الدرس 12-1 المتطابقات المثلثية

السابق

- لقد أوجدت قيم دوال مثلثية.

الحالي

1. استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية.
2. استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

لماذا؟

- تدعى كمية الضوء التي يقدّمها مصدرٌ لسطحٍ *بالاستضاءة*. وترتبط الاستضاءة E - مقدرةً بوحدة "قدم شمعة" على سطحٍ ما - ببعد السطح R عن مصدر الضوء. يمكن استخدام القانون $\theta = \frac{I}{ER^2}$ حيث تمثل I شدّة مصدر الضوء مقدرة بالشمعة وتمثل θ الزاوية بين حزمة الضوء ومستقيم عمودي على السطح - في الحالات التي تكون الإضاءة فيها مهمة، كالتصوير الضوئي.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية
trigonometric identity

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمّية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 إيجاد القيم المثلثية

يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصورة $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$. هذا مثال عن متطابقة مثلثية. **المتطابقة المثلثية** معادلة تحتوي على نسبة مثلثية، أو أكثر وهي صحيحةٌ لكلّ القيم التي يكون فيها كل تعبيرٍ في المعادلة معرّفًا.

إذا كنت تستطيع أن تثبت أن قيمةً محددةً للمتغير في المعادلة تجعل المعادلة خاطئة، إذًا فعليك أن تقدم مثالاً مضادًا. ويكفي مثالٌ مضادٌ واحدٌ لإثبات أن معادلةً ما ليست متطابقة.

المفهوم الأساسي المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات ناتج القسمة		
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$		$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$
المتطابقات العكسية		
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$		$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\csc \theta \neq 0$
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$		$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, $\sec \theta \neq 0$
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, $\tan \theta \neq 0$		$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$, $\cot \theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس		
$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$
متطابقات الزوايا السالبة		
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

يطلق على متطابقات الزوايا السالبة في بعض الأحيان اسم متطابقات الدوال الزوجية والفردية.

المتطابقة $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ صحيحة إلا من أجل قياسات زوايا من قبيل $90°$ و $270°$ و ... و $90° + k180°$، حيث k عدد صحيح. يساوي cosine لكل من قياسات هذه الزوايا. إذًا $\tan \theta$ ليس معرفًا عندما $\cos \theta = 0$. وثمّة متطابقةٌ مشابهةٌ لذلك هي $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-1 إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية. واستخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

بعد الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في الطرف الأيمن من قانون الاستضاءة، ما المتغيرات التي تظهر في البسط؟ وما المتغيرات التي تظهر في المقام؟ الشدة؛ الاستضاءة والمسافة
- في المثلث قائم الزاوية، ما نسبة $\sec \theta$؟ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور}}$
- ما الدالة العكسية لـــ $\sec \theta$؟ $\frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية. ويمكنك إيجاد قيمٍ تقريبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 1 استخدام المتطابقات المثلثية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ θ إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ و $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	بطرح $\sin^2\theta$ من كل طرف.
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin\theta$.
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	بتربيع $\frac{1}{4}$.
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح: $\frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن θ سالبة. ولذلك، $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد إجابةٍ تقريبية.

الخطوة 1 أوجد $\text{Arcsin}\ \frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استخدم حاسبة.

نظرًا إلى أن $90° < \theta < 180°$. فإن $\theta \approx 180° - 14.48°$ أو حوالي $165.52°$.

الخطوة 2 أوجد $\cos\theta$.

عوّض θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3 قارن مع القيم الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} 0.97$

$0.97 \approx -0.968$ ✓

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كانت $\cot\theta = -\frac{3}{5}$ و $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقة فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot\theta$.
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	بالتربيع $-\frac{3}{5}$.
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	اجمع: $\frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$.
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة. وهكذا فإن $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تمرين موجّه

1A. أوجد $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = \frac{1}{3}$ و $270° < \theta < 360°$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B. أوجد $\sec\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ و $180° < \theta < 270°$. $-\frac{7\sqrt{5}}{15}$

نصيحة دراسية

الأرباع فيما يلي جدول لمساعدتك في تذكّر أيّ القيم تكون موجبة وأيّها تكون سالبة في كل ربع.

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\cot\theta$	1, 3	2, 4

2 تبسيط التعابير

يعني تبسيط تعبيرٍ يضمّ نسب مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيمةٍ عددية بدلالة نسبةٍ مثلثيةٍ واحدةٍ في حال كان ذلك ممكنًا.

