1 حل المعادلات المثلثية

يوضح **المثال 1** كيفية حلّ معادلاتٍ مثلثيةٍ مع العلم بفترة معطاة. ويوضح **المثال 2** كيفية حلّ معادلاتٍ مثلثيةٍ للحصول على قياسات زوايا بالراديان. ويبيّن **المثال 3** كيفية حلّ مسائل من الحياة اليومية تضم معادلاتٍ مثلثية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حل $2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta$ إذا كان $0° \le \theta \le 180°$. $30°, 150°$

2 **a.** أوجد حل $\cos\theta + \frac{1}{4} = \sin^2\theta$ لجميع قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسةً بالدرجات.
$60° + k \cdot 360°, 300° + k \cdot 360°$، حيث k هي أي عدد صحيح

b. أوجد حل $2\cos\theta = -1$ لجميع قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسة بوحدات الراديان.
$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ و $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.
حيث k هي أي عددٍ صحيح

3 **مدن الملاهي** راجع بداية الدرس. كم يستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع $(10\sqrt{2} + 21)$ مترًا فوق سطح الأرض؟

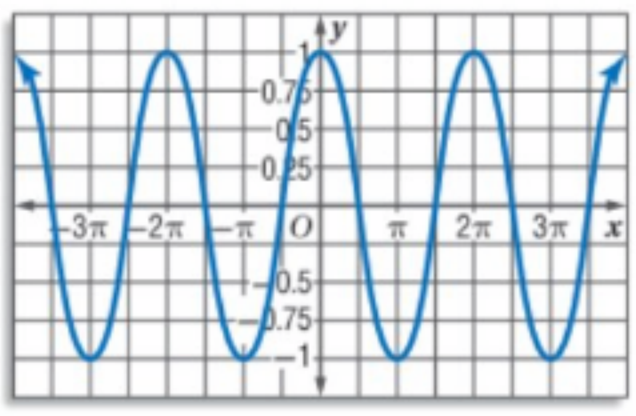
$$10\sqrt{2} + 21 = 21 - 20\cos 3\pi t;$$
$$10\sqrt{2} = -20\cos 3\pi t;$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3\pi t;$$
$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\pi t;$$
$$\frac{3}{4}\pi = 3\pi t$$
$$\frac{1}{4} = t$$
$$\frac{1}{4}\text{ min} = 15\text{ sec}$$

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُــلّ $\cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لـــ $y = \cos\theta$ لإيجاد حلول $\cos\theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك $-\pi$ و -3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في الفترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π. فترة دالة cosine هي 2π راديان. إذًا فيمكن كتابة الحلول في الصورة $\pi + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

نصيحة دراسية
التعبير عن الحلول في صيغة مضاعفات إن التعبير $\pi + 2k\pi$ يتضمن 3π ومضاعفاته، ولذلك فليس من الضرورة إدراجهما بصورة منفصلة.

تمرين موجّه

2A. حُلّ $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

2B. حُلّ $2\sin\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

2A. $90° + k \cdot 180°$
و $120° + k \cdot 360°$
و $240° + k \cdot 360°$
2B. $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
و $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

غالبًا ما تُستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية حل المعادلات المثلثية

حدائق الملاهي **راجع بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض؟**

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض عن h بـــ 31.
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كل طرف.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كل طرف على -20.
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	أوجد معكوس cosine.
$\frac{2\pi}{3} = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} = 3\pi t$	معكوس cosine $-\frac{1}{2}$ هو $\frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$.
$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$	k هو أي عدد صحيح.
$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ أو $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$	اقسم كل طرف على 3π.

يُحصَل على القيمة الموجبة الصغرى لـــ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.
لذلك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو حوالي 13 ثانية.

تمرين موجّه

3. كم من الوقت يستغرق الأمر كي يبلغ مقعدك ارتفاع 41 مترًا فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟
حوالي 20 ثانية

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج في المثال 2، أوضِح للطلاب كيفية البحث عن أنماطٍ في الحلول. إذ ينبغي أن يبحث الطلاب عن أزواجٍ من الحلول الفرق بين كل منها π أو 2π بالضبط.

2 الحلول الدخيلة

يوضح **المثال 4** كيفية حل معادلةٍ مثلثيةٍ واختبار الحلول الدخيلة. ويوضح **المثال 5** كيفية استخدام المتطابقات لحل معادلةٍ مثلثية.

مثال إضافي

4 حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$ ؛ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

b. $\cos\theta = 1 - \sin\theta$ إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$ ؛ $0°, 90°, 360°$

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية، ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. ويقيّمون باستمرار مدى منطقية نتائجهم الوسيطة. شجّع الطلاب على دراسة حلولهم عن كثبٍ وكتابتها بأبسط صورةٍ ممكنة.

التركيز على محتوى الرياضيات

العدد اللا نهائي من الحلول لكثيرٍ من المعادلات المثلثية عددٌ لا نهائيٌ من الحلول. فإن لم تُحدد فترةٌ لحصر عدد الحلول، فيجب تحديد العدد اللا نهائي من الحلول عن طريق استخدام تعبيرٍ بدلاً من مجرد استخدام عدد. وهناك حلٌ يظهر لكل تدوير كامل حول نقطة الأصل، وهو حل له الصيغة $a° + k \cdot 360°$، حيث k هي أي عددٍ صحيح.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

دفتر الملاحظات اطلب من الطلاب كتابة ملاحظات في دفتر الملاحظات اليومية عن كيفية حل المعادلات المثلثية. واطلب منهم أن يصفوا أوجه تشابه هذه العملية واختلافها عن حل أنواع أخرى من المعادلات.

---

2 الحلول الدخيلة بعض الدوال المثلثية ليس لها حل. على سبيل المثال، ليس للدالة $\cos\theta = 4$ حل لأن قيم $\cos\theta$ تقع بين -1 و 1 متضمنًا هذين العددين. لذا، تكون مجموعة حلول $\cos\theta = 4$ خالية.

مثال 4 تحديد ما إذا كان هناك حل

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ **إذا كانت** $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\sin\theta - 2 = 0$ أو $2\sin\theta + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin\theta = 2$ ؛ $2\sin\theta = -1$

هذا ليس حلاً بما أن جميع قيم $\sin\theta$ تقع بين -1 و 1، مشتملاً على القيمتين الطرفيتين.

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

الحلول هي $\frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$.

التحقق

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0=0 \checkmark$$

$$2\sin\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

b. $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ **إذا كانت** $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ تربيع كل طرف.

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ؛ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ ضع الطرف الأيسر مساويًا لـ 0.

$0 = 2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$ حلل إلى العوامل.

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ ؛ $\cos\theta = 0$

$\theta = 180$ ؛ $\theta = 90° = 270°$

التحقق

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta \qquad \sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \qquad \sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1) \qquad 1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$0=0 \checkmark \qquad 1 = 1 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \text{ ✗}$$

الحلّان هما 90° و 180°.

تمرين موجّه **4B. متطابقة؛ ولذلك، هناك عدد لا نهائي من الحلول**

4A. $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ **لا يوجد حل**

4B. $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

إذا لم تكن المعادلة قابلةً للحل بسهولةٍ باستخدام تحليل العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير باستخدام المتطابقات المثلثية. ولكن استخدام المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع، قد يعطي حلولاً دخيلة. إذًا فمن الضروري التحقق من حلك باستخدام المعادلة الأصلية.

نصيحة في حل المسائل

الانتظام ابحث عن الأنماط في حلولك. وابحث عن أزواج من الحلول التي يساوي الفرق بينها π أو 2π بالتحديد واكتب حلولك بأبسط نمط ممكن.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التواصل خلال تناول الطلاب لهذا الدرس، اطلب منهم إنشاء قائمةٍ صفيةٍ على اللوحة تُحدّد الأخطاء الشائعة التي يرتكبونها. وشجّع الطلاب على إضافة اقتراحاتٍ تتعلق بكيفية تجنب أخطائهم. فعلى سبيل المثال، من الأخطاء الشائعة أن يضبط أحدهم حاسبته على الدرجات في وقت يتعين عليه ضبطها على وحدات الراديان لحلّ مسألةٍ ما أو العكس.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حُـلّ $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ بوضع طرف واحد مساويًا للصفر 0.

