1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 12-3 إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.

الدرس 12-3 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما. إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما.

بعد الدرس 12-3 استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

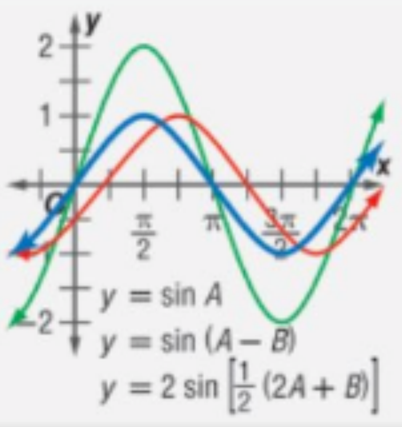
اطرح السؤال التالي:

- في أي مكانٍ آخر سمعت عن مصطلح *الاستقراء*؟ الإجابة النموذجية: على التلفاز والمذياع
- ما وجه مقارنة سعة الموجة المتضامّة في ذروتها بسعة الموجتين البدائيتين؟ سعة الموجة المتضامّة هو مجموع سعتي الموجتين البدائيتين.

(يُتبَع في الصفحة التالية)

الدرس 12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

·· السابق	·· الحالي	·· لماذا؟
• أوجدت قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.	1 • إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق. 2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق.	• هل سبق أن استخدمت مزودًا لاسلكيًا لشبكة الإنترنت وفقدت الإشارة مؤقتًا؟ يسبّب مرور أمواجٍ في مكانٍ واحدٍ وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجةٍ سعتها أكبر أو أصغر من أي من الموجتين المركّبتين لها.



مارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات المجموع والفرق لاحظ أن المعادلة الثالثة المبيّنة أعلاه تتضمن مجموع A و B. من المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لــ $sin\ 15°$ عبر إيجاد قيمة $sin\ (60° - 45°)$. توجد صيغٌ يمكن استخدامها لإيجاد قيم تعابير مثل $sin\ (A - B)$ أو $cos\ (A + B)$.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	• $\tan (A - B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية المجهولة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. sin 105°

استخدم المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\sin 105° = \sin (60° + 45°) \quad A = 60°\text{ و }B = 45°$$
$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \quad \text{متطابقة المجموع}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{أوجد قيمة كل تعبير.}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{اضرب.}$$

b. cos (−120°)

استخدم المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$$\cos (-120) = \cos (60° - 180°) \quad A = 60°\text{ و }B = 180°$$
$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \quad \text{متطابقة الفرق}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad \text{أوجد قيمة كل تعبير.}$$
$$= -\frac{1}{2} \quad \text{اضرب.}$$

تمرين موجّه

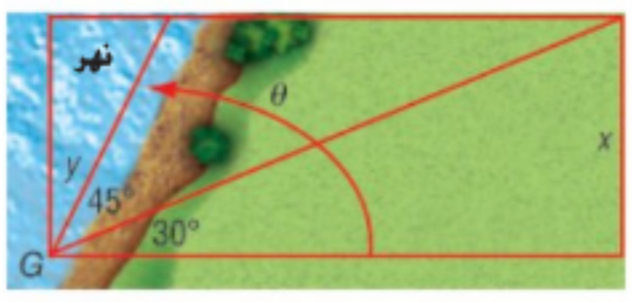
1A. $\sin 15°$ $\quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

1B. $\cos (-15°)$ $\quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

يمكنك استخدام متطابقات مجموع الزوايا وفرقها لحلّ تطبيقاتٍ من الحياة اليومية.