1 إيجاد القيم المثلثية

يوضح **المثال 1** كيفية إيجاد قيم دالةٍ مثلثيةٍ لزاويةٍ تقع في ربعٍ محدد.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$ إذا كان $\sec\theta = -2$ و $180° < \theta < 270°$. $\tan\theta = \sqrt{3}$

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ و $90° < \theta < 180°$. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

التدريس المتمايز OL AL

إذا كان الطلاب يواجهون صعوبةً مع المتطابقات المثلثية،

إذًا فاطلب منهم العمل في مجموعاتٍ من ثلاثة طلاب. واطلب من كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات الواردة في مربع "المفهوم الأساسي" والعمل معًا لإثبات صحتها. ويتعيّن على الطلاب إثبات صحة نتائجهم باستخدام تعريفات sine و cosine و وظل الزاوية بدلالة أضلاع مثلثٍ قائم الزاوية.

مثال 2 تبسيط التعابير

بسّط التعبير $\dfrac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta}$.

$$\frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta} = \frac{\cancel{\sin \theta}\left(\frac{1}{\cancel{\sin \theta}}\right)}{\frac{1}{\tan \theta}} \qquad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ و } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta}} \qquad \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan \theta}{1} = \tan \theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

بسّط كل تعبير مما يلي.

2A. $\dfrac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta}$ $\sin^2 \theta$

2B. $\dfrac{\sec \theta}{\sin \theta}(1 - \cos^2 \theta)$ $\tan \theta$

نصيحة دراسية

التبسيط من الأسهل في أغلب الأحيان كتابة جميع التعابير بدلالة sine و/أو cosine.

ويمكن أن يكون تبسيط التعابير المثلثية مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية تبسيط التعابير واستخدامها

الإضاءة راجع بداية الدرس.

a. أكتب الصيغة بدلالة E.

$$\sec \theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 \sec \theta = I \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } RE^2.$$

$$ER^2 \frac{1}{\cos \theta} = I \qquad \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$\frac{E}{\cos \theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I \cos \theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كل طرف في } \theta.$$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a تكافئ المعادلة $R^2 = \dfrac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$؟ اشرح.

$$R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I \tan \theta \cos \theta \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } E.$$

$$E = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)\cos \theta}{R^2} \qquad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$E = \frac{I \sin \theta}{R^2} \qquad \text{بسّط.}$$

لا؛ ليست المعادلتان متكافئتين. تُبسط المعادلة $R^2 = \dfrac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ إلى $E = \dfrac{I \sin \theta}{R^2}$.

الربط بتاريخ الرياضيات

أريابهاتا (476-550 ميلادي)
لعلّ أريابهاتا هو الأشهر من بين علماء الرياضيات الهنود. وقد ارتبط اسمه بصورةٍ وثيقةٍ بموضوع الحساب المثلثي. إذ كان أول من أدخل الدوال المثلثية العكسية وحساب المثلثات الكروية. كما حسب أريابهاتا أيضًا القيم التقريبية للعدد باي إضافةً للدوال المثلثية.

تمرين موجّه

3. أعد كتابة $\cot^2 \theta - \tan^2 \theta$ بدلالة $\sin \theta$. $\dfrac{1 - 2\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \sin^4 \theta}$

2 تبسيط التعابير

يوضح **المثال 2** كيفية تبسيط تعبيرٍ عبر كتابته بدلالة دالةٍ مثلثيةٍ واحدة. ويوضح **المثال 3** تبسيط تعبيرٍ من الحياة اليومية يضم دوال مثلثية.

أمثلة إضافية

2 بسّط $\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta)$. $\cos^2\theta$

3 **الإضاءة** راجع بداية الدرس.

a. أوجد حل قانون الاستضاءة بدلالة R. $R = \sqrt{\dfrac{I \cos \theta}{E}}$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a مكافئةٌ لـ $\dfrac{E}{I \sec \theta} = \dfrac{1}{R^2}$؟ لا

التركيز على محتوى الرياضيات

المتطابقات يجب على الطلاب أن يتذكروا جيدًا متطابقات ناتج القسمة والمتطابقات العكسية والمتطابقات الفيثاغورية. ففي حين أنه من المفيد تذكّر أنواع أخرى من المتطابقات. فإنه يمكن اشتقاق المتطابقات الأخرى من المتطابقات الأساسية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

صفحة الويب أنشئ صفحة ويب للصف الدراسي تتضمن جميع المتطابقات والصيغ المثلثية التي تضمها هذه الوحدة. واطلب من الطلاب الاشتراك في خدمة تلقيم مقتطفات الأخبار (RSS feed) حتى يتمكنوا من متابعة تحديثك للصفحة بكل سهولة.