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\tan^2\theta = -1$ $\tan^2\theta = 3$

لا يعطي هذا الجزء أي حلولٍ نظرًا إلى أن $\tan^2\theta$ ليست سالبة على الإطلاق. $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

$\theta = 60° + 180°k$ و $\theta = -60° + 180°k$. حيث k أي عدد صحيح. الحلّان هما $60° + 180°k$ و $-60° + 180°k$.

تمرين موجّه

5A. $90° + k \cdot 180°$

5B. $\frac{7\pi}{6} + 2k\cdot\pi$ و $\frac{11\pi}{6} + 2k\cdot\pi$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

5A. $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

نصيحة دراسية

حل المعادلات المثلثية تذكر أن حل معادلة مثلثية يعني الحلّ لإيجاد جميع قيم المتغير.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الانتظام** حُلّ كل معادلة مما يلي إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$.

1. $2\sin\theta + 1 = 0$ **210°, 330°**
2. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$ **180°**
3. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ **60°, 180°, 300°**
4. $2\cos\theta = 1$ **60°, 300°**
5. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **150°, 210°**
6. $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **120°, 150°, 300°, 330°**
7. $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$ **30°, 150°**
8. $\sin\theta + \cos\theta = 1$ **0°, 90°, 360°**

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

9. $4\sin^2\theta - 1 = 0$ **9.** $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ or $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
10. $2\cos^2\theta = 1$ $\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$
11. $\cos 2\theta\sin\theta = 1$ $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
12. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ $\frac{\pi}{2} + 4\pi k$
13. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$ $\pi + 2k\pi$
14. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

14. $0 + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

15. $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$
16. $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$
17. $2\sin^2\theta - 1 = 0$ $45° + k\cdot 90°$
18. $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$
19. $\cos 2\theta\sin\theta = 1$ $270° + k\cdot 360°$
20. $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$ $0° + k\cdot 180°, 90° + k\cdot 360°$

15. $90° + k\cdot 180°$
16. $0° + k\cdot 180°$, $90° + k\cdot 360°$
18. $30° + k\cdot 360°$, $150° + k\cdot 360°$, $90° + k\cdot 180°$

مثال 3

21. **الضوء** يمكن تقدير عدد ساعات النهار d في هارتفورد، كونيتيكت، باستخدام المعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t هو عدد الأيام بعد 21 مارس.

a. ما الأيام التي يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات بالتحديد؟

b. باستخدام النتائج في الجزء a، اذكر ما أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. واشرح كيف عرفت ذلك. **انظر الهامش.**

21a. ستكون هناك $10\frac{1}{2}$ ساعات من النهار بعد 21 مارس بـ 213 و 335 يومًا؛ أي في 20 أكتوبر و 19 فبراير.

مثال إضافي

5 حُـلّ $\tan^4\theta - 4\sec^2\theta = -7$ لجميع قيم θ إذا كانت θ تقاس بالدرجات. $\theta = 60° + 180°k, 120° + 180°k$، أو $45° + 90° \cdot k$، حيث k أي عددٍ صحيح.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 29 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجد، ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل، ويقيّمون على نحوٍ مستمرٍ مدى صحة نتائجهم الوسيطة.

إرشاد للمعلمين الجدد

الرمز في جميع إجابات هذا الدرس التي تتضمن k. يُعتبر k على أنه أي عددٍ صحيح.

إجابة إضافية

21b. كل يوم من 19 فبراير إلى 20 أكتوبر؛ التفسير النموذجي: بما أن أطول أيام السنة يصادف يوم 22 يونيو، فلا بد أن يزداد طول الأيام الواقعة بين 19 فبراير و 20 أكتوبر حتى تاريخ 22 يونيو ومن ثم سوف تتناقص من حيث الطول حتى تاريخ 20 أكتوبر.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب		خيار اليومين
AL مبتدئ	30-48, 58, 60-62, 64-83	31-47 فردي، 64-67	30-48 زوجي، 58, 60-62, 68-83
OL أساسي	31-55 فردي، 56-58, 60-62, 64-83	30-48, 64-67	49-58, 60-62, 68-83
BL متقدم	49-80, (اختياري: 81-83)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار. "هل هذا جواب منطقي؟"

المثالان 4–5 حُـلّ كلاً من المعادلات التالية. $25.\ \frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

22. $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ $\frac{\pi}{2}+\pi k$
23. $\tan^2 \theta + 2\tan\theta + 1 = 0$ $\frac{3\pi}{4}+\pi k$
24. $\cos^2 \theta + 3\cos\theta = -2$ $\pi + 2\pi k$
25. $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$
26. $\tan\theta = 1$ $45° + k \cdot 180°$ أو $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$
27. $\cos 8\theta = 1$ $0° + k\cdot 45°$ أو $0 + k\cdot\frac{\pi}{4}$
28. $\sin\theta + 1 = \cos 2\theta$ $0° + k\cdot 180°, 210° + k\cdot 360°, 330° + k\cdot 360°$
29. $2\cos^2\theta = \cos\theta$ $\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حُـلّ كل معادلة مما يلي عند الفترة المعطاة. $32.\ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ $30.\ 60°, 120°, 240°, 300°$

30. $\cos^2\theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$
31. $2\sin^2\theta = 1; 90° < \theta < 270°$ $135°, 225°$
32. $\sin 2\theta - \cos\theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$
33. $3\sin^2\theta = \cos^2\theta; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
34. $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0; 180° < \theta < 360°$ $240°, 300°$
35. $4\sin^2\theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$ $210°, 330°$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

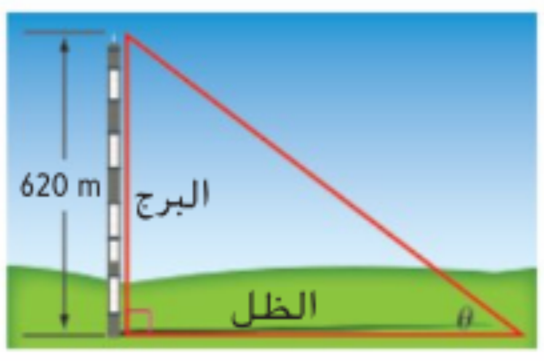
36. $\cos 2\theta + 3\cos\theta = 1$
37. $2\sin^2\theta = \cos\theta + 1$
38. $\cos^2\theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\cos\theta$
39. $3\cos\theta - \cos\theta = 2$ $0 + 2k\pi$

$36.\ \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$
$37.\ \pi+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$
$38.\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

40. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ $45° + k\cdot 180°$
41. $\tan\theta - \sin\theta = 0$ $0° + k\cdot 180°$
42. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3$ $270° + k\cdot 360°$
43. $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ $30° + k\cdot 360°, 150° + k\cdot 360°$

مثال 3



44. **الإلكترونيات** من أعلى الأبنية في العالم أحد أبراج النقل التلفزيوني بالقرب من فارغو في داكوتا الشمالية بالولايات المتحدة. وارتفاعه 620 مترًا. فما قياس الزاوية θ إذا كان طول ظل البرج 1.6 كيلومتر؟ 21° تقريبًا

$45.\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi$ or $210° + k\cdot 360°, 330° + k\cdot 360°$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

45. $2\sin^2\theta = 3\sin\theta + 2$
46. $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 3$ $46.\ \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi$ أو $30° + k\cdot 360°, 150° + k\cdot 360°, 90° + k\cdot 360°$
47. $\sin^2\theta + \cos 2\theta = \cos\theta$ $0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $0° + k\cdot 360°, 90° + k\cdot 180°$
48. $2\cos^2\theta = -\cos\theta$

B 49. **الاستنتاج المنطقي** نظرًا إلى المدّ والجزر في المحيط، يتغير عمق y نهر التايمز في لندن، بالأمتار، مع دالة sine لـــ x التي تمثل الساعة في اليوم. وفي يوم محدد، كانت تلك الدالة تساوي $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ تقابل 12:00 منتصف الليل، 1:00 صباحًا، 2:00 صباحًا، .... 12:00 منتصف ليل الليلة التالية.

a. ما العمق الأقصى لنهر التايمز في ذلك اليوم؟ 11 m

b. في أي وقتٍ حدث ذلك العمق الأقصى؟ 7:00 صباحًا و 7:00 مساءً.

