الدرس 12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

السابق

- لقد استخدمت المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الحالي

1 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى صيغة الطرف الآخر.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل كل طرفٍ في المتطابقة إلى الصيغة نفسها.

لماذا؟

- حين كان خالد يركض على مضمارٍ دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديًا على الأرض، بل كان يميل بعيدًا عن الوضعية الرأسية. وتد الزاوية الحادة غير السالبة θ التي يصنعها جـ خالد مع الشاقول باسم *زاوية الميل* وتوصف بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$.

هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة الدوال المثلثية. فهناك معادلةٌ أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR} \theta$، حيث $0 \leq \theta \leq 90°$.

هل هاتان المعادلتان مستقلتان تمامًا بعضهما عن بعض أم أنهما نسختان مختلفتان عن علاقةٍ واحدة؟

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل أحد طرفي متطابقة

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافةً إلى تعاريف النسب المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقةٍ ما، فيتعين عليك إثبات صحتها من أجل جميع قيم θ.

المفهوم الأساسي إثبات المتطابقات عبر تحويل طرف واحد

الخطوة 1 بسّط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

مثال 1 تحويل طرف واحد في متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$.

$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$ المعادلة الأصلية

$\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$ اضرب البسط والمقام بـ $1 + \cos \theta$.

$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$ $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$

$\frac{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$ $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$1 + \cos \theta = 1 + \cos \theta$ ✓ بقسمة البسط والمقام على $\sin^2 \theta$.

تمرين موجّه

1. أثبت صحة المتطابقة $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$. **انظر الهامش.**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-2 استخدام المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الدرس 12-2 إثبات صحة متطابقات مثلثية بتحويل أحد طرفي معادلةٍ إلى صيغة الطرف الآخر. إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل كل طرفٍ في المعادلة إلى الصيغة نفسها.

بعد الدرس 12-2 استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة متطابقاتٍ مثلثيةٍ أخرى أو تبسيطها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في الطرف الأيمن من معادلة *زاوية الميل*، ما المتغير الذي يظهر في البسط؟ وما المتغير الذي يظهر في المقام؟ v؛ g و R
- كيف يمكنك التعبير عن $\tan \theta$ بدلالة $\sin \theta$ و $\cos \theta$؟ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- هل $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ يساوي $\frac{v^2}{gR}$ أو $\frac{gR}{v^2}$؟ $\frac{v^2}{gR}$

عندما تثبت صحة متطابقةٍ مثلثية، فإنك في الحقيقة تحلّ بترتيبٍ عكسي. ففي المثال 1، خذ الخطوة الأخيرة $1 + \cos\theta = 1+\cos\theta$ بما أن تلك الخطوة صحيحةٌ بوضوح، فيمكنك أن تستنتج أن الخطوة قبل الأخيرة صحيحةٌ أيضًا، وهكذا دواليك بالعودة إلى المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على الاختبار المعياري **تبسيط التعابير**

$\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} =$

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

قراءة فقرة الاختبار

أوجد تعبيرًا يساوي على الدوام التعبير المعطى. ولاحظ أن خيارات الإجابات جميعها إما تضمّ $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. ولذلك حُل باتجاه اختزال النسب المثلثية الأخرى.

حُل فقرة الاختبار

حوّل التعبير المعطى ليطابق أحد الخيارات.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ و } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب.}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام والضرب.}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{بالضرب.}$$

الإجابة هي C.

تمرين موجّه

2. $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta) =$ **H**

F $\cot^2\theta$ **G** $\tan^2\theta$ **H** $\cos^2\theta$ **J** $\sin^2\theta$

انتبه!

المثابرة يشبه إثبات صحة متطابقةٍ التحقق من حل معادلة. يجب عليك تبسيط أحد الطرفين أو كليهما بصورةٍ منفصلةٍ إلى أن يصبحا متماثلين.

نصيحة عند حل الاختبار

التحقق من الإجابات تحقق من صحة إجابتك عبر اختيار قيمٍ لـــ θ. ثم أوجد قيمة التعبير الأصلي وقارنه مع إجابتك المختارة.

