أسئلة هيكل الفيزياء

حادي عشر متقدم

https://t.me/h11Ad36

مراجعة المفاهيم 8.1

في الحالة الموضَّحة في الشكل 8.2، ما المقادير النسبية للكتلتين m_1 وm_2؟

a) $m_1 < m_2$

b) $m_1 > m_2$

c) $m_1 = m_2$

d) لا يمكن تحديد أي الكتلتين أكبر استنادًا إلى المعلومات المتوفرة في الشكل فقط.

مراجعة المفاهيم 8.2

زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة المصنوعة من الزيت والخل، نصفها من الخل (بكثافة كتلية $1.01\ g/cm^3$) والنصف الآخر من الزيت (بكثافة كتلية $0.910\ g/cm^3$) موضوعة على طاولة. في البداية، كان الزيت منفصلًا عن الخل، حيث كان يطفو فوق الخل. فرُجّت الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تمامًا ثم وُضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تغيُّر ارتفاع مركز كتلة توابل السلطة نتيجةً للخلط؟

a) أعلى.

b) أقل.

c) عند نفس الارتفاع.

d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن هذا السؤال.

مسألة محلولة 8.1 مركز كتلة الأرض والقمر

تبلغ كتلة الأرض 5.97×10^{24} kg، وتبلغ كتلة القمر 7.36×10^{22} kg. ويدور القمر حول الأرض على مسافة تبعد 384,000 km؛ أي أنّ مركز القمر يبعد مسافة مقدارها 384,000 km عن مركز الأرض، كما هو موضّح في الشكل 8.3a.

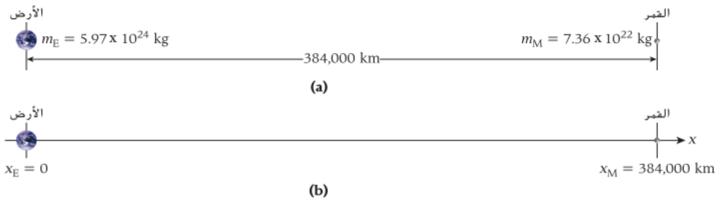
المسألة

ما المسافة التي يبعدها مركز كتلة نظام الأرض والقمر عن مركز الأرض؟

الحل

فكّر يمكن تحديد مركز كتلة نظام الأرض والقمر بوضع مركز الأرض عند النقطة $x = 0$ ووضع مركز القمر عند النقطة $x = 384,000$ km. سيتركز مركز كتلة نظام الأرض والقمر على طول الخط الذي يصل بين مركز الأرض ومركز القمر (كما هو موضّح في الشكل 8.3a).

ارسم يوضح الشكل 8.3b رسمًا بيانيًا كمقياس للأرض والقمر.



الشكل 8.3 (a) يدور القمر حول الأرض على بعد 384,000 km عنها (الرسم بمقياس نسبي). (b) يوضح الرسم أنّ الأرض تقع عند $x_E = 0$ والقمر يقع عند $x_M = 384,000$ km.

ابحث نحدد محور x ونضع الأرض عند النقطة $x_E = 0$ والقمر عند النقطة $x_M = 384,000$ km. يمكننا استخدام المعادلة 8.2 للتوصل إلى تعبير للإحداثي x لمركز كتلة نظام الأرض والقمر:

$$X = \frac{x_E m_E + x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

بسِّط بما أننا وضعنا نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز الأرض، فإننا حدّدنا أنّ $x_E = 0$. وينتج عن ذلك أنّ

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

احسب عند التعويض بالقيم العددية، نجد أن إحداثي x لمركز كتلة نظام الأرض والقمر يصبح كما يلي:

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M} = \frac{(384,000\ \text{km})(7.36 \times 10^{22}\ \text{kg})}{5.97 \times 10^{24}\ \text{kg} + 7.36 \times 10^{22}\ \text{kg}} = 4676.418\ \text{km}.$$