$48.\ \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi$ أو $90° + k\cdot 180°, 120° + k\cdot 360°, 240° + k\cdot 360°$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

50. $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$
51. $2\sin^2\theta + (\sqrt{2}-1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{4}+2\pi k, \frac{7\pi}{4}+2\pi k$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

52. $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ $30° + 360°k, 150° + 360°k, 330° + 360°k$
53. $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$ $120° + 360°k, 240° + 360°k$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$ πk

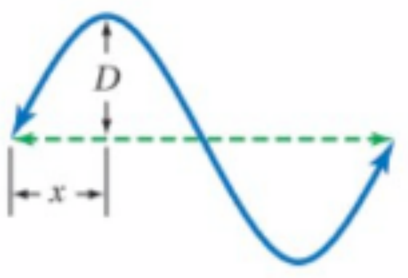
55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

56. **الماس** حسب قانون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 هي قرينة انكسار الوسط الذي يدخله الضوء، و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية الانكسار بالدرجات.

a. تساوي قرينة انكسار الماس 2.42، وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. فإذا أصابت حزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي °35، فما زاوية الانكسار؟ **13.71°**

b. اشرح كيف يمكن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعةٌ من الألماس أصلية. **قِس زاويتي الورود والانكسار لتحديد قرينة الانكسار. فإذا كانت القرينة تساوي 2.42، فإن قطعة الألماس أصلية.**

57. **المثابرة** يمكن تمثيل موجةٍ في وتر جيتارٍ باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin (6.5x) \sin (2500t)$، وفيها D هي الإزاحة بالملّيمتر عند الموضع x ملّيمترًا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t ثانية. أوجد أول زمنٍ موجبٍ يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 0.5 متر من الطرف الأيسر إزاحةٌ مسافتها 0.01 ملّيمتر. **0.0026 ثانية**



58. **التمثيلات المتعددة** تأمل المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

a. **جدوليًا** أنشئ جدول قيم حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي تجعل $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$؟ **a–3d انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

b. **بيانيًا** مثّل $y = \sin \theta$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي يكون عندها التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$؟

c. **تحليليًا** بناءً على إجاباتك عن الجزأين a و b، حلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ لإيجاد كل قيم θ.

d. **جبريًا** حلّ كل متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360°$. ثم حلّ كلاً منها لإيجاد كل قيم θ.

i. $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$

iii. $-\sin \theta \geq 0$

iv. $\cos \theta - 1 < -\frac{1}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مهارات التفكير العليا

59. **التحدٍ** حلّ $\sin 2x < \sin x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$ دون استخدام الآلة الحاسبة. **$\frac{\pi}{3} < x < \pi$ أو $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$**

60. **التبرير** قارن ووبيّن الفرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما التقنيات المتماثلة؟ وما التقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟ **انظر الهامش.**

61. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول في أغلب الأحيان؟ **انظر الهامش.**

62. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب مثالاً لمعادلةٍ مثلثيةٍ يكون لها حلّان بالضبط إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$. **الإجابة النموذجية: $2 \cos \theta = 0$, 90° و 270°**

63. **التحدٍ** كم عدد الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$ لـ $a \sin (b\theta + c) = d$. إذا كان $a \neq 0$ و b عددًا صحيحًا موجبًا؟ **$2b$ أو $0, b,$**

إجابات إضافية

60. يمكن أن يتطلب كل نوع من المعادلات جمع العدد نفسه إلى كلا طرفي المعادلة أو طرحه أو الضرب فيه أو القسمة عليه. ويمكن في أغلب الأحيان حلّ المعادلات المثلثية عبر التحليل إلى عوامل. ولا تتطلب المعادلات الخطية والتربيعية متطابقات. ويمكن حل جميع المعادلات الخطية والتربيعية جبريًا، بينما يمكن حل بعض المعادلات المثلثية بصورةٍ أسهل عبر استخدام حاسبة تمثيل بياني. وللمعادلة الخطية حلٌ وحيدٌ على الأكثر. وللمعادلات التربيعية حلّان على الأكثر. وللمعادلة المثلثية عادة عددٌ لا نهائيٌ من الحلول، إلا إذا كانت قيم المتغير مقيدة.

61. الإجابة النموذجية: جميع المعادلات المثلثية دورية. ولذلك، حالما يتم إيجاد حل واحدٍ أو أكثر لفترةٍ محددة، فستكون هناك حلولٌ أخرى يمكن إيجادها عبر جمع مضاعفاتٍ صحيحةٍ لفترة الدالّة إلى هذه الحلول.

72. $\sin (270° - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$\sin 270° \cos \theta - \cos 270° \sin \theta \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-1 \cos \theta - 0 \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-\cos \theta = -\cos \theta$ ✓

73. $\cos (90° + \theta) \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$\cos 90° \cos \theta - \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$0 - 1 \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$-\sin \theta = -\sin \theta$ ✓

74. $\cos (90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$\cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$\sin \theta = \sin \theta$ ✓

75. $\sin (90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos \theta$

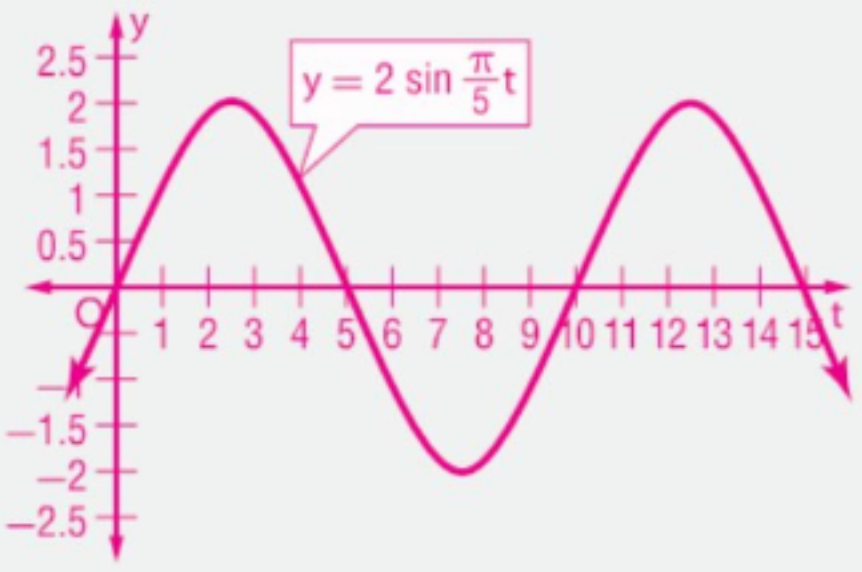
$\sin 90° \cos \theta - \cos 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$1 \cdot \cos \theta - 0 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta - 0 \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta = \cos \theta$ ✓

76b.