2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

من الأسهل أحيانًا تحويل كل طرفٍ من طرفي المتطابقة بصورةٍ منفصلة إلى صيغةٍ مشتركة. ومن شأن الاقتراحات التالية أن تساعدك في إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

المفهوم الأساسي **اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات**

- عوّض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل إلى العوامل أو اضرب حسب الضرورة. وقد يتعيّن عليك ضرب البسط والمقام بالتعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كلاً من طرفي المتطابقة بدلالة الـــ Sine و Cosine فقط. ثمّ بسّط كلاً من الطرفين قدر الإمكان.
- لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تقم بإجراء العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

1 تحويل طرف واحد في معادلة

يوضح **المثال 1** كيفية إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ بتحويل أحد طرفي معادلة. ويوضح **المثال 2** كيفية إيجاد تعبيرٍ مكافئٍ لتعبيرٍ مثلثي معطىً.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يراقب الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات تقدّمهم ويقيّمونه ويغيّرون طريقتهم عند الضرورة. فذكّر الطلاب أنه لا يتساوى تعبيران حتى يصبحا من الصيغة نفسها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta\cos\theta\tan\theta = 1$.

$\csc\theta\cos\theta\tan\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

2 تدريب على الاختبار المعياري

$\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \tan\theta =$ A

A $\cot\theta$ **C** 0

B $\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$ **D** $\cos^2\theta$

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

1. $\cot^2\theta - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$ ✓

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ من طالبين أو أكثر لإثبات صحة بعض المتطابقات في التمارين 17-8. واجعلهم يسجلوا التقنيات التي وجدوا أنها مفيدة. اطلب من الطلاب مقارنة قائمة تقنياتهم بقائمة الاقتراحات المعطاة. واجعلهم أيضًا يناقشوا الإستراتيجيات الفاشلة. أي الاستراتيجيات نجحت وأيها فشلت، وما السبب؟

مثال 3 الإثبات بتحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$.

المعادلة الأصلية	$1 - \tan^4 \theta \stackrel{?}{=} 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$
بتحليل كل طرف إلى العوامل.	$(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \stackrel{?}{=} \sec^2 \theta\,(2 - \sec^2 \theta)$
$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$	$[1 - (\sec^2 \theta - 1)] \sec^2 \theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$
بسط.	$(2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta = (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$ ✓

تمرين موجّه

3. أثبت صحة المتطابقة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$. **انظر الهامش.**

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **الدقة** **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:. 1-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

1. $\cot \theta + \tan \theta = \dfrac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$
2. $\cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$
3. $\sin \theta = \dfrac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$
4. $\tan^2 \theta = \dfrac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$
5. $\tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
6. $\tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$

مثال 2

7 **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقةٍ فيها $\dfrac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$؟ **D**

A $\sin^2 \theta$ **B** $\cos^2 \theta$ **C** $\tan^2 \theta$ **D** $\csc^2 \theta$

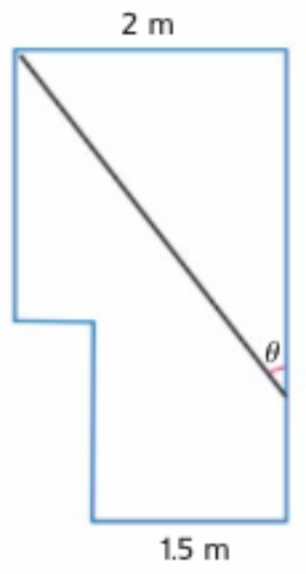
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:. 8-17. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

8. $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$
9. $\cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta$
10. $1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$
11. $\sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1$
12. $\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2$
13. $\dfrac{1 - 2\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$
14. $\tan \theta = \dfrac{\sec \theta}{\csc \theta}$
15. $\cos \theta = \sin \theta \cot \theta$
16. $(\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta$
17. $\cos \theta \cos(-\theta) - \sin \theta \sin(-\theta) = 1$

مثال 2

18. **السلّم** استنتج بعض الطلاب تعبيرًا لحساب طول سلّم، علمًا أنه حين يُحمل بصورةٍ مسطحةٍ فإنه يمكن أن يشغل زاويةً بحيث يمتدّ من رواقٍ عرضه 1.5 مترًا إلى رواقٍ عرضه متران كما هو موضح. وقد حدّدوا أن الطول الأقصى ℓ لسلمٍ يشغل هذا الركن يعطى بالعلاقة $\ell(\theta) = \dfrac{2 \sin \theta + 1.5 \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$. وعندما حلّت المعلمة المسألة، استنتجت أن $\ell(\theta) = 2 \sec \theta + 1.5 \csc \theta$. فهل التعبيران متكافئان؟ **نعم**



2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

يوضح **المثال 3** كيفية إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ بتحويل كلا طرفي معادلة.

