1 التركيز

المحاذاة الرأسية

قبل الدرس 1–3 أوجد المجال والمدى لتابع باستخدام الرسم البياني لها.

الدرس 1–3 استخدم النهايات لتحديد اتصال تابع ما. وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة. استخدم النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

بعد الدرس 1–3 أوجد قمم وقيعان تابع ما.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اجعل الطلاب يقرأون قسم لماذا؟ من الدرس ويدرسوا الرسم البياني.

اسأل:

- ما هو قيمة صُغرى للأجور في عام 1984؟ تقريباً 3.50$.
- ما هو قيمة صُغرى للأجور في بداية عام 1996؟ تقريباً 5$

الدرس 1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

..قبل ذلك

- قمت بإيجاد المجال والنطاق للدالة باستخدام الرسم البياني لها. (الدرس 2–1)

..الآن

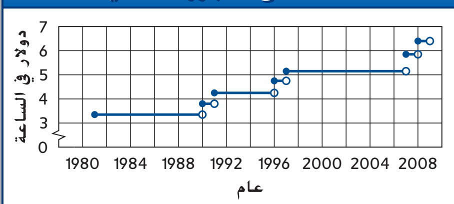
1 ستستخدم النهايات لتحديد اتصال دالة ما، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

2 ستستخدم النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

..السبب؟

- منذ بدايات الثمانينات، ارتفع الحد الأدنى الحالي للأجور عدة مرات.ويعرض الرسم البياني الحد الأدنى للأجور كدالة مع الزمن هذه التغيرات في القيمة كأنها انقطاعات في الرسم البياني، مثل النقاط التالية $x = 1990$ و $x =$ و $x = 2008$.

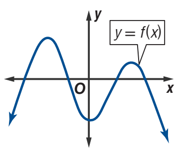
الحد الأدنى للأجور الاتحادية



المفردات الجديدة

- الدالة المتصلة (continuous function)
- النهاية (limit)
- الدالة المتقطعة (discontinuous function)
- انقطاع لا نهائي (infinite discontinuity)
- انقطاع القفزة (jump discontinuity)
- انقطاع قابل للإزالة (removable discontinuity)
- غير قابل للإزالة (nonremovable)
- انقطاع (discontinuity)
- السلوك الطرف (end behavior)

1 الاتصال الرسم البياني **لدالة متصلة** لا يوجد به انقطاعات أو فجوات أو فراغات. يمكنك تتبع الرسم البياني لدالة متصلة بدون رفع قلمك عن الرسم.



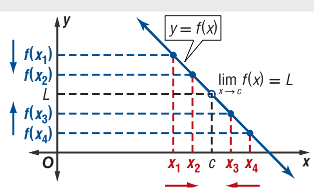
$f(x)$ is continuous for all x.

أحد شروط اتصال دالة ما $f(x)$ عند النقطة $x = c$ هو أنه يجب أن تقترب الدالة من قيمة مميزة كلما اقتربت قيم x من القيمة c من اليسار واليمين. ويعرف الاقتراب من قيمة ما بغض النظر عن الوصول إليها فعلياً **بالنهاية**.

مفهوم أساسي النهايات

الكلمات إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L بينما تصل x لقيمة c من كلا الجانبين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز $\lim_{x \to c} f(x) = L$ والتي تُقرأ كما يلي *نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من c هي L.*

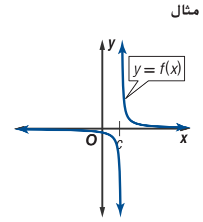


ويساعد في فهم المقصود بالدالة المتصلة من وجهة النظر الجبرية الاطلاع على الرسومات البيانية **للدوال المنقطعة**، أي الدوال غير المتصلة. وللدوال المنقطعة لعدة أنواع مختلفة.

مفهوم أساسي أنواع الانقطاع

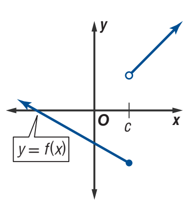
يكون للدالة **انقطاع لا نهائي** عند $x = c$ إذا كانت قيمة الدالة تزداد أو تقل بشكل لا نهائي كلما اقتربت x من قيمة c من اليمين واليسار.

مثال



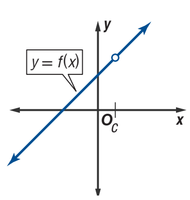
ويكون للدالة **انقطاع القفزة** عند $x = c$ إذا كانت نهايات الدالة عندما تقترب x من قيمة c من اليسار واليمين ذات قيم مختلفة.

مثال



ويكون للدالة **انقطاع قابل للإزالة** إذا كانت الدالة متصلة عند كل القيم، ما عدا فجوة عند $x = c$.

مثال



- إلام تشير الدائرة المغلقة الموجودة في الرسم البياني؟ إلام تشير الدائرة المفتوحة الموجودة في الرسم البياني؟ الدائرة المغلقة يوضح أن التابع لها نقطة نهاية متضمنة عند هذه النقطة. الدائرة المفتوحة يوضح أن التابع لها نقطة نهاية ليست متضمنة عند هذه النقطة.

1 الإتصال

المثال 1 و 2 يعرضا كيفية تحديد نقاط الإتصال والإنقطاع للدوال. **المثال الثالث** يعرض كيفية تقريب أصفار تابع على فترة محددة.

تقويم تكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطالب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد ما إذا كان التابع $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ متصلة عند $x = \frac{1}{2}$. وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

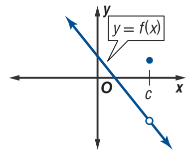
متصلة عند

$x = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$, و $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

نصيحة دراسية

النهايات لا يوجد أي ارتباط بين وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$، وبين وجود قيمة لنهاية $f(x)$ عند اقتراب قيمة x من c.

لاحظ أنه في الرسوم البيانية للدوال ذات الانقطاع القابل للإزالة ستجد أن نهاية $f(x)$ عند النقطة c موجودة، ولكن إما قيمة الدالة عند النقطة c غير محددة أو — كما هو موضح بالرسم المجاور — قيمة الدالة $f(c)$ ليست كقيمة النهاية عند نفس النقطة c.



ويطلق على الانقطاع المتنقل واللا نهائي **الانقطاع غير القابل للإزالة**. حيث لا يمكن إزالة الانقطاع غير القابل للإزالة عن طريق إعادة تعريف الدالة عند هذه النقطة، إما لأن الدالة تصل لقيمتين مختلفتين من اليمين واليسار ، أو لا تصل لقيمة محددة على الإطلاق. ولكنها تزداد أو تقل بشكل لا نهائي.

تلك الملاحظات تؤدي إلى اختبار الاتصال التالي لدالة ما.

ملخص المفهوم اختبار الاتصال

تعتبر الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا كانت تحقق الشروط التالية.

- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة c. أي أن $f(c)$ ذات قيمة محددة.
- تصل $f(x)$ لنفس القيمة من كلا جانبي c. أي أنها $\lim_{x\to c} f(x)$ لها قيمة محددة.
- القيمة التي تصل إليها $f(x)$ من كل جانب حول c هي $f(c)$. أي أن نها $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

مثال 1 تحديد اتصال نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند النقطة $x = 2$. وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

تحقق من الشروط الثلاثة في اختبار الاتصال.

1. هل الدالة $f(2)$ لها قيمة؟

بما أن $f(2) =$ ، فإن الدالة معرفة ولها قيمة محددة عند $x = 2$.

2. هل $\lim_{x\to 2} f(x)$ ذات قيمة محددة؟

ضع جدول يعرض قيم $f(x)$ عندما تقترب قيمة x من 2 من الاتجاهين.

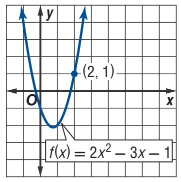
x تقترب من 2 ← ← x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

وتظهر المخرجات أن قيمة x تقترب من 2 من اليسار واليمين، وكذلك تقترب قيمة $f(x)$ من 1. ولذا نقدر أن قيمة $\lim_{x\to 2} f(x) =$.

3. هل $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$؟

بما أن قيمة $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x - 1)$ مقدرة بـ 1، وبما أن $f(2) =$ ، نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x = 2$. ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.1

تمارين موجهة

حدد ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة عند $x = 0$ أم لا . وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

1A. $f(x) = x^3$

1B. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

1A. متصلة عند $x = 0$؛ $f(0) = 0$، $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$، و $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

1B. غير متصلة عند $x = 0$ ، حيث تصل قيمة $f(x)$ إلى $-\infty$ عندما تقترب قيمة x من الصفر من اليسار وتصل إلى صفر عندما تقترب قيمة x من الصفر من اليمين.

G12 GEN TE CH01.indb 25 8/22/2016 4:27:52 PM

إذا لم يتحقق شرط واحد فقط من الشروط، تصبح الدالة منقطعة عند $x = c$. وبفحص الدالة يمكن تحديد نوع الانقطاع عند هذه النقطة.

مثال 2 تحديد انقطاع نقطة

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، حدد نوع الانقطاع، سواء كان لا نهائي أو متنقل أو قابل للإزالة.

.a $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{if } x>-3\\ 2-x & \text{if } x\le -3\end{cases}$ ؛ **عند** $x = -3$

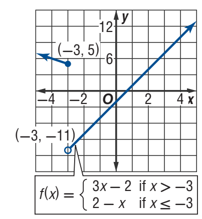
.1 بما أن $f(-3) = 5$، فإن $f(-3)$ موجودة.

.2 تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(-3)$.

x تقترب من −3 ← | → x تقترب من −3

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
f(x)	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	10.7

وتظهر المخرجات أن قيمة $f(x)$ تقترب من 5 كلما اقتربت x من -3 من اليسار، وتقترب من كلما اقتربت $f(x)$ من -3 من اليمين. ولأن القيمتين ليستا متطابقتين، فإن $\lim_{x\to-3} f(x)$ ليست موجودة. ولهذا فإن $f(x)$ منقطعة عند $x = -3$. ولأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عند $x = -3$، فإن $f(x)$ دالة ذات انقِطاعٌ قافِز عند $x = -3$. ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.2

.b $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ ؛ **عند** $x = -3$ **و** $x = 3$

.1 بما أن $f(-3)=\frac{0}{0}$ و$f(3)=\frac{6}{0}$، وكلاهما غير معرف، إذاً $f(-3)$ و $f(3)$ غير موجودين. ولذا فإن الدالة $f(x)$ منقطعة عند $x = -3$ وعند $x = 3$.

.2 تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(-3)$.

x تقترب من −3 ← | → x تقترب من −3

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
f(x)	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

تظهر المخرجات أن $f(x)$ تقترب من نهاية قريبة من -0.167 كلما اقتربت x من -3 من كلا الجانبين، لذا فإن $\lim_{x\to-3} f(x) \approx -0.167$ أو $-\frac{1}{6}$.

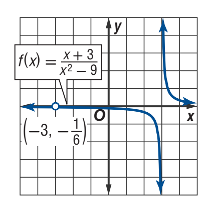
تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(3)$.

x تقترب من 3 ← | → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
f(x)	−10	−100	−1000		1000	100	10

تظهر المخرجات أن قيمة $f(x)$ تزداد في الاتجاه السالب كلما اقتربت قيمة x من 3 من اليسار. وكلما اقتربت قيمة x من 3 من اليمين، تزداد قيمة $f(x)$ في الاتجاه الموجب. لذا فإنه لا توجد قيمة لنهاية $\lim_{x\to3} f(x)$

.3 ولأن $\lim_{x\to-3} f(x)$ لها قيمة محددة ولكن $f(-3)$ غير محددة القيمة، تعتبر الدالة $f(x)$ ذات انقطاع قابل للإزالة عند $x = -3$. وبما أن $f(x)$ تقل بدون أي قيود كلما اقتربت x من 3 من اليسار وتزداد بدون أي قيود كلما اقتربت x من 3 من اليمين، تعتبر الدالة $f(x)$ ذات انقطاع لا نهائي عند $x = 3$. ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.3

تمارين موجهة

.2A $f(x)$؛ عند $x = 0$

.2B $f(x) = \begin{cases}5x+4 & \text{if } x>2\\ 2-x & \text{if } x\le 2\end{cases}$؛ عند $x = 2$

.2A منقطعة، لأن $f(0)$ غير محددة، و $f(x)$ تتصاعد بشكل لا نهائي كلما اقتربت x من الصفر من اليسار واليمين، لذا فإن الدالة $f(x)$ ذات انقطاع لا نهائي عند $x = 0$.

.2B منقطعة، لأن $f(x)$ تقترب من الصفر كلما اقتربت x من 2 من اليسار و من 14 كلما اقتربت x من 2 من اليمين، لذا فإن الدالة $f(x)$ ذات انقطاع القفزة عند $x = 2$.

مثال إضافي

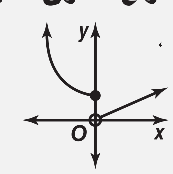
1 حدد ما إذا كانت كل تابع متصل عند التقويم x المعطاة. وضح مستخدماً اختبار الاتصال. وإذا كان التابع منقطع, حدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *قافز* أو *قابل للإزالة*.

.A $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; at $x = 1$ منقطعة، لأن $f(1)$ غير محددة و كذلك تنقص قيمة $f(x)$ بلا نهاية كلما اقتربت قيمة x من 1 من اليسار وتزداد بلا نهاية كلما اقتربت قيمة x من 1 من اليمين، **لذا فالتابع** $f(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = 1$.

