1 التركيز

تقويم رأسي

قبل البدء في درس 1-6 حلّ المعادلات عن طريق إكمال المربع.

درس 1-6 حلّ المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام. استخدم المميّز لتحديد عدد ونوع الجذور في المعادلة التربيعية.

بعد الانتهاء من درس 1-6 حلّ المتباينات التربيعية باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية.

2 التدريس

الأسئلة المتدرجة

على الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الخاص بالدرس.

اسأل:

- عند ارتفاع قيمة t في هذه المعادلة، ماذا يحدث لقيمة h؟ ترتفع القيمة ثم تنخفض.
- ما هو شكل التمثيل البياني لهذه المعادلة؟ قطع مكافئ
- في أي اتجاه ينفتح القطع المكافئ؟ نحو الأسفل.

الدرس 1-6 القانون العام والمميّز

:: السابق

- حللت معادلات بإكمال المربع.

:: الحالي

1 حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.

2 استخدام المميّز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها.

:: لماذا؟

- مسابقة منجنيق اليقطين فعالية يبني فيها المشترك منجنيقًا ويطلق يقطينة على هدف.

يمكن تمثيل مسار اليقطينة بالدالة التربيعية $h = -4.9t^2 + 117t + 42$ وفيها h ارتفاع اليقطينة وt عدد الثواني.

لكي تتنبأ متى ستضرب اليقطينة الهدف، يمكنك حلّ المعادلة $0 = -4.9t^2 + 117t + 42$. كان سيتعذر حلّ هذه المعادلة باستخدام التحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني أو إكمال المربع.

المفردات الجديدة

القانون العام Quadratic Formula

المميّز discriminant

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 القانون العام لقد أوجدت حلول بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني وبالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي. وهناك أيضًا صيغة يمكن استخدامها في حل أي معادلة تربيعية. ويمكن اشتقاق هذه الصيغة من خلال حلّ الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية.

الحالة الخاصة		الحالة العامة
$2x^2 + 8x + 1 = 0$	المعادلة التربيعية القياسية	$ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$	اقسم كل طرف على a.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$	اطرح $\frac{c}{a}$ من كل طرف.	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	أكمل المربع.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	حلل الطرف الأيسر إلى العوامل.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$	بسّط الطرف الأيمن.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$	خاصيّة الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$	اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف.	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$	بسّط.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ على أنها **القانون العام**.

نصيحة دراسية

القانون العام رغم أن التحليل إلى العوامل قد يكون طريقة أسهل لحلّ بعض المعادلات، إلا أنه يمكن استخدام القانون العام لحلّ أي معادلةٍ تربيعية.

المفهوم الأساسي القانون العام

الشرح تُعطى حلول المعادلات التربيعية ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. من خلال القانون التالي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

مثال 1 جذران نسبيان

حُل $x^2 - 10x = 11$ باستخدام القانون العام.

أولاً. اكتب المعادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ وحدّد a و b و c.

$$\begin{array}{ccc} & & ax^2 + bx + c = 0 \\ & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 - 10x = 11 & \rightarrow & 1x^2 - 10x - 11 = 0 \end{array}$$

بعد ذلك عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$	عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -10 وعن c بـ -11.
$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$	اضرب.
$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$	بسّط.
$= \frac{10 \pm 12}{2}$	$\sqrt{144} = 12$
$x = \frac{10 + 12}{2}$ or $x = \frac{10 - 12}{2}$	اكتب في صورة معادلتين.
$= 11 \qquad = -1$	بسّط.

الحلّان هما -1 و 11.

التحقق عوّض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$\begin{array}{cc} x^2 - 10x = 11 & x^2 - 10x = 11 \\ (-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11 & (11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11 \\ 1 + 10 \stackrel{?}{=} 11 & 121 - 110 \stackrel{?}{=} 11 \\ 11 = 11 \checkmark & 11 = 11 \checkmark \end{array}$$

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

1A. $x^2 + 6x = 16$

1B. $2x^2 + 25x + 33 = 0$

1 القانون العام

مثال 1 يوضح كيفية حل معادلة تربيعية باستخدام القانون العام. **مثال 2** يوضح كيفية حل معادلة تربيعية عند تبسيط مجذور القانون العام إلى صفر. **مثال 3** يوضح كيفية التعبير عن الجذور الصماء (غير النسبية) في معادلة تربيعية باستخدام صيغة جذرية. **مثال 4** يوضح كيفية حل معادلة تربيعية لحلول مركبة عند تبسيط المجذور في القانون العام لقيمة سالبة.