تدريب على الاختبار المعياري

64. الإجابة الموسّعة حصل بلال على AED 2500 بمثابة مكافأة لتخرّجه. وقد أودع المبلغ في حساب للتوفير كانت نسبة المرابحة فيه 5.5% في العام.

a. فكم أصبح في حساب التوفير بعد 5 سنواتٍ إذا لم يقم بأيّ إيداعات أو سحوبات إضافية؟ **AED 3267.40**

b. بعد كم عام سيكون المبلغ المودعُ في حسابه قد تضاعف؟ **حوالي 13 yr**

65. الاحتمال أوجد احتمال الحصول على العدد 3 ثلاث مرات متتالية إذا رَمي مكعب أعداد ثلاث مرات. **A**

A $\frac{1}{216}$ C $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{36}$ D $\frac{1}{4}$

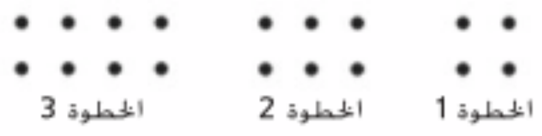
66. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه. **F**

$$f(x) = x^4 + 10x^2 + x + 8$$

F 62   H 30

G 38   J 8

67. SAT/ACT يستمرّ نمط النقاط المبين أدناه إلى ما لا نهاية، بحيث تضاف نقاطٌ إضافيةٌ في كل خطوة.



ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة رقم n؟ **E**

A $2n$ D $2(n+2)$

B $n(n+2)$ E $2(n+1)$

C $n(n+1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 4-12)

68. $\cos 165°$ $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

69. $\sin 22\frac{1}{2}°$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

70. $\sin \frac{7\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

71. $\cos \frac{7\pi}{12}$ $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي: (الدرس 2-12) **72–75. انظر الهامش.**

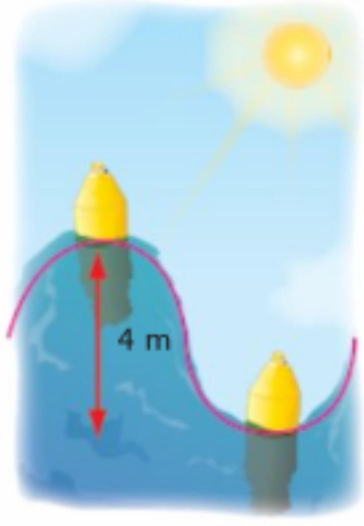
72. $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$

73. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

74. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

75. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

76. السلامة في الماء ترتفع عوّامةٌ في الميناء وتنخفض مع حركة الأمواج. تساوي المسافة بين النقطة العليا والسفلى 4 أمتار. وتتحرك العوامة من نقطتها العليا إلى نقطتها الدنيا وعودةً إلى نقطتها العليا كل 10 ثوان.



a. اكتب معادلةً لتمثيل حركة العوّامة. وافترض أنها في وضع التوازن عند $t = 0$ وأنها في طريقها إلى الأعلى من مستوى الماء الطبيعي. $y = 2\sin\frac{\pi}{5}t$

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع العوّامة بدلالة الزمن. **انظر الهامش.**

c. ما ارتفاع العوّامة بعد 12 ثانية؟ **حوالي 1.9 m**

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلةٍ حسابيةٍ مما يلي.

77. $a_1 = 17,\ a_n = 197,\ S_n = 2247$ **17, 26, 35**

78. $a_1 = -13,\ a_n = 427,\ S_n = 18{,}423$ **−13, −8, −3**

79. $n = 31,\ a_n = 78,\ S_n = 1023$ **−12, −9, −6**

80. $n = 19,\ a_n = 103,\ S_n = 1102$ **13, 18, 23**

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة نسبيّة بيانيًا. **81–83. انظر الهامش.**

81. $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ **82.** $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ **83.** $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب استكشاف حلول المعادلة $\sin x = \frac{x}{k}$، حيث k هو عددٌ صحيحٌ موجب. وكلّفهم بتحديد كيفية تغيّر عدد حلول المعادلة بتغيّر k. وما قيمة x التي تعطي حلاً للمعادلة المتعلقة بجميع قيم k؟ 0

تدريس الممارسات في الرياضيات

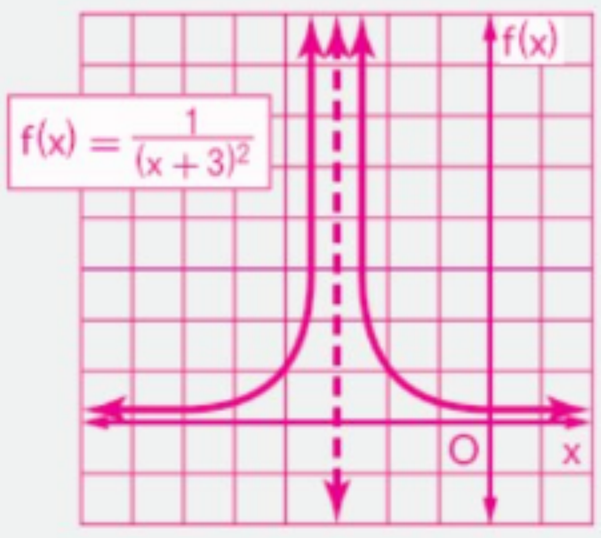
المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

4 التقويم

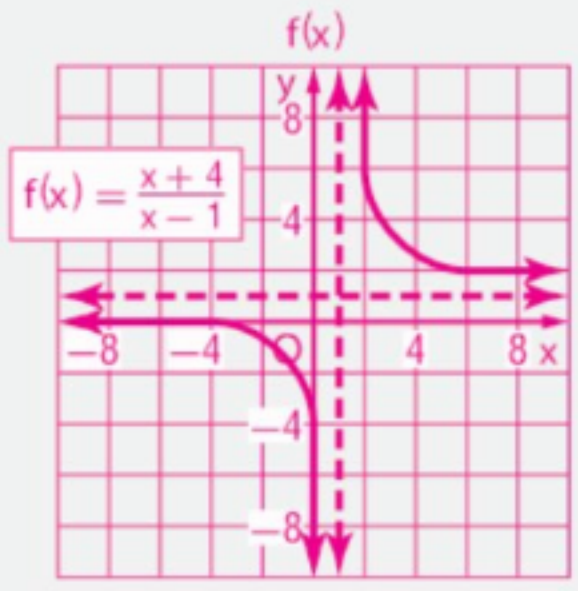
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب كتابة معادلةٍ تتضمن $\sin^2\theta$ ولها حلّ وحيدٌ بالضبط للفترة $90° < \theta < 270°$.

إجابات إضافية

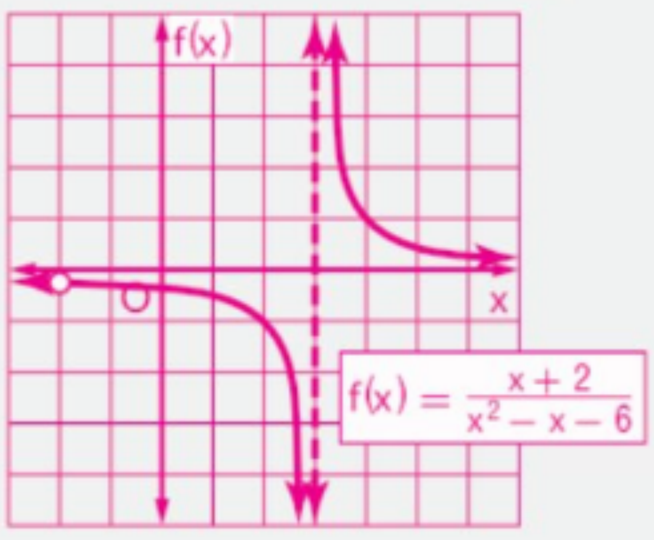
81.



82.



83.



التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-9، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم. واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرًا إلى أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

الوحدة 12 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 12-5 و 12-2 و 12-1)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقات بين الدوال المثلثية.
- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط المعادلات والتعابير المثلثية وإثباتها وحلّها.