قرِّب كانت كل القيم العددية معطاة بثلاثة أرقام معنوية، لذا سنقرب النتيجة لتصبح

$$X = 4680\ \text{km}.$$

تحقَّق ثانية تظهر النتيجة بوحدة الكيلومتر، وهي الوحدة الصحيحة للتعبير عن الموقع. كما أن مركز كتلة نظام الأرض والقمر قريب من مركز الأرض، وهذه المسافة صغيرة مقارنة بالمسافة بين الأرض والقمر، وهذا منطقي لأن كتلة الأرض أكبر بكثير من كتلة القمر. في الواقع، تقل هذه المسافة عن نصف قطر الأرض، $R_E = 6370$ km. ويدور كل من الأرض والقمر بالفعل حول مركز الكتلة المشترك، لذا تبدو الأرض وكأنها تتحرك حركة تذبذبية أثناء دوران القمر حولها.

مثال 9.1 تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والقطبية

نقطة موقعها محدّد بالإحداثيات الديكارتية (4,3)، كما هو موضح في الشكل 9.5.

المسألة

كيف يمكننا تمثيل موقع هذه النقطة بالإحداثيات القطبية؟

الحل

باستخدام المعادلة 9.1، يمكننا حساب الإحداثي القطري:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

باستخدام المعادلة 9.2، يمكننا حساب الإحداثي الزاوي:

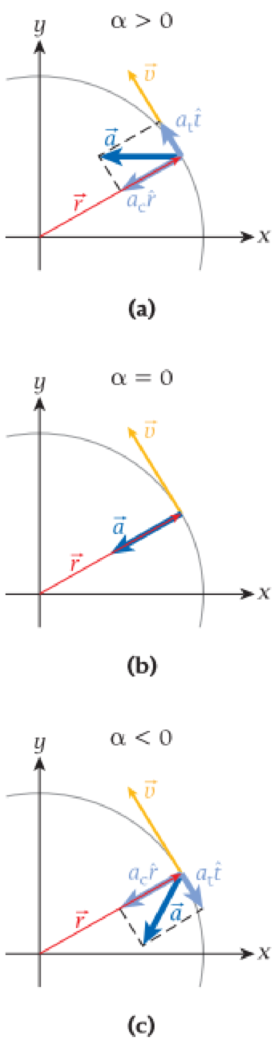
$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64 \text{ rad} = 37°.$$

لذا يمكننا التعبير عن موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالصيغة التالية

$$(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37°)$$

لاحظ أنه يمكننا أن نحدد الموقع نفسه عن طريق جمع (أي مضاعفات صحيحة لـ 2π rad أو 360° على θ:

$$(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37°) = (5, 2\pi \text{ rad} + 0.64 \text{ rad}) = (5, 360° + 37°).$$



الشكل 9.12 العلاقات بين العجلة الخطية والعجلة المركزية والعجلة الزاوية مع (a) السرعة المتزايدة و(b) السرعة الثابتة و(c) السرعة المتناقصة.

مراجعة المفاهيم 9.1

إذا كان نصف قطر عجلات الدراجة R، وتسير الدراجة بسرعة v. فأي من التعبيرات التالية يصف السرعة الزاوية للإطار الأمامي؟

a) $\omega = \frac{1}{2}Rv^2$

b) $\omega = \frac{1}{2}vR^2$

c) $\omega = R/v$

d) $\omega = Rv$

e) $\omega = v/R$

مثال 9.5 العجلة المركزية الناتجة عن الدوران المحوري للأرض

نظرًا لدوران الأرض، تتحرك النقاط الموجودة على سطحها بسرعة زاوية ومن المثير حساب العجلة المركزية المقابلة. يمكن لهذه العجلة أن تغير قليلًا القيمة المعروفة للعجلة الناتجة عن الجاذبية على سطح الأرض.

