الدرس 7–1 العلاقات العكسية والدوال

قبل ذلك
- تناولت بالدراسة تركيب الدالتين. (الدرس 6–1)

الآن
1. استخدم اختبار المستقيم الأفقي لتحديد الدوال العكسية.
2. أوجد الدوال العكسية من خلال الجبر ومن خلال الرسم البياني.

السبب
- يبيع باند بوسترز في المدرسة الثانوية التي تنتظم بها هناء تذاكر اليانصيب. يربط الجدول أ بين التكلفة بالدراهم وعدد التذاكر التي تم شراؤها. ويربط الجدول ب بين عدد التذاكر التي يمكن شراؤها وعدد الدراهم المدفوعة. عن طريق التبادل بين المدخلات والمخرجات من الجدول أ، تحصل هناء على الجدول ب.

مفردات جديدة
علاقة عكسية
inverse relation
دالة عكسية
inverse function
أحادية
one–to–one

الجدول A

تذاكر	1	2	3	4	6
التكلفة (درهم إماراتي)	2	4	6	8	10

الجدول B

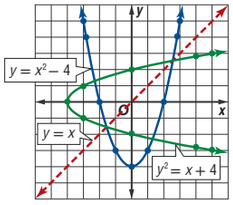
المال المدفوع (درهم إماراتي)	2	4	6	8	10
تذاكر	1	2	3	4	6

1 الدوال العكسية

العلاقة الموضحة في الجدول A عبارة عن علاقة عكسية للعلاقة الموضحة في الجدول B. توجد **العلاقات العكسية** إذا كانت علاقة واحدة تتضمن (b, a) حينما تتضمن العلاقة الأخرى (a, b). عند التعبير عن دالة في صورة معادلة، يمكن إيجاد العلاقة العكسية لها عن طريق التبادل بين المتغيرات المستقلة والتابعة. لاحظ ما يلي.

العلاقة
$y = x^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3



علاقة عكسية
$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

لاحظ أن هذه العلاقات العكسية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في الخط $y = x$. تكون هذه العلاقة حقيقية للرسومات البيانات المحددة لجميع العلاقات والعلاقات العكسية لها. نهتم أكثر *بالدوال* ذات العلاقات العكسية التي تمثل أيضًا دوالاً. إذا كانت العلاقة العكسية للدالة f تمثل أيضًا دالة، فيطلق عليها اسم **الدالة العكسية** f ويرمز لها بالرمز f^{-1}، وتقرأ على النحو التالي f العكسية.

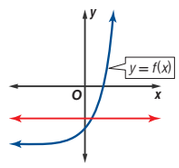
ليس لكل الدوال دوالاً عكسية. في الرسم البياني الموضح أعلاه، لاحظ أن العلاقة الأصلية تمثل دالة نظرًا لاجتيازها اختبار المستقيم الرأسي. لكن علاقتها العكسية أخفقت في تجاوز هذ الاختبار، لذلك لا تمثل العلاقة دالة. تقودنا العلاقة الانعكاسية بين الرسم البياني للدالة والعلاقة العكسية لها إلى إجراء الاختبار البياني التالي لتحديد هل العلاقة العكسية للدالة موجودة أم لا.

مفهوم أساسي اختبار الخط الأفقي

الشرح الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} فقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة في نقطة واحدة على الأكثر.

مثال نظرًا لعدم وجود مستقيم أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة f لأكثر من مرة، تحتفظ الدالة العكسية f^{-1} بوجودها.

استخدم النماذج



1 تركيز

محاذاة رأسية

قبل الدرس 7–1 ايجاد مجموعة التابعين.

الدرس 7–1 استخدام رسومات الدوال لتحديد إذا ما كان لديك دوال عكسية.
ايجاد الدوال العكسية جبريًا وبالرسم.

بعد الدرس 7–1 تحليل رسومات الدوال متعددة الحدود والمنطقية.

2 علّم

ما قبل القراءة/ما قبل الكتابة

دفتر الدراسة ص. 15

اطلب من الطلاب استكمال قسم ماذا ستتعلم في دفتر الدراسة.

أسئلة موسعة

اجعل الطلاب يقرأون جزء **لماذا؟** من الدرس. اطلب من الطلاب التفكير حول العلاقات وانعكساتها.

اسأل:
- ما هو تابع مساحة المربع؟ $A(s) = s^2$
- ما هي مساحة المربع عندما يكون جانب المربع بقياس 5؟ 25

(يتبع في الصفحة التالية)

G12 GEN TE CH01.indb 65 8/22/2016 4:30:52 PM

- اكتب تابع تمثل جانب المربع المُعطى بالمنطقة. ما هو طول جانب المربع إذا كانت مساحة المربع 100؟
$10 : S = \sqrt{A}$

- اكتب تابع المسافة إذا كان المعدل ثابت والوقت متغير. اكتب تابع الوقت إذا كانت المسافة والمعدل ثابت.
$t = f(d) = \frac{d}{r} : d = f(t) = rt$

1 الدوال العكسية

مثال 1 يعرض كيفية تحديد إذا كانت التابع العكسية للتابع موجودة بالرسم.

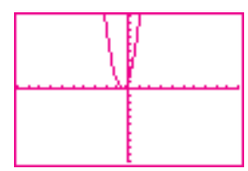
تقييم المفاهيم

استخدم تدريبات التمرين الموجه بعد كل مثال لتحديد فهم الطالب للمبادئ.

أمثلة إضافية

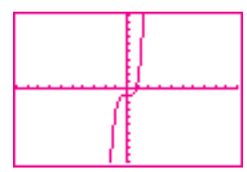
1 ارسم كل تابع باستخدام الآلة الحاسبة البيانية وقم بتطبيق الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت التابع العكسي موجوداً. اكتب **نعم** أو **لا**.

A. $y = 4x^2 + 4x + 1$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1 **لا**

ب. $f(x) = x^5 + x^3 - 1$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1 **نعم**

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

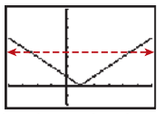
مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا.

a. $f(x) = |x - 1|$

يوضح الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.1 أنه من الممكن إيجاد المستقيم الأفقي الذي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة $f(x)$ لأكثر من مرة. لذلك، يمكنك استنتاج أن f^{-1} غير موجودة.

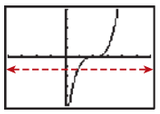
b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضح الرسم البياني للدالة $g(x)$ في الشكل 1.7.2 أنه من غير الممكن إيجاد الخط الأفقي الذي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة واحدة. لذلك، يمكنك استنتاج أن g^{-1} موجودة.



[−4, 6] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

الشكل 1.7.1



[−4, 6] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الشكل 1.7.2

تمارين موجهة

1A. $h(x) = \frac{4}{x}$ **نعم**

1B. $f(x) = x^2 + 5x - 7$ **لا**

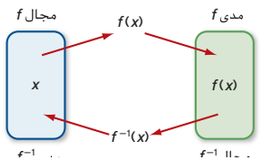
انتبه!

اختبار الخط الأفقي عند استخدام حاسبة الرسوم البيانية، افحص عن كثب المواقع التي تُظهر أن الدالة قد تخفق في اجتياز اختبار الخط الأفقي. استخدم خاصيتي التكبير والتصغير، أو عدّل النافذة للتأكد.

2 إيجاد الدوال العكسية

إذا اجتازت إحدى الدوال اختبار المستقيم الأفقي، فعندئذٍ تعرف بأنها دالة **تقابلية**. لعدم تطابق أي قيمة على المحور x مع أكثر من قيمة واحدة على المحور y وعدم تطابق أي قيمة على المحور y مع أكثر من قيمة واحدة على المحور x.

إذا كانت الدالة f تقابلية، فسيكون لها دالة عكسية f^{-1} بحيث يكون مجال f متساويًا مع مدى f^{-1}. ويكون مدى f متساويًا مع مجال f^{-1}.



لإيجاد دالة عكسية من خلال الجبر، اتبع الخطوات المذكورة أدناه.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية ينبغي ألا يكون هناك خلط بين الرمز $f^{-1}(x)$ ورمز الدالة التبادلية $\frac{1}{f(x)}$. إذا كانت f دالة، فإنه يمكن تفسير الرمز f^{-1} فقط في صورة دالة f العكسية للدالة x.

مفهوم أساسي إيجاد دالة عكسية

الخطوة 1 حدد هل الدالة لها دالة عكسية عن طريق التحقق من معرفة إذا كانت تقابلية باستخدام اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2 في معادلة الدالة f(x). استبدل f(x) بـ y ثم بدّل بين x وy.

الخطوة 3 أوجد حل y ثم استبدل y بـ $f^{-1}(x)$ في المعادلة الجديدة.

الخطوة 4 وضح أي قيود موجودة على مجال f^{-1}. ثم وضح أن مجال f يتساوى مع مدى f^{-1} ونطاق f يتساوى مع مجال f^{-1}.

تُفيد الخطوة الأخيرة أن جزءًا واحدًا من الدالة التي تجدها من خلال الجبر قد يمثل الدالة العكسية f. لذلك، تأكد من تحليل مجال f عند إيجاد f^{-1}.

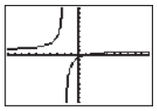
G12 GEN TE CH01.indb 66 8/22/2016 4:30:57 PM

مثال 2 أوجد الدوال العكسية من خلال المبين

قراءة الرياضيات
دوال قابلة للعكس يُشار إلى الدالة التي يكون لها دالة عكسية بأنها قابلة للعكس.

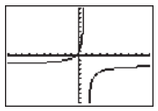
حدد ما إذا ما كانت f لها دالة عكسية. إن كان لديها دالة عكسية، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

a. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

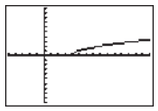
يجتاز الرسم البياني للدالة f الموضحة اختبار المستقيم الأفقي. لذلك، تعد الدالة f دالة تقابلية ويكون لها دالة عكسية. من الرسم البياني، يمكنك معرفة أن الدالة f لها مجال هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ونطاق $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. الآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$	دالة أصلية
$y = \frac{x-1}{x+2}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \frac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x وy.
$xy + 2x = y - 1$	اضرب كل طرف في $y + 2$. ثم استخدم خاصية التوزيع.
$xy - y = -2x - 1$	افصل بين فترات المحور y.
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \frac{-2x-1}{x-1}$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$. لاحظ أن $x \neq 1$.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

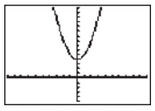
من الرسم البياني الموجود في الجانب الأيمن، يمكنك معرفة أن الدالة f^{-1} لها مجال هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ونطاق هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. مجال الدالة f ونطاقها متساويان مع نطاق الدالة f^{-1} ومجالها. على التوالي. إذن $f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$ عندما تكون $x \neq 1$.

b. $f(x) = \sqrt{x-4}$


[−5, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يجتاز الرسم البياني للدالة f الموضحة اختبار الخط الأفقي. لذلك، تعد الدالة f دالة تقابلية ويكون لها دالة عكسية. من الرسم البياني، يمكنك معرفة أن الدالة f لها المجال $[4, \infty)$ والنطاق $[0, \infty)$. الآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	دالة أصلية
$y = \sqrt{x-4}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x وy.
$x^2 = y - 4$	ربّع كل طرف.
$y = x^2 + 4$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.