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 12-3)

- بالنسبة لجميع قيم A و B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها (الدرس 12-4)

- متطابقات أضعاف:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

- متطابقة الزاويتين المتتامتين cofunction identity
- متطابقة الزاوية السالبة negative angle identity
- متطابقة فيثاغورس Pythagorean identity
- متطابقة ناتج القسمة quotient identity
- متطابقة عكسية reciprocal identity
- معادلة مثلثية trigonometric equation
- متطابقة مثلثية trigonometric identity

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. يمكن استخدام ________ لإيجاد sine 75° و Cosine إذا كان sine 90° و cosine 15° معروفين. **متطابقة فرق زاويتين**
2. المتطابقتان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هما مثالان على ________. **المتطابقات النسبية**
3. ________ هي معادلةٌ تضم متطابقاتٍ مثلثية، وهي صحيحةٌ لجميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معرّفة. **المتطابقة المثلثية**
4. يمكن استخدام ________ لإيجاد sin 60° باستخدام الزاوية 30° بمثابة مرجع. **متطابقة الزاوية المزدوجة**
5. تكون ________ صحيحةً فقط عند قيم محددة للمتغير. **المعادلة المثلثية**
6. يمكن استخدام صيغة ________ لإيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$. **نصف الزاوية**
7. المتطابقتان $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ و $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ هما مثالان على ________. **المتطابقات العكسية**
8. يمكن استخدام ________ لإيجاد sine 120° أو Cosine إذا كان sine 90° و cosine 30° معروفين. **متطابقة مجموع زاويتين**
9. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي مثال على ________. **متطابقة فيثاغورس**

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المقدمة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

15. $\frac{15\sqrt{709}}{709}$

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta \div \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

مراجعة درس بدرس

12-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

10. $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $270° < \theta < 360°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

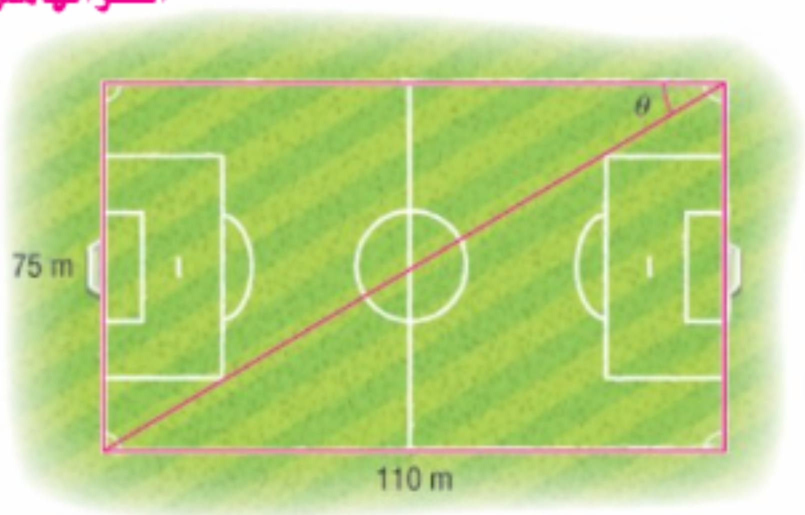
11. $\sec\theta$ إذا كانت $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$ $-\sqrt{3}$

12. $\tan\theta$ إذا كانت $\cot\theta = 2$ و $0° < \theta < 90°$ $\frac{1}{2}$

13. $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ و $180° < \theta < 270°$ $-\frac{4}{5}$

14. $\csc\theta$ إذا كانت $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ and $270° < \theta < 360°$ $-\frac{\sqrt{41}}{5}$

15. **كرة القدم** في مباريات كرة القدم الدولية، يساوي البعدان الأعظمان لأرض الملعب 110 أمتار في 75 مترًا. أوجد $\sin\theta$. **انظر الهامش.**



بسّط كل تعبير.

16. $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$

17. $\tan\theta\csc\theta$ **$\sec\theta$**

18. $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$

19. $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$ **$\sec\theta$**

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ و $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقة مثلثية

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ — اطرح $\cos^2\theta$ من كل طرف.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ — عوّض عن $\cos\theta$ بـ $\frac{3}{4}$.

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ — تربيع $\frac{3}{4}$.

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ — اطرح.

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ — أوجد الجذر التربيعي لكلٍ من الطرفين.

نظرًا إلى أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة. وبالتالي، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cot\theta$$

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

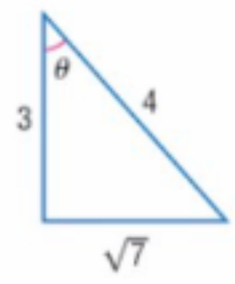
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22. $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$ **20–23. انظر الهامش.**

23. **الهندسة** يستخدم المثلث القائم الموضح على اليسار في صناعة نوع من الألحفة. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتثبت أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$ — المتطابقة الأصلية

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$ — بسّط.

$\cot\theta + \csc\theta = \cot\theta + \csc\theta$ ✓ — بسّط.

741

22. $\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1$ ✓

23. $\tan^2\theta + 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{7}{9} + 1$

$= \frac{7}{9} + \frac{9}{9} = \frac{16}{9}$;

$\sec^2\theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

12 دليل الدراسة والمراجعة تابع

12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب الآتية:.

24. $\cos(-135°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
25. $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
26. $\sin 210°$ $-\frac{1}{2}$
27. $\sin 105°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
28. $\tan 75°$ $\sqrt{3}+2$
29. $\cos 105°$ $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أثبت صحة كلاً من المتطابقات.

30. $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$ 30-32. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.
31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$
32. $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استخدم $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$
$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ لكل مما يلي.

33. $\cos\theta = \frac{4}{5};\ 0° < \theta < 90°$
34. $\sin\theta = -\frac{1}{4};\ 180° < \theta < 270°$
35. $\cos\theta = -\frac{2}{3};\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

33-36. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

36. **البيسبول** الملعب الداخلي للعبة البيسبول هو عبارة عن مربع طول ضلعه 27 متراً.
   a. أوجد طول القطر.
   b. اكتب النسبة الخاصة بـ $\sin 45°$ باستخدام أطوال ملعب البيسبول الداخلي.
   c. استخدم الصيغة $\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ لإثبات صحة النسبة التي كتبتها في الجزء b.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و θ تقع في الربع الثاني.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية
$$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$ اطرح.
$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$ اقسم.
$$= \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$ بسّـط.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

12-5 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول لكل معادلة مما يلي بالفترة المعطاة.

37. $2\cos\theta - 1 = 0;\ 0° \le \theta < 360°$ $60°, 300°$
38. $4\cos^2\theta - 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
39. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0;\ 0° \le \theta < 360°$ $90°, 210°, 270°, 330°$
40. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3;\ 0° \le \theta < 360°$ $270°$
41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

مثال 6

أوجد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المتطابقة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

$\cos\theta = 0$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\quad\sin\theta = \frac{1}{2};\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

إجابات إضافية (تدريب على الاختبار)

2. $\cos(30° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin(60° + \theta)$
$\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta \stackrel{?}{=}$
$\sin 60° \cos\theta + \cos 60° \sin\theta$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta =$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$ ✓

3. $\cos(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$\cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$(\cos\theta)(-1) + (\sin\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \sec\theta$
$\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \stackrel{?}{=} \sec\theta$
$\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$
$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$
$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$
$\sec\theta = \sec\theta$ ✓

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$
$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$
$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$
$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta}$ ✓

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$
$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$
$\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$
$\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$
$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$
$\sec^2\theta\csc^2\theta = \csc^2\theta\sec^2\theta$ ✓

13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$
$\frac{1}{\sec\theta} + \frac{\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta} \cdot \frac{1 + \cos\theta}{1 + \cos\theta}$
$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1 + \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$
$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1 + \cos\theta)}{\sin^2\theta}$
$\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta$ ✓

الوحدة 12 تدريب على الاختبار

1. **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟ D

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

2. أثبت صحة المتطابقة $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3. أثبت صحة المتطابقة $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$. انظر الهامش.

4. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$.
إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت $90° < \theta < 180°$؟ J

F $\frac{5}{3}$

G $\frac{\sqrt{34}}{8}$

H $-\frac{4}{5}$

J $\frac{4}{5}$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

5. $\cot\theta$، إذا كانت $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

6. $\tan\theta$، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$ $-\sqrt{3}$

7. $\sec\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. $\cot\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{4}{3}$

9. $\sec\theta$، إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° \le \theta < 90°$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ 10–13. انظر الهامش.

