الدرس 12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

.. السابق
- أوجدت قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

.. الحالي
1. إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات ضعف الزاوية..
2. إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات نصف الزوايا.

.. لماذا؟
- تضمّ نافورة باكنغهام في شيكاغو أنابيب نفّاثة موضوعة عند زوايا محددة لقذف الماء في الهواء وتشكيل أقواس. عند قذف تيارٍ من الماء في الهواء بسرعة متجهة v وزاوية θ مع المحور الأفقي. يتوقع النموذج أن الماء سيقطع مسافة أفقية تساوي $D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$ ويبلغ ارتفاعًا أقصى يساوي $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$. تساعد نسبة H إلى D على تحديد ارتفاع النافورة وعرضها الكليين. عبّر عن $\frac{H}{D}$ في صورة دالة للزاوية θ.

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات ضعف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة دالةٍ لضعف زاويةٍ أو نصفها.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

مثال 1 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين 0° و 90°.

الخطوة 1 استخدم المتطابقة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ لإيجاد قيمة $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ — $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ — اطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الأول، فإن cosine موجب. لذلك، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2 أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ — متطابقة الزاوية المزدوجة

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب.

تمرين موجّه

1. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

725

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-4 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

الدرس 12-4 إيجاد قيمتي sine و cosine عن طريق استخدام متطابقات الزاوية المزدوجة. وإيجاد قيمتي sine وcosine باستخدام متطابقات نصف الزاوية.

بعد الدرس 12-4 إيجاد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ و $\sin^2\theta$؟ اشرح. $\sin 2\theta$ يمثل sine الزاوية التي تساوي ضعف θ؛ $\sin^2\theta$ تمثل مربع قيمة $\sin \theta$.
- هل سيتضمن تعبير $\frac{H}{D}$ في صورة دالة لـ θ المتغير v؟ لا. فعند التبسيط، يكون $\frac{v^2}{v^2} = 1$
- هل سيتضمن g؟ اشرح. لا. $\frac{1}{2g} \div \frac{1}{g}$ يساوي $\frac{1}{2}$. إذًا فإنه لن يحتوي المتغير g.

مثال 2 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\cos\theta$ و $\sin\theta$، فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد cosine. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b. $\tan 2\theta$

الخطوة 1 أوجد $\tan\theta$ لاستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{تعريف الـ tan}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}\text{ و }\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{إنطاق المقام.}$$

الخطوة 2 أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \qquad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}} \qquad \text{تربيع المقام.}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \qquad \text{بسّــط.}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

2A. $\cos 2\theta$ $-\frac{7}{9}$ **2B.** $\tan 2\theta$ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

نصيحة دراسية

اشتقاق الصيغ يمكنك استخدام متطابقة $\sin(A+B)$ لإيجاد Sine ضعف زاوية θ و $\sin 2\theta$. ومتطابقة $\cos(A+B)$ لإيجاد cosine لضعف زاوية θ و $\cos 2\theta$.

مهنة من الحياة اليومية

الكهربائي يختصّ الكهربائي في توصيل الأجزاء الكهربائية. ويخضع الكهربائيون لتدريبٍ يدوم مدة 3-5 سنوات. وهم بحاجةٍ إلى تعلّم المبادئ النظرية للكهرباء وأكواد البناء. كما أن نيل الشهادة يتطلب خبرةً عمليةً واجتياز اختبارٍ كتابي.

2 متطابقات نصف الزاوية

من المفيد أحياناً الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة نسبة نصف زاوية.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

1 متطابقات ضعف الزاوية

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لتعبيرٍ باستخدام متطابقات ضعف الزاوية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{4}$ وإذا كانت الزاوية θ تقع بين $0°$ و $90°$. -0.125

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع بين $90°$ و $0°$.

a. $\tan 2\theta$ $\frac{24}{7}$

b. $\sin 2\theta$ $\frac{24}{25}$

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي ذكّر الطلاب بالمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ وصيغتيها المختلفتين اللتين تتشكلان عبر طرح $\sin^2\theta$ أو $\cos^2\theta$ من الطرفين. واشرح أن هناك ثلاث صور لصيغة $\cos 2\theta$ نتيجةً للصور الثلاث للمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

726 | الدرس 12-4 | متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

2 متطابقات نصف الزاوية

يبيّن **المثال 3** كيفية استخدام متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة لدالةٍ مثلثيةٍ لزاويةٍ في الربع المعطى. ويوضح **المثال 4** كيفية تبسيط معادلةٍ تضم تعابير مثلثية. ويبيّن **المثال 5** كيفية إثبات المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات أضعاف الزوايا.