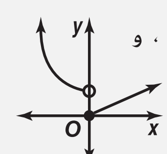
.B التابع $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$; at $x = 2$ منقطعة لأن $f(2)$ غير محددة وتقترب قيمة $f(x)$ من 0.25 كلما اقتربت قيمة x من 2 من اليمين واليسار، إذن التابع $f(x)$ ذو انقِطاعٌ قابلٌ للإزالة عند $x = 2$.

التركيز على المحتوى الرياضي

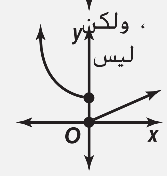
الاتصال يتضمن الانقِطاعٌ القافِز أنواع أخرى مثل



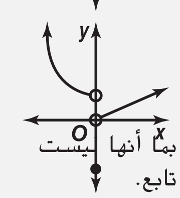
،



، و



، ولكن ليس



بما أنها ليست تابع.

وبالمثل، إذا كان الانقطاع قابل للإزالة، يمكن أن تعرف التابع عند ههذ النقطة، أو قد لا تعرف.

مثال إضافي

3 حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل تابع في الفترة المعطاة.

a. $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}; [-2, 2]$
-1 و $0, 1$ و 2

b. $f(x) = x^3 + 2x + 5; [-2, 2]$
-2 و -1

نصائح للمعلمين الجدد

تغيرات الإشارة وضح للطلبة أنه لا يوجد تغيير في الإشارة في $f(x) = (x-1)^2$، ولكن يوجد صفر حقيقي مضاعف مرتين عند $x = 1$.

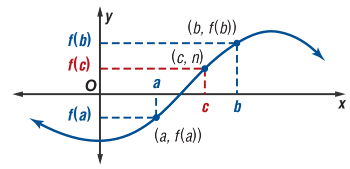
احذر!

النوافذ يظهر في نافذة العرض القياسية تقاطع واحد فقط في المثال الرابع. استخدم خيار Zoom In أو ZDecimal لضبط نافذة العرض لتنظر عن كثب للأصفار.

إذا كانت دالة ما متصلة، يمكنك تقريب موقع أصفارها باستخدام نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها نظرية تقريب أصفار الدالة.

مفهوم أساسي نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و كانت $a < b$ وهناك قيمة n حيث تقع n بين $f(a)$ و ، إذاً هناك رقم c حيث $a < c < b$ و $f(c) = n$.



النتيجة: تقريب أصفار الدالة إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت قيم كلاً من $f(a)$ و $f(b)$ ذواتا إشارات متضادة، إذاً فهناك على الأقل قيمة واحدة على الأقل c، حيث إن $a < c < b$ و . أي أن صفر الدالة يقع بين a و b.

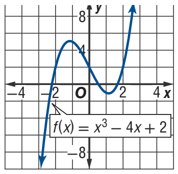
مثال 3 الأصفار التقريبية

حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المحددة.

a. $f(x) = x^3 - 4x + 2$؛ $[-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

بما أن قيمة $f(-3)$ سالبة وقيمة $f(-2)$ موجبة، وطبقاً لنظرية تقريب أصفار الدالة. فإن الدالة $f(x)$ لها صفر يقع بين -3 و -2.
وقيمة $f(x)$ تتغير أيضًا إشارتها في $\leq x \leq 0$ و $\leq x \leq 1$.
وهذا يدل على وجود الأصفار الحقيقية في كل من الفترتين.

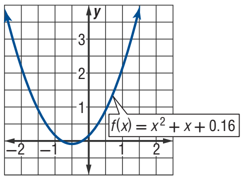


ويدعم الشكل المعروض للدالة $f(x)$ إلى اليمين الاستنتاج بأن هناك أصفار حقيقية بين -3 و -2، وبين 0 و ، وبين و2.

b. $f(x) = x^2 + x + 0.16$؛ $[-3, 3]$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	

قيم الدالة $f(x)$ لا تتغير إشارتها لقيم x المستخدمة.
وعلى الرغم من ذلك، عند اقتراب قيم x من -1 من اليسار فإن قيم $f(x)$ تتنازل، ثم تبدأ في التصاعد عندما تصل عند $x = 0$. لذا فيمكن وجود أصفار حقيقية بين الرقمين -1 و 0.
مثِّل الدالة بالرسم البياني للتأكد.



يتقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور الأفقي x مرتين في الفترة $[-1, \ ]$. لذا فيوجد بالفعل أصفار حقيقية بين و 0.

نصيحة للدراسة

تقريب الأصفار عندما لا تتغير إشارة القيم على الرغم من أن تغيير إشارة القيم يشير إلى موقع صفر حقيقي، فإن عدم تغيير إشارة القيم لا يشير إلى عدم وجود أصفار حقيقية في هذه الفترة. وتعد أفضل طريقة للتحقق هي تتبع الرسم البياني للدالة.

تمارين موجهة

3A. $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$؛ $[-3, 4]$ -3 و -2، 2 و 3

3B. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$؛ $[-5, 0]$ -1 و 0

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الآلة الحاسبة راسمة الدوال اخبر الطلاب أنه يمكنهم إيجاد أصفار تابع ما عن طريق اختيار zero من قائمة CALC . سيسألهم التطبيق عن الحد الأيسر والذي يكون أي قيمة للمتغير x أقل من الصفر، والحد الأيمن، والذي يكون أي قيمة للمتغير x أعلى من الصفر. اشرح أن الآلة الحاسبة تستخدم مبدأ تقريب أصفار التابع لتحديد إذا كان هناك تغير في الإشارة، وبالتالي وجود صفر بين التقويم التابع المقابلة.

G12 GEN TE CH01.indb 27 8/22/2016 4:28:02 PM

2 السلوك الطرفي

يصف **السلوك الطرفي** الدالة سلوكها عند أيًا من طرفي الرسم البياني لها. أي أن السلوك الطرفي هو ما يحدث لقيمة الدالة $f(x)$ كلما ازدادت قيمة x أو نقصت بدون أي حدود – أي ازدادت أو نقصت حتى أصبحت سالبة أكثر وأكثر. ولوصف السلوك الطرفي لرسم بياني ما، يمكنك استخدام مبدأ النهاية.

قراءة الرياضيات

النهايات يُقرأ التعبير $\lim_{x\to\infty} f(x)$ كما يلي: نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من اللانهاية الموجبة. التعبير $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ يُقرأ كما يلي: نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من اللانهاية السالبة.

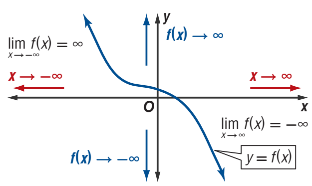
سلوك الطرف الأيسر

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

سلوك الطرف الأيمن

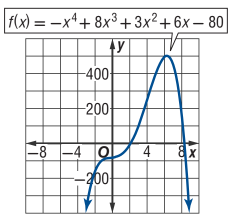
$\lim_{x\to\infty} f(x)$

أحد احتمالات السلوك الطرفي للرسم البياني لدالة ما لقيمة $f(x)$ هي أن تزداد أو تنقص بدون أي حد أو قيد. ويوصف هذا السلوك الطرفي بأن $f(x)$ تصل إلى اللانهاية الموجبة أو السالبة.