يمكننا التعويض ببيانات الأرض في المعادلة 9.19 لإيجاد مقدار العجلة المركزية:

$$a_c = \omega^2 r = \omega^2 R_{\text{Earth}} \cos\vartheta$$

$$= (7.27 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1})^2 (6.38 \times 10^6\ \text{m})(\cos\vartheta)$$

$$= (0.034\ \text{m/s}^2)(\cos\vartheta).$$

لقد استخدمنا هنا الرمز نفسه كما في المثال 9.3، حيث تشير ϑ إلى زاوية خط العرض بالنسبة إلى خط الاستواء. توضح النتيجة التي حصلنا عليها أن العجلة المركزية الناتجة عن الدوران المحوري للأرض تغير عجلة الجاذبية الفعلية الملاحظة على سطح الأرض بعامل يتراوح بين 0.34 بالمئة (عند خط الاستواء) وصفر (عند الأقطاب). باستخدام سياتل وميامي كأمثلة، نحصل على عجلة مركزية مقدارها $0.02\ \text{m/s}^2$ لسياتل وعجلة مركزية مقدارها $0.03\ \text{m/s}^2$ لميامي. تُعد هذه القيم صغيرة نسبيًا مقارنة بالقيمة المقدمة لعجلة الجاذبية، $9.81\ \text{m/s}^2$. لكن لا يمكن إهمالها دائمًا.

مراجعة المفاهيم 9.5

عندما تكون في حلقة رأسية في عربة أفعوانية عالية السرعة، ما الذي يبقيك في مقعدك؟

a) القوة الطاردة المركزية

b) القوة المتعامدة المتولدة من المسار

c) قوة الجاذبية

d) قوة الاحتكاك

e) القوة التي يبذلها حزام الأمان

9.13 توجد دراجة نصف قطر عجلتها 33.0 cm، وتتحرك بسرعة تصل إلى 6.5 m/s. فما السرعة الزاويّة للإطار الأمامي؟

a) 0.197 rad/s
b) 1.24 rad/s
c) 5.08 rad/s
d) 19.7 rad/s
e) 215 rad/s

9.8 السرعة الزاويّة لعقرب الساعة (بوحدة الراديان في الثانية)

a) $\frac{\pi}{21,600}$
b) $\frac{\pi}{7200}$
c) $\frac{\pi}{3600}$
d) $\frac{\pi}{1800}$
e) $\frac{\pi}{60}$

مسألة محلولة 9.3 الحدافة

المسألة

تبدأ حدافة المحرك البخاري في الدوران من السكون بعجلة زاوية ثابتة مقدارها $\alpha = 1.43\ \text{rad/s}^2$. لمدة $t = 25.9\ \text{s}$. ثم تستكمل الدوران بسرعة زاوية ثابتة. ω. بعد دوران الحدافة لمدة $59.5\ \text{s}$. ما القيمة الكلية للزاوية التي دارتها الحدافة منذ بدء دورانها؟

الحل

فكّر نحاول هنا تحديد إجمالي الإزاحة الزاويّة. Θ. بالنسبة إلى الفترة الزمنية للعجلة الزاوية للحدافة. يمكننا استخدام المعادلة 9.26(i) مع $\Theta_0 = 0$ و$\omega_0 = 0$. عندما تدور الحدافة بسرعة زاوية ثابتة. نستخدم المعادلة 9.26(i) مع $\Theta_0 = 0$ و$\alpha = 0$. للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية. نجمع هاتين الإزاحتين الزاويتين.

ارسم يوضح الشكل 9.23 منظرًا علويًا للحدافة وهي تدور.

ابحث لنفترض أن زمن العجلة الزاوية للزاوية هو t_a وإجمالي زمن دوران الحدافة هو t_b. إذًا تدور الحدافة بسرعة زاوية ثابتة لمدة زمنية تساوي $t_b - t_a$. يتم تحديد الإزاحة الزاوية. Θ_a. التي تحدث أثناء تحرك الحدافة بعجلة زاوية من خلال

$$\theta_a = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2. \qquad \text{(i)}$$