مثال إضافي

3 أثبت أن $\csc \theta + \sec \theta = \dfrac{1 + \cot \theta}{\cos \theta}$ متطابقة.

$$\csc \theta + \sec \theta \stackrel{?}{=} \frac{1 + \cot \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \checkmark$$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta \stackrel{?}{=} \cot \theta \tan \theta$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	8-32, 52, 54-57, 59-76	9-31 فردي, 60-63	8-32 زوجي, 52, 54-57, 59, 64-76
OL أساسي	9-31 فردي, 33-34, 35-49 فردي, 50-52, 54-57, 59-76	8-32, 60-63	33-52, 54-57, 59, 64-76
BL متقدم	33-72, (اختياري: 73-76)		

714 | الدرس 12-2 | إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:** 19–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

19. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20. $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21. $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25. $\csc\theta - 1 = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

26. $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30. $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

B 33. **التبرير المنطقي** يمثل الرسم التخطيطي على الجهة اليسرى لعبة كرة الحبل. حين تدور الكرة حول العمود، تمسح القطعة المستقيمة $\overline{SP}$ سطحًا مخروطيًا. تعطى الصيغة التي تعبر عن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية التي يشكلها الحبل مع العمود θ بالمعادلة $L = \frac{g\sec\theta}{\omega^2}$. هل $L = \frac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا معادلةٌ تعبر عن العلاقة بين L و θ؟ نعم

34. **الجري** يأخذ جزء من مضمار سباقٍ شكل قوسٍ دائري نصف قطره 16.7 مترًا. وعندما تجري عدّاءةٌ على طول القوس، فإن Sine زاوية ميل جسدها θ يساوي $\frac{1}{4}$. أوجد سرعة العدّاءة. واستخدم صيغة زاوية الميل الواردة في بداية الوحدة، $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث $g = 9.8$ و R تمثل نصف القطر. (إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولاً.) 6.5 m/s

عند تبسيط التعبير، فهل يساوي 1 أم −1؟

35. $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ 1

36. $\sin\theta\csc(-\theta)$ −1

37. $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ 1

38. $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ 1

39. $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$ 1

40. $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ −1

بسّط التعبير إلى ثابتٍ أو إلى نسبة مثلثيةٍ أساسية.

41. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ $\cos\theta$

42. $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$ $\tan\theta$

43. $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$ 2

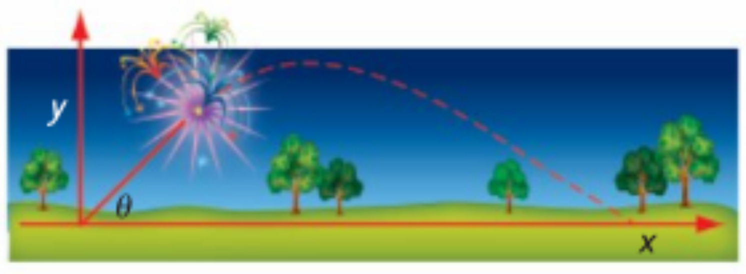
44. $\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ 1

45. $\tan\theta\cos\theta$ $\sin\theta$

46. $\cot\theta\tan\theta$ 1

47. $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 1

48. $\frac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$ $\tan^2\theta$



49. **فيزياء** عند إطلاق إحدى الألعاب النارية من سطح الأرض، يرتبط ارتفاعها y وإزاحتها الأفقية x بالمعادلة $y = \frac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$؛ حيث تمثل v_0 السرعة البدائية للمقذوف، وتمثل θ زاوية إطلاق المقذوف، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

$$y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2}(1+\tan^2\theta) + x\tan\theta$$

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب منطقي؟"

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في بناء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

E المتابعة

استكشفَ الطلابُ المتطابقات المثلثية وأثبتوا صحتها.