مثال إضافي

3 a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع في الربع الثاني. $\sqrt{\frac{1}{10}}$ أو $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 165°$. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

انتبه!

تجنّب الأخطاء أكّد على "نصيحة للتدريس" في الهامش المجاور للمثال 3. ومن شأن تحديد الإشارة الصحيحة للإجابة في بداية الحساب أن يساعد بعض الطلاب في تلافي نسيان هذه الخطوة في نهاية حساباتهم.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اقسم الصف الدراسي إلى مجموعات، وكلّف كل مجموعةٍ بحلّ مسألة نصف زاويةٍ أو زاوية مزدوجة. واطلب من المجموعة إعداد تسجيل فيديو يعرض كيفية تطبيق الصيغة المناسبة لحل المسألة. وحاول تكليف الصفّ بأكبر عددٍ ممكنٍ من المسائل.

مثال 3 متطابقات نصف الزاوية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ و θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ استخدم متطابقة لفيثاغورس لإيجاد $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ أوجد قيمة الأس.

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ اطرح.

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بسّط.

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ إنطاق المقام.

إذا كانت الزاوية θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. فإذًا، $\cos \frac{\theta}{2}$ هو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $67.5°$ تقع في الربع الأول؛ إذًا القيمة موجبة.

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$ اطرح الكسور.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ اضرب.

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ بسّط.

تمرين موجّه

3. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

نصيحة دراسية

اختيار العلامة قد تحتاج في الخطوة الأولى للحل إلى تحديد الربع الذي سيقع فيه ضلع الانتهاء لـ $\frac{\theta}{2}$. وبعدها يمكنك استخدام العلامة الصحيحة بدءًا من ذلك فصاعدًا.

قراءة في الرياضيات

زائد أم ناقص تُقرأ العلامة الأولى لمتطابقة نصف الزاوية *زائد أو ناقص*. وبعكس متطابقات الزوايا المضاعفة، فيجب عليك تحديد العلامة.

التركيز على محتوى الرياضيات

اشتقاق الصيغ صيغ ضعف الزاوية حالاتٌ خاصةٌ لصيغ مجموع زاويتين، والتي درسناها في الدرس السابق. ويتم الحصول على صيغ ضعف الزاوية عبر مساواة A و B في صيغ مجموع زاويتين.

مثال 4 من الحياة اليومية التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

النافورة راجع بداية الدرس. أوجد $\frac{H}{D}$.

$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$	المعادلة الأصلية
$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$	بسّط البسط والمقام.
$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$	بسّط.
$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	بسّط.
$= \frac{1}{4}\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4B. $\cos\frac{7\pi}{8}$ $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

الربط بالحياة اليومية

نافورة حديقة سيتي هول بارك في نيويورك تقع في قلب مانهاتن أمام دار البلدية.

المصدر: Fodor's

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضًا استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها لإثبات المتطابقات.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$	المتطابقة الأصلية
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+1}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$	اضرب البسط والمقام في $\sin\theta$.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$	اضرب الطرف الأيمن في 1.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$	اضرب.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}$	بسّط.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ ✓	$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$, $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

تمرين موجّه

5. أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$. **انظر الهامش.**

أمثلة إضافية

4 النافورة راجع بداية الدرس. وأوجد قيمة $\frac{D}{H}$. $\frac{4}{\tan\theta}$ أو $4\cot\theta$

5 أثبت أن $\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) = \sin^3\theta$ متطابقة.