تقويم مستمر

استخدم التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد الحل $x^2 - 8x = 33$ باستخدام القانون العام. $\{-3, 11\}$

التركيز على محتوى الرياضيات

القانون العام أي معادلة تربيعية مكتوبة بهذه الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. يمكن حلها باستخدام القانون العام. عوض بقيم a، b، وc في القانون العام لإيجاد قيمة (قيم) x. القانون العام هي

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حيث $a \neq 0$.

التعليم المتمايز ق.م ض.م

إذا عوّض الطلاب بالقيم في القانون العام بشكل خاطئ،

إذا شجع الطلاب على كتابة قيمة كل من a، b وc من خلال الشكل القياسي للمعادلة التربيعية قبل البدء في التعويض في الصيغة.

مثال 2 الجذر النسبي الوحيد

حُلّ $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستخدام القانون العام.

حدّد a و b و c. ثمّ عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

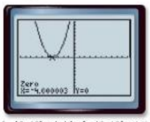
$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 عن b بـ 8 عن c بـ 16.

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{-8}{2} \text{ or } -4$$ $\sqrt{0} = 0$

الحل يساوي -4.

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة ذات الصلة أنه لا يوجد حلّ عند $x = -4$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

2A. $x^2 - 16x + 64 = 0$

2B. $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بالضبط من خلال كتابتها بالصيغة الجذرية.

مثال 3 الجذور غير النسبية

حُلّ $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ عوّض عن a بـ 2 وعن b بـ 6 وعن c بـ -7.

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بسّط.

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} \text{ أو } \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23}$ أو $2\sqrt{23}$

الحلّان التقريبيان هما -3.9 و 0.9.

التحقق تحقق من هاتين النتيجتين باستخدام التمثيل البياني للدالة التربيعية ذات الصلة. $y = 2x^2 + 6x - 7$. باستخدام الدالة الصفرية **ZERO** في حاسبة التمثيل البياني، يكون صفرا الدالة ذات الصلة هما -3.9 و 0.9.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

3A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3B. $x^2 - 8x + 9 = 0$

الربط **بتاريخ الرياضيات**

براهماغوبتا (598-668)
قدّم عالم الرياضيات الهندي براهماغوبتا الصيغة العامة الأولى لحل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx = c$، والتي تعرف الآن بالقانون العام.

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة: قد يُعلق بعض الطلاب أن المعادلات بالأمثلة 1 و2 يمكن حلها عن طريق التحليل. قبل البدء في مثال 3، أكد على الطلاب أنه لا يمكن حل الكثير من المعادلات التربيعية باستخدام التحليل بسهولة. اذكر أن المعادلة التربيعية الموضحة في مثال 3 هي مثال لذلك. وأكد أن القانون العام تقدم طريقة لإيجاد الجذور لأي معادلة تربيعية.

أمثلة إضافية

2 أوجد الحل $x^2 - 34x + 289 = 0$ باستخدام القانون العام.
{17}

3 أوجد الحل $x^2 - 6x + 2 = 0$ باستخدام القانون العام.
$\{3 \pm \sqrt{7}\}$، أو تقريبيا 0.4 و 5.6

نصيحة دراسية

الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلولك بالصيغة $a + bi$، والتي تسمّى أحيانًا *الصيغة القياسية للعدد المركب.*

عند استخدام القانون العام، إذا كانت قيمة المجذور سالبة، فسيكون الحل مركبًا. وتبدو الحلول المركبة دائمًا في صورة أزواج مترافقة.

مثال 4 الجذور المركّبة

حُلّ $x^2 - 6x = -10$ باستخدام القانون العام.

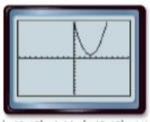
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -6 وعن c بـ 10.

$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$ بسّط.

$= \frac{6 \pm 2i}{2}$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)}$ or $2i$

$= 3 \pm i$ بسّط.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

الحلّان هما العددان المركبان $i + 3$ و $i - 3$.

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة المرتبطة أن الحلّين مركّبان، ولكنه لا يساعدك في إيجادهما. وللتحقق من الحلّين المركّبين، عوّض بهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$ القانون العام

$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$ $x = 3 + i$

$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$ مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع

$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$ بسّط.