يتم تحديد الإزاحة الزاوية. θ_b. التي تحدث أثناء دوران الحدافة بعجلة زاوية ثابتة.ω. من خلال

$$\theta_b = \omega(t_b - t_a). \qquad \text{(ii)}$$

يتم تحديد السرعة الزاوية. ω. التي تصل إليها الحدافة بعد تحركها بعجلة زاوية α لمدة t_a من خلال

$$\omega = \alpha t_a. \qquad \text{(iii)}$$

يتم تحديد إجمالي الإزاحة الزاوية من خلال

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b. \qquad \text{(iv)}$$

بسّط يمكننا أن نجمع المعادلتين (ii) و (iii) للحصول على الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحدافة بسرعة زاوية ثابتة:

$$\theta_b = (\alpha t_a)(t_b - t_a) = \alpha t_a t_b - \alpha t_a^2. \qquad \text{(v)}$$

يمكننا جمع المعادلات (v) و(iv) و(i) للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية للحدافة:

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 + \left(\alpha t_a t_b - \alpha t_a^2\right) = \alpha t_a t_b - \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2.$$

احسب عند التعويض بالقيم العددية. نحصل على

$$\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 = \left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s})(59.5\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}\left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s})^2$$
$$= 1724.07\ \text{rad}.$$

قرّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى ثلاثة أرقام معنوية. نحصل على

$$\theta_{\text{total}} = 1720\ \text{rad}.$$

تحقّق ثانية من المشجّع أن الإجابة بالوحدة الصحيحة وهي rad. تعطي الصيغة. $\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 = \alpha t_a(t_b - \tfrac{1}{2}t_a)$. قيمة تزداد بشكل خطي مع قيمة العجلة الزاوية. وهي دائمًا أكبر من الصفر. كما هو متوقع. لأن $t_b > t_a$.

لإجراء مزيد من التحقق. نحسب الإزاحة الزاوية في خطوتين. تتمثل الخطوة الأولى في حساب الإزاحة الزاوية أثناء تسارع الحدافة

$$\theta_a = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 = \tfrac{1}{2}\left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s})^2 = 480\ \text{rad}.$$

تكون السرعة الزاوية للحدافة بعد انتهاء العجلة الزاوية

$$\omega = \alpha t_a = \left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s}) = 37.0\ \text{rad/s}.$$

بعد ذلك نحسب الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحدافة بسرعة متجهة ثابتة:

$$\theta_b = \omega(t_b - t_a) = (37.0\ \text{rad/s})(59.5\ \text{s} - 25.9\ \text{s}) = 1240\ \text{rad}.$$

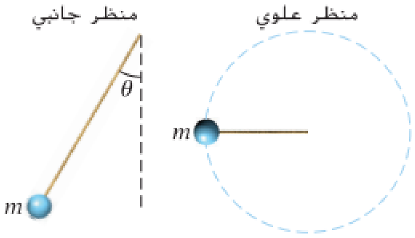
إذًا يكون إجمالي الإزاحة الزاوية

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = 480\ \text{rad} + 1240\ \text{rad} = 1720\ \text{rad},$$

وهذا يتوافق مع إجابتنا.

https://t.me/h11Ad36

9.56• توجد كرة كتلتها $m = 0.200$ kg متصلة بخيط (عديم الكتلة) طوله $L = 1.00$ m وتتحرك حركة دائرية في المستوى الأفقي، كما هو موضّح في الشكل.



a) ارسم مخطط الجسم الحر للكرة.

b) ما القوة التي تلعب دور القوة المركزية؟

c) ما سرعة الكتلة المطلوبة لكي يصل قياس θ إلى $45.0°$؟

d) ما مقدار الشد المؤثر في الخيط؟

9.59•• منعطف على مضمار السباق نصف قطر انحنائه R، ويميل بزاوية θ فوق المستوى الأفقي.