[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

من الرسم البياني للدالة $y = x^2 + 4$ الموضحة، يمكنك معرفة أن العلاقة العكسية لها المجال $(-\infty, \infty)$ والمدى $[4, \infty)$. عن طريق تقييد مجال العلاقة العكسية للدالة $[0, \infty)$. يكون مجال الدالة f ونطاقها متساويين مع مدى الدالة f^{-1} ومداها. على التوالي. إذن، $f^{-1}(x) = x^2 + 4$. عندما يكون $x \geq 0$.

تمارين موجهة

2A. $f(x) = -16 + x^3$ نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

2B. $f(x) = \frac{x+7}{x}$ نعم؛ $x \neq 1$، $f^{-1}(x) = -\frac{7}{1-x}$

2C. $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$ ✗

2 البحث عن الدوال العكسية

مثال 2 يعرض كيفية البحث عن التابع العكسية جبريًا. **مثال 3** يعرض كيفية التحقق من الدوال العكسية. **مثال 4** يعرض كيفية البحث عن التابع العكسية بالرسم. **مثال 5** يعرض كيفية استخدام الدوال العكسية.

أمثلة إضافية

2 حدد ما إذا كان f يحتوي على تابع عكسي. إذا كان يحتوي عليها ابحث عن التابع العكسي وحدد أي حدود في المجال.

A. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ f^{-1}
يوجد في؛
$f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

B. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ f^{-1}
يوجد مع المجال $[0, \infty)$؛
$f^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الآلة الحاسبة البيانية اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية واستخدم مع كل زوج آلة حاسبة بيانية واحدة. يحدد أحدهما الدالة. يرسم الآخر التابع. إذا مرت التابع اختبار الخط الأفقي يُحدد الشريك الأول جبريًا التابع العكسية. يرسم الشريك الآخر العكسي للتأكد من أن العكسي والتابع متناظران بالنسبة خط $y = x$. يأخذ كل زوج دوره. يجب أن يجد الأزواج أربعة دوال على الأقل والتي تحتوي على تابع عكسي.

G12 GEN TE CH01.indb 67 8/22/2016 4:31:00 PM

الدالة العكسية f^{-1} لها تأثير يتمثل في تعطيل عمل الدالة f. لهذا السبب، يمكن أيضًا تحديد الدوال العكسية من حيث تركيبها مع بعضها البعض.

مفهوم أساسي تركيبات الدوال العكسية

تكون الدالتان، f وg، عكسيتين فقط إذا كان

- $f[g(x)]=x$ لكل x في مجال g(x) و
- $g[f(x)]=x$ لكل x في مجال f(x).

نصيحة دراسية

الدوال العكسية تعني العبارة ثنائية الشرط "إذا وفقط إذا" في تعريف الدوال العكسية أنه إذا كانت الدالة g عكسية للدالة f، فعندئذٍ يكون من الصحيح أيضًا أن الدالة f عكسية للدالة g.

لاحظ أن تركيب الدالة مع دالة عكسية يمثل دائمًا دالة محايدة. يمكنك استخدام هذه الحقيقة للتحقق من أن الدالتين دالتان عكسيتان لبعضهما البعض.

مثال 3 تحقق من وظائف معكوس

وضح أن $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالتان عكسيتان.

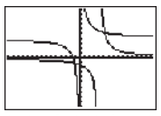
وضح أن $f[g(x)] = x$ وأن $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{(6)}{\frac{6}{x} + 4 - 4} = \frac{(6)}{\frac{6}{x}} \text{ أو } x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4} + 4\right) = \frac{(6)}{\frac{6}{x-4}} + 4 = x - 4 + 4 \text{ أو } x$$

نظرًا لأن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، $f(x)$ تعد $g(x)$ و$f(x)$ دالتين عكسيتين.

يدعم الرسم البياني هذا لأن $f(x)$ و$g(x)$ تنعكسان على بعضهما البعض في الخط $y = x$.



[−15.16, 15.16] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمارين موجهة

وضح أن f وg دالتان عكسيتان.

3A. $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B. $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0;\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

3A.

$$f[g(x)] = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right) = 18 - 18 + x = x;$$

$$g[f(x)] = 6 - \frac{18 - 3x}{3} = 6 - 6 + x = x$$

3B.

$$f[g(x)] = (\sqrt{x - 10})^2 + 10 = x - 10 + 10 = x;$$

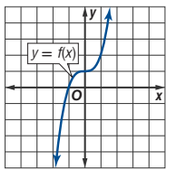
$$g[f(x)] = \sqrt{x^2 + 10 - 10} = x$$

يصعب غالبًا إيجاد الدوال العكسية لمعظم الدوال التقابلية من خلال الجبر. ومع ذلك، يمكن رسم الدالة العكسية بيانيًا عن طريق عكس الرسم البياني للدالة الأصلية في الخط $y = x$.

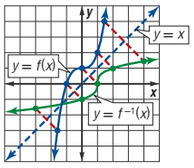
مثال 4 أوجد الدوال العكسية من خلال الرسم البياني

استخدم الرسم البياني للدالة f(x) في الشكل 1.7.3 لرسم $f^{-1}(x)$ بيانيًا.

ارسم الخط $y = x$ بيانيًا. حدد موقع عدد قليل من النقاط على الرسم البياني للدالة $f(x)$. اعكس هذه النقاط في $y = x$. ثم وصلها بمنحنى بسيط يعكس انحناء الدالة $f(x)$ في الخط $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

نصيحة دراسية

الدوال العكسية والقيم القصوى يكون للدالة المتصلة دالة عكسية فقط إذا لم يكن لها أي قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية. إذا كانت الدالة لها بالفعل قيمة عظمى أو صغرى محلية، فعندئذٍ لن تجتاز اختبار الخط الأفقي، ولن تكون دالة تقابلية.

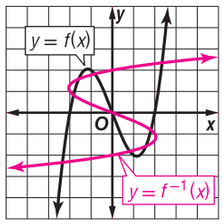
أمثلة إضافية

3 بين أن $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ و $g(x) = \frac{3}{2}(x - 2)$ هي دوال عكسية.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{3}{2}(x - 2)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x - 2) + 2\right) = x - 2 + 2 = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{2}{3}x + 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2 - 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right) = x$$

4 استخدم رسم العلاقة أ لرسم الرسم البياني وانعكاسه.

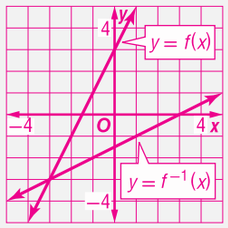


التركيز على المحتوى الرياضي

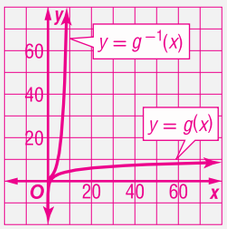
اختبار الخط الأفقي يعتبر رسم التابع العكسي هو إنعكاس التابع الأصلية في الخط $y = x$. بما أن اختبار الخط الرأسي يعرض علاقة التابع فيمكنها أيضًا أن تنعكس في الخط $y = x$. ينتج ذلك عن الخط الأفقي الذي يستخدم مع الرسم العكسي.

إجابات إضافية (تمارين موجهة)

4A.



4B.

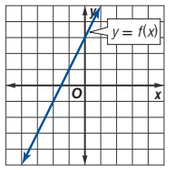


G12 GEN TE CH01.indb 68 8/22/2016 4:31:04 PM

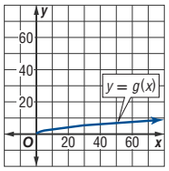
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانيًا. 4A–B. انظر الهامش.

.4A

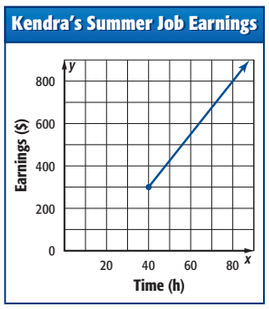


.4B



مثال 5 من عالم الواقع استخدام الدالة العكسية

الأرباح الصيفية تجني فاطمة $8 راهم في الساعة وتعمل 40 ساعة على أقل تقدير في الأسبوع وتحصل على أجر إضافي يساوي 1.5 ضعف أجر ساعة العمل العادية نظير أي ساعة إضافية بعد مضي 40 ساعة. يمكن إيجاد إجمالي الأرباح التي تحققها f(x) في الأسبوع الذي عملت فيه عدد x من الساعات بواسطة $f(x) = 320 + 12(x - 40)$.



a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

يتم تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 320 + 12x - 480$ أو $12x - 160$. يجتاز الرسم البياني للدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. لذلك، تعد الدالة $f(x)$ دالة تقابلية ويكون لها دالة عكسية. أوجد $f^{-1}(x)$.

$f(x) = 12x - 160$	دالة أصلية
$y = 12x - 160$	استبدل f(x) بـ y.
$x = 12y - 160$	بدّل بين x وy.
$x + 160 = 12y$	اجمع 160 على كل طرف.
$y = \frac{x + 160}{12}$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = \frac{x + 160}{12}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية، يُمثّل x الأرباح التي حققتها فاطمة لأسبوع معيّن وتُمثّل $f^{-1}(x)$ عدد الساعات التي قضتها فاطمة في العمل في ذلك الأسبوع.

c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها في مجال f(x) و $f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

تفترض الدالة $f(x)$ أن فاطمة تعمل 40 ساعة في الأسبوع على أقل تقدير. يوجد في الأسبوع 24 · 7 أو 168 ساعة. إذن مجال $f(x)$ هو [40, 168]. لأن $f(40) = 320$ و$f(168) = 1856$. يكون مدى $f(x)$ هو [320, 1856]. ولأن نطاق $f(x)$ يجب أن يساوي مجال $f^{-1}(x)$. يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو [320, 1856].

d. أوجد عدد الساعات التي قضتها في العمل الأسبوع الماضي إذا كانت أرباحها تبلغ 380 درهمًا.

لأن $f^{-1}(380) = \frac{380 + 160}{12}$ أو 45. تكون فاطمة قد قضت في عملها 45 ساعة الأسبوع الماضي.

تمارين موجهة

5. المدخرات تبلغ نسبة الأجر الصافي لمريم 65% من إجمالي الراتب. وتضع ميزانية تساوي $600 درهم شهريًا لتغطية نفقات المعيشة. تذكر بأنها تستطيع ادخار 20% من المال المتبقي معها. إذن يتم إيجاد مدخراتها لمدة شهر واحد $f(x)$ لإجمالي الأجر نظير عدد x من الدراهم بواسطة $f(x) = 0.2(0.65x - 600)$.

A. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

B. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

C. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

D. حدد إجمالي الأجر الذي تتقاضاه مريم في الشهر الواحد إذا كانت مدخراتها لذلك الشهر تبلغ $120 درهمًا.

رابط عالم الواقع

في الفترة من عام 1999 إلى عام 2006، تأثر عدد من الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم من 16 إلى 19 عامًا في الولايات المتحدة والذين لديهم وظائف صيفية بانخفاض تراوح من نسبة 48% إلى 37%

المصدر: مكتب إحصائيات العمل في الولايات المتحدة

john hill/Alamy

5A. f^{-1} توجد الدالة بسبب اجتياز f لاختبار الخط الأفقي وبالتالي تصبح تقابلية؛ $f^{-1}(x) = \frac{100x}{13} + \frac{12,000}{13}$.

5B. $f^{-1}(x)$ تُمثّل إجمالي الأجر الذي تتقاضاه مريم في الشهر، ويُمثّل x مدخراتها في كل شهر.

5C. $x \geq 923.08$

5D. $1846.15 درهمًا

أمثلة إضافية

5 التصنيع تكون الأسعار الثابتة لتصميم نوع واحد من نظام مجسم 96.000$ مع متغير بقدر 80$ لكل وحدة. إجمالي التكلفة $f(x)$ لعمل مجسمات x التي يعطيها $f(x) = 96,000 + 80x$.

A. اشرح سبب وجود التابع العكسي $f^{-1}(x)$. ثم ابحث عن $f^{-1}(x)$. يجتاز رسم $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. $f^{-1}(x) = \frac{x - 96,000}{80}$

B. ماذا تمثل $f^{-1}(x)$ و x التابع العكسي؟ في التابع العكسي، تمثل x إجمالي التكلفة و تمثل $f^{-1}(x)$ عدد المجسمات.

C. ما هي الحدود التي يجب وضعها في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ إذا تواجدت؟ اشرح. يحتوي مجال $f(x)$ على ارقام صحيحة غير سلبية. يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو حاصل ضرب 80 الأكبر من 96,000.

D. ابحث عن عدد المجسمات إن كانت التكلفة الإجمالية $216,000. 1500 مجسم

المتابعة

اكتشف الطلاب الدوال والدوال العكسية.

اسأل:

- كيف يمكن عكس التابع المستخدم للمساعدة في تفسير أحداث الحياة اليومية أو حل مشكلة؟ الإجابة النموذجية: العلاقات العكسية "استعادة" مع بعضها البعض. احصل على انعكاس التابع التي تسمح بنمذجة العلاقة باستخدام إما الكمية باعتبارها متغير مستقل.

OL AL DifferentiatedInstruction

متعلمون نشطون في شبكة الإحداثيات الكبيرة يرسم الطلاب دالة محايدة $f(x) = x$ باستخدام لون مميز أو طول السلسلة أو شيء مماثل. اجعلهم يرسمون النقاط في التابع $f(x) = x^3$ لقيم x −3, −2, −1, 0, 1, 2, و 3. اجعلهم يرسمون التابع العكسي عن طريق عكس النقاط في خط $y = x$. اجعلهم يكتبون جدول مع زوج إحداثيات لكلا الدوال. ثم يستخدمون الجداول لشرح أول خطوة لحساب تابع عكسي جبريًا عند تبديل y و x في المعادلة الحقيقية.

G12 GEN TE CH01.indb 69 8/22/2016 4:31:07 PM

3 تمرّن

تقييم المفاهيم

استخدم التدريبات 45–1 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص تعيينات الطلاب.

احذر!

خطأ شائع قد يحاول الطلاب خطأً البحث عن $f^{-1}(x)$ عن طريق البحث عن $\frac{1}{f(x)}$. ذكرهم أن f^{-1} هو رمز وليس متغير التيار 1−. بطريقة أخرى، f^{-1} هو انعكاس f, بينما $\frac{1}{f}$ هو متبادل f.

خطأ شائع في التدريبات 36–27 يساعد الطلاب عبر الاستبدال والتبسيط عن طريق تذكيرهم باستخدام الأقواس بشكل صحيح عند الاستبدال.

تمارين

مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا. (مثال 1)

1. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ لا
2. $f(x) = x^2 - 16x + 64$ لا
3. $f(x) = x^2 - 10x + 25$ لا
4. $f(x) = 3x - 8$ نعم
5. $f(x) = \sqrt{2x}$ نعم
6. $f(x) = 4$ لا
7. $f(x) = \sqrt{x + 4}$ نعم
8. $f(x) = -4x^2 + 8$ لا
9. $f(x) = \frac{5}{x - 6}$ نعم
10. $f(x) = \frac{8}{x + 2}$ نعم
11. $f(x) = x^3 - 9$ نعم
12. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ نعم

حدد ما إذا كانت كل دالة لها دالة عكسية. إن كان لديها دالة عكسية، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها. (مثال 2) **16، 24–19. انظر الهامش.**

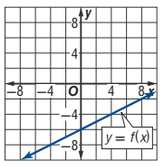
13. $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$ لا
14. $f(x) = 4x^2 - 8x^4$ لا
15. $h(x) = x^7 + 2x^3 - 10x^2$ لا
16. $f(x) = \sqrt{x + 8}$
17. $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$ لا
18. $f(x) = |x - 6|$ لا
19. $f(x) = \frac{4 - x}{x}$
20. $g(x) = \frac{x - 6}{x}$
21. $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8 - x}}$
22. $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x + 3}}$
23. $f(x) = \frac{6x + 3}{x - 8}$
24. $h(x) = \frac{x + 4}{3x - 5}$
25. $g(x) = |x + 1| + |x - 4|$ لا
26. **السرعة** سرعة الجسم بالكيلومترات في الساعة y تساوي $y = 1.6x$. حيث يُمثّل x سرعة الجسم بالأميال في الساعة. (مثال 2) **a–b. انظر الهامش.**
    a. أوجد معادلة معكوس الدالة. ما الذي يمثله كل متغير؟
    b. ارسم كل معادلة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

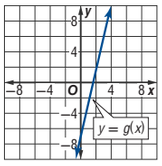
وضح من خلال الجبر أن f و g دالتان عكسيتان. (مثال 3) **36–27. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

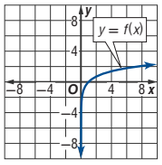
27. $f(x) = -6x + 3$, $g(x) = \frac{3 - x}{6}$
28. $f(x) = 4x + 9$, $g(x) = \frac{x - 9}{4}$
29. $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{3}}$
30. $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{4x - 32}$
31. $f(x) = 2x^3 - 6$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 6}{2}}$
32. $f(x) = (x + 8)^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$
33. $g(x) = \sqrt{x + 8} - 4$
34. $g(x) = \sqrt{x - 8} + 5$
    $f(x) = x^2 + 8x + 8, x \geq -4$
    $f(x) = x^2 - 10x + 33, x \geq 5$
35. $f(x) = \frac{x + 4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x - 1}$
36. $f(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$, $g(x) = \frac{2x + 6}{1 - x}$
37. **الفيزياء** يمكن وصف الطاقة الحركية لجسم ما في حالة حركة بوحدة الجول بواسطة $f(x) = 0.5mx^2$. حيث يُمثّل m كتلة الجسم بالكيلوجرامات ويُمثّل x سرعة الجسم بالأمتار في الثانية. (مثال 3) **a–c انظر ملحق الإجابات للفصل 1**
    a. أوجد معكوس الدالة. ما الذي يمثله كل متغير؟
    b. وضح أن $f(x)$ والدالة التي توصلت إليها في الجزء a عكسيتان.
    c. ارسم $f(x)$ و$f^{-1}(x)$ على شاشة حاسبة الرسوم البيانية نفسها إذا كانت كتلة الجسم تساوي كيلوجرامًا واحدًا.

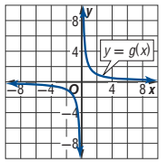
38–43. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

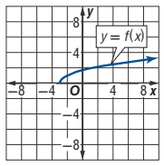
استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانيًا. (مثال 4)

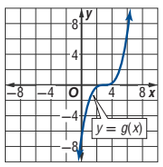
38.


39.


40.


41.


42.


43.


44. **وظائف** يبيع خالد الأحذية في مركز تجاري بعد المدرسة. يبلغ راتبه الأسبوعي $140 رهنًا. ويجني 10% عمولة على كل زوج من الأحذية يبيعه. يبلغ إجمالي ربحه $f(x)$ في أسبوع باع فيه أحذية تصل قيمتها إلى عدد x من الدراهم $f(x) = 140 + 0.1x$. (مثال 5)

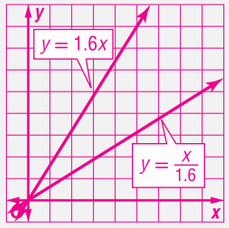
أ–ج انظر ملحق الإجابات للفصل 1

a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.
b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟
c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.
d. أوجد إجمالي المبيعات التي حققها خالد في الأسبوع الماضي إذا كانت أرباحه في ذلك الأسبوع تبلغ $220. **$ 800**

إجابات إضافية

16. نعم؛ $f^{-1}(x) = x^2 - 8$؛ $x \geq 0$
19. نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{4}{x + 1}$؛ $x \neq -1$
20. نعم؛ $g^{-1}(x) = \frac{-6}{x - 1}$؛ $x \neq 1$
21. نعم؛ $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2}$؛ $x > 0$
22. نعم؛ $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2}$؛ $x > 0$
23. نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{8x + 3}{x - 6}$؛ $x \neq 6$
24. yes; $h^{-1}(x) = \frac{5x + 4}{3x - 1}$؛ $x \neq \frac{1}{3}$

26a. السرعة في $y = \frac{x}{1.6}$؛ $y =$ ميل\ساعة, سرعة في كم\سا $= x$

26b.


Differentiated Homework Options

مستوى	مهمة	خيار ليومين	
AL قريب من المستوى	1-45, 83-85, 87-104	1-45 فردي, 101-104	2-42 زوجي, 83-85, 87-100
OL في المستوى	1-53 فردي, 54, 55-63 فردي, 79-, 85-, 87-104	1-45, 101-104	46-85, 87-100
BL ما بعد المستوى	46-104		

G12 GEN TE CH01.indb 70 8/22/2016 4:31:13 PM

45. **العملة** يمكن وصف معدل سعر الصرف بين الدينار والدرهم الإماراتي في الشهور الأربعة الأخيرة بواسطة $f(x) = 0.66x$، حيث يمثل x قيمة العملة بالدينار. (مثال 5) **a–b. انظر الهامش.**

a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

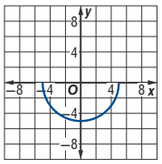
b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

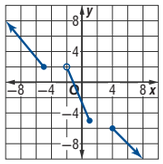
c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

d. كم تساوي قيمة 100 درهم إماراتي بالدينار؟ **151.52**

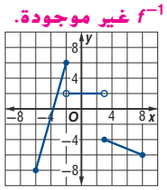
ج. $x \geq 0$؛ لا يمكنك تبديل المال السالب.

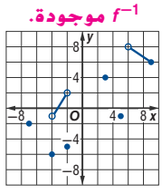
حدد ما إذا ما كانت f لها دالة عكسية.

46.


47.


f^{-1} غير موجودة. **f^{-1} موجودة.**

48.