اطرح السؤال التالي:

- لِمَ تعد المتطابقات المثلثية مفيدة؟ الإجابة النموذجية: توفّر المتطابقات المثلثية طريقةً لتبسيط الدوال المثلثية المعقدة عبر إعادة كتابة التعابير الموجودة ضمن الدوال بصيغٍ مكافئة، ولكنها أكثر ملاءمة.

التركيز على محتوى الرياضيات

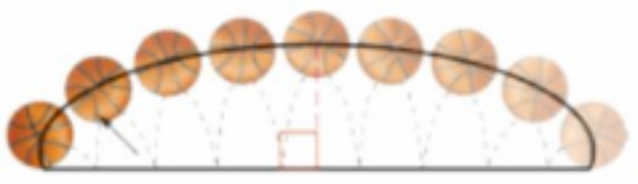
تحويل طرفٍ واحدٍ أو الطرفين يمكن إثبات صحة متطابقةٍ بتحويل طرفٍ واحدٍ من المعادلة أو الطرفين في الوقت نفسه. وقد يفضّل بعض الطلاب العمل على طرفٍ واحدٍ فقط في كل مرةٍ لتجنّب الارتباك.

50. الإلكترونيات عند مرور تيارٍ متناوبٍ تردده f وذروته I_0 عبر مقاومة R، فإن القدرة التي تبلغ المقاومة عند الزمن t ثانية تعطى بالعلاقة $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi ft$.

a. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$. $P = I_0{}^2 R(1 - \cos^2 2\pi ft)$

b. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$. $P = \dfrac{I_0{}^2 R}{\csc^2 2\pi ft}$

51. رمي كرة في هذه المسألة، سوف تستكشف مسار الكرة الذي تمثّله المعادلة $h = \dfrac{v_0{}^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث تمثل θ قياس الزاوية بين الأرض ومسار الكرة، وتمثل v_0 سرعتها المبدئية بالأمتار في الثانية، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. قيمة g تساوي $9.8\ m/s^2$.



a. إذا كانت السرعة البدائية للكرة تساوي 47 مترًا في الثانية، أوجد ارتفاع الكرةعند الزوايا $30°$ و $45°$ و $60°$ و $90°$. قرّب إلىأقرب جزءٍ من عشرة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

b. مثّل المعادلة بيانيًا على حاسبةٍ للتمثيل البياني. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

c. أثبت أن الصيغة $h = \dfrac{v_0{}^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصيغة المعطاة أعلاه. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

52. الفرضيات حدّد المتطابقة التي لا تنتمي إلى المتطابقات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

sin. $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$:= $2 \sin^2 \theta$ المتطابقات الثلاثة الأخرى متطابقات مثلثية، ولكن هذه ليست كذلك.

53. التحدِ حوّل الطرف الأيمن من $\tan^2 \theta = \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ لتثبت أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

$\tan^2 \theta = \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \longrightarrow \tan^2 \theta = \tan^2 \theta \longrightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

54. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا لا يمكنك تربيع كلا طرفي معادلةٍ عندما تثبت صحة متطابقة مثلثية.
لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تجرِ العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

55. التبرير اشرح سبب كون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة في حين $\theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست كذلك. **الإجابة النموذجية: مثال مضاد $45°$، $30°$**

56. كتابة سؤال يعاني أحد الزملاء في الصف من صعوبةٍ أثناء محاولة إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ تتضمن العديد من النسب المثلثية لزوايا لها درجات متعددة. اكتب معادلةً لمساعدته في حلّ المسألة.
الإجابة النموذجية: هل حاولت استخدام المتطابقة الأكثر شيوعًا — $\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma = 1$ - للتبسيط؟

57. الكتابة في الرياضيات لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالبًا بدلالة الـ Sine وقانون الـ Cosine؟ **انظر الهامش**

58. التحدِ لتكن $x = \frac{1}{2} \tan \theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. اكتب $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ بدلالة دالة مثلثيةواحدة لـ θ. $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$

59. التبرير برّر المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

إجابة إضافية

57. الإجابة النموذجية: الـ sine والـ cosine هما الدالتان المثلثيتان اللتان يعلمهما معظم الأشخاص. ويمكن كتابة جميع التعابير المثلثية بدلالة sine و cosine. كذلك فإنه بإعادة كتابة التعابير المثلثية المعقدة بدلالة sine و cosine ، فقد يكون من الأسهل إجراء العمليات وتطبيق الخصائص المثلثية.