$-9 - 1 = -10$ ✓ $i^2 = -1$

$x^2 - 6x = -10$ المعادلة الأصلية

$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$ $x = 3 - i$

$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$ مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع

$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$ بسّط.

$-9 - 1 = -10$ ✓ $i^2 = -1$

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

4A. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

4B. $x^2 - 4x = -13$

2 الجذور والمميّز

انتبه في الأمثلة السابقة إلى العلاقات القائمة بين قيمة التعبير الواقع تحت الجذر وبين جذور المعادلة التربيعية. ويطلق على التعبير $b^2 - 4ac$ اسم **المميّز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميّز}$$

مراجعة المفردات

المجذور هو القيمة الواقعة تحت رمز الجذر

يمكن استخدام المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها. ويلخّص الجدول في الصفحة التالية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن استخدام المميّز أيضًا للتحقق من عدد الحلول ونوعها بعد حلّ المعادلة.

عندما تكون قيمة المميز في القانون العام صفرًا، فيكون للمعادلة التربيعية بالضبط جذرٌ نسبيّ وحيد.

مثال إضافي

4 أوجد الحل $x^2 + 13 = 6x$ باستخدام القانون العام. $\{3 \pm 2i\}$

انتبه!

تجنب الأخطاء: ذكّر الطلاب أن الأزواج المرافقة هي العددان المركبان للصيغة $a + bi$ و $a - bi$.

2 الجذور والمميّز

مثال 5 يوضح كيفية إيجاد قيمة ا لمعادلة تربيعية واستخدامه لوصف عدد الجذور في المعادلة ونوعها

التركيز على المحتوى الرياضي

الجذور يمكن استخدام قيمة المميز لتحديد عدد ونوع الجذور في المعادلة التربيعية. تأمل معادلة تربيعية لها معاملات نسبية. إن كان المميز مربعاً كاملاً غير صفري، يوجد جذرين نسبيين. إن كان يساوي صفر، يوجد جذر نسبي واحد. إن كان موجباً ولكنه ليس مربعاً كاملاً، يوجد جذرين غير نسبيين. إن كان عدد سالبًا يوجد جذرين مركبين.

مثال إضافي

5 أوجد قيمة المميز لكل معادلة تربيعية. ثم صف عدد جذور المعادلة ونوعها.

a. $x^2 + 3x + 5 = 0$
-11؛ جذران مركبان

b. $x^2 - 11x + 10 = 0$
81؛ جذران نسبيان

التدريس باستخدام التكنولوجيا

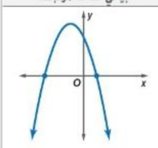
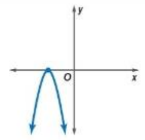
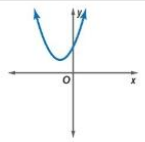
نظام تجاوب الطلاب: اعط الطلاب معادلة تربيعية، واطلب منهم أن يستخدموا المميز لتحديد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة. اطلب منهم الإجابة في حالة **A** لجذرين مركبين، **B** لجذر واحد حقيقي، و**C** لجذرين حقيقيين.

نصيحة دراسية

الجذور تذكّر أن حلول أي معادلة تسمى *بالجذور* أو *الأصفار* وهي القيم التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور الأفقي x.

المفهوم الأساسي المميّز

تأمل الدالة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a و b و c أعداد نسبية و $a \neq 0$.

قيمة المميّز	نوع الجذور وعددها	مثال عن تمثيل بياني لدالة مرتبطة
$b^2 - 4ac > 0$; $b^2 - 4ac$ مربع كامل.	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$; $b^2 - 4ac$ ليس مربعا كاملاً.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي نسبي واحد مكرر	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميّز لكل معادلة تربيعية. ثم صِف عدد الجذور ونوعها.

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-11)^2 - 4(7)(5) \\ &= 121 - 140 \\ &= -19 \end{aligned}$$

المميز سالب ، هناك جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (22)^2 - 4(1)(121) \\ &= 484 - 484 \\ &= 0 \end{aligned}$$

المميز يساوي الصفر ، اذا هناك جذر نسبي واحد مكرر.

تمرين موجّه

5A. $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5B. $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

التعليم المتمايز ض.م أ.م

التوسّع: اكتب $x^3 - 8 = 0$ على السبورة. وضح أن هذه المعادلة معادلة تكعيبية. على الطلاب استخدام ما تعلموه من هذا الدرس لحل هذه المعادلة لـــ x.