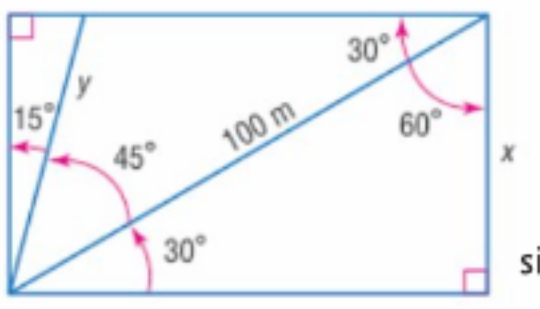
مثال 2 من الحياة اليومية متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تقيس عالمة جيولوجيا الزاوية بين ضلعٍ في قطعة أرضٍ مستطيلة الشكل وبين المستقيم الممتدّ من موضعها إلى الزاوية المقابلة في قطعة الأرض تلك، لتجد أنها تساوي °30. ثمّ تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الذي يصل بالنقطة التي يمر بها النهر على ذلك العقار، لتجد أنها تساوي °45. تقف العالمة على بعد 100 مترٍ من الزاوية المقابلة للعقار. فكم تبعد عن نقطة مرور النهر بالعقار؟



الفهم تطلب المسألة إيجاد المسافة بين عالمة الجيولوجيا ونقطة مرور النهر بخط العقار، أي y.

التخطيط ارسم صورةً توضح المعطيات التي تعرفها من خلال المعلومات المعطاة.



الحل حُلّ لإيجاد x.

$\sin 30° = \frac{x}{100}$ تعريف sine

$x = 100 \sin 30°$

$x = 50$ بما أن قطعة الأرض مستطيلة، فكل ضلعين متقابلين متساويان.

انظر الآن إلى المثلث في أقصى الجهة اليسرى وحُلّ لإيجاد y.

$\cos 15° = \frac{50}{y}$ تعريف cosine

$\cos (45° - 30°) = \frac{50}{y}$ $15 = 45 - 30$

$\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{50}{y}$ متطابقة الفرق

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{y}$ أوجد القيمة.

$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{50}{y}$ بسِّط.

$(\sqrt{6} + \sqrt{2})y = 200$ الضرب التقاطعي

$y = \frac{200}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$

$y = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$y = 50\sqrt{6} - 50\sqrt{2} = 51.8$ تقريبًا

تبعد عالمة الجيولوجيا حوالي 51.8 مترًا عن نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد معكوس Cosine تمام $15° \approx \frac{50}{51.8}$. ✓

تمرين موجّه

2. يمكن وصف الحركة التوافقية لجسمٍ ما بالعلاقة $x = 4 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$، حيث تمثل x البعد عن نقطة التوازن بالسنتيمتر وتمثل t الزمن بالدقائق. أوجد المسافة الدقيقة عن نقطة التوازن بعد 45 ثانية. **$2\sqrt{2}$ سنتيمترًا إلى الأسفل**

نصيحة في حل المسائل

تشكيل نموذج شكّل نموذجًا لتصوير حالات المسائل. ويمكن أن يكون النموذج رسمًا أو شكلًا معدا من أجسام مختلفة، كالقطع الجبرية أو المطويات الورقية.

- لماذا تقطع الموجة المتضامّة المحور الأفقي x في نقطةٍ لا تقطع فيها الموجتان البدائيتان المحور؟ الموجة المتضامّة هي مجموع الزاويتين الأخريين. وهي تقطع المحور الأفقي x عند نقطتين، حيث تقع إحدى الموجتين البدائيتين فوق المحور الأفقي x والموجة الأخرى تبعد المسافة نفسها تحت المحور الأفقي x.

1 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

يوضح **المثال 1** كيفية استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإيجاد القيم الدقيقة للتعابير المثلثية.
ويبيّن **المثال 2** كيفية استخدام متطابقة الفرق لحل مسألةٍ من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b. $\cos (-75°)$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 **المسافة** راجع المثال 2. إذا كان z يمثل المسافة بين الزاوية العلوية اليسرى للمنشأة وبين النقطة التي يقطع عندها النهر الحدّ العلوي، فإن $\tan 15° = \frac{z}{50}$ أو $\tan (45° - 30°) = \frac{z}{50}$. استخدم متطابقة $\tan (A - B)$ لإيجاد قيمةٍ دقيقةٍ لـ z. $z = \frac{50\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$ والتي يمكن تبسيطها إلى $z = 100 - 50\sqrt{3}$.