$\sin\theta(\cos^2\theta-\cos 2\theta)\stackrel{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta[\cos^2\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]\stackrel{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta(\cos^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta)\stackrel{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta(\sin^2\theta)\stackrel{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin^3\theta=\sin^3\theta$ ✓

المتابعة

استكشف الطلاب المتطابقات والمعادلات المثلثية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تقرّر ما التقنيات التي يتعيّن عليك استخدامها عند إثبات صحة متطابقةٍ مثلثية؟ الإجابة النموذجية: إن أمكن، بسّط الطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة عبر تعويض المتطابقات المثلثية الأساسية فيه. وعند التعامل مع متطابقةٍ أكثر تعقيدًا، فإنه يمكنك حل كل طرف على حدةٍ للحصول على تعبيرٍ مشترك.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

5. $4\cos^2 x - \sin^2 2x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x(1-\sin^2 x) \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^4 x = 4\cos^4 x$ ✓

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالنمط السمعي/الموسيقي إن كان ممكنًا، فاطلب من معلّم موسيقى في مدرستك التحدث إلى الطلاب عن الأصوات الموسيقية التوافقية. وقد يرغب أيضًا الطلاب الذين يعزفون على آلاتٍ موسيقيةٍ ذات أوتار في مشاركة بعض ما قد تعلّموه عن الأصوات التوافقية والموجات الموسيقية. فإذا لم يكن هناك معلّم موسيقى متاح، فربما يكون بمقدور معلّم الفيزياء توضيح الأصوات التوافقية أو إحضار آلةٍ تولّد أمواجًا مستقرّة داخل حجرة الصف.

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** **أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.**

1. $\sin\theta = \frac{1}{4};\ 0° < \theta < 90°$ — **1.** $\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2. $\sin\theta = \frac{4}{5};\ 90° < \theta < 180°$ — **2.** $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

3. $\cos\theta = -\frac{5}{13};\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ — **3.** $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}$

4. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ 270° < \theta < 360°$ — **4.** $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. $\tan\theta = -\frac{8}{15};\ 90° < \theta < 180°$ — **5.** $-\frac{240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

6. $\tan\theta = \frac{5}{12};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ — **6.** $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

7. $\sin\frac{\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

8. $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

مثال 4 9. **كرة القدم** يركل لاعب كرةً بزاوية قياسها $37°$ مع الأرض وسرعة متجهة أولية قيمتها 16 مترًا في الثانية. تُعطى المسافة d التي تقطعها الكرة في الهواء دون أن يعترضها أي عائق بالمعادلة $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$. في هذه الصيغة، g هي التسارع بفعل الجاذبية الأرضية ويساوي 10 أمتار في الثانية المربعة، و v هي السرعة المتجهة الأولية.

a. بسّط هذه الصيغة باستخدام متطابقة زاوية مضاعفة. $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

b. باستخدام الصيغة المبسطة، ما المسافة التي ستقطعها هذه الكرة؟ ≈ 24 m

مثال 5 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:** 10, 11. **انظر الهامش.**

10. $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

11. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

12. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}, \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{6}$

13. $\frac{240}{289}, -\frac{161}{189}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

التدريب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.**

12. $\sin\theta = \frac{2}{3};\ 90° < \theta < 180°$

13. $\sin\theta = -\frac{15}{17};\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

14. $\cos\theta = \frac{3}{5};\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ — **14.** $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$

15. $\cos\theta = \frac{1}{5};\ 270° < \theta < 360°$ — **15.** $-\frac{4\sqrt{6}}{25}, -\frac{23}{25}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{15}}{5}$

16. $\tan\theta = \frac{4}{3};\ 180° < \theta < 270°$ — **16.** $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}$

17. $\tan\theta = -2;\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ — **17.** $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

18. $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

19. $\sin\frac{3\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

20. $\cos\frac{7\pi}{12}$ $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

21. $\tan 165°$ $\sqrt{3}-2$

22. $\tan\frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

23. $\tan 22.5°$ $\sqrt{1-2\sqrt{2}}$

24. **الجغرافيا** إن إسقاط مركاتور للكرة الأرضية هو طريقةٌ للإسقاط تزداد فيها المسافة بين خطوط العرض بزيادة بعدها عن خط الاستواء. ويُحسب موقع نقطةٍ في هذا الإسقاط باستخدام التعبير $\tan\left(45° + \frac{L}{2}\right)$، حيث L هو خط عرض هذه النقطة.