مثال 4 الرسوم التي تصل إلى اللانهاية

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام.



التحليل البياني

يتضح في الرسم البياني للدالة $f(x)$ أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

الإثبات الرقمي

أنشئ جدول بقيم الدالة كلما ازدادت قيمة $|x|$. أي تحقق من قيم الدالة $f(x)$ كلما ازدادت قيمة x جدًا أو نقصت بالسالب جدًا.

تقترب x من $-\infty$ ← → تقترب x من ∞

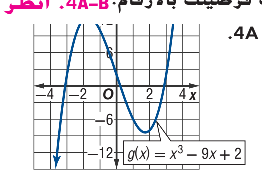
x	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	-1×10^{16}	-1×10^{12}	-1×10^{8}	-80	-1×10^{8}	-1×10^{12}	-1×10^{16}

تظهر المخرجات أن كلما اقتربت قيمة x من $-\infty$. تقترب $f(x)$ من $-\infty$. وكلما اقتربت قيمة x من ∞. تقترب $f(x)$ من $-\infty$ أيضًا. وهذا يثبت الفرضية السابقة.

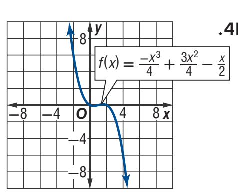
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام. 4A-B. انظر الهامش.

.4A



.4B



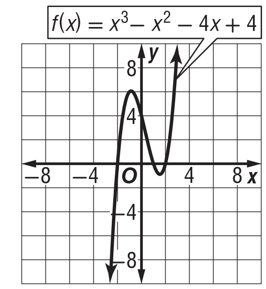
هناك دوال تقترب من قيمة محددة – ولكن لا تصل إليها – كلما ازدادت قيمة $|x|$. على العكس من الدوال – مثل $f(x)$ – التي تقترب من ∞ أو $-\infty$.

2 تطبيق السلوك الطرفي

المثال الرابع يعرض كيفية وصف السلوك الطرفي عندما تقترب تابع من اللانهاية. **المثال الخامس والسادس** يعرض كيفية وصف السلوك الطرفي عندما تقترب تابع من قيمة محددة.

مثال إضافي

4 استخدم الرسم البياني للتابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ لوصف سلوكها الطرفي. اثبت فرضيتك بالأرقام.



من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty,\ f(x) \to -\infty$ وكلما $x \to \infty,\ f(x) \to \infty$.

x	$f(x)$
−10,000	$-1 \cdot 10^{12}$
−1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	4
1000	$1 \cdot 10^{9}$
10,000	$1 \cdot 10^{12}$

تمرين محلول

.4A من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty,\ g(x) \to -\infty$ و كلما $x \to \infty,\ g(x) \to -\infty$.

x	$g(x)$
−10,000	$-1 \cdot 10^{12}$
−1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	2
1000	$1 \cdot 10^{9}$
10,000	$1 \cdot 10^{12}$

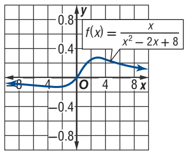
.4B من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty,\ f(x) \to \infty$ وكلما $x \to \infty,\ f(x) \to -\infty$.

x	$f(x)$
−10,000	$2.5 \cdot 10^{11}$
−1000	$2.5 \cdot 10^{8}$
0	0
1000	$-2.5 \cdot 10^{8}$
10,000	$-2.5 \cdot 10^{11}$

OL AL Differentiated Instruction

المتعلمون المنطقيون اطلب من الطلاب تطوير أو تذكر قواعد عامة لرسم الدوال بيانياً. اجعل الطلاب تختبر قواعدهم عن طريق رسم الدوال بدون آلة الرسم، ثم مرة أخرى باستخدام آلة الرسم لاختبار افتراضاتهم. اطلب منهم الأخذ في الاعتبار ما يحدد الخط المقارب الرأسي و الأفقي.

مثال 5 الرسوم التي تقترب من قيمة محددة



استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوكها الطرفي. أثبت فرضيتك بالأرقام.

التحليل البياني

يتضح في الرسم البياني للدالة $f(x)$ أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

الإثبات الرقمي

تقترب x من $-\infty$ ← | → تقترب x من ∞

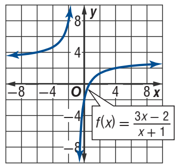
x	−10,000	−1000	−100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	−0.001	−0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

تظهر المخرجات أن كلما اقتربت قيمة x من $-\infty$، تقترب $f(x)$ من 0. وكلما اقتربت قيمة x من ∞، تقترب $f(x)$ من 0 أيضاً. وهذا يثبت الفرضية.

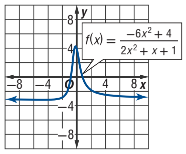
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام. **5A–B. انظر الهامش.**

5A.

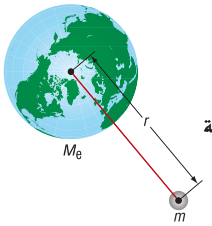


5B.



تساعدك معرفة السلوك الطرفي لدالة ما في حل مشاكل في الحياة اليومية.

مثال واقعي 6 تطبيق السلوك الطرفي



الفيزياء تحسب طاقة الجذب الكامنة لجسم ما بالمعادلة الآتية $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ حيث إن G هي ثابت نيوتن للجاذبية، و m هي كتلة الجسم، و M هي كتلة الكرة الأرضية، و r هي المسافة بين الجسم ومركز الكرة الأرضية كما هو موضح. ماذا يحدث لطاقة الجذب الكامنة للجسم كلما ابتعد عن الكرة الأرضية أكثر وأكثر؟

إجابة هذا السؤال هي وصف السلوك الطرفي للدالة $U(r)$ للقيم الكبيرة من المتغير r. أي أنه مطلوب تحديد قيمة $\lim_{r\to\infty} U(r)$. وبما أن G, m, M_e قيم ثابتة، إذن حاصل ضرب GmM_e قيمة ثابتة أيضًا. كلما ازدادت قيمة r تقترب قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ للصفر. لذا فإن $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$. وبالتالي، كلما تحرك جسم بعيداً عن الأرض تقترب طاقة الجذب الكامنة به من الصفر.

تمارين موجهة

6. **الفيزياء** الضغط الديناميكي هو الضغط المتولد عن سرعة تحرك السائل، وتحسب بالمعادلة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث إن ρ هي كثافة السائل، وv هي سرعة تحرك السائل. ماذا سيحدث للضغط الديناميكي للسائل إذا استمرت سرعة السائل في الازدياد؟ **سيصل الضغط الديناميكي إلى ∞.**

الربط بالحياة الواقعية

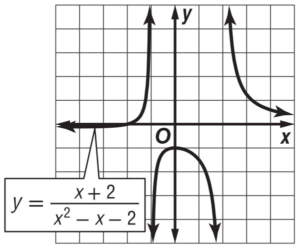
تستخدم صيغة طاقة الجذب الكامنة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لحساب السرعة اللازمة للهروب من جاذبية الكرة الأرضية، وهي 25,000 ميل في الساعة.