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب تحديد الأنماط وحالات التشابه والفروق في متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما. ثم اطلب من الطلاب كتابة جملٍ قصيرةٍ يصفون فيها ما قاموا بتحديده.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر بعض الطلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة تطبيق المجموع والفرق لصيغ الزوايا.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يوضح **المثال 3** كيفية استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يحلّل الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. فشجّع الطلاب على التعرّف على قياسات الزوايا التي يمكن تطبيق المتطابقات عليها بسهولة.

تمثيل النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

مثال إضافي

3 أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

a. $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(360° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos 360° \cos\theta + \sin 360° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

b. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\pi\cos\theta + \sin\pi \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي اصنع قائمة بالقيم المثلثية للزوايا التي يتراوح قياسها بين 0° و 360° والتي يسهل فيها استخدام متطابقات المجموع والفرق. استخدم قائمتك بمثابة مرجع.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يمكنك أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

a. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$	المعادلة الأصلية
$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$	متطابقة المجموع
$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$	بإيجاد قيمة كل تعبير.
$\sin\theta = \sin\theta$ ✓	بسّط.

b. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \cos\theta$	المعادلة الأصلية
$\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos\theta$	متطابقة المجموع
$\sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos\theta$	بإيجاد قيمة كل تعبير.
$\cos\theta = \cos\theta$ ✓	بسط.

تمرين موجّه

3A. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ **3B.** $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

3A. $\sin(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$; $\sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$; $1 \cos\theta - 0 \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$; $\cos\theta = \cos\theta$

3B. $\cos(90° + \theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$; $\cos 90° \cos\theta - \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$; $0 \cos\theta - 1 \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$; $-\sin\theta = -\sin\theta$

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

1. $\cos 165°$ $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
2. $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
3. $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\sin(-30°)$ $-\frac{1}{2}$
5. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin(-210°)$ $\frac{1}{2}$

مثال 2

7. **تمثيل النماذج** عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البنّاء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجةً سعتها أكبر من سعة أي من الموجتين المركّبتين لها. ويحدث التداخل الهدّام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا موجةً لها سعة أصغر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20 \sin(3\theta + 45°)$، بينما يمكن تمثيل الإشارة الثانية بالمعادلة $y = 20 \sin(3\theta + 225°)$.

a. أوجد مجموع الدالتين. **0**

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثّلتان بالمعادلتين؟
التداخل هدّام. حيث تلغي كل إشارةٍ الأخرى تمامًا.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:** **8، 11 انظر الهامش.**

8. $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$
10. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$
11. $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

إجابات إضافية

8.
$\sin(90° + \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$\sin 90° \cos\theta + \cos 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

9.
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$\cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

إجابات إضافية

10. $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\dfrac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\dfrac{(\sin\theta)\cdot 0+(\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0-(\sin\theta)\cdot 1} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$-\cot\theta = -\cot\theta$ ✓

11. $\sin(\theta+\pi) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\sin\theta\cos\pi+\cos\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$(\sin\theta)(-1)+(\cos\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

19. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$(0)(\cos\theta)-(1)(\sin\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

20. $\cos(60°+\theta) \stackrel{?}{=}$

$\sin(30°-\theta)$

$\cos 60°\cos\theta-\sin 60°\sin\theta \stackrel{?}{=}$

$\sin 30°\cos\theta-\cos 30°\sin\theta$

$\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta =$

$\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ ✓

21. $\cos(180°+\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos 180°\cos\theta-\sin 180°$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1\cdot\cos\theta-0\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

22. $\tan(\theta+45°) \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\dfrac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\dfrac{\tan\theta+1}{1-(\tan\theta)(1)} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ ✓

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

12. $\sin 165°$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
13. $\cos 135°$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
14. $\cos\frac{7\pi}{12}$ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
15. $\sin\frac{\pi}{12}$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
16. $\tan 195°$ $2-\sqrt{3}$
17. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

مثال 2

18. **الإلكترونيات** في دارةٍ يمرّ بها تيارٌ متناوب، يمكن استخدام الصيغة $c = 2\sin(120t)$ لإيجاد شدة التيار c بالأمبير بعد مرور t ثانية.