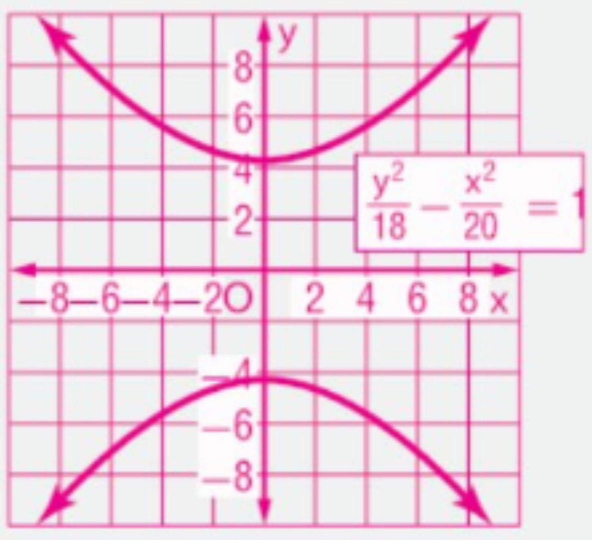
716 | الدرس 12-2 | إثبات صحة المتطابقات المثلثية

4 التقويم

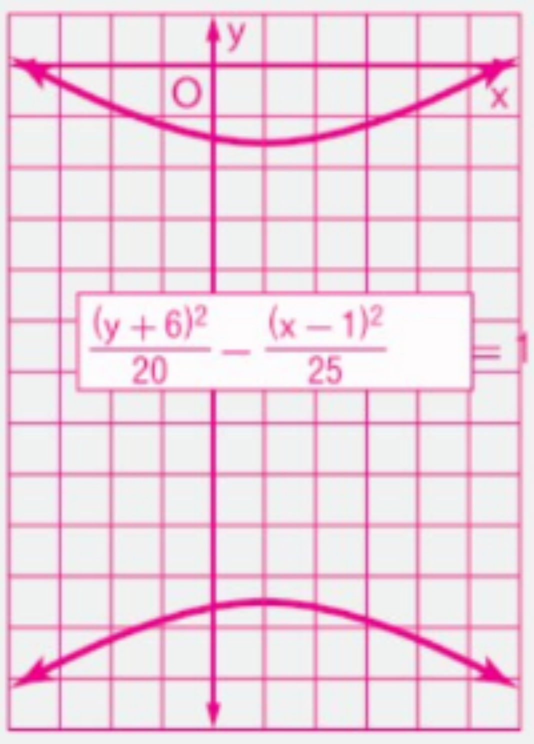
حصاد الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا كيف أن تعلم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس 1-12 قد ساعدهم في إثبات صحة متطابقاتٍ أكثر تعقيدًا في درس اليوم.

إجابات إضافية

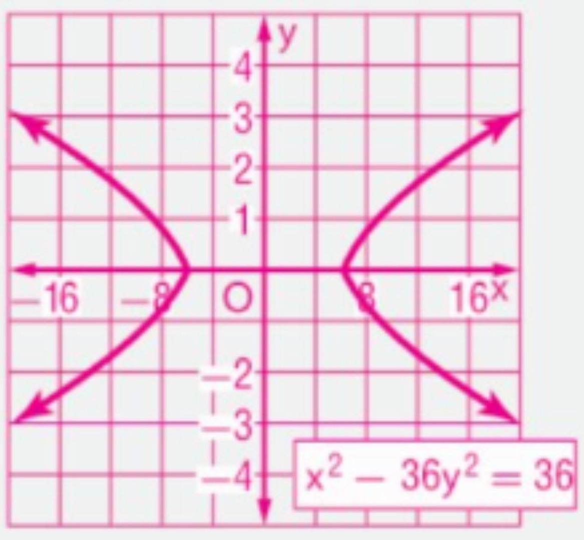
70. $(0, \pm 3\sqrt{2})$; $(0, \pm\sqrt{38})$; $y = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}x$