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta \sec^2\theta$

13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

14. $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟ B

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

B $\sqrt{2} - 1$

C $1 - \sqrt{2}$

D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16. **التاريخ** يعتقد بعض الباحثين أن بنّائي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأكبر، لربما حاولوا بناء أوجه الأهرامات على هيئة مثلثاتٍ متساوية الأضلاع. ولكنهم اضطروا بعد ذلك إلى تغييرها إلى أشكالٍ أخرى. افترض أنّ هرمًا يشيّد بحيث يكون وجهه مثلثًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 مترًا.
a, b. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

a. أوجد ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع.

b. استخدم الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وقياسات المثلث متساوي الأضلاع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$. أوجد القيم الدقيقة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

17. $\cos(-225°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. $\sin 480°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

20. $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

21. **الصواريخ** يُطلق نموذج صاروخ بسرعةٍ متجهة ابتدائية تساوي 20 مترًا في الثانية. ويُمكن إيجاد مدى المقذوف باستخدام الصيغة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$، حيث يمثل R المدى، ويمثل v السرعة المتجهة الابتدائي، ويمثل g تسارع الجاذبية الأرضية أو 9.8 أمتار في الثانية تربيع، وتمثل θ زاوية الإطلاق . فما الزاوية المطلوبة لكي يبلغ مدى الصاروخ 25 مترًا؟
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

حُــلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ بالراديان.

22. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$

23. $2\sin 3\theta - 1 = 0$ $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

حُــلّ كل معادلة مما يلي بالفترة $0° \le \theta \le 360°$ إذا كانت θ بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$ $0°, 360°$

25. $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ $0°, 60°, 180°, 300°, 360°$

743

الدرس 2-12

1. $\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\tan^2\theta}{\tan\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta = \tan\theta + \cot\theta$ ✓

2. $\cos^2\theta \stackrel{?}{=} (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

$\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = \cos^2\theta$ ✓

3. $\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta + \cot\theta}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1}$

$\sin\theta = \sin\theta$ ✓

4. $\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

5. $\tan^2\theta\csc^2\theta \stackrel{?}{=} 1 + \tan^2\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = \sec^2\theta$ ✓

6. $\tan^2\theta \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$

$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta - 1$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

8. $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\cos^2\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

9. $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\csc^2\theta = \csc^2\theta$ ✓

10. $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$1 + \dfrac{1}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = \sec^2\theta$ ✓

11. $\sin\theta\sec\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\sin\theta \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

12. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta - \cot\theta)^2$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta - 2\cot\theta\csc\theta + \cot^2\theta$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin^2\theta} - 2 \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin^2\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ ✓

13. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\tan\theta - \cot\theta = \tan\theta - \cot\theta$ ✓

14. $\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$

$\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$

$\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \tan\theta$ ✓

15. $\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$

$\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

23. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \left(2+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta+1$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = (\sin\theta+\cos\theta)^2 \checkmark$$

24. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \checkmark$$

25. $\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

$$\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \frac{\csc^2\theta-1}{\csc\theta+1}$$

$$\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \frac{(\csc\theta-1)(\csc\theta+1)}{\csc\theta+1}$$

$$\csc\theta-1 = \csc\theta-1 \checkmark$$

26. $\cos\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} \csc\theta-\sin\theta$

$$(\cos\theta)\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \checkmark$$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$$\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

16. $(\sin\theta-1)(\tan\theta+\sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$$\sin\theta\tan\theta+\sin\theta\sec\theta-\tan\theta-\sec\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta-1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

17. $\cos\theta\cos(-\theta)-\sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$

$$\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\,(-\sin\theta) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

19. $\sec\theta-\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \checkmark$$

20. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$$\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta \checkmark$$

21. $\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta+\cot\theta$

$$\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \checkmark$$

22. $\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$

$$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$\sin\theta+\cos\theta = \sin\theta+\cos\theta \checkmark$$

28. $$(\csc\theta - \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \checkmark$$

29. $$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + 1$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta \checkmark$$

30. $$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$
$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} - \frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$
$$\frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$
$$\sin\theta - \cos\theta = \sin\theta - \cos\theta \checkmark$$

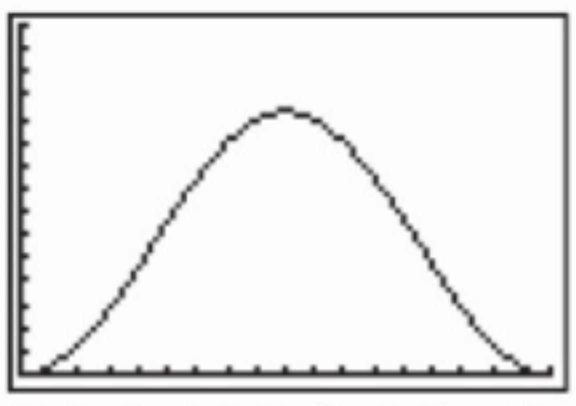
31. $$\sin^2\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta - \tan^2\theta$$
$$1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta + 1 - \tan^2\theta$$
$$1 = 1 \checkmark$$

32. $$\sec\theta - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\tan\theta\sin\theta = \tan\theta\sin\theta \checkmark$$

51a.

قياس الزاوية	الارتفاع
30°	28.2 m
45°	56.4 m
60°	84.5 m
90°	112.7 m

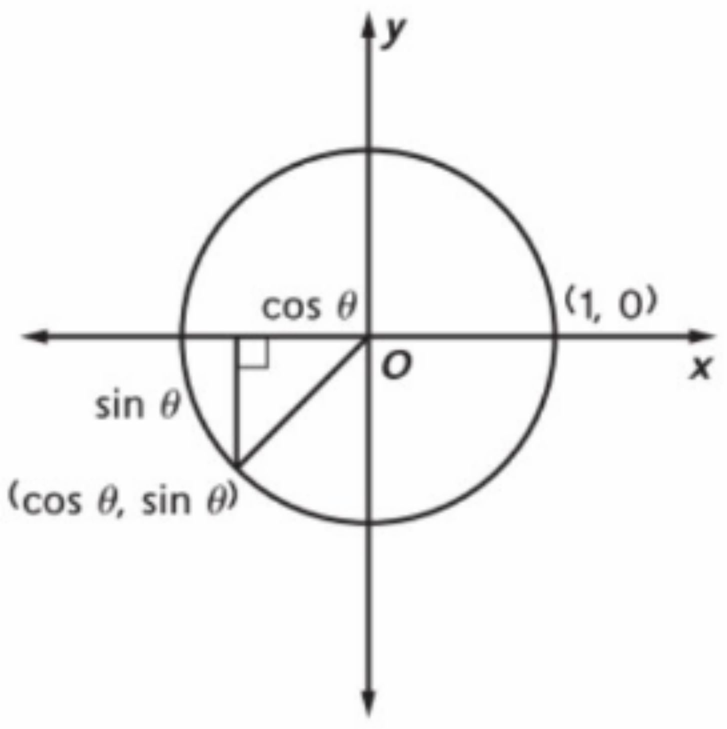
51b.