الإجابة النموذجية:

a. أعد كتابة الصيغة باستخدام مجموع زاويتين. $c = 2\sin(90t+30t)$

b. استخدم صيغة مجموع الزاويتين لإيجاد الشدة الدقيقة للتيار عند $t = 1$ ثانية. $\sqrt{3}$ أمبير

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.** 19–22. انظر الهامش.

19. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$
20. $\cos(60°+\theta) = \sin(30°-\theta)$
21. $\cos(180°+\theta) = -\cos\theta$
22. $\tan(\theta+45°) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

B 23. **التبرير** يمكن تمثيل درجات الحرارة العظمى في مدينة مينيابوليس بولاية مينيسوتا بالمعادلة $y = 31.65\sin\left(\frac{\pi}{6}x-2.09\right)+52.35$، حيث تمثّل الأشهر x بأعدادٍ متسلسلة على النحو التالي: يناير = 1، فبراير = 2، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة الصغرى في مدينة مينيابوليس بالمعادلة $y = 30.15\sin\left(\frac{\pi}{6}x-2.09\right)+32.95$.

a. اكتب متباينةً جديدةً عبر جمع التعابير على الجهة اليسرى في كل معادلة وقسمة الناتج على 2.

$y = 30.9\sin\left(\frac{\pi}{6}x-2.09\right)+42.65$

b. ما معنى الدالة التي كتبتها في الجزء a؟

تمثل الدالة الجديدة متوسط درجات الحرارة العظمى والصغرى لكل شهر.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

24. $\tan 165°$ $-2+\sqrt{3}$
25. $\sec 1275°$ $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
26. $\sin 735°$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
27. $\tan\frac{23\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$
28. $\csc\frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$
29. $\cot\frac{113\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

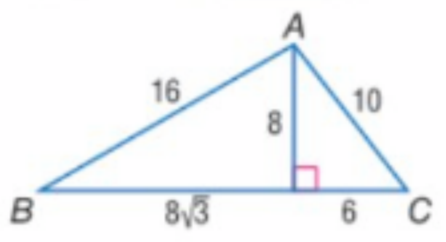
30. **القوة** في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى، تعطى القوة F اللازمة لتثبيت خزنة في موضعها على منحدرٍ بالعلاقة التالية

$F = \dfrac{W(\sin A+\mu\cos A)}{\cos A-\mu\sin A}$.

حيث W هو وزن الخزنة و $\mu = \tan\theta$. أثبت أن $F = W\tan(A+\theta)$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

31. **خياطة اللحاف** كجزءٍ من خياطة لحاف. يضع الخيّاط حاملين كلّ منهما على شكل مثلث قائم معًا لتشكيل قطعة مثلثة جديدة. أطوال أضلاع أحد الحاملين هي 6 سنتيمترات و 8 سنتيمترات و 10 سنتيمترات. ويضم الحامل الثاني أضلاعًا أطوالها 8 سنتيمترات و $8\sqrt{3}$ سنتيمترات و 16 سنتيمترًا. يوضع الحاملان بحيث يتقابل الضلعان اللذان طول كل منهما ثمانية سنتيمترات. كما هو موضح في الشكل ليتشكّل المثلث ABC.