49.


f^{-1} غير موجودة. **f^{-1} موجودة.**

حدد إذا كانت f^{-1} موجودة. إذا كان الأمر كذلك، فأنشئ جدول للدالة f^{-1}.

50–53. انظر الهامش.

50.

x	−6	−4	−1	3	6	10
$f(x)$	−4	0	3	5	9	13

51.

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

52.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	8	16	54	27	16

53.

x	−10	−9	−8	−7	−6	−5
$f(x)$	8	7	6	5	4	3

54. **درجة الحرارة** تُستخدم الصيغة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ لتحويل x درجة مئوية إلى درجة فهرنهايت. لتحويل x درجة فهرنهايت إلى كلفن، تُستخدم الصيغة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$. **a–c. انظر الهامش.**

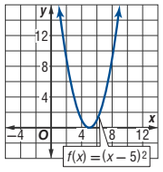
a. أوجد f^{-1}. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

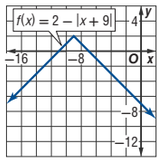
b. وضح أن f وf^{-1} دالتان عكسيتان. ارسم كل دالة على شاشة حاسبة الرسوم البيانية نفسها.

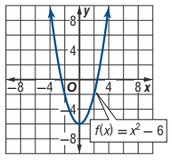
c. أوجد $[k \circ f](x)$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

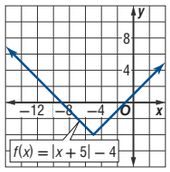
d. إذا كانت درجة الحرارة تساوي 60°C مئوية، فكم ستساوي درجة الحرارة بالكلفن؟

ضع قيودًا على مجال كل دالة بحيث تكون الدالة الناتجة تقابلية. ثم أوجد معكوس الدالة. 55–58. انظر الهامش.

55.


56.


57.


58.


59–62. انظر الهامش.

وضح مجال ونطاق f وf^{-1}، إذا كانت f^{-1} موجودة.

59. $f(x) = \sqrt{x - 6}$

60. $f(x) = x^2 + 9$

61. $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 4}$

62. $f(x) = \frac{8x + 3}{2x - 6}$

63. **البيئة** بمجرد اعتباره من الفصائل المهددة بالانقراض، أدرج العقاب الأصلع في قائمة الحالات المهددة بالانقراض في عام 1995. يوضح الجدول عدد الأزواج التي تبني أعشاشًا كل عام.

العام	أزواج تبني أعشاشًا
1984	1757
1990	3035
1994	4449
1998	5748
2000	6471
2005	7066

a–b. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

a. استخدم الجدول لإدراج دالة خطية تربط عدد الأزواج التي تبني أعشاشًا بالعام. افترض أن 0 يُمثّل عام 1984.

b. أوجد معكوس الدالة التي أنشأتها في الجزء **أ**. ما الذي يُمثّله كل متغير؟

c. باستخدام الدالة العكسية، ما العام التقريبي الذي يُمثّل عدد 5094 من الأزواج التي تبني أعشاشًا؟ **1997**

64. **الزهور** تحتاج شيماء إلى شراء 75 جذعًا من الزهور لتزيين المأدبة. يمكنها الاختيار من بين أزهار الزنبق والكوبية، التي تبلغ تكلفة الجذع منها 5.00 دراهم و3.50 دراهم، على التوالي.

a–c انظر ملحق الإجابات للفصل 1

a. اكتب دالة لإجمالي تكلفة الزهور.

b. أوجد معكوس الدالة التي توضح التكلفة. ما الذي يمثله كل متغير؟

c. أوجد مجال الدالة التي توضح التكلفة ومعكوسها.

d. إذا كان إجمالي تكلفة الزهور 307.50 دراهم، فكم عدد زهور الزنبق التي اشترتها شيماء؟ **30**

احذر!

خطأ شائع في التدريبات 54–50 قد يجد الطلاب صعوبة لأنه لا يوجد رسم. يرسم الطلاب رسم f(x) يقومون بتطبيق اختبار الخط الأفقي.

إجابة إضافية

45a. نموذج الإجابة: يكون رسم التابع طولي حيث يمر باعتباره اختبار خط أفقي. لذلك، فإنها تابع واحد إلى واحد ويحتوي على انعكاس؛ $f^{-1}(x) = \frac{x}{0.66}$.

45b. x يمثل قيمة العملة في الدولار الأمريكي و $f-1(x)$ يمثل قيمة العملة في اليورو.

50. f^{-1} متواجدة.

x	−4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	−6	−4	−1	3	6	10

51. f^{-1} غير موجودة.

52. f^{-1} غير موجودة.

53. f^{-1} متواجدة.

x	8	7	6	5	4	3
$f^{-1}(x)$	−10	−9	−8	−7	−6	−5

54a. $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$؛ f^{-1} يمثل قاعدة مستخدمة لتحويل الدرجات من فهرنهايت إلى سيلزيوس.

54b. $f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x - 32) + 32\right]$

$= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}x - \frac{160}{9}\right) + 32$

$= x - 32 + 32$

$= x$

$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right]$

$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$

$= x$

[−50, 50] scl: 10 by [−50, 50] scl: 10

54c. $k[f(x)] = x + 273.15$؛ يمثل قاعدة مستخدمة لتحويل الدرجات من سيلزيوس إلى كيلفن.

54d. 333.15 كيلفن

55. الإجابة النموذجية: $x \geq 5$؛ $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

56. الإجابة النموذجية: $x \leq -9$؛ $f-1(x) = x - 11$، $x \leq 2$

57. الإجابة النموذجية: $x \geq 0$، $f-1(x) = \sqrt{x} + 6$

58. الإجابة النموذجية: $x \geq -5$؛ $f-1(x) = x - 1$، $x \geq -4$

59. f: $D = \{x \mid x \geq 6, x \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

f^{-1}: $D = \{x \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \geq 6, x \in \mathbb{R}\}$

60. f -1 لا يوجد.

61. f: $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$

f^{-1}: $D = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

62. f: $D = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

f^{-1}: $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$، $R = \{y \mid y \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$

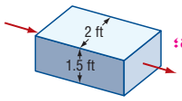
G12 GEN TE CH01.indb 71 8/22/2016 4:31:18 PM

أوجد معادلة معكوس كل دالة، إن وجد. ثم ارسم البيانات بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه. ضمِّن أي قيود على المجال.

.65 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } -4 \geq x \\ -2x + 5 & \text{if } -4 < x \end{cases}$ **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.66 $f(x) = \begin{cases} -4x + 6 & \text{if } -5 \geq x \\ 2x - 8 & \text{if } -5 < x \end{cases}$ $f^{-1}(x)$ **غير موجودة.**

.67 **معدل التدفق** معدل تدفق الغاز هو حجم الغاز الذي يمر بمنطقة ما خلال فترة زمنية معينة. يمكن إيجاد سرعة v لتدفق الهواء من خلال إحدى الفتحات باستخدام $v(r) = \frac{r}{A}$. حيث يُمثّل r معدل التدفق بالقدم المكعب في الثانية ويُمثّل A مساحة المقطع العرضي لفتحة التهوية بوحدة القدم المربعة.



a. $v^{-1}(x) = 3x$؛ **صيغة معدل تدفق الغاز**

a. أوجد v^{-1} لفتحة التهوية الموضحة. ما الذي يُمثّله هذه الدالة؟

b. أوجد سرعة الهواء المتدفق من خلال فتحة التهوية بالقدم في الثانية إذا كان معدل التدفق يبلغ 15,000 قدم مكعب في الثانية. **5000 ft/s**

c. أوجد معدل تدفق الغاز من فتحة التهوية المستديرة التي يبلغ نصف قطرها 5 أقدام مع تدفق الغاز المتحرك بسرعة 1.8 قدم في الثانية. **$\approx 35.3\ ft^3/s$**

.68 **التواصل** تعرض شركة هواتف خلوية مخططات البيع على النحو الموضح. افترض وجود تخفيض يصل إلى 50 $ فقط بعد الحصول على خصم يقدّر بنسبة 10%.

a. اكتب دالة r توضح سعر الهاتف في صورة دالة السعر الأصلي فقط في حالة تطبيق تخفيض. **$r(x) = x - 50$**

b. اكتب دالة d توضح سعر الهاتف في صورة دالة السعر الأصلي فقط في حالة تطبيق خصم. **$d(x) = 0.9x$**

c. أوجد صيغة $T(x) = [r \circ d](x)$ في حالة تطبيق الخصم والتخفيض كليهما. **$T(x) = 0.9x - 50$**

d. أوجد T^{-1} واشرح ما الذي يُمثّله المعكوس. **انظر الهامش.**

e. إذا كان إجمالي تكلفة الهاتف بعد الخصم والتخفيض 49 $، فما السعر الأصلي للهاتف؟ **110 $**

استخدم $f(x) = 8x - 4$ و $g(x) = 2x + 6$ لإيجاد كل مما يلي.
.69–74 انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.69 $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$ **.70** $[g^{-1} \circ f^{-1}](x)$

.71 $[f \circ g]^{-1}(x)$ **.72** $[g \circ f]^{-1}(x)$

.73 $(f \cdot g)^{-1}(x)$ **.74** $(f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$

إجابة إضافية

.68d $T^{-1}(x) = \frac{x + 50}{0.9}$ ؛ يمثل انعكاس السعر الأصلي للهاتف باعتباره تابع سعر الهاتف بعد التكرار والخصم.

.75 $\sqrt{x^2 + 3}$ for $x \geq 0$

.77 $x + 3$ for $x \geq 1$

.79 $x \geq 0$ لـ $x\ 4 + 5x\ 2 + 4$

استخدم $f(x) = x^2 + 1$ مع المجال $[0, \infty)$ و $g(x) = \sqrt{x - 4}$ لإيجاد كل مما يلي. **.75، 77، 79 انظر الهامش.**

.75 (x) **.76** $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$

.77 $[f \circ g]^{-1}(x)$ **.76** $[g \circ f]^{-1}(x)]$

.79 $(f \cdot g^{-1})(x)$ **.80** $(f^{-1} \cdot g)(x)$

.81 **النسخ** تُكلف نسخ مروة 0.40$ الدرهم لكل دقيقة أو جزء من الدقيقة لاستخدام جهاز المسح الضوئي المرفق بالكمبيوتر. بافتراض أنك تستخدم جهاز المسح الضوئي لعدد x دقيقة، حيث يمثل x أي عدد حقيقي أكبر من 0.

a. ارسم رسمًا بيانيًا للدالة، $C(x)$، التي توضح تكلفة استخدام جهاز المسح الضوئي لعدد x من الدقائق.

b. ما مجال $C(x)$ ونطاقها؟

c. ارسم رسمًا بيانيًا للدالة العكسية $C(x)$.

d. ما مجال الدالة العكسية ونطاقها؟

e. ما الموقف الواقعي الذي تمثله الدالة العكسية؟

a–e. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.82 **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من معكوسات الدوال الزوجية والفردية.

a. **بياني** ارسم رسومًا بيانية لثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تجتاز الرسوم البيانية اختبار الخط الأفقي؟

b. **تحليلي** ما النمط الذي يمكن تمييزه بخصوص معكوسات الدوال الزوجية؟ أكد النمط أو ارفضه من خلال الجبر.

c. **بياني** ارسم رسومًا بيانية لثلاث دوال فردية مختلفة. هل تجتاز الرسوم البيانية اختبار الخط الأفقي؟

d. **تحليلي** ما النمط الذي يمكن تمييزه بخصوص معكوسات الدوال الفردية؟ أكد النمط أو ارفضه من خلال الجبر.

a–d. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

مسائل التفكير المرتب عالي المستوى
تحتاج مهارات ذهنية مرتبة بشكل أكبر

.83 **الاستدلال** إذا كان للدالة f دالة عكسية وصفرية عند 6، فما الذي يمكنك تحديده بشأن الرسم البياني لـ f^{-1}؟
الإجابة النموذجية: $f^{-1}(x)$ لها نقطة تقاطع مع المحور y عند (0، 6).