71. $(1, -6 \pm 2\sqrt{5})$; $(1, -6 \pm 3\sqrt{5})$; $y + 6 = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 1)$



72. $(\pm 6, 0)$; $(\pm\sqrt{37}, 0)$; $y = \pm\frac{1}{6}x$



تدريب على الاختبار المعياري

60. SAT/ACT يضطر صاحب إحدى الشركات الصغيرة إلى توظيف عمّال موسميين حينما تقتضي الحاجة ذلك. توضح القائمة التالية عدد العاملين الذين تم توظيفهم شهريًا على مدى 5 أشهر.

5, 14, 6, 8, 12

إذا كان متوسط هذه البيانات يساوي 9، فما هو الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي لهذه البيانات؟ (قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة) **A**

A 3.5
B 3.9
C 5.7
D 8.6
E 12.3

61. أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$. **H**

F $C(-4, 0)$; $r = 4$ وحدات
G $C(-4, 0)$; $r = 16$ وحدة
H $C(4, 0)$; $r = 4$ وحدات
J $C(4, 0)$; $r = 16$ وحدة

62. **الهندسة** يساوي محيط مثلث قائم الزاوية 36 سنتيمترًا. فإذا علمت أن طول الساق الأطول ناقصًا منه ضعف طول الساق الأقصر يساوي 6 سنتيمترات، فما أطوال أضلاع المثلث الثلاثة جميعها؟ **C**

A 3 cm., 4 cm., 5 cm.
B 6 cm., 8 cm., 10 cm.
C 9 cm., 12 cm., 15 cm.
D 12 cm., 16 cm., 20 cm.

63. بسّط $128^{\frac{1}{4}}$. **G**

F $2\sqrt[4]{2}$
G $2\sqrt[4]{8}$
H 4
J $4\sqrt[4]{2}$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-12)

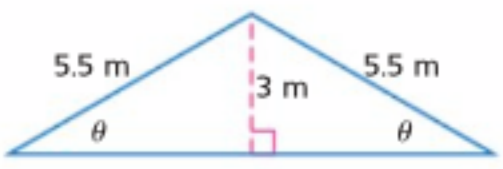
64. $\tan\theta$، إذا كان $\cot\theta = 2$؛ $0° \leq \theta < 90°$ $\frac{1}{2}$

65. $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$؛ $0° \leq \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

66. $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$؛ $90° < \theta < 180°$ $\frac{5}{4}$

67. $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$ $\frac{3}{5}$

68. **الهندسة المعمارية** للدعامة الخاصة بسقفٍ شكل مثلثين قائمين كما هو موضح في الشكل على الجهة اليسرى. أوجد θ. **30°**



69. **وجبات سريعة** يعرض الجدول التوزيع الاحتمالي لوجبات التوفير التي طلبت في أحد المطاعم أيّام الأحد صباحًا. استخدم المعلومات لتحديد قيمة توقع الوجبات المطلوبة. **AED 4**

وجبات التوفير المطلوبة				
الوجبات	AED 3	AED 4	AED 5	AED 6
الاحتمال	0.5	0.2	0.1	0.2

أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطع الزائد له المعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع بيانيًا. 70–72. انظر الهامش.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

71. $\frac{(y+6)^2}{20} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

72. $x^2 - 36y^2 = 36$

مراجعة المهارات

بسّـــط.

73. $\frac{2 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$ $\frac{12 + 7\sqrt{2}}{23}$

74. $\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

75. $\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ $\sqrt{x} + 1$

76. $\frac{-2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع إن $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة، ما يعني أنها لا تكون صحيحةً مع جميع القيم الحقيقية لـ x. أوجد قيم x التي تجعل المعادلة صحيحة. $0° + k \cdot 360°$ أو $90° + k \cdot 360°$، حيث k هو أي عددٍ صحيح.