المصدر: The Mechanical Universe

29

أمثلة إضافية

5 استخدم الرسم البياني للتابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$ لوصف سلوكها الطرفي. اثبت فرضيتك بالأرقام.



من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to 0$ و كلما $x \to \infty, f(x) \to 0$.

x	$f(x)$
−10,000	$-1 \cdot 10^{-6}$
−1000	$-1 \cdot 10^{-5}$
0	−1
1000	$1 \cdot 10^{-3}$
10,000	$1 \cdot 10^{-4}$

6 **الفيزياء** تابع الطاقة التناظرية هي $E = \frac{X^2+Y^2}{2}$. إذا ثُبتت قيمة Y. ماذا سيحدث لقيمة الطاقة التناظرية عندما تقترب قيمة X من $-\infty$، $\lim_{x\to-\infty} E = \infty$

تمرين محلول

5a. من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to 3$ و كلما $x \to \infty$، $f(x) \to 3$.

x	$f(x)$
−10,000	3.0005
−1000	3.005
0	−2
1000	2.995
10,000	2.9995

5b. من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to -3$ و كلما $x \to \infty$، $f(x) \to -3$.

x	$f(x)$
−10,000	−3.0001
−1000	−3.001
0	4
1000	−2.998
10,000	−2.9998

تعليم متمايز AL

المتعلمون البصريون أو الحسيون اجعل الطلاب يعملون في مجموعات لإنشاء شبكة على ورقة كبيرة. اجعلهم يضعوا علامات على المحاور بدءاً من 50- إلى 50. اطلب منهم اختيار تابع منقطعة من الدرس، وارسم النقاط عند كل خمس علامات على المحور الأفقي x. ثم ليختاروا تابع ثانية، سلوكها الطرفي ذو نهاية محددة، وارسم مجموعة ثانية من النقاط على نفس الشبكة. ثم اجعلهم يشرحوا الانقِطاعَ و السلوك الطرفي على رسمهم الكبير.

3 تمرين

تقويم تكويني

استخدم التمارين من 1–41 لتتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول بالأسفل لتضع تقييمك للطلبة.

إجابات إضافية

.1 متصلة ; $f(-5) = \sqrt{21}$ أو حوالي 4.58, $\lim\limits_{x \to -5} f(x) \approx 4.58$, و $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = f(-5)$.

.2 متصلة ; $f(8) = \sqrt{13}$ أو حوالي 3.61, $\lim\limits_{x \to 8} f(x) \approx 3.61$, و $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = f(8)$..

3– منقطعة عند $x = -6; h(-6)$ غير معرفة و $\lim\limits_{x \to -6} 6(x) =$, بالتالي $h(x)$ ذات انقطاع قابلٌ للإزالة عند $x = -6$. متصلة عند $x = 6$. $h(6) = 0$, $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = 0$, و $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = 0$, and $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = h(6)$.

.4 منقطعة عند $(x = -5; h(-5$ غير معرفة و $\lim\limits_{x \to -5} h(x) = -10$, so $h(x)$ ذات انقطاع قابلٌ للإزالة عند $x = -5$. متصلة عند $x = 5$. $h(5) = 0$, $\lim\limits_{x \to 5} h(x) = 0$, and $\lim\limits_{x \to 5} h(x) = h(5)$.

5– منقطعة; $g(1)$ غير معرفة و $g(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت قيمة x من 1 من جهة اليسار و من ∞ كلما اقتربت قيمة x من 1 من جهة اليمين ، لذا فإن التابع $g(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = 1$.

.6 منقطعة عند $(x = -2; g(-2$ غير معرفة و $g(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت قيمة x من -2 من جهة اليسار و من ∞ كلما اقتربت قيمة x من -2 من جهة اليمين، لذا فإن التابع $g(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = -2$. متصلة عند $x = 2$; $g(2) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$, and $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$

التمارين

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، فحدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*. (المثالين 1 و 2) **1–6. انظر الهامش.**

.1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$؛ عند $x = -5$

.2 $f(x) = \sqrt{x + 5}$؛ عند $x = 8$

.3 $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$؛ عند $x = -6$ و $x = 6$

.4 $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$؛ عند $x = -5$ و $x = 5$

.5 $g(x)$؛ عند $x =$

.6 $g(x) = \frac{2 - x}{2 + x}$؛ عند $x = -2$ و $x = 2$

.7 $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$؛ عند $x =$ و $x = 4$

.8 $h(x) = \frac{x(x - 6)}{x^3}$؛ عند $x = 0$ و $x = 6$

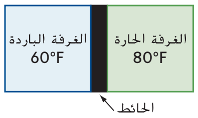
.9 $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{if } x \le -6 \\ -x + 2 & \text{if } x > -6 \end{cases}$ عند $x = -6$

.10 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if } x > -2 \\ x - 5 & \text{if } x \le -2 \end{cases}$؛ عند $x = -2$

7–10. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

11 **الفيزياء** يفصل حائط بين غرفتين، لكل منهما درجة حرارة مختلفة. يُمثل انتقال الحرارة (يقاس بالواط) بين الغرفتين بالمعادلة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث تمثل w سُمك الحائط بالمتر. (المثالين 1 و 2)

a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.



a. حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$ أم لا . علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، حدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*.

c. ارسم الدالة لتتأكد من استنتاجك في النقطة **b**.

12a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

12. **الكيمياء** يجب تخفيف أي محلول قبل استخدامه في تجربة ما. عند إضافة 4 مول من محلول NaCl لمحلول تركيزه 10 مول، سيقل تركيز المحلول. يمكن تمثيل تركيز المحلول C بالمعادلة التالية $C(x) = \frac{500 + 4x}{50 + x}$، حيث تكون x هي عدد اللترات في المحلول المضاف ذو التركيز 4 مول. (المثالين 1 و 2)

a. حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 10$ أم لا . علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، فحدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*، و صِف تأثير أي نوع من الانقطاع على تركيز المحلول، إن وجد.

c. ارسم الدالة لتتأكد من استنتاجك في النقطة **b**.

حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المعطاة. (مثال 3)

.13 $f(x) = x^3 - x^2 - 3; [-2, 4]$ **1 و 2**

.14 $g(x) = -x^3 + 6x + 2; [-4, 4]$ **−3 و −2 ، −1 و 0، 2 و 3**

.15 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3; [-3, 3]$ **−1 و 0، 1 و 2**

.16 $h(x) = -x^4 + 4x^3 - 5x - 6; [3, 5]$ **3 و 4**

.17 $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 2x + 2; [-2, 4]$ **−1 و 0، 0 و 1، 2 و 3**

.18 $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 1}; [-4, 3]$ **−4 و −3، 0 و 1**

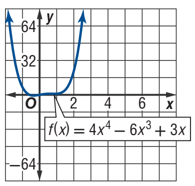
.19 $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}; [-2, 4]$ **لا توجد أصفار في تلك الفترة**

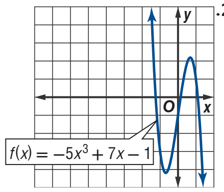
.20 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6; [3, 8]$ **6 و 7**

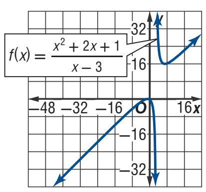
.21 $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5; [0, 5]$ **2 و 3**

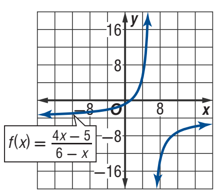
22–29. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

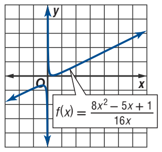
استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. اثبت فرضيتك بالأرقام. (المثالين 4 و 5)

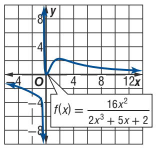
.22


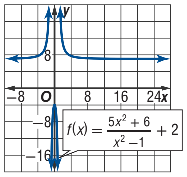
.23


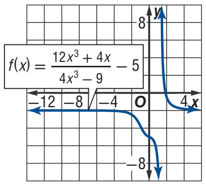
.24


.25


.26


.27


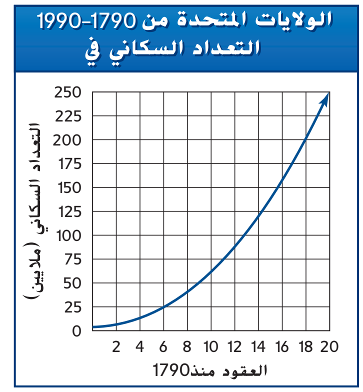
.28


.29


Differentiated Homework Options AL BL OL

المستوى	التقييم	خيار اليومين	
AL مستوى المعالجة	1–41, 58–60, 62–83	1–41 odd, 80–82	2–40 زوجي, 58, 60–, 62–79
OL في المستوى	1–43 فردي, 44, 45–49, 50, 51, 53 فردي, 55–60, 62–83	1–41, 80–83	42–60, 62–79
BL المستوى المتقدم	42–83		

30. التعداد السكاني يمكن تمثيل التعداد السكاني في الولايات المتحدة بين 1790 و 1990 بالمعادلة التالية $p(x) = 0.0057x^3 + 0.4895x^2 + 0.3236x + 3.8431$، حيث تمثل x عدد العقود التالية لعام 1790. استخدم السلوك الطرفي للرسم البياني لوصف اتجاه تغير التعداد السكاني. أثبت فرضيتك بالأرقام. هل يبدو هذا الاتجاه منطقيًا؟ اشرح استدلالك. (مثال 4) **انظر الهامش.**



31. الكيمياء يستخدم العامل المحفز لزيادة معدل التفاعل الكيميائي. ويحسب معدل التفاعل R — سرعة حدوث التفاعل الكيميائي — بالمعادلة التالية $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x هي تركيز المحلول المذاب بالميللي جرام لكل لتر من المحلول. (مثال 5) **انظر الهامش.**

a. ارسم الدالة باستخدام الآلة الحاسبة راسمة الدوال.

b. ماذا يمثل السلوك الطرفي للرسم البياني في هذه التجربة؟ أثبت فرضيتك بالأرقام.

32. قطار الموت تحسب سرعة قطار الموت بعد هبوطه من ارتفاع A إلى ارتفاع B بالمعادلة $f(h_A) = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$ ، حيث يمثل h_A ارتفاع النقطة A، و h_B ارتفاع النقطة B،و g عجلة الجاذبية. ماذا سيحدث للدالة $f(h_A)$ كلما نقصت h_B في اتجاه الصفر 0؟ (مثال 6) **انظر الهامش.**

استخدم الاستدلال المنطقي لتحديد السلوك الطرفي أو النهايات للدوال الآتية كلما اقتربت x من اللا نهاية. اشرح استدلالك. (مثال 6) **33–40. انظر الهامش.**

33. $q(x) = -\frac{24}{x}$

34. $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

35. $p(x) = \frac{x+1}{x-2}$

36. $m(x) = \frac{4 + x}{2x + 6}$

37. $c(x) = \frac{5x^2}{x^3 + 2x + 1}$

38. $k(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{11x}$

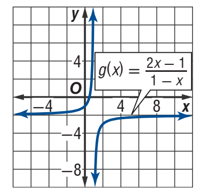
39. $h(x) = 2x^5 + 7x^3 + 5$

40. $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

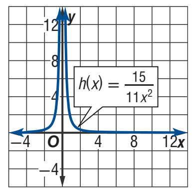
41. الفيزياء تُحسب الطاقة الحركية لجسم متحرك بالمعادلة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$، حيث تمثل p كمية التحرك، وتمثل m كتلة الجسم. إذا أُضيفت الرمال لعربة قطار متحركة، ماذا سيحدث كلما ازدادت m؟ (مثال 6) **انظر الهامش.**

استخدم كل رسم بياني لتحديد قيم x التي تنقطع عندها كل دالة. وحدد نوع الانقطاع. ثم استخدم الرسم البياني لوصف السلوك الطرفي. وبرر إجاباتك.
42–43. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

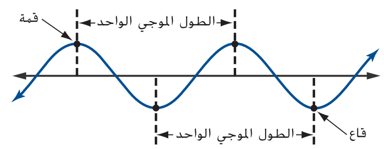
42.



43



44. الفيزياء الطول الموجي لموجة دورية هو المسافة بين نقطتين متناظرتين متتابعتين على الموجة، مثل قمتين أو قاعين.



ويُحسب التردد f، أو عدد القمم التي تمر بنقطة ما خلال فترة زمنية محددة عن طريق المعادلة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$، حيث تكون c هي سرعة الضوء أو $2.99 \cdot 10^8$ متر في الثانية.
a–b.انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

a. ارسم الدالة باستخدام الآلة الحاسبة راسمة الدوال.

b. استخدم الرسم البياني لوصف السلوك الطرفي للدالة. أثبت فرضيتك بالأرقام.

c. هل الدالة متصلة؟ إذا لم تكن متصلة، حدد نقاط عدم الاتصال ونوعها.
كلا، يوجد انقطاع لا نهائي عند $\lambda = 0$.

الآلة الحاسبة راسمة الدوال ارسم الدوال الآتية وحدد ما إذا كانت متصلة أم لا. إذا كانت منقطعة، فحدد نقاط الانقطاع ونوعها. ثم صف السلوك الطرفي وحدد مواقع أي الأصفار.
45–49. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

45. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

46. $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 5x^2 - 18x + 72}$

47. $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

48. $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 29x - 24}{x^2 - 2x - 15}$

49. $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

احذر!