.84 **كتابات في الرياضيات** اشرح نوع القيد الموجود على المجال المطلوب لتحديد معكوس دالة من الدرجة الثانية وسبب الحاجة إلى وجود قيد. اذكر مثالًا. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.85 **الاستدلال** صواب أم خطأ. اشرح استدلالك.
يوجد لكل الدوال الخطية دوالّ عكسية.
انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.86 **تحدٍ** إذا كان $f(x) = x^3 - ax + 8$ و $f^{-1}(23) = 3$. فأوجد قيمة a. **4**

.87 **الاستدلال** يمكن أن تجتاز $f(x)$ اختبار المستقيم الافقي عندما $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to 0} f(x)$ ؟ اشرح ذلك.
انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.88 **الاستدلال** لماذا لا تُستخدم ± عند إيجاد الدالة العكسية لـ $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.89 **كتابات في الرياضيات** اشرح كيف يمكن أن يكون معكوس f موجودًا. اذكر مثالًا يفيد بأن مجال f مقيدًا وليس للدالة f دالة عكسية عندما يكون المجال غير مقيد. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

مراجعة شاملة

في كل زوج من الدوال، أوجد f ∘ g و g ∘ f. ثم وضِّح مجال كل دالة مركبة. (الدرس 6–1) **90–92. انظر الهامش.**

90. $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x + 4$

91. $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$, $g(x) = x + 6$

92. $f(x) = x - 4$, $g(x) = 3x^2$

استخدم الرسم البياني للدالة الأصلية المعطاة لوصف الرسم البياني لكل دالة ذات صلة. (الدرس 5–1) **93–95. انظر الهامش.**

93. $f(x) = x^2$
- **a.** $g(x) = (0.2x)^2$
- **b.** $h(x) = (x - 5)^2 - 2$
- **c.** $m(x) = 3x^2 + 6$

94. $f(x) = x^3$
- **a.** $g(x) = |x^3 + 3|$
- **b.** $h(x) = -(2x)^3$
- **c.** $m(x) = 0.75(x + 1)^3$

95. $f(x) = |x|$
- **a.** $g(x) = |2x|$
- **b.** $h(x) = |x - 5|$
- **c.** $m(x) = |3x| - 4$

96. الإعلان أجرت إحدى الصحف استطلاعًا حول الشركات التي تنفق مبلغ من المال سنويًا على الإعلانات التجارية المعروضة في التلفاز وقدّرت عدد الأشخاص الذين يتذكرون مشاهدة تلك الإعلانات التجارية كل أسبوع. تنفق إحدى الشركات المصنّعة للمشروبات الغازية مبلغ 40.1 $ درهم في العام وتقدّر أن حوالي 78.6 $ شخص يتذكرون إعلاناتها التجارية. فيما يخص بخدمة تسليم العبوات. تبلغ الميزانية 22.9 $ درهم مقابل 21.9 مليون شخص. تصل شركة الاتصالات إلى 88.9 مليون شخص من خلال إنفاق 154.9 مليون درهم. استخدم مصفوفة لتمثيل هذه البيانات. (الدرس 6–0) **انظر الهامش.**

أوجد حل كل نظام من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 5–0)

97.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 3x + 2y - 2z &= -13 \\ 5x + 3y - z &= -11 \end{aligned}$$
(1, −4, 4)

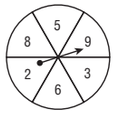
98.
$$\begin{aligned} 7x + 5y + z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 16 \\ -6y - z &= -18 \end{aligned}$$
(−2, 2, 4)

99.
$$\begin{aligned} x - 3z &= 7 \\ 2x + y - 2z &= 11 \\ -x - 2y + 9z &= 13 \end{aligned}$$
(10, −7, 1)

100. البيسبول يضرب لاعب الكرة. بافتراض أن الكرة كانت على ارتفاع 3.5 أقدام من الأرض عندما ضرب الكرة مباشرة لأعلى بسرعة ابتدائية تبلغ 80 قدمًا في الثانية. تُمكّن الدالة $d(t) = 80t - 16t^2 + 3.5$ من معرفة ارتفاع الكرة عن الأرض بالقدم وذلك في صورة دالة زمنية t بالثواني. ما الوقت الذي استغرقه ماسك الكرة حتى حدد موقع الكرة والتقطها بعد ضربها؟ (الدرس 3–0) **5 توان تقريبًا**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

101. SAT/ACT ما احتمالية وقوف المؤشر عند عدد زوجي أو عدد أكبر من 5؟ **د**



A $\frac{1}{6}$ C $\frac{1}{2}$ E $\frac{5}{6}$

B $\frac{1}{3}$ D $\frac{2}{3}$

102. مراجعة إذا كان كل من m وn عددين طبيعيين فرديين، فأي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا؟ **ي**

I. $m^2 + n^2$ زوجية.

II. $m^2 + n^2$ تقبل القسمة على 4.

III. $(m + n)^2$ تقبل القسمة على 4.

F لا شيء H I و II فقط

G I فقط J I و III فقط

103. أي مما يلي يعد معكوسًا للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟ **أ**

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

104. مراجعة قطار يقطع مسافة d ميلاً في t من الساعات ويصل إلى وجهته متأخرًا 3 ساعات. ما متوسط السرعة، بالأميال في الساعة، التي ينبغي على القطار التحرك بها للوصول في الوقت المحدد؟ **ح**

F $t - 3$

G $\frac{t - 3}{d}$

H $\frac{d}{t - 3}$

J $\frac{d}{t} - 3$

التعليم المتمايز BL

تمديد هل التابع $f(x) = [\![x]\!]$ يحتوي على انعكاس التابع؟ اشرح. لا لا يجتاز الرسم اختبار الخط الأفقي. لذلك، يحتوي على انعكاس العناصر في المجال المزدوج مع أكثر من عنصر في النطاق.

4 قوّم

ذكر المصطلح الرياضي اطلب من الطلاب لوصف كيفية تعريف ما إذا كانت التابع يحتوي على انعكاس. استخدم اختبار الخط الأفقي.

إجابة إضافية

90. $[f \circ g](x) = x^2 + 8x + 7$ f أو $[g \circ f](x) = x^2 - 5$، $\{x | x \in \mathbb{R}\}$ من أجل $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

91. $[f \circ g](x) = \frac{1}{2}x - 4$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$، $[g \circ f](x) = \frac{1}{2}x - 1$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

92. $[f \circ g](x) = 3x^2 - 4$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$، $[g \circ f](x) = 3x^2 - 24x + 48$ من أجل $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

93a. ممدود أفقيًا

93b. منقول 5 وحدات لليمين وأثنين أسفل

93c. ممدود رأسيًا، ومنقول ست وحدات لأعلى

94a. ثلاثة واحدات لأعلى وجزء من الرسم أسفل محور x المعكوس في محور x

94b. الضغط الافقي، معكوس في محور x

94c. منقول وحدة لليسار ومضغوطة رأسيًا

95a. مضغوط أفقيًا

95b. منقول خمس وحدات لليمين

95c. منقول أربعة واحدات أفقية مضغوطة لأسفل

96.

	ميزانية ($ ملايين)	عارضين (ملايين)
مشروب بارد	40.1	78.6
توصيل العبوة	22.9	21.9
اتصالات	154.9	88.9

G12 GEN TE CH01.indb 73 8/22/2016 4:31:30 PM

1 التركيز

الهدف إستخدام ألة حساب الرسم البياني و المعادلات الحدودية الى الرسم البياني المعكوس غلى الألة الحاسبة.

نصائح تدريسية

لمساعدة الطلاب على التفكير في المعادلات الحدودية، مراجعة مفهوم المعادلات الحدودية و بعدها إستكمال الأمثلة التالية. بفرض $y = t^3$ و $x = t$، إصنع مجسم مع ثلاث أعمدة الأولى لـــــ t، و الثانية x، و الثالثة y. اطلب من الطلاب أن يكتبوا عدة نقط عن $t =$

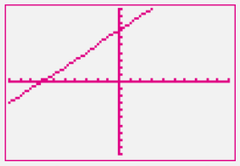
2 علّم

العمل في مجموعات تعاونية

وذلك بجعل كل فردين من الطلاب لديهم مهارة استخدام الألة الحاسبة البيانية مع فردين أخرين من الطلاب ليست لديهم هده المهارة. ولأن الطلاب يعملون من خلال أمثلة، فاجعلهم يتبادلون فيما بينهم أدوار مشغل الحاسبة البيانية ومدرب الجاسبة البيانية.

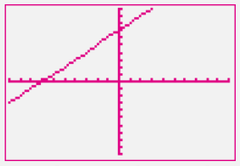
إجابات إضافية

2a.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

2b.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

دفتر التمارين 7–1

معمل تكنولوجيا الرسم البياني
رسم الدوال العكسية باستخدام المعادلات الوسيطية

الهدف

- استخدام آلة حاسبة خاصة بالرسومات البيانية ومعادلات وسيطية لرسم الدالة المعكوسة على الآلة الحاسبة.

مفردات جديدة

المعادلات الوسيطية (parametric equations)

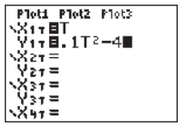
المعادلات الوسيطية هي معادلات تعبر عن موقع جسم ما كدالة زمنية. القاعدة الأساسية للمعادلات الوسيطية هي تقديم متغير إضافي t، يسمى *المعامل*. على سبيل المثال، $y = x + 4$ يمكن التعبير عنها بمعادلات وسيطية باستخدام $x = t$ و $y = t + 4$.

النشاط 1 رسم بياني وسيطي

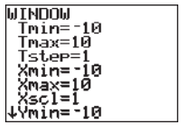
مثل بيانيًا $x = t, y = 0.1t^2 - 4$.

الخطوة 1 اضبط الوضعية. من MODE القائمة، اختر par وsimul. يسمح ذلك بتمثيل المعادلات في رسوم بيانية في نفس الوقت.

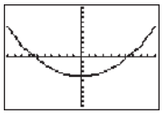
الخطوة 2 أدخل المعادلة الوسيطية. في الشكل الوسيطي، X,T,θ,n سنستخدم t بدلًا من x.