التدريس المتمايز BL

التوسّع يهتمّ الطلاب فوق المستوى في الغالب بتعلّم الكيفية التي ظهرت بها أفكار رياضيات محددة. توسّع في الربط بتاريخ الرياضيات بالتحدث عن عالم الرياضيات الهندي أريابهاتا. ويمكن للطلاب دراسة الاكتشافات الرياضية السابقة لأريابهاتا، والتي قادت إلى الحاجة للدوال المثلثية العكسية في سياق عمله.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إرشاد للمعلمين الجدد

النسب المثلثية يمكنك استخدام التعريفات المألوفة لكل من sine و cosine وظل الزاوية باعتبارها نسب الضلع المقابل والضلع المجاور والوتر في المثلث القائم لتبيّن السبب في أن $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.

1. إذا كانت $\cot\theta = 2$، فأوجد $\tan\theta$. $\frac{1}{2}$
2. إذا كانت $\sin\theta = \frac{4}{5}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{3}{5}$
3. إذا كانت $\cos\theta = \frac{2}{3}$، فأوجد $\sin\theta$. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
4. إذا كانت $\cos\theta = \frac{2}{3}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

مثال 2 بسّط كلاً من التعابير التالية.

5. $\tan\theta\cos^2\theta$ $\sin\theta\cos\theta$
6. $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ 1
7. $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ $\cot^2\theta$

مثال 3

8. **المثابرة** عندما يمرّ ضوء غير مستقطب عبر عدسة نظارة شمسية مستقطبة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ الضوء بعد ذلك عبر عدسةٍ مستقطبةٍ أخرى يقع محورها عند زاوية θ بالنسبة للعدسة الأولى، فإن شدّة الضوء تنخفض مرةً أخرى. ويمكن إيجاد شدّة الضوء الخارج باستخدام الصيغة $I = I_0 - \dfrac{I_0}{\csc^2\theta}$.
وفيها I_0 هي شدّة الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة الثانية، و I هي شدّة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين محوري الاستقطاب.

a. بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$. $I = I_0\cos^2\theta$

b. استخدم الصيغة المبسّطة لتحديد شدّة الضوء المارّ عبر عدسة استقطاب ثانية يشكّل محورها زاويةً قياسها 30° بالنسبة للعدسة الأصلية. $I = \frac{3}{4}I_0$؛ للضوء ثلاثة أرباع شدته قبل أن يمرّ عبر العدسة المستقطبة الثانية.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.

9. إذا كانت $\cos\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{5}{4}$
10. إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\tan\theta$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{4}{5}$
12. إذا كانت $\tan\theta = 2$، فأوجد $\sec\theta$. $\sqrt{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $180° < \theta < 270°$.

13. إذا كانت $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، فأوجد $\csc\theta$. $-\frac{5}{4}$
14. إذا كانت $\sec\theta = -3$، فأوجد $\tan\theta$. $2\sqrt{2}$
15. إذا كانت $\cot\theta = \frac{1}{4}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{-\sqrt{17}}{4}$
16. إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$، فأوجد $\cos\theta$. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $270° < \theta < 360°$.

17. إذا كانت $\cos\theta = \frac{5}{13}$، فأوجد $\sin\theta$. $-\frac{12}{13}$
18. إذا كانت $\tan\theta = -1$، فأوجد $\sec\theta$. $\sqrt{2}$
19. إذا كانت $\sec\theta = \frac{5}{3}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{3}{5}$
20. إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{4}{5}$

مثال 2 بسّط كلاً من التعابير التالية.