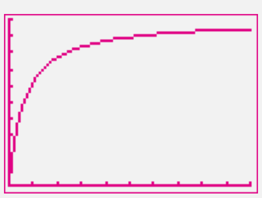
خطأ شائع في التمارين 49–45. قد ينسى الطلاب استخدام الهلالين الفاصلين حول كل كثيرة حدود، عند إدخال الدوال إلى الآلة الحاسبة. ذكرهم أن الهلالين الفاصلين ضروريان لتتمكن الآلة الحاسبة من رسم التابع بشكل سليم.

إجابات إضافية

30– يظهر من الرسم البياني، أنه كلما ازداد عدد العقود منذ عام 1790 بدون أي حد، يزداد التعداد السكاني بدون أي حد. هذا التوجه لا يبدو منطقياً، لأنه لا يوجد أي طريقة لضمان أن تعداد الولايات المتحدة سيزداد بلا حد في المستقبل.

x	0	العاشر	100	1000	10,000
$f(x)$	3.8	61.7	$1.1 \cdot 10^4$	$6.2 \cdot 10^6$	$5.8 \cdot 10^9$

.31a



[0, 200] scl: 20 by [0, 0.5] scl: 0.05

.31b إجابة نموذجية: يشير السلوك الطرفي للرسم البياني أنه كلما ازداد تركيز العامل الحفاز، يقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5.

x	0	العاشر	100	1000	10,000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

.32 إجابة نموذجية: كلما قل الإرتفاع h_B تقترب السرعة عند النقطة B من $\sqrt{2gh_A}$.

33– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, سيقل الكسر وستصل قيمة $q(x)$, للصفر .

34– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, سيقل الكسر وستصل قيمة $f(x)$, للصفر .

35– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, سيقترب الكسر من $\frac{x}{x}$ وستقترب قيمة $q(x)$, إلى 1.

.36 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, سيقترب الكسر من $\frac{x}{2x}$, وستقترب قيمة $m(x)$ من $\frac{1}{2}$.

37– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, سيقل الكسر وستصل قيمة $c(x)$, للصفر .

.38 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, ستزداد قيمة البسط جداً نسبة إلى المقام، وبالتالي ستقترب قيمة $k(x)$ من ∞.

.39 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, ستزداد قيمة $h(x)$ بلا حد وستصل إلى ∞.

.40 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$, ستزداد قيمة $g(x)$ بلا حد وستصل إلى ∞.

.41 إجابة نموذجية: كلما استمرت كتلة عربة القطار في الازدياد، ستقترب الطاقة الحركية لعربة القطار من الصفر.

إجابات إضافية

58. قابل للإزالة ; $f(0)$ غير معرفة، و $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

59– لا نهائي ; $f(0)$ غير معرفة، و $f(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت x من الصفر من اليسار، وتقترب من ∞ كلما اقتربت x من الصفر من اليمين.

50. **المركبات** عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل A في الولايات المتحدة، بين عامي 1995 و 2004 يمكن تمثيله بالمعادلة $f(t) = 2044t^2 - 3388t + 206{,}808$، حيث تمثل t السنة، فحين تكون $t = 5$ فهي تكافئ عام 1995.

a. ارسم الدالة. **انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

b. كم كان عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل في الولايات المتحدة تقريباً في عام 1998؟ **310,520 مركبة**

c. كم سيصبح عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل مع مرور الزمن، طبقاً لهذه المعادلة؟ هل تظن أن هذه المعادلة تصلح لما بعد عام 2004؟ اشرح. **انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

الآلة الحاسبة راسمة الدوال ارسم الدوال الآتية، وصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام، وارسم جزء مناسب من كل رسم بياني.

51–54. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

51. $f(x) = -x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 4$

52. $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

53. $f(x) =$

54. $g(x) = \frac{8x - 24x^3}{14 + 2x^3}$

55a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

55. **إدارة الأعمال** يؤسس جبريل لشركة صغيرة في مجال تصميم وطباعة وبيع القمصان. تكلفة إنتاج كل قميص $3. استثمر في البداية $4000 لشراء طابعة وبعض الاحتياجات الأساسية.

a. اكتب دالة تمثل متوسط التكلفة لكل قميص، كدالة لعدد القمصان المباعة n.

b. استخدم الآلة الحاسبة راسمة الدوال لرسم الدالة.

c. ما هي القيمة التي ستقترب منها متوسط تكلفة القميص، عند استمرار زيادة القمصان المباعة؟

56. **التمثيل المتعدد** ستتعامل في هذه المسألة مع النهايات. انظر في الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$. حيث تكون a و c أرقام صحيحة ليست صفرية، و b و d أرقام صحيحة.

a. **مُجدوَل** افترض أن $c =$. واختر 3 مجموعات من القيم للمتغيرات a, b, d. اكتب الدالة مع كل مجموعة من القيم. انسخ وكمل الجدول بالأسفل.

a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

$c = 1$				
a	b	d	$\lim_{x \to \infty} f(x)$	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

b. **مُجدوَل** اختر 3 مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير: مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، والأخيرة فيها $a = c$. اكتب كل دالة، وأنشئ جدول كما فعلت في النقطة **a**.

c. **تحليلياً** ضع فرضية حول نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$. كلما اقتربت x من اللا نهاية والسالبة.

57. **الآلة الحاسبة راسمة الدوال** ارسم عدة دوال مختلفة من الصيغة $f(x) = x^n + ax^{n-1} +$. حيث n, a, b أرقام صحيحة غير سالبة.

a. ضع فرضية حول السلوك الطرفي للدالة عندما تكون قيمة n موجبة وزوجية. استخدم الرسم البياني لدعم فرضيتك.

b. ضع فرضية حول السلوك الطرفي للدالة عندما تكون قيمة n موجبة وفردية. استخدم الرسم البياني لدعم فرضيتك.

57a–b. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

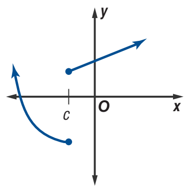
مسائل التفكير المرتب عالي المستوى استخدام مهارات التفكير العليا

الاستدلال حدد ما إذا كانت كل دالة ذات انقطاع *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة* عند $x = 0$. اشرح.

58. $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$ **59.** $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

58–59. انظر الهامش.