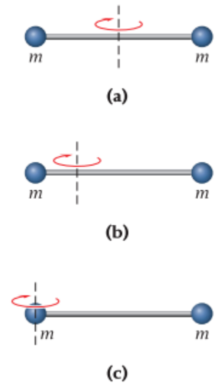
a) ما السرعة المثلى التي يتم اجتياز المنعطف بها إذا كان سطح المضمار مغطى بالجليد (أي هناك احتكاك بسيط للغاية بين الإطارات والمسار)؟

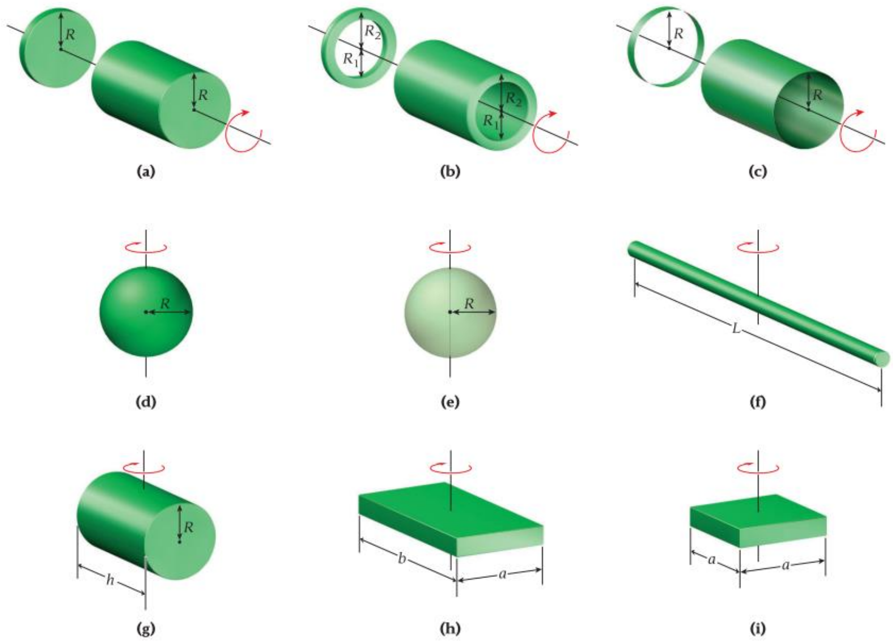
b) إذا كان سطح المضمار خاليًا من الجليد وكان هناك معامل احتكاك μ_s بين الإطارات والمضمار، فما الحد الأقصى والحد الأدنى للسرعات التي يمكن اجتياز هذا المنعطف بها؟

c) احسب ناتج الجزء (a) وناتج الجزء (b) عندما يكون $R = 400.$ m و$\theta = 45.0°$ و$\mu_s = 0.700$.

مراجعة المفاهيم 10.1

فكّر في كتلتين متساويتين، m، متصلتين بساق رفيع عديم الكتلة، كما توضّح الأشكال. تدور الكتلتان في مستوى أفقي حول محور رأسي يُمثَّل بخط متقطّع. ما النظام الذي يحظى بأعلى عزم قصور ذاتي؟





الجدول 10.1 عزم القصور الذاتي وقيمة الثابت c للأجسام الموضحة في الشكل 10.10. جميع الأجسام لها كتلة M

الجسم	I	c
a) أسطوانة صلبة أو قرص	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
b) أسطوانة سميكة جوفاء أو عجلة	$\frac{1}{2}M(R^2{}_1 + R^2{}_2)$	
c) أسطوانة جوفاء أو طوق	MR^2	1
d) جسم كروي صلب	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$
e) جسم كروي أجوف	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$
f) ساق رفيع	$\frac{1}{12}ML^2$	
g) أسطوانة صلبة عمودية على محور التماثل	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$	
h) لوحة مستطيلة مسطحة	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	
i) لوحة مربعة مسطحة	$\frac{1}{6}Ma^2$	

مثال 10.1 الطاقة الحركية الدورانية للأرض

افترض أن الأرض جسم كروي صلب ذو كثافة ثابتة. كتلتة 5.98×10^{24} kg ونصف قطره 6370 km.