وضح أن المعادلة التربيعية (الدرجة الثانية) لها حلان على الأكثر، بينما المعادلة التكعيبية (الدرجة الثالثة) لها 3 حلول على الأكثر.

$$x^3 - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$x - 2 = 0 \text{ or } (x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$x = 2 \text{ or } x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$
$$x = -1 \pm i\sqrt{3}$$

يوجد حلين، $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$.

لقد درست مجموعةً من طرق حل المعادلات التربيعية. ويلخص الجدول أدناه هذه الطرق.

نصيحة دراسية

المفكّرة الدراسية قد ترغب في نسخ قائمة الطرق هذه على مفكّرة الرياضيات أو المطوية خاصتك للاحتفاظ بها بمثابة مرجع أثناء دراستك.

ملخص المفهوم حلّ المعادلات التربيعية

الطريقة	يمكن استخدامها	متى تُستخدم
التمثيل البياني	أحيانًا	تُستخدم فقط إذا لم يكن الحلّ الدقيق مطلوبًا. وهي تستخدم على النحو الأفضل للتحقق من صحّة الحلول التي أوجدت جبريًا.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	تُستخدم إذا كان الحدّ الجبري الثابت صفرًا أو إذا كان من السهل تحديد العوامل. **مثال** $x^2 - 7x = 0$
خاصيّة الجذر التربيعي	أحيانًا	تُستخدم في المعادلات التي يساوي فيها المربع الكامل ثابتًا. **مثال** $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مفيدة في المعادلات ذات الصيغة $x^2 + bx + c = 0$، حيث b عدد زوجي. **مثال** $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	مفيدة عندما تخفق الطرق الأخرى أو تكون مملةً جدًا. **مثال** $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

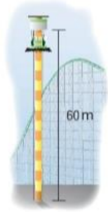
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-4 **حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.**

1. $x^2 + 12x - 9 = 0$
2. $x^2 + 8x + 5 = 0$
3. $4x^2 - 5x - 2 = 0$
4. $9x^2 + 6x - 4 = 0$
5. $10x^2 - 3 = 13x$
6. $22x = 12x^2 + 6$
7. $-3x^2 + 4x = -8$
8. $x^2 + 3 = -6x + 8$

المثالان 3 و 4

9. **تمثيل النماذج** تصعد إحدى ألعاب مدينة الملاهي بالراكبين إلى قمة برج ثم تهبط بهم بسرعةٍ تصل إلى 80 مترًا في الثانية. للدالّة التي تمثّل هذه اللعبة الصيغة $h = -16t^2 - 64t + 60$، وحيث h الارتفاع بالأمتار و t الزمن بالثواني. كم ثانية يستغرق هبوط المركبة من ارتفاع 60 مترًا إلى ارتفاع 0 مترًا؟



مثال 5 **أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية.**

a. **أوجد قيمة المميّز.**

b. **صِف عدد الجذور ونوعها.**

10. $3x^2 + 8x + 2 = 0$
11. $2x^2 - 6x + 9 = 0$
12. $-16x^2 + 8x - 1 = 0$
13. $5x^2 + 2x + 4 = 0$

3 التمرين

تقويم مستمر

استخدم التمارين 1–13 لتتأكد من استيعاب الطلاب.

استخدم الجدول أسفل الصفحة التالية لضبط الواجبات بما يتسق مع قدرات الطلاب.

تدريس التمارين الرياضية

النمذجة يتمكن الطلاب المتميزون في الرياضيات من تطبيق ما تعلموه في الرياضيات عند حل المسائل التي تقابلهم في الحياة اليومية. كما يحللون العلاقات بأسلوب رياضي للوصول إلى الاستنتاجات، وكذلك يفسرون نتائج الرياضيات في سياق الموقف.

نصائح للمعلمين الجدد

الفهم المنطقي: في حين أن الجدول بهذه الصفحة يقدم اقتراحات حول الوقت المناسب لاستخدام كل طريقة لحل المعادلة التربيعية، قد لا يتمكن جميع الطلاب من تحليل كل المعادلات وتحديد الطريقة المثلى التي لا تضيع الوقت.

