + 18 = 0$
6. $x^2 + x - 12 = 0$
7. $2x^2 - 3x + 1 = 0$
8. 24, 26
9. الطول= 9 ft، العرض= 7 ft