المسألة

ما عزم القصور الذاتي للأرض، مع اعتبار أنها تدور حول محورها. وما الطاقة الحركية لهذا الدوران المحوري؟

الحل

بما أنه سيتم تقريب الأرض باستخدام جسم كروي ذي كثافة ثابتة، فإن عزم القصور الذاتي لها سيكون

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2.$$

بالتعويض بقيم الكتلة ونصف القطر، نحصل على

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(6.37 \times 10^{6}\ \text{m})^2 = 9.71 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2.$$

التردد الزاوي لدوران الأرض هو

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{day}} = \frac{2\pi}{86{,}164\ \text{s}} = 7.29 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}.$$

(لاحظ أننا استخدمنا اليوم الفلكي هنا، انظر المثال 9.3).

باستخدام نتيجة قيمة عزم القصور الذاتي والتردد الزاوي، يمكننا إيجاد الطاقة الحركية لدوران الأرض:

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = 0.5(9.71 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2)(7.29 \times 10^{-5}\ \text{rad/s})^2 = 2.58 \times 10^{29}\ \text{J}.$$

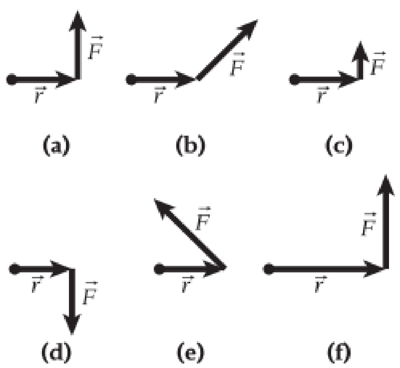
والآن سنقارن هذا بالطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس. في الوحدة 9، حسبنا السرعة المدارية للأرض وكانت $v = 2.97 \times 10^4$ m/s ومن ثم، فإن الطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس هي

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = 0.5(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(2.97 \times 10^{4}\ \text{m/s})^2 = 2.64 \times 10^{33}\ \text{J},$$

وهي أكبر من الطاقة الحركية للدوران المحوري بمعامل يزيد عن 10,000.

مراجعة المفاهيم 10.4

اختر مزيجًا من متجه الموقع، $\vec{r}$، ومتجه القوة، $\vec{F}$، ينتج عزم الدوران لأعلى مقدار حول النقطة التي تشير إليها النقطة السوداء.



مثال 10.2 سباق التدحرج على سطح مائل

المسألة

جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء (أنبوب). كلها بالكتلة m نفسها ولها نصف القطر الخارجي نفسه R. تم تحريرها من وضع السكون في قمة السطح المائل وبدأت في التدحرج دون انزلاق. فما ترتيب وصولها إلى قاع السطح المائل؟

الحل

يمكن الإجابة عن هذا السؤال باستخدام قوانين الطاقة فقط. حيث إنه تم حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية لكل من الأجسام الثلاثة خلال حركة التدحرج، يمكننا أن نكتب لكل جسم

$$E = K + U = K_0 + U_0.$$

تم ترك الأجسام من وضع السكون، لذلك $K_0 = 0$ وبالنسبة إلى طاقة الوضع، يمكننا استخدام $U = mgh$ مرة أخرى. وللحصول على الطاقة الحركية، نستخدم المعادلة 10.14 ومن ثَمّ نحصل على

$$K_{\text{bottom}} = U_{\text{top}} \Rightarrow (1 + c)\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}},$$

وهي نفسها صيغة المعادلة 10.15.

نعلم أنه تم شطب كتلة الجسم ونصف قطره من المعادلة. ومع ذلك، يمكننا أخذ ملاحظة مهمة أخرى. يظهر الثابت c الذي تم تحديده عن طريق توزيع الكتلة في المقام. ونعلم بالفعل قيمة c للأجسام المتدحرجة الثلاثة: $c_{\text{sphere}} = \frac{2}{5}$ و $c_{\text{cylinder}} = \frac{1}{2}$، و $c_{\text{tube}} \approx 1$. وبما أن ثابت الجسم الكروي هو الأصغر، فإن سرعة الجسم الكروي لأي ارتفاع معين h ستكون الأكبر، مما يعني أن الجسم الكروي سيفوز بالسباق. في الفيزياء، بما أن الأجسام الثلاثة لها الكتلة نفسها فإنه سيحدث لها التغير نفسه في طاقة الوضع، وستكون الطاقات الحركية النهائية متساوية. وبناء على ذلك، فإن الجسم الذي له قيمة c أعلى سيكون له طاقة حركية أعلى نسبيًا في الدوران المحوري، ومن ثَمّ يكون له طاقة حركية انتقالية أقل وسرعة خطية أقل. وستأتي الأسطوانة الصلبة في المرتبة الثانية في السباق، ويليها الأنبوب. يوضح الشكل 10.13 لقطات من تجربة مسجلة بالفيديو تثبت الخلاصات التي توصلنا إليها.