21. $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ $\sec^3\theta$
22. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\theta$ $\cos\theta$
23. $\cot\theta\sec\theta$ $\csc\theta$
24. $\sin\theta\,(1 + \cot^2\theta)$ $\csc\theta$
25. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ 1
26. $\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $-\cot\theta$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-27, 42, 44-48, 50-67	9-27 فردي, 51-54	10-26 زوجي 42, 44-48, 50. 55-67
OL أساسي	9-33 فردي, 34-42, 44-48, 50-67	9-27, 51-54	28-42, 44-48, 50, 55-67
BL متقدم	28-64, (اختياري: 65-67)		

مثال 3

27 **الإلكترونيات** عندما يمرّ تيارٌ كهربائيٌ في سلكٍ موضوعٍ ضمن حقلٍ مغناطيسي، كما في مجفف الشعر، تتولّد قوةٌ تؤثّر في السلك. ويمكن تحديد قوة الحقل المغناطيسي باستخدام القانون $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$.
حيث تمثل F القوة المؤثرة في السلك، وتمثل I شدّة التيار المار بالسلك، وتمثل ℓ طول السلك، وتمثل θ الزاوية التي يصنعها السلك مع الحقل المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة $\sin \theta$. (تلميح: حلّ لإيجاد F.) $F = I\ell B \sin \theta$

B **بسّط كلاً من التعابير التالية.**

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ $\cot^2 \theta$

29. $\tan \theta \csc \theta$ $\sec \theta$

30. $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ 1

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$ 2

32. $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$ $\cos^2 \theta$

33. $2 - 2 \sin^2 \theta$ $2 \cos^2 \theta$

34. **الشمس** تتعلق قدرة جسمٍ على امتصاص الطاقة بعاملٍ يدعى انبعاثية الجسم e. يمكن حساب الانبعاثية باستخدام القانون $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$، حيث تمثل W معدّل امتصاص بشرة شخصٍ للطاقة الصادرة عن الشمس، وتمثل S الطاقة الصادرة عن الشمس مقدرةً بالواط لكل متر مربع، وتمثل A مساحة السطح المعرّض للشمس، وتمثل θ الزاوية بين الإشعاعات الشمسية وخطٍ عمودي على الجسم. a. $W = eAS \cos \theta$

a. حلّ المعادلة لإيجاد W. واكتب إجابتك باستخدام $\sin \theta$ أو $\cos \theta$ فقط.

b. أوجد قيمة W إذ كان $e = 0.80$، و $\theta = 40°$، و $A = 0.75\ m^2$، و $S = 1000\ W/m^2$. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئة. $459.63\ W$

35. **تمثيل النماذج** تعرض الخريطة بعضًا من المباني في حيّ إيمان، والتي تزورها بصورةٍ دورية. يساوي $\text{sine } \theta$ المتشكّلة بين الطرق التي تربط بين المكتبة والمدرسة ومنزل إيمان $\frac{4}{9}$.

a. ما cosine للزاوية؟ $\frac{\sqrt{65}}{9}$

b. ما ظل الزاوية؟ $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

c. ما sine المتشكلة من الطرقات التي تربط بين منزل معلّم الفنون والمدرسة ومنزل إيمان وما cosine وظلّها؟

35c. $\frac{4}{9}, -\frac{\sqrt{65}}{9}, -\frac{4\sqrt{65}}{65}$

36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ متطابقةً مثلثية. تأمل المتطابقة الهندسية $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$.

a. **جدوليًا** انسخ الجدول أدناه وأكمله.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b. **بيانيًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني من أجل تمثيل $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ في صورة دالتين منفصلتين. وارسم التمثيل البياني. **انظر الهامش.**

c. **تحليليًا** إذا لم يكن التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين، إذًا فالمعادلة ليست متطابقة. هل يتطابق التمثيلان البيانيان؟ **نعم**

d. **تحليليًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إن كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة. (تحقق من ضبط حاسبتك على نمط الدرجات). **نعم**

تدريس الممارسات في الرياضيات

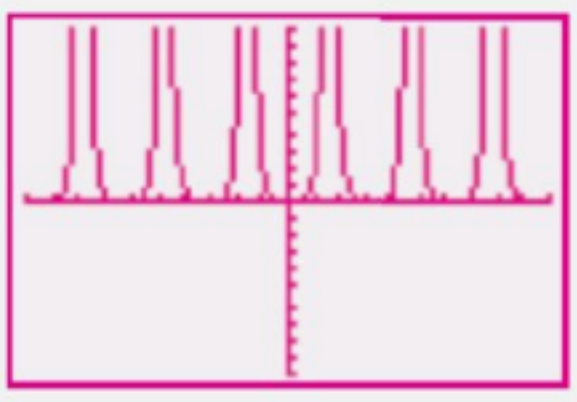
تمثيل النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 36 جدولاً للقيم وحاسبة تمثيل بياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ ما متطابقةً مثلثية.

إجابة إضافية

36b.