a. ما القيمة الدقيقة لـ sine الخاص بالزاوية BAC؟ $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$

b. ما القيمة الدقيقة لـ cosine الخاص بالزاوية BAC؟ $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$

c. ما قياس الزاوية BAC؟ **96.9°**

d. هل المثلث المتشكل من المثلثين قائم أيضًا؟ **لا**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12–22, 38, 39, 41–57	13215 فردي, 43–46	12–22 زوجي, 38, 39, 41, 42, 47–57
OL أساسي	13–29 فردي, 30–33, 35, 37–39, 41–57	12–22, 43–46	23–39, 41, 42, 47–57
BL متقدم	23–54, (اختياري: 55–57)		

32. البصريات عندما يمرّ الضوء بصورةٍ متماثلةٍ عبر منشور، فإن معامل انكسار الزجاج n بالنسبة للهواء يساوي $n = \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin \frac{b}{2}}$، حيث تمثل a قياس زاوية الانحراف، وتمثل b قياس الزاوية الرأسية للمنشور.

a. أثبت في المنشور الموضح أن: $n = \sqrt{3} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$. **انظر الهامش.**

b. أوجد قيمة n في المنشور الموضح. $\sqrt{3}$

39. الإجابة النموذجية: لتحديد تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية، عليك تحديد Sine أو Cosine مجموع زاويتين أو فرقهما. ويحدث التداخل حين تمرّ الأمواج في الفراغ نفسه وفي الوقت نفسه. عندما تكون الموجة المتراكبة أكبر سعةً من الأمواج الجزئية، ينتج التداخل البنّاء. وعندما يكون للموجة المتراكبة سعةٌ أصغر، ينتج التداخل الهدّام.

33. التمثيلات المتعددة عليك أن تنفي في هذه المسألة الفرضية القائلة إن $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.
b، c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

a. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
60°	45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b. بيانيًا افترض أن B أقل دائمًا بمقدار $15°$ من A. استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل $y = \sin(x + x - 15)$ و $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c. تحليليًا حدّد ما إذا كانت $\cos(A+B) = \cos A + \cos B$ متطابقة. واشرح استنتاجك.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. 34–37. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

34. $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35. $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36. $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

24. الإجابة النموذجية: $A = 35°, B = 60°, C = 85°; 0.7002 + 1.7321 + 11.4301 \stackrel{?}{=} (0.7002)(1.7321)(11.4301); 13.86 = 13.86$ ✓

مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مهارات التفكير العليا

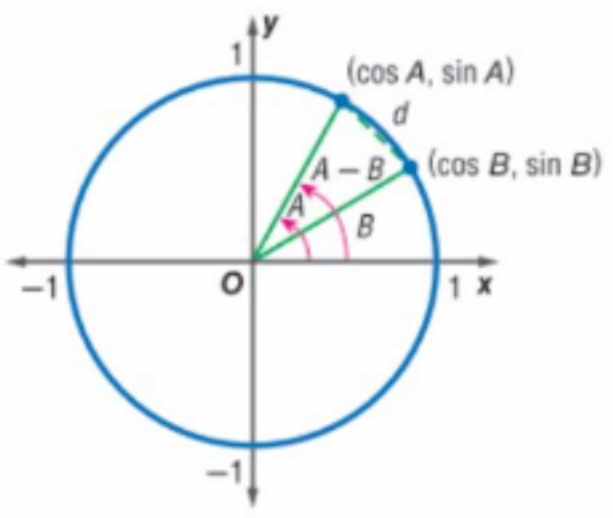
38. الاستنتاج بسّط التعبير التالي دون تفكيك أي من المجاميع أو الفروق. $\sin(-2\theta)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

39. الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام متطابقات المجموع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. أضف شرحًا للفرق بين التداخل البنّاء والهدّام.

40. التحدِّ اشتقّ متطابقةً لـ $\cot(A+B)$ بدلالة cot A و cot B. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

41. الفرضيات يعرض الشكل زاويتين A و B في موضعيهما القياسيين على الدائرة الواحدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ و $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



42. مسألة غير محددة الإجابة تأمل النظرية التالية. إذا كانت A و B و C زوايا مثلث مائل، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لـ A و B و C. وتحقق من أن الاستنتاج صحيح من أجل قيمك المحددة.