مثال 10.3 ورق المرحاض

قد يحدث معك الموقف التالي: تحاول أن تضع لفة جديدة من ورق المرحاض داخل حاملها. ولكن تسقط منك اللفة، وتتمكن من الإمساك بالورقة الأولى فقط. وفي طريقها إلى الأرضية، تنفك لفة ورق المرحاض، كما يوضّح الشكل 10.19a.

المسألة

كم من الوقت تستغرق لفة ورق المرحاض للاصطدام بالأرض، إذا سقطت من ارتفاع 0.73 m؟ اللفة نصف قطرها الداخلي $R_1 = 2.7$ cm، ونصف قطرها الخارجي $R_2 = 6.1$ cm وكتلتها 274 g.

الحل

بالنسبة إلى لفة ورق المرحاض الساقطة، العجلة هي $a_y = -g$. وفي الوحدة 2، تعلمنا أنه في السقوط الحر من السكون، يُحدَّد الموضع كدالة زمنية بشكل عام عن طريق $y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. في هذه الحالة، تساوي السرعة الابتدائية صفرًا؛ إذًا $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. إذا وضعنا نقطة الأصل في مستوى الأرضية، فينبغي أن نجد الزمن الذي يكون عنده $y = 0$. يتضمّن هذا $y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ للزمن الذي تستغرقه اللفّة للاصطدام بالأرض. ومن ثَمّ، فإن الزمن الذي تستغرقه اللفّة للاصطدام بالأرض في السقوط الحر هو

$$t_{\text{free}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(0.73\text{ m})}{9.81\text{ m/s}^2}} = 0.386\text{ s}. \quad \text{(i)}$$

وبما أنك أمسكت بأول ورقة وانفكّ ورق المرحاض في طريقه إلى الأرض، فإن لفّة ورق المرحاض تتدحرج دون انزلاق (بالمعنى الذي عرّفناه سابقًا). لذا فإن العجلة ستكون مختلفة عن حالة السقوط الحر. بمجرد أن نعرف قيمة هذه العجلة، فإنه يُمكننا استخدام الصيغة التي تربط الارتفاع الابتدائي وزمن السقوط المماثلة للمعادلة (i).

كيف نحسب العجلة التي تحدث مع ورق المرحاض؟ مرةً أخرى، سنبدأ بمخطط للجسم الحر. يوضح الشكل 10.19b منظرًا جانبيًا للفّة ورق المرحاض كما يوضح قوة الجاذبية، $\vec{F}_g = mg(-\hat{y})$، والشد من الورقة التي تمسكها اليد، $\vec{T} = T\hat{y}$. ويسمح لنا قانون نيوتن الثاني بربط محصّلة القوة المؤثرة في ورق المرحاض بعجلة اللفّة:

$$T - mg = ma_y. \quad \text{(ii)}$$

الشد والعجلة مجهولان. لذا فإننا نحتاج إلى إيجاد معادلة ثانية لربط هاتين الكميتين يُمكن الحصول على المعادلة الثانية من الحركة الدورانية للفّة. حيث تكون محصّلة عزم الدوران هي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي والعجلة الزاوية: $\tau = I\alpha$. عزم القصور الذاتي للفّة ورق المرحاض هو ذلك الخاص بالأسطوانة الجوفاء، $I = \frac{1}{2}m(R12 + R22)$. ويكون في المعادلة 10.9.