الخطوة 3 اضبط النافذة كما يظهر.



الخطوة 4 مثل المتباينات في رسوم بيانية. لاحظ أن الرسم البياني يشبه $y = 0.1x^2 - 4$ ولكن يتم تتبعه من $t = 10$ إلى $t = -10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; *t*step: 1

نصيحة للدراسة

النافذة القياسية يمكنك استخدام zoomstandard لضبط النافذة في الوضع القياسي.

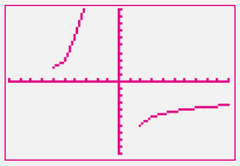
تمارين

1. **الاستدلال** قم بتمثيل المعادلات من خلال رسم بياني مستخدمًا Tstep = 10, 5 و0.5 و0.1. كيف يؤثر ذلك على طريقة عرض الرسم البياني؟
الإجابة النموذجية: مع انخفاض مستوى Tstep، يتخذ الرسم البياني شكل منحنى أكثر سلاسة.

2. في هذه المسألة ستدرس العلاقة بين x، y، و t.
   a. قم بتمثيل $X_{1T} = t - 3,\ Y_{1T} = t + 4$ من خلال رسم بياني في نافذة العرض القياسية. **a–b. انظر الهامش.**
   b. استبدل المعادلات في القسم أ بـ $X_{1T} = t,\ Y_{1T} = t + 7$ ومثلها من خلال رسم بياني.
   c. ما الذي تلاحظه في الرسمين البيانيين؟ **إنهما متشابهان.**
   d. **للاستدلال** ما النتائج التي تستخلصها عن العلاقة بين x، y، و t؟ بمعنى آخر، كيف في اعتقادك تم تكوين المجموعة الثانية من المعادلات الوسيطية باستخدام المجموعة الأولى؟

2d. الإجابة النموذجية: تكونت المجموعة الثانية من المعادلات الوسيطية عن طريق التعويض عن t.

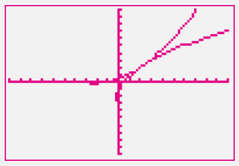
5. الإجابة النموذجية:



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; *t*step: 1

$D = \{t \mid t \geq 0\}$

6. الإجابة النموذجية:



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−0.5, 10]; *t*step: 1

$D = \{t \mid t \geq -0.5\}$

G12 GEN TE CH01.indb 74 8/22/2016 4:31:40 PM

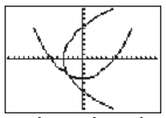
أحد فوائد المعادلات الوسيطية هي القدرة على تمثيل الدوال العكسية في رسوم بيانية دون قياسها.

النشاط 2 مثل دالة عكسية في رسم بياني

مثل في رسم بياني الدالة العكسية لـ $x = t, y = 0.1t^2 - 4$.

الخطوة 1 أدخل المعادلات المعطاة مثل X_{1T}، Y_{1T}. لتمثيل الدالة العكسية في رسم بياني، اجعل $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$. وهي تتواجد في القائمة VARS . اختر Y-Vars، وسيطي X_{1T}.

الخطوة 2 مثل العلاقة والدالة العكسية في رسم بياني. يمكنك استخدام ZSquare لمعرفة التناظر بين الرسمين بصورة أوضح.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; *t*step: 1

تمارين **الإجابة النموذجية: (x, y) لأحد الرسومات البيانية مشابهة لـ $(y, -x)$ للرسم الآخر.**

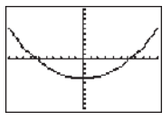
3. **الاستدلال** ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن الزوج المرتب لكل رسم بياني في النشاط 2؟
4. **الاستدلال** هل يمثل الرسم البياني $x = t, y = 0.1t^2 - 4$ دالة تقابلية؟ اشرح.

لا؛ عينة إجابة: فشلت الدالة في اختبار الخط الأفقي.

النشاط 3 المجالات والدوال التقابلية

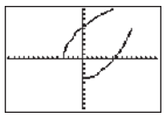
ضع حدًا لمجال $x = t, y = 0.1t^2 - 4$ حتى تجعلها دالة تقابلية.

الخطوة 1 الرسم البياني لـ $x = t, y = 0.1t^2 - 4$ متناظر بالنسبة للمحور الرأسي y. يمكننا إنشاء دالة تقابلية لقيم $0 \le t \le 10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; *t*step: 1

الخطوة 2 غير Tmin من −10 إلى 0 من أجل تحديد المجال. مثل الدالة التقابلية ومعكوسها في رسم بياني.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; *t*step: 1

نصيحة للدراسة
التناظر قد تحتاج لاستخدام خاصية التتبع وضبط Tstep لتحديد موقع محور التناظر.

تمارين

مثل كل دالة في رسم بياني. ثم مثل الدوال العكسية وأشر إلى المجال المحدود إذا لزم الأمر. 5–10. انظر الهامش.

5. $x = t - 6, y = t^2 + 2$
6. $x = 3t - 1, y = t^2 + t$
7. $x = 3 - 2t, y = t^2 - 2t + 1$
8. $x = 2t^2 + 3, y = \sqrt{t}$
9. $9x = 4t, y = \sqrt{t + 2}$
10. $x = t - 8, y = t^3$
11. **التحدي** فكر في دالة خماسية بها قيمتين عظمتين نسبيتين وقيمتين صغرتين نسبيتين. إلى كم دالة تقابلية مختلفة يمكن فصل هذه الدالة إذا تم استخدام أكبر فترة ممكنة في كل دالة؟ **5**

التدريب وذلك اجعل الطلاب يستكملون التمارين من 5–1، 8، و 11

3 تقويم

التقييم التكويني

استخدم التمارين 6، 7، 9، و 10 لمساعدة الطلاب في فهم المعادلات الحدودية.

من البداية الى الخلاصة

اعطِ الطلاب المجموعات التالية من المعادلات الحدودية ، واجعلهم يحددون النقطة من الزمن التي تصبح فيها قيمة y–أكبر من الأخرى.

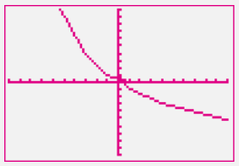
$y_1 = t^2$ ؛ $x_1 = t$

$y_2 = 2t + 2$ ؛ $x_2 = t$

حدد y_1 تعادل y_2 وحل لـــ t. الحل يكون $t = \sqrt{3} + 1$. وبالتالي لـــ t في الفترة الفاصلة $(0, \sqrt{3} + 1)$، $y_1 < y_2$. من أجل t في الفترة الفاصلة $(\sqrt{3} + 1, \infty)$، $y_1 > y_2$. التغير في العلاقة بين y القيمة تحدث $t = \sqrt{3} + 1$.

إجابات إضافية

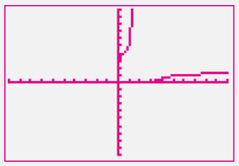
7. الإجابة النموذجية



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [1, 10]; *t*step: 1

$D = \{t \mid t \ge 1\}$

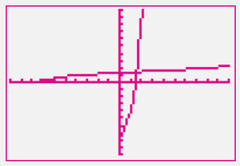
8.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; *t*step: 1

D: $\{t \mid t \ge 0\}$

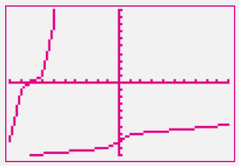
9.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−2, 10]; *t*step: 1

D: $\{t \mid t \ge -2\}$

10.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; *t*step: 1

G12 GEN TE CH01.indb 75 8/22/2016 4:31:49 PM

الوحدة 1

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال (الدرس 1-1)

- تشمل المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية الأعداد الصحيحة والأعداد النسبية والأعداد غير النسبية والأعداد الكلية والأعداد الطبيعية.
- الدالة ؛ f علاقة تعين كل عنصر في المجال بالضبط لكل عنصر واحد في النطاق.
- نجح الرسم البياني للدالة باختبار الخط العمودي.

تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات (ص. 1-2)

- قد تكون الرسوم البيانية متناظرة فيما يتعلق بالمحور الرأسي y والمحور الأفقي x ونقطة الأصل .
- تتناظر الدالة الزوجية مع المحور الرأسي y. تتناظر الدالة الفردية مع نقطة الأصل.

الاتصال و السلوك الطرفي والنهايا (ص. 1-3)

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من قيمة فريدة L حين تقترب x من c من أي جانب، إذن فنهاية $f(x)$ حين تقترب x من c تكون L. تُكتب نها $\lim_{x \to c} f(x) = L$
- قد تكون الدالة متقطعة بسبب الانقطاع اللانهائي، أو الانقطاع المتنقل أو الانقطاع القابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (ص. 1-4)

- يمكن وصف الدالة بأنها تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة.
- القيم القصوى للدالة تشمل القيم العظمى والقيم الصغرى النسبية والقيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة.
- يمكن تمثيل متوسط معدل التغير بين نقطتين من خلال $m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

الدوال الرئيسية و التحويلات (الدرس 1-5)

تشمل تحويلات الدوال الرئيسية الإزاحات والانعكاسات وتغييرات الأبعاد بمقياس.

عمليات الدوال وتركيبها (ص. 1-6)

يشكل جمع وطرح وحاصل ضرب وحاصل وتركيب دالتين دوال جديدة.

العلاقات والدوال العكسية (ص. 1-7)

- تعد علاقتان عكسيتين في حالة فقط أن إحداهما تحتوي على العنصر (b, a) بينما تحتوي الأخرى على العنصر (a, b).
- الدالتان، f و f^{-1}، هما دالتان عكسيتان في حالة فقط أن $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$

المفردات الأساسية

التركيب (ص. 58)
ثابتة (ص. 34)
دالة متصلة (ص.24)
دالة تنازلية (ص. 34)
تغيير الأبعاد بمقياس (ص. 49)
دالة متقطعة (ص. 24)
السلوك الطرفي للرسم البياني (ص. 28)
دالة زوجية (ص. 18)
القيم القصوى (ص. 36)
دالة (ص. 5)
تصاعدية (ص. 34)
رمز الفترة (ص. 5)
دالة عكسية (ص. 65)
علاقة عكسية (ص. 65)
نهاية (ص. 24)
تناظر محوري (ص. 16)
القيمة العظمى (ص. 36)
القيمة الصغرى (ص. 36)
انقطاع غير قابل للإزالة (ص. 25)
دالة فردية (ص. 18)
تقابلية (ص. 66)
دالة رئيسية (ص. 45)
دالة متعددة التعريف (ص. 8)
تناظر النقطة (ص. 16)
انعكاس (ص. 48)
الجذور (ص. 15)
الإزاحة (ص. 47)
دالة صفرية (ص. 45)
أصفار (ص. 15)

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة. في حالة أنها خاطئة، استبدل المصطلح الذي تحته خط بمصطلح آخر لتصبح جملة صحيحة.