تدريس الممارسات الرياضية

الفهم المنطقي يبدأ الطلاب المتميزون بالرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن المداخل الممكنة التي تؤدي لحلها. يقومون بتحليل المعطيات، والعوائق والعلاقات والأهداف. كما يتأكدون من إجاباتهم للمسائل باستخدام طريقة مختلفة للحل، ودائماً ما يسألون أنفسهم "هل هذه النتيجة منطقية؟"

إجابات إضافية

21a. 33

21b. 2 غير نسبية

21c. $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

22a. 4

22b. 2 نسبية

22c. $\frac{1}{2}, 1$

23a. 49

23b. 2 نسبية

23c. $\frac{1}{6}, -1$

24a. 121

24b. 2 نسبية

24c. $1, -\frac{5}{6}$

25a. −87

25b. 2 مركب

25c. $\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6}$

26a. −40

26b. 2 مركب

26c. $\frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$

27a. 36

27b. 2 نسبية

27c. $1, -\frac{1}{5}$

28a. 0

28b. 1 نسبية

28c. 3

29a. 1

29b. 2 نسبية

29c. $-1, -\frac{4}{3}$

30a. 176

30b. 2 غير نسبية

30c. $\frac{1 \pm \sqrt{11}}{4}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–4 **حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.**

14. $x^2 + 45x = -200$
15. $4x^2 - 6 = -12x$
16. $3x^2 - 4x - 8 = -6$
17. $4x^2 - 9 = -7x - 4$
18. $5x^2 - 9 = 11x$
19. $12x^2 + 9x - 2 = -17$

20. **الغطس** يقفز المتنافسون في مسابقةٍ للغطس من منصةٍ ارتفاعها 10 أمتار إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل أن يغطسوا في بركة السباحة أسفلهم. ويمكن تقدير ارتفاع الغاطس h بالأمتار فوق المسبح بعد t ثانيةً وفقا للمعادلة المعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.
    a. حدّد المجال والمدى اللذين بهما تكون هذه الدالة منطقية.
    b. متى يصطدم الغطاس بالماء؟

مثال 5 **أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.**
a. أوجد قيمة المميّز.
b. صِف عدد الجذور ونوعها.
c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام. 21–32. انظر الهامش.

21. $2x^2 + 3x - 3 = 0$
22. $4x^2 - 6x + 2 = 0$
23. $6x^2 + 5x - 1 = 0$
24. $6x^2 - x - 5 = 0$
25. $3x^2 - 3x + 8 = 0$
26. $2x^2 + 4x + 7 = 0$
27. $-5x^2 + 4x + 1 = 0$
28. $x^2 - 6x = -9$
29. $-3x^2 - 7x + 2 = 6$
30. $-8x^2 + 5 = -4x$
31. $x^2 + 2x - 4 = -9$
32. $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

B 33. **ألعاب الفيديو** عندما كان طارق في المنزل، أحضر له صديقه خالد شريطًا للعبةٍ إلكترونية. وقف طارق عند نافذة غرفة النوم ووقف خالد تحت النافذة مباشرةً. فإذا رمى خالد شريط اللعبة إلى طارق بسرعةٍ ابتدائية تساوي 35 مترًا في الثانية، تعطى معادلة ارتفاع الشريط h بالقدم بعد t ثانيةً بالصيغة $h = -16t\ 2 + 35t + 5$.

a. إذا كان ارتفاع النافذة 25 مترًا فوق الأرض، فهل ستكون لدى طارق 0 أو 1 أو 2 من فرص التقاط شريط اللعبة؟ 0
b. إذا لم يتمكن طارق من التقاط شريط اللعبة، فمتى سيصطدم بالأرض؟ ا

34. **الاستنتاج المنطقي** يصمّم مهندسون مدنيّون مقطعًا من طريقٍ سينخفض دون مستوى سطح البحر. ويمكن تمثيل منحنى الطريق بالمعادلة $y = 0.00005x^2 - 0.06x$، حيث x المسافةُ الأفقية بالأمتار بين النقطتين اللتين يكون عندهما الطريق عند مستوى سطح البحر و y تمثل الارتفاع. يريد المهندسون وضع لافتات للتوقف في المواضع التي يتساوى فيها ارتفاع الطريق مع مستوى سطح البحر. فما المسافة الأفقية التي سيضعون عندها لافتات التوقف؟ 0 مترًا و 1200 قدم

35a. 64
35b. 2 نسبيان
35c. $0, -\frac{8}{5}$
36a. 36
36b. 2 نسبيان
36c. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

37a. 160
37b. 2 غير نسبيين
37c. $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$
38a. −3.48
38b. تخيّلي
38c. $\frac{-1.3 \pm i\sqrt{0.87}}{0.8}$