[0, 180] scl: 10 by [0, 150] scl: 10

51c. $$\frac{v_0{}^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$$
$$\frac{v_0{}^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{2g\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$$
$$\frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g} \checkmark$$

59. باستخدام دائرة الوحدة ونظرية فيثاغورس، يمكننا تعليل أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



إذا قسمنا كل حد للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ على $\cos^2\theta$. فيمكننا تبرير أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

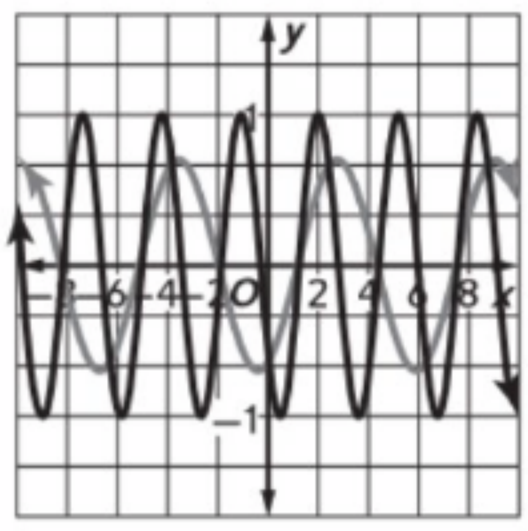
إذا قسمنا كل حد للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ على $\sin^2\theta$. فيمكننا تبرير أن $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

الدرس 12-3

30. $$F = \frac{W(\sin A + \mu\cos A)}{\cos A - \mu\sin A}$$
$$= \frac{W(\sin A + \tan\theta\cos A)}{\cos A - \tan\theta\sin A}$$
$$= \frac{W\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\tan\theta\cos A}{\cos A}\right)}{\frac{\cos A}{\cos A} - \frac{\tan\theta\sin A}{\cos A}}$$
$$= \frac{W(\tan A + \tan\theta)}{1 - \tan A\tan\theta}$$
$$= W\tan(A + \theta)$$

33b.



33c. لا؛ المثال المضاد هو: $\cos(30° + 45°) = \cos 30° + \cos 45°$.
ويساوي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو حوالي 1.5731. بما أن قيمة cosine لا يمكن أن تكون أكبر من 1، فهذه العبارة حتمًا غير صحيحة.

34. $\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{1}$$

$$\sin(A+B) = \sin(A+B) \checkmark$$

35. $\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{1}$$

$$\cos(A+B) = \cos(A+B) \checkmark$$

36. $\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos(A-B)}$$

$$\sec(A-B) = \sec(A-B) \checkmark$$

37. $\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$

$$(\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 B \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^2 B(\sin^2 A + \cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1) - (\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B \checkmark$$

40. $\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)}$

$$= \frac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

$$= \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\cot A} \cdot \frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} \cdot \frac{\cot A \cot B}{\cot A \cot B}$$

$$= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

41. $d = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$

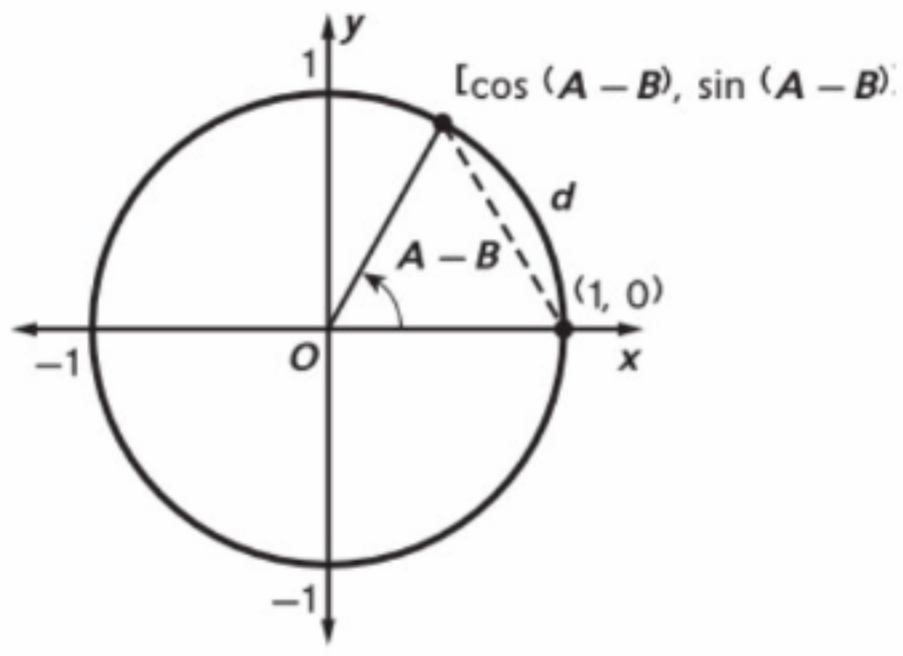
$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$d^2 = (\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta)$$

$$d^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$d^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

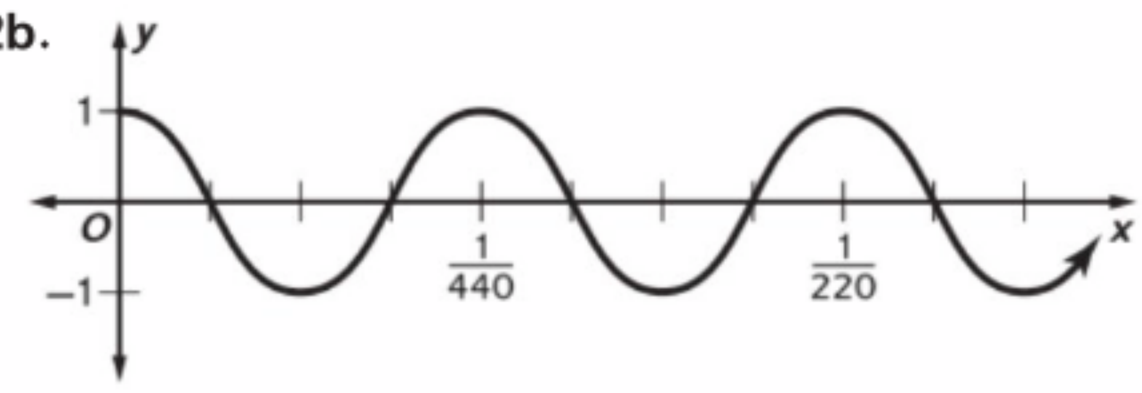
$$d^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$



أوجد الآن قيمة d^2 عندما تقع الزاوية التي قياسها $\alpha - \beta$ في موضع قياسي في دائرة الوحدة، كما في الشكل الموضح أعلاه.

$$d = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2}$$
$$d^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2$$
$$= [\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1] + \sin^2(\alpha - \beta)$$
$$= \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

52b.



53. الخطوة 1: $4^1 - 1 = 3$، وهذه الإجابة قابلة للقسمة على 3. العبارة صحيحة عند القيمة $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 عند قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ ما لـ k. وهذا يعني أن $4^k - 1 = 3r$ عند عددٍ كليٍ ما r.

الخطوة

$$4^k - 1 = 3r$$
$$4^k = 3r + 1$$
$$4^{k+1} = 12r + 4$$
$$4^{k+1} - 1 = 12r + 3$$
$$4^{k+1} - 1 = 3(4r + 1)$$

بما أن r عددٌ كلي، فإن $4r + 1$ عددٌ كلي. ولذا فإن $4^{k+1} - 1$ قابلٌ للقسمة على 3. إذًا فالعبارة صحيحةٌ عند $n = k + 1$. ولذلك، $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 عند جميع القيم الصحيحة الموجبة لـ n.

54. الخطوة 1: $5^1 + 3 = 8$، وهذه الإجابة قابلة للقسمة على 4. العبارة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $5^k + 3$ قابل للقسمة على 4 عند قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ ما لـ k. وهذا يعني أن $5^k + 3 = 4r$ عند عددٍ صحيحٍ موجبٍ ما r.

الخطوة 3:

$$5^k + 3 = 4r$$
$$5^k = 4r - 3$$
$$5^{k+1} = 20r - 15$$
$$5^{k+1} + 3 = 20r - 12$$
$$5^{k+1} + 3 = 4(5r - 3)$$

بما أن r عددٌ صحيحٌ موجب، فإن $5r - 3$ عددٌ صحيحٌ موجب. وبالتالي، فإن $5^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذًا فالعبارة صحيحةٌ عند $n = k + 1$. ولذلك، $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة لكلّ الأعداد الصحيحة الموجبة n.