التمثيلات المتعددة
يستخدم الطلاب في التمرين 33 معلوماتٍ منظمةً في جدولٍ وحاسبة تمثيل بياني لنفي فرضيةٍ حول العمليات المثلثية.

722 | الدرس 3-12 | متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تدريب على الاختبار المعياري

.43 الإجابة الشبكية يساوي متوسط سبعة أعداد 0. ويساوي مجموع ثلاثة من هذه الأعداد -9. فما مجموع بقية الأعداد؟ **9**

.44 المتغيرات a و b و c و d و f و أعداد صحيحة في متتالية فيها $a = 2$ و $b = 12$. لإيجاد الحدّ التالي، ضاعف الحدّ الأخير واجمع ذلك الناتج إلى الحدّ الذي يسبق الحدّ الأخير منقوصًا منه واحد. فعلى سبيل المثال، $c = 25$ لأن $2(12) = 24$ و $2 - 1 = 1$ و $24 + 1 = 25$. ما قيمة f؟ **C**

A 74

B 144

C 146

D 256

SAT/ACT .45 حلّ $x^2 - 5x < 14$. **H**

F $\{x|-7 < x < 2\}$

G $\{x|x < -7$ أو $x > 2\}$

H $\{x|-2 < x < 7\}$

J $\{x|x < -2$ أو $x > 7\}$

K $\{x|x > -2$ و $x < 7\}$

.46 الاحتمالات توزّع معلّمةٌ عشوائيًا 15 قلمًا أصفر و 10 أقلام خضراء. فما احتمال أن يكون القلم الأول الذي توزعه أصفر والقلم الثاني أخضر؟ **B**

A $\frac{1}{24}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{2}{5}$

D $\frac{23}{25}$

مراجعة شاملة

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.** (الدرس 2-12) **47, 48. انظر الهامش.**

47. $\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

48. $\sec\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

بسّـــــط كل تعبير مما يلي. (الدرس 1-12)

49. $\sin\theta\csc\theta - \cos^2\theta$ **$\sin^2\theta$**

50. $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$ **$\cot\theta$**

51. $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$ **$\sec\theta$**

.52 **الجيتار** عند ضرب وتر الجيتار، فإنه يزاح عن نقطةٍ ثابتةٍ في المنتصف ويهتزّ جيئةً وذهابًا ليصدر نغمةً موسيقية. وتعتمد النغمة المحددة على التردد، أو عدد دورات اهتزاز الوتر في الثانية. لإصدار النغمة A، فإن التردد يساوي 440 دورةً في الثانية، أو 440 هرتز (Hz).

a. أوجد دور هذه الدالة. **$\frac{1}{440}$ ثانية**

b. مثّل بيانيًا ارتفاع النقطة الثابتة على الوتر عن موضع سكونها بدلالة الزمن. وافترض أن للمسافة القصوى فوق موضع السكون قيمة 1 وحدة، وافترض أن المسافة الصغرى تحت هذا الموقع تساوي 1 وحدة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة. **53, 54. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

.53 $4^n - 1$ مقسومةً على 3.

.54 $5^n + 3$ مقسومةً على 4.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

55. $7 + \sqrt{4x + 8} = 9$ **-1**

56. $\sqrt{y + 21} - 1 = \sqrt{y + 12}$ **4**

57. $\sqrt{4z + 1} = 3 + \sqrt{4z - 2}$ **لا يوجد حل**

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع أخبر الطلاب أن $\sin 20° $ يساوي تقريبًا 0.3420. واطلب منهم استخدام هذه المعلومة لإيجاد $\sin 65°$ و $\cos 65°$. **0.9063, 0.4226**

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب إعداد قائمةٍ تتضمن الزوايا الواقعة بين 0° و 360°، والتي يمكن عندها استخدام صيغ المجموع والفرق بسهولة. ثم اجعلهم يذكروا الجوانب المشتركة بين الزوايا.