يُمكننا أيضًا ربط العجلات الخطيّة والزاوية عبر $a_y = R_2\alpha$، حيث R_2 نصف القطر الخارجي للفّة ورق المرحاض. نحتاج إلى تحديد الاتجاه الموجب للعجلة الزاوية، وإلا فسوف نحصل على العلامة الخاطئة ومن ثمّ نحصل على نتيجة خاطئة. للتوافق مع اختيار الاتجاه لأعلى باعتباره اتجاه y الموجب، فإننا نحتاج إلى اختيار الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة باعتباره الاتجاه الزاوي الموجب، كما يوضّح الشكل 10.19b.

في ما يتعلق بعزم دوران محور التماثل الخاص بلفّة ورق المرحاض، نحصل على $\tau = -R_2T$. مع اصطلاح إشارة العجلة الزاوية الموجبة التي حددناها للتو. لا تساهم قوة الجاذبية في عزم الدوران حول محور التماثل، لأن ذراع العزم طولها يساوي صفرًا. ويؤدي قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية إلى

$$\tau = I\alpha$$

$$-R_2T = \left[\tfrac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)\right]\frac{a_y}{R_2}$$

$$-T = \tfrac{1}{2}m\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)a_y. \quad \text{(iii)}$$

تشكل المعادلتان (ii) و (iii) مجموعة من معادلتين للكميّتين المجهولتين، T و a_y. وبجمعهما نحصل على

$$-mg = \tfrac{1}{2}m\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)a_y + ma_y.$$

نشطب كتلة لفّة ورق المرحاض، ونجد للعجلة

$$a_y = -\frac{g}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{R_1^2}{2R_2^2}}.$$

باستخدام القيم المُعطاة لنصف القطر الداخلي، $R_1 = 2.7$ cm، ونصف القطر الخارجي، $R_2 = 6.1$ cm، نحصل على قيمة العجلة:

$$a_y = -\frac{9.81\text{ m/s}^2}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{(2.7\text{ cm})^2}{2(6.1\text{ cm})^2}} = -6.14\text{ m/s}^2.$$

بالتعويض بهذه القيمة عن العجلة في معادلة زمن السقوط المماثل للمعادلة (i) نحصل على الإجابة

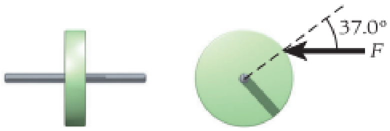
$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2(0.73\text{ m})}{6.14\text{ m/s}^2}} = 0.488\text{ s}.$$

وهذا أطول بمقدار 0.1 s تقريبًا من زمن السقوط الحر للفّة ورق المرحاض التي تمّ تحريرها من الارتفاع نفسه.

مناقشة

لاحظ أننا افترضنا عدم تغيُّر نصف القطر الخارجي للفّة ورق المرحاض أثناء فكّ الورق. بالنسبة إلى المسافة القصيرة الأقل من 1 m، فإنه قد تمت برهنة ذلك. إذا أردنا حساب الزمن الذي يستغرقه ورق المرحاض لينتشر على مسافة، 10 m مثلًا، فإننا سنحتاج إلى مراعاة التغير الذي طرأ على نصف القطر الخارجي. وبالطبع، سنحتاج إلى مراعاة تأثير مقاومة الهواء.

10.49•• تم تثبيت قرص كتلته 14.0 kg وقطره 30.0 cm وسُمكه 8.00 cm على محور أفقي صلب كما يوضّح الجانب الأيسر في الشكل. (توجد قوة احتكاك بين المحور والقرص). يكون القرص ساكنًا في بادئ الأمر. وتُبذل قوة ثابتة، $F = 70.0\ \text{N}$، في حافة القرص بزاوية $37.0°$، كما يوضح الجانب الأيمن من الشكل. بعد مرور 2.00 s، تنخفض القوة إلى $F = 24.0\ \text{N}$ ويدور القرص بسرعة زاوية ثابتة.



a) ما مقدار عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك بين القرص والمحور؟

b) ما مقدار السرعة الزاوية للقرص بعد 2.00 s؟

c) ما مقدار الطاقة الحركية للقرص بعد 2.00 s؟