60. **تحليل الأخطاء** يحاول أحمد وخالد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بالأسفل متصلة عند النقطة c أم لا. يظن أحمد أن هذا الرسم البياني خاص بدالة $f(x)$ منقطعة عند النقطة c لأن $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ من ناحية واحدة للمتغير c. أما خالد فيظن أن هذا الرسم البياني لا يمثل دالة أصلاً، لأنه عندما تكون $x = c$، توجد قيمتين مختلفتين للإحداثي y. أي رأي هو الصحيح؟ اشرح استدلالك. **انظر الهامش.**



61. **تحدٍ** حدد قيم كل من a و b حيث تكون الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \geq 3 \\ bx + a & \text{if } -3 < x < 3 \\ \sqrt{-b - x} & \text{if } x \leq -3 \end{cases}$$

$a = 9,\ b = 3$

الاستدلال أوجد قيمة $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ لكل مما يلي. اشرح استدلالك. **62–65. انظر الهامش.**

62. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ و f دالة زوجية.

63. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ و f دالة فردية.

64. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و الرسم البياني للدالة f متناظر حول نقطة الأصل.

65. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و الرسم البياني للدالة f متناظر حول المحور الرأسي y.

انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

66. **الكتابة في الرياضيات** أعطِ مثالاً لدالة ذات انقطاع قابل للإزالة. اشرح كيفية إزالة هذا الانقطاع. كيف تؤثر إزالة الانقطاع على الدالة؟

احذر!

خطأ شائع قد يسبب الجزء **ج** في التمرين 56 لبساً لبعض الطلاب بسبب ما يبدو على أنه عدد كبير من المتغيرات. ذكرهم بأن x هو المتغير المستقل الوحيد، وأن a, b, c, d عبارة عن ثوابت.

تحليل الخطأ في التمرين 60. يجب أن يقوم الطلاب بثلاث خطوات لتحديد الاتصال. توجد قيمة للتابع $f(c)$ (الخطوة الأولى) ولكن قيمة $f(c)$ تختلف عند اقترابنا من c من اليسار ، عن قيمتها عند اقترابنا من c من اليمين. رأي جورج صحيح حيث أن الرسم البياني للعلاقة لا يجتاز اختبار المستقيم الرأسي. توجد قيمتين للمتغير y عندما تكون x تساوي c. لا يمثل الرسم البياني تابع.

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب شرح كيف ساعدهم تحليل الرسم البياني للعلاقات والدوال في فهم الاتصال و السلوك الطرفي.

إجابات إضافية

60– جورج ; إجابة نموذجية: العلاقة في الرسم البياني ليست تابع، لأنه يوجد قيمتين y مرتبطان بنفس قيمة x.

.62 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; لأن التابع f زوجية, $f(-x) = f(x)$.

63– $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; لأن التابع f فردية, $f(-x) = -f(x)$.

.64 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; لأن الرسم البياني للتابع f متناظر حول نقطة الأصل ($f(-x) = -f(x)$).

.65 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; متناظر حول المحور الرأسي y، $f(x) = f(-x)$.

مراجعة شاملة

الآلة الحاسبة راسمة الدوال **ارسم الدوال الآتية. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أوفردية، أوليست *أياً منهما*. اثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، فصف تماثل الرسم البياني للدالة.** (الدرس 1–2) 67–69. **انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

.67 $h(x)$

.68 $f(x)$

.69 $g(x) = x^5 - 5x^3 + x$

اذكر مجال كل دالة. (الدرس 1–1)

.70 $f(x) = \dfrac{4x+6}{x^2+3x+2}$ $D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

.71 $g(x)$

.72 $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$ $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

.73 **خدمة البريد** تستخدم هيئة البريد في الولايات المتحدة أكواد بريدية ZIP من خمسة أرقام للمناطق، لتحديد مسار الخطابات والطرود لوجهاتها. (الدرس 0–7)

a. كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها إذا كان يمكن استخدام الأرقام من 0 إلى 9 في كل من الخمسة أرقام المكونة للكود؟ **100,000**

b. بافتراض أنه في حالة كون الرقم الأول 0، فإن الرقم الثاني والثالث والرابع لا يمكن أن يكونوا أصفار. كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها إذا كان الرقم الأول صفرًا 0؟ **7290**

c. في عام 1983، استخدمت هيئة البريد في الولايات المتحدة أكواد ZIP+4، والتي أضافت أربعة أرقام للخمسة أرقام الأصلية في أكواد ZIP. باستخدام الأرقام من 0 إلى 9، كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها؟ **999,900,000**

لنقل أن $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$**، حل كل معادلة تالية لمعرفة قيمة** X. (الدرس 0-6)

.74 $3X - B = A$ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

.75 $2B + X = 4A$ $\begin{bmatrix} -32 & 50 & -16 \\ 4 & -30 & 10 \end{bmatrix}$

.76 $A - 5X = B$ $\begin{bmatrix} -\frac{12}{5} & 3 & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

حل كل مجموعة من المعادلات الآتية. (الدرس 0–5)

.77
$4x - 6y + 4z = 12$
$6x - 9y + 6z = 18$
$5x - 8y + 10z = 20$
حلول لا نهائية

.78
$x + 2y + z = 10$
$2x - y + 3z = -5$
$2x - 3y - 5z = 27$
(7, 4, −5)

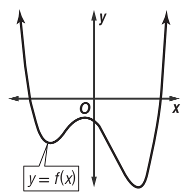
.79
$2x - y + 3z = -2$
$x + 4y - 2z = 16$
$5x + y - z =$
(2, 3, −1)

مراجعة القدرات للاختبارات القياسية

.80 **SAT/ACT** في مدرسة مقاطعة لينكولن الثانوية، يوجد 36 طالبًا يدرسون التفاضل والتكامل أو الفيزياء أو كلاهما، و 10 طلاب يدرسون كلاً من التفاضل والتكامل والفيزياء. فإذا كان هناك 31 طالبًا في فصل التفاضل والتكامل، كم يكون عدد الطلاب في فصل الفيزياء؟ **D**

A 5
B 8
C 11
D 15
E 21

.81 أي من العبارات التالية يمكن استخدامها لوصف السلوك الطرفي للدالة $f(x)$؟ **J**



F $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

G $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

H $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

J $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

.82 **مراجعة** كود قفل إيمي يحتوي على 3 أرقام تبدأ من 1 وتنتهي عند 45. ولا يمكن تكرار أي رقم منهم. كم عدد التباديل المحتملة لكود القفل؟ **85,140**

.83 **مراجعة** افترض شكل مكون من 3 دوائر متحدة المركز أنصاف أقطارها كالتالي 1 قدم، و 2 قدم، و 3 أقدام. احسب احتمالية وقوع نقطة مختارة عشوائياً في المنطقة الخارجية (بين الدائرة الثانية والثالثة). **D**

a

b $\frac{\pi}{9}$

c $\frac{4}{9}$

d $\frac{5}{9}$

تعليم BL متمايز

توسُّع **اوجد التقويم** m **و** b **حيث يحققا ما يلي**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \text{ إذا كان} \\ mx + b & 0 < x < 1 \text{ إذا كان} \\ x^2 & x \ge 1 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

متصلة. إجابة نموذجية: $m = 1,\ b = 0$

G12 GEN TE CH01.indb 33 8/22/2016 4:28:34 PM