[−540, 540] scl: 90 في [−10, 10] scl: 1

C **37. التزلج** يهبط متزلجٌ كتلته m على تلةٍ زاويتها θ درجةً بسرعة ثابتة. وعند تطبيق قوانين نيوتن على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي: $F_n - mg \cos \theta = 0$ و $mg \sin \theta - \mu_k F_n = 0$. حيث تمثل g التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية، وتمثل F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، وتمثل μ_k معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد μ_k بوصفها دالة لـ θ. $\boldsymbol{\mu_k = \tan \theta}$

بسّط كل تعبير

38. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec \theta}{1 - \csc^2 \theta}$ $\boldsymbol{-\tan \theta \sec \theta}$

39. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)}$ $\boldsymbol{-1}$

40. $\dfrac{\sec \theta \sin \theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sec \theta}$ $\boldsymbol{\sin \theta}$

41. $\dfrac{\cot \theta \cos \theta}{\tan(-\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$ $\boldsymbol{-\cot^2 \theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي يتناقش إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبهم المنزلي متطابقة. حيث يقول إبراهيم إنه ونظرًا لتجريبه عشر قيمٍ محددةٍ وإلى أنّها جميعًا كانت صالحة، فلا بدّ أنها متطابقة. في حين يقول أحمد إنه لا يمكن استخدام سوى قيمٍ محددةٍ بمثابة أمثلةٍ مضادةٍ لإثبات عدم كون معادلةٍ متطابقة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
أحمد؛ قد تكون هناك قيمٌ أخرى لا تكون المعادلة من أجلها صحيحة.

43. التحدٍ أوجد مثالاً مضادًا لتثبت أن $1 - \sin x = \cos x$ ليست متطابقة. **الإجابة النموذجية: $x = 45°$**

44. التبرير وضّح كيف يمكن إعادة كتابة قانون الاستضاءة الوارد في بداية هذا الدرس لإثبات أن $\cos \theta = \frac{ER^2}{I}$.
انظر الهامش.

45. الكتابة في الرياضيات تعود شهرة العالم فيثاغورس في جلّها إلى نظرية فيثاغورس. وتعدّ المتطابقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ مثالاً عن متطابقات فيثاغورس. فلِمَ تصنّف هذه المتطابقة كذلك برأيك؟

45. الإجابة النموذجية: يمكن النظر إلى الدالتين $\cos \theta$ و $\sin \theta$ على أنهما طولا ساقي مثلثٍ قائم الزاوية، ويمكن النظر إلى العدد 1 على أنه قياس الوتر المقابل.

46. البرهان أثبت أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.
انظر الهامش.

47. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرين مكافئين لـ $\tan \theta \sin \theta$. **الإجابة النموذجية: $\sin \theta$ • $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$**

48. التبرير اشرح كيف يمكنك استخدام القسمة لإعادة كتابة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ بالصورة $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$. **اقسم كل الحدود على $\sin^2 \theta$.**

49. التحدٍ أوجد $\cot \theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و $90° \leq \theta < 180°$. $\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$

50. تحليل الخطأ تبسّط إيمان وأسماء $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إيمان	أسماء
$\frac{sin^2\ \theta}{cos^2\ \theta + sin^2\ \theta} = \frac{sin^2\ \theta}{cos^2\ \theta} + \frac{sin^2\ \theta}{sin^2\ \theta}$ $= tan^2\ \theta + 1$ $= sec^2\ \theta$	$\frac{sin^2\ \theta}{cos^2\ \theta + sin^2\ \theta} = \frac{sin^2\ \theta}{1}$ $= sin^2\ \theta$

50. أسماء؛ لم تستخدم إيمان المتطابقة التي تنصّ على أن $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ وارتكبت خطأً في جمع تعابير نسبية.

إجابة إضافية

44. $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$

$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{I}{ER^2}$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

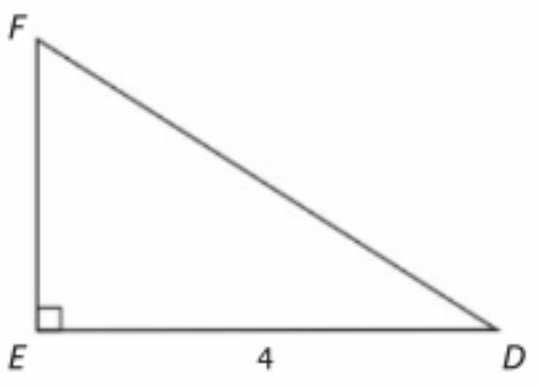
$ER^2 = I \cos \theta$ $\quad$ بالضرب التبادلي.