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.
a. أوجد قيمة المميّز.
b. صِف عدد الجذور ونوعها.
c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

35. $5x^2 + 8x = 0$
36. $8x^2 = -2x + 1$
37. $4x - 3 = -12x^2$
38. $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$
39. $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$
40. $-4x^2 + 12 = -6x - 8$

خيارات الفروض المنزلية المتمايزة

المستوى	الفروض	خيار اليومين	
أساسي ق.م	14-32, 43, 45, 46, 48-60	14-32 زوجي، 43، 45، 46، 48، 53-60	15-31 فردي، 49-52
جوهري ض.م	15-33 فردي، 34، 35-39 فردي، 41-43، 45، 46، 48-60	33–43, 45, 46, 48, 53-60	14-32, 49-52
متقدم أ.م	33-60		

41c. 2018؛ الإجابة النموذجية: لا؛ لن ينخفض معدّل الوفيات الناتجة عن السرطان إلى الصفر ما لم يُعثر على علاج له. ولا يمكن التنبؤ إن كان سيُعثر على علاج ومتى سيكون ذلك.

41 التدخين لقد أدى تراجع التدخين في الولايات المتحدة الأمريكية إلى انخفاض في معدل الوفيات الناتجة عن سرطان الرئة. ويمكن تقدير عدد الوفيّات من بين كل 100000 شخص y من وفقا للعلاقة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x يمثل عدد الأعوام بعد عام 2000.

العام	عدد الوفيات من بين كل 100000
2000	91.8
2002	89.7
2004	85.5
2010	60.3
2015	؟
2017	؟

a. احسب عدد الوفيّات من بين كل 100000 شخص لعامي 2015 و 2017. **1، 7.3.25**

b. استخدم القانون العام للحلّ لإيجاد x عند $y = 50$. **11.7**

c. وفقا للدالة الدالة التربيعية، متى سيساوي معدل الوفيات صفرًا من بين كل 100000؟ وهل تعتقد أن هذا التنبؤ منطقي؟ لمَ أو لمَ لا؟

42. نظرية الأعداد تحصل على المجموع S للأعداد الصحيحة المتتالية n ،... ،3 ،2 ،1 من الصيغة $S = \frac{1}{2}n(n + 1)$. كم عدد الأعداد الصحيحة المتتالية، بدءًا من 1، للوصول الى المجموع 666؟ **36**

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

43. التفكير النقدي يحدّد عبد الله وعبد العزيز عدد حلول المعادلة $3x^2 - 5x = 7$.
فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عبد الله

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

بما أن المميّز سالب، فليست هناك حلول حقيقية.

عبد العزيز

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

بما أن المميّز موجب، فهناك حلّان حقيقيان.

45a. الإجابة النموذجية: دائمًا؛ عندما يكون لـ a و c إشارتان متعاكستان، فإن إشارة ac ستكون سالبة دائمًا وستكون إشارة 4ac− دائمًا موجبة. وبما أن b^2 ستبقى موجبة دائمًا، إذا فإن $b^2 - 4ac$ تمثل جمع قيمتين موجبتين، ولن تكون سالبة على الإطلاق. وهكذا فلا يمكن أن يكون المميّز سالبًا على الإطلاق ولا يمكن أن تكون الحلول تخيلية أبدًا.

44. تحدٍّ أوجد حلول المعادلة $4k^2 - 4k + 5 = 0$ باستخدام القانون العام.

45. الاستنتاج حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم أنها ليست صحيحةً على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. في معادلةٍ تربيعيةٍ من الصيغة القياسية، إذا كان لـ a و c إشارتان مختلفتان، فستكون الحلول حقيقية.

b. إذا كان مميّز معادلةٍ تربيعيةٍ أكبر من 1، فإن الجذرين يكونان عددين حقيقيين غير نسبيين.

46. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني المقابل واذكر عدد الجذور ونوعها لكلّ مما يلي. **a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

a. $b^2 - 4ac = 0$

b. دالة تربيعية فيها $f(x)$ لا تساوي الصفر على الإطلاق.

c. دالة تربيعية فيها $f(a) = 0$ و $a \neq b$، $f(b) = 0$.

d. المميّز أقل من الصفر.

e. a و b كلاهما حل ويمكن تمثيلهما بكسرين.