إجابات إضافية

32a. $$\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+60°)\right]}{\sin\frac{60°}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}+30°\right)}{\sin 30°} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos 30° + \cos\frac{a}{2}\sin 30°}{\sin 30°} = \frac{\left(\sin\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$$

47. $$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$$
$$\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$$
$$\cos\theta + \sin\theta = \cos\theta + \sin\theta \checkmark$$

48. $$\sec\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta = \tan^2\theta \checkmark$$

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 12-1 إلى 12-3 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابة إضافية

5. $\frac{31.5\sqrt{3593.25}}{3593.25}$

الوحدة 12 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 12-1 إلى 12-3

بسّط كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

1. $\cot\theta\sec\theta$ **$\csc\theta$**
2. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**
3. $\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ **$\cos\theta$**
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$ **1**

5. **التاريخ** في عام 1971، تم اعتماد علم الإمارات العربية المتحدة. وفي هذا العلم، $\tan\theta=\frac{31.5}{51}$. أوجد قيمة $\sin\theta$. **انظر الهامش.**

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

6. $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta=\frac{3}{5}$; $0°<\theta<90°$ **$\frac{4}{5}$**
7. $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta=\frac{1}{2}$; $270°<\theta<360°$ **$-\frac{\sqrt{5}}{2}$**
8. $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta=\frac{4}{3}$; $0°<\theta<90°$ **$\frac{\sqrt{7}}{3}$**

9. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يكافئ $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 12-1) **D**

A $\cos\theta$
B $\csc\theta$
C $\tan\theta$
D $\sec\theta$

10. **مدن الملاهي** افترض أن طفلاً يجلس على الحصان الخارجي في دوامة الخيول. ويبلغ قطر دوامة الخيول 16 مترًا. وتُعطى زاوية ميلها بالمعادلة $\tan\theta=\frac{v^2}{gR}$، حيث R هو نصف قطر المسار الدائري و v هي السرعة بالمتر في الثانية و g تساوي 9.8 أمتار في الثانية المربعة. (الدرس 12-1)
   a. إذا كان Sine زاوية ميل الطفل يساوي $\frac{1}{5}$، فما زاوية الميل التي يصنعها الطفل؟ **حوالي 11.5°**
   b. ما السرعة المتجهة لدوامة الخيول؟ **حوالي 4 m/s**
   c. إذا كانت سرعة دوامة الخيول 3.6 أمتار في الثانية، فما قيمة زاوية ميل الراكب؟ **حوالي 9.4°**

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

11. $\cot^2\theta+1=\frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$
12. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta}=1$
13. $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=(1+\cos\theta)\sec\theta$
14. $\tan\theta(1-\sin\theta)=\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

11–14. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

15. **الحاسوب** يُقاس الوجه الأمامي لشاشة الحاسوب عادةً بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 12-2)

   a. أوجد قيمة h. **18**
   b. استعن بالرسم التخطيطي الموضح لإثبات أن $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

16. $\tan^2\theta+1=\frac{\tan\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$
17. $\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta}{\sec\theta-1}=(\sec\theta+1)\cot\theta$
18. $\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta=\tan^2\theta-\sin^2\theta$
19. $\cot\theta(1-\cos\theta)=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}$

16–19. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 12-3)

20. $\cos 105°$ **$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$**
21. $\sin(-135°)$ **$\frac{-\sqrt{2}}{2}$**
22. $\tan 15°$ **$2-\sqrt{3}$**
23. $\cot 75°$ **$2-\sqrt{3}$**

24. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 12-3) **H**

F $\sqrt{2}$
H $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
G $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
J $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25. أثبت أن $\cos 30°\cos\theta+\sin 30°\sin\theta=\sin 60°\cos\theta+\cos 60°\sin\theta$ عبارة عن متطابقة. (الدرس 12-3) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

724 | الوحدة 12 | اختبار نصف الوحدة