1. الدالة تعين كل عنصر في مجالها لعنصر واحد بالضبط في نطاقها. **صحيحة**
2. الرسوم البيانية التي بها تناظر نقطة يمكن أن تُدار 180° فيما يتعلق بنقطة وتبدو غير متغيرة. **صحيحة**
3. الدالة الفردية لها نقطة تناظر. **صحيحة**
4. لا يملك الرسم البياني للدالة المتصلة فجوات أو فواصل. **صحيحة**
5. تصف نهاية الرسم البياني الاقتراب من قيمة بدون الوصول إليها بالضرورة. **خاطئة؛ السلوك الطرفي**
6. الدالة $f(x)$ التي تتنازل قيمتها كلما تتصاعد x تسمى الدالة التنازلية. **صحيحة**
7. القيم القصوى للدالة يمكن أن تشمل القيم العظمى والصغرى النسبية. **صحيحة**
8. تنتج إزاحة الرسم البياني صورة عكسية للرسم البياني فيما يتعلق بخط ما. **خاطئة؛ الانعكاس**
9. تمر الدالة التقابلية باختبار الخط الأفقي. **صحيحة**
10. الدوال التقابلية لها تناظر محوري. **خاطئة؛ الدوال العكسية**

G12 GEN TE CH01.indb 76 8/22/2016 4:31:54 PM

المراجعة درس بدرس

1-1 الدوال

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة لـــ x.

.11 $3x - 2y = 18$ **دالة**

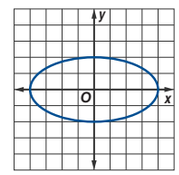
.12 $y^3 - x = 4$ **دالة**

.13

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

دالة

.14



ليست دالة

لنقل أن $f(x) = x^2 - 3x + 4$. أوجد كل من قيم الدوال.

.15 $f(5)$ **14**

.16 $f(-3x))$ $\mathbf{9x^2 + 9x + 4}$

حدد مجال كل دالة.

.17 $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$ $\mathbf{D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}}$

.18 $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

.19 $h(a) = \dfrac{5}{a + 5}$ $\mathbf{D = \{a \mid a \neq -5, a \in \mathbb{R}\}}$

.20 $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ $\mathbf{D = \{x \mid x \neq \pm 2, x \in \mathbb{R}\}}$

المثال 1

حدد ما إذا كانت $y^2 - 8 = x$ تمثل y كدالة لـــ x.

حل المسألة لإيجاد y.

$y^2 - 8 = x$ المعدلة الأصلية

$y^2 = x + 8$ أضف 8 إلى كل جانب

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ أضف الجذر التربيعي لكل جانب

لا تمثل المعادلة y كدالة لـــ x لأن أي قيمة x أكبر من -8. سوف تتواجد قيمتين متماثلتين لـــ y.

المثال 2

لنقل أن $g(x) = -3x^2 + x - 6$. أوجد $g(2)$.

استبدل 2 بـــ x في هذه المعادلة $-3x^2 + x - 6$.

$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$

$= -12 + 2 - 6$ or -16 أو

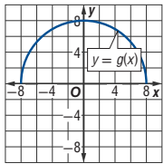
$x = 2$

قم بالتبسيط.

1-2 تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات

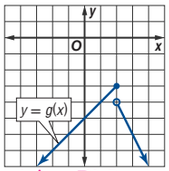
استخدم الرسم البياني لـــ g لمعرفة مجال ونطاق كل دالة.

.21



$\mathbf{D = [-8, 8], R = [0, 8]}$

.22



$\mathbf{D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}, R = (-\infty, -3)}$

أوجد التقاطع مع المحور الرأسي y وأصفار كل دالة.

.23 $f(x) = 4x - 9$ $\mathbf{-9; \frac{9}{4}}$

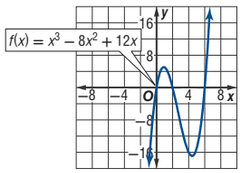
.24 $f(x) = x^2 - 6x - 27$ $\mathbf{-27; -3, 9}$

.25 $f(x) = x^3 - 16x$ $\mathbf{0; 0, 4, -4}$

.26 $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$ $\mathbf{\sqrt{2} - 1; -1}$

المثال 3

استخدم الرسم البياني لـــ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد التقاطع مع المحور الرأسي y والأصفار. ثم أوجد القيم من خلال الجبر.



Estimate Graphically

يبدو أن $f(x)$ تتقاطع مع المحور الرأسي y عند $(0, 0)$. لذلك فإن التقاطع مع المحور الرأسي y هو 0.

يبدو أن تقاطع المحور الأفقي x يتم عند 0. 2. 6.

قم بحل المسألة من خلال الجبر

أوجد $f(0)$.

$f(0) = (0)^3 - 8(0)^2 + 12(0)$ أو 0

يتم تقاطع المحور الرأسي y عند 0.

حلّل عوامل المعادلة ذات الصلة.

$x(x^2 - 8x + 12) = 0$

$= x(x - 6)(x - 2)$

أصفار f هي 0. و6. و2.

G12 GEN TE CH01.indb 77 8/22/2016 4:31:58 PM

الفصل 1

دليل الدراسة والمراجعة تابع

الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

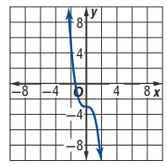
حدد ما إذا كانت كل دالة هي دالة متصلة عند قيمة (قيم) x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. في حالة كانت متقطعة، حدد نوع الانقطاع سواء كان لانهائي أو متنقل أو قابل للإزالة.

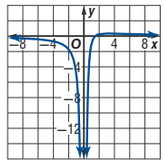
راجع الهامش. 27–31

27. $f(x) = x^2 - 3x;\ x = 4$.
28. $f(x) = \sqrt{2x - 4};\ x = 10$.
29. $f(x) = \frac{x}{x+7};\ x = 0$ و $x = 7$
30. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4};\ x = 2$ و $x = 4$
31. $f(x) = \begin{cases} \end{cases}$

راجع الهامش. 32–33

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي.

32.


33.


المثال 4

حدد ما إذا كانت $f(x)$ متصلة عند $x = 0$ و $x =$. علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. إذا كانت منقطعة، فحدد نوع الانقطاع لانهائي، أو متنقل أو قابل للإزالة.

$f(0) =$. إذن f تتحدد عند صفر. تشير قيم الدالة إلى أنها كلما كانت f تقترب من فإن x تقترب من .

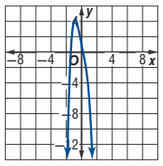
x	−0.1	−0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	−0.244	−0.249	−0.25	−0.251	−0.256

ولأنها $\lim_{x \to 0}$ تُقدر أن تكون و $f(0) =$, نستنتج أن تستمر حتى $x =$.
لأن f لا تتحدد عند . f غير متصلة عند .

المثال 5

استخدم الرسم البياني لـ $f(x) = -2x^4 - 5x +$ لوصف السلوك الطرفي.

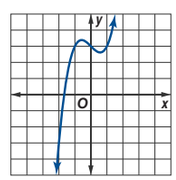
افحص الرسم البياني لـ .
بما أن $x \to \infty,\ f(x) \to$.
بما أن $x \to -\infty,\ f(x) \to$.

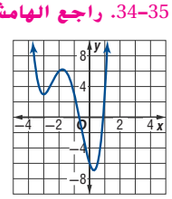


القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة التي تكون عندها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة. قدر إلى أقرب وحدة وصنف القيم القصوى للرسم البياني بكل دالة.

راجع الهامش. 34–35

34.


35.


أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة على الفترة المحددة.

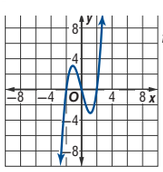
36. $f(x) = -x^3 + 3x + 1;$
37. $f(x) = x^2 + 2x + 5;$

المثال 6

استخدم الرسم البياني لـ $f(x) = x^3 -$ لتقدير الفترات لأقرب وحدة والتي تكون عندها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة. قدر إلى أقرب وحدة وصنف القيم القصوى للرسم البياني بكل دالة.

من خلال الرسم البياني، يمكننا تقدير أن f تصاعدية عند ,$(-\infty$, وتنازلية عند ,$-1)$, وتصاعدية عند ,$1)$.

يمكننا تقدير أن f بها قيمة قصوى نسبية عند ,$-1)$ وقيمة صغرى عند ,$1)$.



إجابات إضافية

27. مستمر عند $x = 4$; التابع يحدد عندما $x = 4$. التابع 4 يقترب عندما x التقريب 4 من الجانبين، و $f(4) = 4$.

28. مستمر عند $x = 10$; التابع يحدد عندما $x = 10$. التابع 4 يقترب عندما x تقارب 10 من كلا الجانبين

29. مستمر عند $x = 0$; التابع يحدد عندما $x = 0$. التابع يقارب 0 عندما x تقارب 0 من كلا الجانبين، و $f(0) = 0$. تستمر الى $x = 7$; التابع يحدد عندما $x = 7$. التابع يقارب 0.5 عندما x تقارب 7 من كلا الجانبين، و $f(7) = 0.5$.

30. متقطع عند $x = 2$; التابع غير معرف عندما $x = 2$. انه الانقطاع اللانهائي التابع مستمر عند $x = 4$; التابع متواجد عندما $x = 4$. التابع يقارب $\frac{1}{3}$ عندما x تقارب 4 من كلا الجانبين الجوانب، و $f(4) = \frac{1}{3}$.

31. مستمر عند $x = 1$; التابع يحدد عندما $x = 1$. التابع 2 يقترب عندما x التقريب 1 من الجانبين، و $f(1) = 2$.

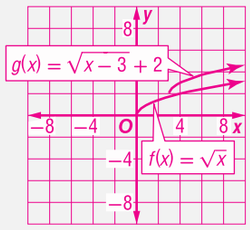
32. من الرسم البياني يبدو أن $x \to \infty,\ f(x) \to -\infty$; كا $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$.

33. من الرسم البياني يبدو أن $x \to \infty,\ f(x) \to 0$; as $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$.

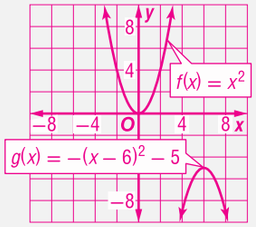
34. f يرتفع في $(-\infty, -0.5)$, ينخفض في $(-0.5, 0.5)$, و يرتفع عند $(0.5, \infty)$; قيمة عُظمى النسبي $(-0.5, 3.5)$ والحد الأدنى النسبي $(0.5, 2.5)$.

35. f تنخفض في $(\infty, -3)$, ترتفع في $(-3, -1.5)$, ترتفع في $(-1.5, 0.5)$, و ترتفع في $(0.5, \infty)$; قيمة صُغرى النسبي $(-3, 3)$, قيمة عُظمى النسبي $(-1.5, 6)$ والحد الأدنى النسبي $(-7, 0.5)$.

38. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x)$ يكون الرسم البياني $f(x)$ منقول 3 وحدات الى اليمين و 2 وحدات الى أعلى.