47. تحدٍّ أوجد قيمة (قيم) m في المعادلة التربيعية $x^2 + x + m + 1 = 0$ بحيث يكون لها حل وحيد. **−0.75**

48. الكتابة في الرياضيات صف ثلاث طرق مختلفة لحلّ $x^2 - 2x - 15 = 0$. وما الطريقة التي تفضلها، ولماذا؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

إجابات إضافية

31a.	-16
31b.	2 مركب
31c.	$-1 \pm 2i$
32a.	-56
32b.	2 مركب
32c.	$\frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6}$

4 التقويم

أخبار الأمس اسأل الطلاب أن يكتبوا كيف ساعدهم درس سابق عن تبسيط تعابير الجذرية في فهم درس اليوم.

تدريب على الاختبار المعياري

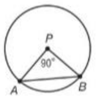
49. حدّدت شركةٌ أن ربحها الشهري P يُستنتج من العلاقة $P = -8x^2 + 165x - 100$. وفيها x سعر بيع كل وحدة من وحدات المنتج. فأي مما يلي هو التقدير الأفضل للسعر الأقصى للوحدة والذي يمكن أن تبيع به الشركةُ دون أن تخسر المال؟ **B**

A AED 10 B AED 20 C AED 30 D AED 40

50. SAT/ACT ما مجموعة الأعداد من بين ما يلي والتي يكون فيها الوسط أكبر من الوسيط؟

F {4, 5, 6, 7, 8}
G {4, 6, 6, 6, 8}
H {4, 5, 6, 7, 9}
J {3, 5, 6, 7, 8}
K {2, 6, 6, 6, 6}

51. إجابة قصيرة في الشكل أدناه، P هي مركز الدائرة التي نصف قطرها 15 سنتيمترًا. فما مساحة المثلث $\triangle APB$؟ **$112.5\ cm^2$**



52. 75% من 88 تساوي 60% من أي عدد؟ **D**

A 100 B 101 C 108 D 110

مراجعة شاملة

بسّط. (الدرس 1-5)

53. i^{26} **54.** $\sqrt{-16}$ **55.** $4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25}$

56. السلامة على الطرق السريعة يستطيع المهندسون استخدام الصيغة $d = 0.05v^2 + 1.1v$ لتقدير مسافة التوقف الصغرى d بالأمتار لسيارةٍ تسير بسرعة v كيلومترًا في الساعة. فإذا كان بإمكان سيارة التوقف بعد 20 مترًا، فما أعلى سرعة قد تكون تسير عندها عندما ضغط السائق على المكابح أول مرة؟ (الدرس 1-6) **11.8 kmph تقريبًا**

57. الجسور تُقارب الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية شكل قطعٍ مكافئ، ويمكن تمثيل القطع المكافئ بالدالة التربيعية $y = 0.00012x^2 + 6$، حيث تمثّل x المسافة من محور التماثل وتمثل y ارتفاع الكابلات. المعادلة التربيعية المرتبطة هي $0.00012x^2 + 6 = 0$. (الدرس 1-6)

a. احسب قيمة المميّز. **-0.00288**

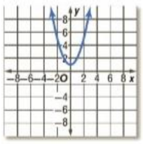
b. بم يخبرك المميّز عن الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية؟

الإجابة النموذجية: يعني ذلك أن الكابلات لا تلمس أرضية الجسر، وذلك لأن التمثيل البياني لا يقطع المحور الأفقي x ولأن الجذور تخيلية.

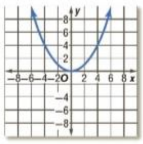
مراجعة المهارات

اكتب معادلةً لكل تمثيلٍ بياني. **58. $y = x^2 + 1$ 59. $y = 0.25x^2$**

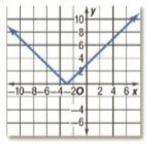
58.



59.



60.



المتابعة

بعدما استكشف الطلاب طرق حل المعادلات التربيعية.

اسأل:

- كيف تحدد الطريقة التي تستخدمها لحل معادلة تربيعية؟ نموذج للإجابة: إن كانت المعادلة تحتوي على حدود جبرية معروفة أنها سهلة التحليل، يمكن حلها باستخدام التحليل إلى العوامل. إن كانت المعادلة تحتوي على حدود جبرية أكثر تعقيدًا يمكن حلها باستخدام القانون العام، أو إكمال المربع، أو التمثيل البياني. كما يمكن أن تستخدم طريقة معينة للحل، وطريقة ثانية للتأكد من إجابتك.