اختبار نصف الوحدة

11. $\sec^2\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta \checkmark$$

12. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \tan\theta \stackrel{?}{=} 1$$
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1 \checkmark$$

13. $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1 - \cos\theta} \stackrel{?}{=} (1 + \cos\theta)\sec\theta$

$$\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1 - \cos\theta} \stackrel{?}{=} (1 + \cos\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1 - \cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1 - \cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta(1 - \cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{\cos\theta(1 - \cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1}{\cos\theta} + 1 = \frac{1}{\cos\theta} + 1 \checkmark$$

14. $\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta}$

$$\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta} \cdot \frac{1 - \sin\theta}{1 - \sin\theta}$$
$$\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1 - \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta}$$
$$\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1 - \sin\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta(1 - \sin\theta)}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta(1 - \sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot (1 - \sin\theta)$$
$$\tan\theta(1 - \sin\theta) = \tan\theta(1 - \sin\theta) \checkmark$$

15b. $\cot\theta = \frac{24}{18}, \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{24}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{24}{18}$، إذًا $\frac{24}{18} = \frac{24}{18}$

16. $\tan^2\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\sec^2\theta = \sec^2\theta \checkmark$$

الدرس 12-4

26. $\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \dfrac{\tan\theta}{\tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta = \tan 2\theta$ ✓

27. $1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta + \sin\theta}{\sec\theta}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ✓

28. $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$ ✓

29. $\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$ ✓

17. $\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta + 1} \cdot \dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{1} \cdot \dfrac{1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$(\sec\theta + 1)\cot\theta = (\sec\theta + 1)\cot\theta$ ✓

18. $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \tan^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta \cdot \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta$ ✓

19. $\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta} \cdot \dfrac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) = \cot\theta(1 - \cos\theta)$ ✓

25. $\cos 30^\circ\cos\theta + \sin 30^\circ\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60^\circ\cos\theta + \cos 60^\circ\sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$ ✓

30. عندما يكون $\theta = 45° + \alpha$. فإن

$$d = \frac{v^2 \sin 2\,(45° + \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin (90° + 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90° \cos 2\alpha + \cos 90° \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2\alpha + 0 \cdot \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

عندما $\theta = 45° - \alpha$. فإن

$$d = \frac{v^2 \sin 2\,(45° - \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin (90° - 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90° \cos 2\alpha - \cos 90° \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2\alpha - 0 \cdot \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

37. لا؛ جمعت بثينة الجذور التربيعية على نحوٍ خاطئ، واستخدمت بدرية متطابقة نصف الزاوية على نحوٍ خاطئ، استخدمت بدرية $\sin 30°$ في الصيغة بدلاً من البحث عن الـ cosine أولاً.

39. إذا تم إعطاؤك قيمة $\cos \theta$ فقط، فإن المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ هي المتطابقة الأفضل للاستخدام. وإذا أُعطيت قيمة $\sin \theta$ فقط، فإنّ المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ تكون هي الأفضل للاستخدام. وإذا أعطيت كلتا قيمتي $\cos \theta$ و $\sin \theta$. إذًا فالمتطابقة $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ تفي بالغرض كسابقتيها.

40. $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$
$= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$
$= 2 \sin \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$
$= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$
$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

يمكنك إيجاد صيغ بديلة لـ $\cos 2\theta$ عبر إجراء تعويضاتٍ في التعبير $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.

$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta$
$= 1 - 2\sin^2 \theta$

عوّض $1 - \sin^2 \theta$ مكان $\cos^2 \theta$.
بسّط.

$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)$
$= 2\cos^2 \theta - 1$

عوّض $1 - \cos^2 \theta$ بدلاً من $\sin^2 \theta$.
بسّط.

41. $1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta$
$1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \cos A$ — عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A بدلاً من 2θ.

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ — حُلّ لإيجاد $\sin^2 \frac{A}{2}$.

$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ — خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

أوجد $\cos \frac{A}{2}$.

$2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$ — $2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$ متطابقة الزاوية المزدوجة

$2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$ — $2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$ عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A بدلاً من 2θ.

$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$ — حُلّ لإيجاد $\cos^2 \frac{A}{2}$.

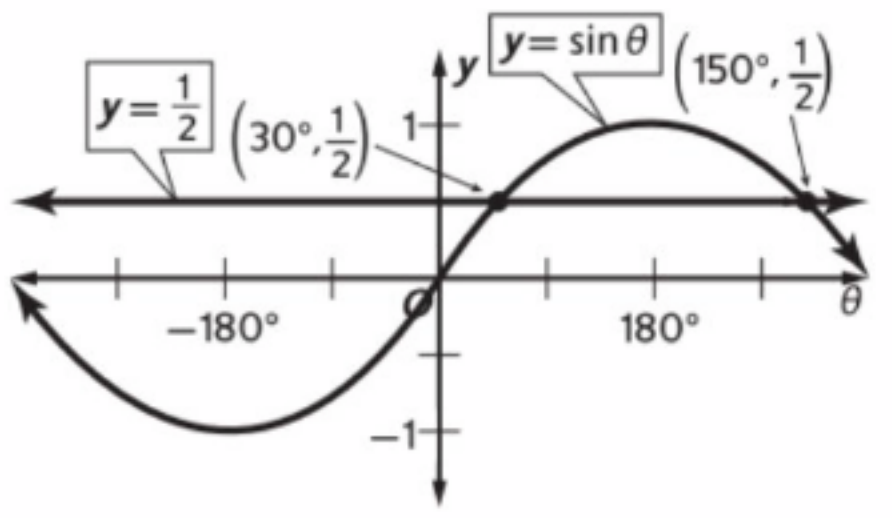
$\cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ — خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الدرس 12-5

58a.

θ	$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$
0°	1	210°	$-\frac{1}{2}$
30°	$\frac{1}{2}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	270°	−1
90°	1	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	330°	$-\frac{1}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	360°	0
180°	0		

58b. يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30° < \theta < 150°$.



58c. يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30° < \theta < 150°$. وفترة $\sin \theta$ تساوي $[-360°, 360°]$. إذًا فحلول $\sin \theta > \frac{1}{2}$ هي $30° + k \cdot 360° < \theta < 150° + k \cdot 360°$.

تدريب على الاختبار

14. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \cot\theta$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ ✓

16a. $18^2 = 9^2 + a^2$; $324 = 81 + a^2$; $243 = a^2$; $a = 9\sqrt{3}$

16b. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$;

$\sin 2(30°) = 2\sin 30° \cos 30°$;

$\sin 60° = 2\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}\right) = \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin 60° = 9\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21. $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$; $25 = \frac{20^2}{9.8}\sin 2\theta$; $0.6125 = \sin 2\theta$; $\theta \approx 18.9°$

58d. i. $0° \le \theta \le 45°$ and $315° \le \theta \le 360°$; $0° + k \cdot 360° \le \theta \le 45° + k \cdot 360°$ and $315° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; ii. $0° \le \theta \le 60°$ and $120° \le \theta \le 360°$; $0° + k \cdot 360° \le \theta \le 60° + k \cdot 360°$ and $120° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; iii. $180° \le \theta \le 360°$; $180° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; iv. $60° \le \theta \le 300°$; $60° + k \cdot 360° \le \theta \le 300° + k \cdot 360°$

دليل الدراسة والمراجعة

30. $\sin(\theta + 90) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin\theta\cos 90° + \cos\theta\sin 90° \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(-1)\cos\theta - (0)\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

32. $\tan(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - \tan\pi}{1 + \tan\theta\tan\pi} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - 0}{1 + (\tan\theta)(0)} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta}{1} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\tan\theta = \tan\theta$ ✓

33. $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

34. $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4}$,

$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{15}}}{4}$

35. $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{9}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, and $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

36a. $c^2 = 90^2 + 90^2$; $c^2 = 8100 + 8100$; $c^2 = 16{,}200$; $c = 90\sqrt{2}$

36b. $\sin 45° = \frac{90}{90\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

36c. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}}$;

$\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$