39. $f(x) = x^2;\ g(x)$ يكون الرسم البياني $f(x)$ معكوس على الـ x-المحور و منقول 6 وحدات الى اليمين و 5 وحدات الى أسفل



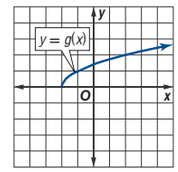
G12 GEN TE CH01.indb 78 8/22/2016 4:32:02 PM

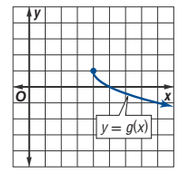
الدوال الرئيسية والتحويلات

حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ الخاصة بـ ، وصف كيف تكون الرسوم البيانية لـ و مرتبطة. ثم مثل في رسم بياني على نفس المحاور. راجع 38–41.

38. $g(x) = \sqrt{x-3}$
39. $g(x) = -(x-6)^2$
40. $g(x)$
41. $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!]$

صف كيف تكون الرسوم البيانية لكل من $f(x)$ و مرتبطة. ثم قم بكتابة المعادلة لـ .

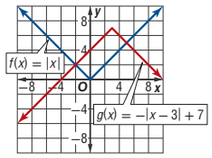
42.


43.


المثال 7

حدد الدالة الرئيسية لـ $g(x) = -|x-3| +$. وصف كيف تكون الرسوم البيانية لـ و مرتبطة. ثم مثل من خلال الرسم البياني و على نفس المحاور.

الدالة الرئيسية لـ هي $f(x) =$. الرسم البياني لـ g يكون هو الرسم البياني ذاته لـ f منعكس في المحور الأفقي x، ومُزاح بـ وحدات إلى اليمين و وحدات إلى الأعلى.



42. الرسم البياني مُزاح بوحدتين يسارًا $g(x)$.

43. الرسم البياني منعكس في المحور الأفقي x ومُزاح بـ وحدات لليمين ووحدة واحدة للأعلى؛ $g(x) = -\sqrt{x-4}$.

عمليات الدوال وتركيبها

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل $f(x)$ و $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة. راجع الهامش. 44–47.

44. $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x^2 + 4x$
45. $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 5x$
46. $f(x) = x^3 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 -$
47. $f(x)$, $g(x)$

لكل زوج من الدوال، أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f]$ و $[f \circ g]$.

48. $f(x) = 4x - 11;\ g(x) = 2$
49. $f(x) = x^2 + 2x + 8;\ g(x) = x$
50. $f(x) = x^2 - 3x + 4;\ g(x)$

أوجد $f \circ g$. راجع الهامش. 51–52.

51. $f(x)$, $g(x) = 2x -$
52. $f(x)$, $g(x) = 6x -$

المثال 8

مع معرفة أن $f(x) = x^3 -$ و $g(x) = x +$. أوجد $(f+g)$، $(f-g)(x), (f \cdot g)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)$. حدد مجال كل دالة جديدة.

$(f+g) = f(x) +$
$= (x^3 - 1) + (x$
$= x^3 + x +$

مجال $(f+g)$ هو $(-\infty,$.

$(f-g) = f(x) -$
$= (x^3 - 1) - (x$
$= x^3 - x -$

مجال $(f-g)$ هو $(-\infty,$.

$(f \cdot g) = f(x) \cdot$
$= (x^3 - 1)(x$
$= x^4 + 7x^3 - x$

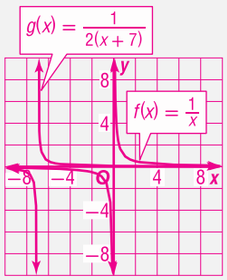
مجال $(f \cdot g)$ هو $(-\infty,$.

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$

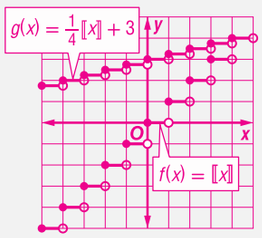
مجال $\left(\frac{f}{g}\right)$ هو $D = (-\infty, -7) \cup (-7,$.

إجابات إضافية

40. $f(x) = 1 - x$; $g(x)$ يكون الرسم البياني ل $f(x)$ منقول 7 وحدات الى اليسار, وتكون مضغوطة بشكل عمودي بعامل ال $\frac{1}{2}$ of .



41. $f(x) = [\![x]\!]$; $g(x)$ يكون الرسم البياني ل $f(x)$ مضغوطة بشكل عمودي بعامل ال $\frac{1}{4}$ ومنقول 3 وحدات الى أعلى.



44. $(f+g)(x) = 2x^2 + 5x - 3$; $D = (-\infty, \infty)$; $(f-g)(x) = -2x^2 - 3x + 9$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$;
$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$

45. $(f+g)(x) = 4x^2 + 5x - 2$; $D = (-\infty, \infty)$; $(f-g)(x) = 4x^2 - 5x$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2 - 1}{5x - 1}$;
$D = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$

46. $(f+g)(x) = x^3 + 2x^2 + 2$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f-g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 26x^2 - 15$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{4x^2 - 3}$;
$D = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$

47. $(f+g)(x) = \frac{x+1}{x^2}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$(f-g)(x) = \frac{x-1}{x^2}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x^3}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

51. $[f \circ g](x) = \frac{1}{2x - 9}$ لـ $x \neq \frac{9}{2}$

52. $[f \circ g](x) = \sqrt{6x - 9}$ لـ $x \geq \frac{3}{2}$

G12 GEN TE CH01.indb 79 8/22/2016 4:32:07 PM

إجابات إضافية

57. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

58. $g^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

59. $h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3,\ x \geq 0$

60. $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-1},\ x \neq 1$

64a. مثال على الإجابة: عدد الضربات الناجحة انخفض، ثم ازداد ولأن 23 ليس الرقم الأصغر للضربات النّاجحة.

64c. مثال على الإجابة: كان هناك عدد أقل من الضربة الناجحة في عام 2012 عنه في 2007.

67a. $A(x) = 6.4516x$ cm^2

67b. $A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516}$ x في ^{2}

الوحدة 1 دليل الدراسة والمراجعة تابع

العلاقات والدوال العكسية

مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا.

53. $f(x) = |x| + 6$ **لا**

54. $f(x) =$ **نعم**

55. $f(x) =$ **نعم**

56. $f(x) = x^3 - 4x^2$ **لا**

أوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في المجال. **57–60. راجع الهامش.**

57. $f(x) = x^3 -$

58. $g(x) = -4x +$

59. $h(x) =$

60. $f(x)$

المثال 9

أوجد الدالة العكسية لـ $f(x) = \sqrt{x} -$ وحدد أي قيود على المجال الخاص بها.

لاحظ أن f لها مجال $[0,$ ونطاق $[-3,$. أوجد الآن العلاقة العكسية لـ f.

$y = \sqrt{x} -$ استبدل بـ y.

$x = \sqrt{y} -$ y و x بدّل بين.

$x + 3 =$ اجمع إلى كل جانب

$(x + 3)^2$ تربيع كل جانب. لاحظ أن $D = (-\infty,$ و $R = [0,$.

مجال $y = (x + 3$ لا يساوي نطاق f إلا إذا كان متقيدًا بـ $[-3,$. إذن، $f^{-1}(x) = (x +$ لـ $x \geq$.

التطبيقات وحل المسائل

a، ج. راجع الوحدة 1، ملحق الإجابات.

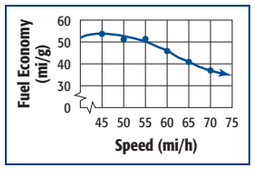
61. **الهواتف الخلوية** يوفر الهاتف الخلوي مبدئيًا خطة هاتف تكلفتها $39.99 شهريًا. تشمل الخطة 500 دقيقة يمكن استخدامهم بالنهار من الأحد للخميس بين 7 صباحًا و7 مساءًا. يدفع المستخدم $0.20 للدقيقة الواحدة لكل دقيقة يتم استخدامها بالنهار على مدى 500 دقيقة مستخدمة. (الدرس 1–1)

a. اكتب دالة $p(x)$ بتكلفة خدمة شهرية يمكنك خلالها استخدام x دقائق النهار.

b. ما التكلفة التي ستدفعها إذا استهلكت 450 دقيقة بالنهار؟ 550 دقيقة بالنهار؟ **$39.99; $49.99**

c. مثل بالرسم البياني $p(x)$.

62. **السيارات** يظهر هنا استهلاك الوقود لسيارة هجينة على مستويات سرعة مختلفة على الطريق السريع. (الدرس 1–2)



الإجابة النموذجية: تقريبًا 51 mi/g

a. تقريبًا ما هو قدر الوقود المستهلك للسيارة التي تسافر 50 ميلًا في الساعة؟

b. تقريبًا ما هي السرعة التي سيكون عندها استهلاك الوقود للسيارة أقل من 40 ميلًا للجالون؟

الإجابة النموذجية: تقريبًا 67 mph أو أسرع

63. **الرواتب** بعد عمل السيدة فاطمة في الشركة لمدة خمس سنوات، تمت ترقيتها. فهي تحصل الآن على راتب يزيد عن راتبها السابق بمبلغ $1500 في الشهر. هل ستكون الدالة التي تمثل دخلها الشهري دالة متصلة؟ اشرح (الدرس 1-3)

لا؛ الإجابة النموذجية: في وقت ترقيتها، كان لدخلها انقطاع متنقل.

64. **البيسبول** يوضح الجدول عدد الضربات السليمة التي أحرزها لاعب بايسبول في كل عام من الأعوام الخمسة الأولى التي لعب فيها بصورة احترافية. (الدرس 1–4)

سنة	2004	2005	2006	2007	2008
عدد الضربات السليمة	5	36	23	42	42

a. اشرح سبب تمثيل 2006 لقيمة صغرى نسبية.

b. افترض أن متوسط معدل التغير لضربات السليمة بين عامي 2008 و هو 5 ضربات سليمة في العام. كم عدد الضربات السليمة في ؟ **57 ضربة سليمة**

c. افترض أن متوسط معدل التغيير للضربات السليمة بين عامي 2007 و2012 سالب. قارن بين عدد الضربات السليمة في 2007 و2012. **ج. راجع الهامش.**

65. **الفيزياء** رُمي الحجر أفقيًا من أعلى جرف. سرعة الحجر التي تم قياسها بالأمتار لكل ثانية بعد t ثوان من الممكن تمثيلها من خلال $v(t) = -\sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. سرعة الحجر هي القيمة المطلقة لسرعتها. ارسم رسمًا بيانيًا لسرعة الحجر خلال أول 6 ثوانٍ. (الدرس 1–5) **راجع الوحدة 1 ملحق الإجابات.**

66. **العلم** بالأمور المالية يعلن متجر كبير عن خصم AED على أي سروال جينز. ما هي تكلفة الجينز إذا كان السعر الأصلي AED 55 وهناك 8.5% ضريبة المبيعات؟ (الدرس 1–6) **AED 48.83**

67. **القياس** تعادل بوصة واحدة 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1–7) **A–B67. راجع الهامش.**

a. اكتب دالة $A(x)$ تحول المساحة x لمستطيل من بوصة مربعة لسم مربع.

b. اكتب دالة A^{-1} تحول المساحة x للمستطيل من سم مربع لبوصة مربعة.

G12 GEN TE CH01.indb 80 8/22/2016 4:32:11 PM