$\cos \theta = \frac{ER^2}{I}$ $\quad$ بقسمة كل طرف على I.

710 | الدرس 12-1 | المتطابقات المثلثية

تدريب على الاختبار المعياري

.51 استعن بالشكل الموضح أدناه. إذا كان $\cos D = 0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟ **A**



A 5   C 3.2

B 4   D $\frac{4}{5}$

.52 الاحتمالات يحتوي وعاءٌ على 16 كرة زجاجية خضراء و كرتين زجاجيتين حمراوين و 6 كرات زجاجية صفراء. فكم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تنبغي إضافتها إلى الوعاء من أجل مضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟ **J**

F 4   H 8

G 6   J 12

.53 SAT/ACT تصغر أماني أمل بـــ 6 سنوات. ويساوي عمر آمنة ضعف عمر أمل. ويساوي مجموع أعمارهنّ جميعًا 54. فأيّ معادلةٍ مما يلي يمكن استخدامها لإيجاد عمر أمل؟ **D**

A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$

B $x - 6x + (x + 2) = 54$

C $x - 6 + 2x = 54$

D $x + (x - 6) + 2x = 54$

E $2(x + 6) + (x + 6) + x = 54$

.54 أيّ من الدّوال التالية تمثّل نموًا أسيًا؟ **G**

F $y = (0.3)^x$

G $y = (1.3)^x$

H $y = x^3$

J $y = x^{\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

أوجد كل قيمةٍ مما يلي، واكتب قياسات الزوايا بالراديان، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

55. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.09**

56. $\text{Sin}^{-1}\frac{\pi}{2}$ **غير موجودة**

57. $\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}$ **0.52**

58. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$ **0.60**

59. $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **0.5**

60. $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$ **0.8**

.61 الفيزياء يربط ثقلٌ إلى نابضٍ ويعلّق من السقف. وفي حالة التوازن، يتوضّع الثقل على ارتفاع 4 أمتارٍ فوق الأرضية. يُسحب الثقل إلى الأسفل مسافة 1 مترٍ ثم يُحرّر. اكتب معادلة بعد d الثقل الموجود فوق سطح الأرضية بصورة دالة للزمن t ثانية على فرض أن الثّقل يعود إلى وضعيته الدنيا كلّ 4 ثوان. $d = 4 - \cos\frac{\pi}{2}t$ **or** $d = 4 - \cos 90°t$

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

62. $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{4}\cdot 2^{k-1}$ $\frac{31}{4}$

63. $\sum_{k=1}^{7}81\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $\frac{1093}{9}$

64. $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{3}\cdot 5^{k-1}$ **32,552**

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

65. $a + 1 = \frac{6}{a}$ **−3, 2**

66. $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$ **11**

67. $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$ **2**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 42. على الطلاب أن يروا أن أحمد على صواب. اشرح للطلاب أن الاستنتاج الاستدلالي (التعميم بناء على عدة أمثلة) لا يمكن أن يثبت صحّة متطابقة. بل إن أي مثالٍ مضاد محددٍ يكفي للإثبات أن المعادلة ليست متطابقة. بالنسبة للتمرين رقم 50. يجب أن يرى الطلاب أن أسماء على صواب (لأن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) وأن إيمان ليست على صواب ($\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ لأن) اشرح للطلاب أنهم حين يبسّطون تعبيرًا مثلثيًا، فإنهم يستخدمون الخواصّ نفسها التي يستخدمونها عند تبسيط أي تعبيرٍ نسبي.

4 التقويم

الكرة البلورية أخبر الطلاب بأن ينتقلوا إلى الدرس 2-12. واطلب منهم أن يكتبوا كيف يعتقدون أن من شأن ما تعلّموه اليوم أن يساعدهم في الدرس 2-12.

إجابة إضافية

46. $\tan(-A) = \frac{\sin(-A)}{\cos(-A)}$
$= \frac{-\sin A}{\cos A}$
$= -\frac{\sin A}{\cos A}$
$= -\tan A$

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع اسأل الطلاب إن كان من الممكن دومًا تبسيط تعبيرٍ مثلثي عبر كتابته بدلالة دالةٍ مثلثيةٍ واحدة. واطلب منهم تقديم مثالٍ إذا لم يكن من الممكن تفسير السبب في إمكانية ذلك.