a. اكتب التعبير التالي بدلالة الدالة المثلثية لـ L. **انظر الهامش.**

b. خط عرض مدينة تالاهاسي في فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية هو $30°$ شمالاً. أوجد قيمة التعبير إذا كانت $L = 30°$. $\sqrt{3}$

729

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابات إضافية

10. $\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$\stackrel{?}{=} \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$ ✓

11. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta) \stackrel{?}{=} 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ ✓

24a. $\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1-\cos L}{1+\cos L}}}{1 \mp \sqrt{\frac{1-\cos L}{1+\cos L}}}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12–29, 37, 39–60	13–29 فردي, 43–46	12–28 زوجي, 37, 39–42, 47–60
OL أساسي	13–29 فردي, 30, 31–37 فردي, 39–60	12–29, 43–46	30–37, 39–42, 47–60
BL متقدم	30–57, (اختياري: 58–60)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

نقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم والمنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

مثال 4

25 **الإلكترونيات** تأمل دارة تيار متردد تتألف من منبع للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدارة عند الزمن t تساوي $I_0 \sin t\theta$. إذًا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. حيث R هي قيمة المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.
$P = \frac{1}{2} I_0^2 R - \frac{1}{2} I_0^2 R \cos 2t\theta$

مثال 5

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي: **29–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

26. $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

27. $1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta}$

28. $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

29. $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

B

30. **كرة القدم** افترض أن حارس مرمى يركل كرةً بثباتٍ بسرعة متجهة أولية قدرها 30 مترًا في الثانية. أثبت أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما تكون $A + 45° = \theta$ كما هي عندما $A - 45° = \theta$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

31. $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$ $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

32. $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

33. $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$ $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

34. $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$ $-\frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

35. $\csc \theta = -\frac{5}{2}; \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ $-\frac{4\sqrt{21}}{25}, \frac{17}{25}, -\frac{4\sqrt{21}}{17}$

36. $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$ $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

C

37. **التفكير النقدي** تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
انظر **ملحق إجابات الوحدة 12**

بثينة

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin (45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

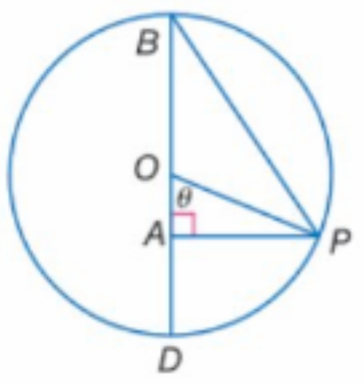
بدرية

$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

$\sin \frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

38. $\angle PBD$ زاوية محاطة تحصر القوس نفسه الذي تحصره الزاوية المركزية $\angle POD$، إذًا $m\angle PBD = \frac{1}{2}\theta$. بموجب حساب المثلثات القائمة، فإن $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1 + OA} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



38. **التحدِ** الدائرة O هي دائرة وحدة. استعن بالشكل لإثبات أن $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.

39. **الكتابة في الرياضيات** اكتب موضوعًا قصيرًا عن الشروط التي يمكنك بموجبها استخدام كلٍ من المتطابقات الثلاث للزاوية $\cos 2\theta$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

40. **البرهان** استخدم صيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة 2θ. واستخدم صيغة $(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

41. **الاستنتاج** اشتقّ متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعفها.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

42. **مسألة غير محددة الإجابة** افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثباتٍ بحيث تغادر القاعدة بسرعة متجهة أولية قدرها 35 مترًا في الثانية وأن $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. اشرح السبب في بلوغ المسافة القصوى عندما تكون $\theta = 45°$. **الإجابة النموذجية: بما أن $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$، فإن d تأخذ قيمتها القصوى عندما يكون $\sin 2\theta = 1$ ؛ أي $2\theta = 90°$ أو $\theta = 45°$.**

730 | الدرس 4-12 | متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة القصيرة الزاويتان C و D متكاملتان. قياس الزاوية C يساوي سبعة أضعاف قياس الزاوية D. أوجد قياس الزاوية D بالدرجات. **22.5**

44. SAT/ACT لدى الآنسة منى قائمةٌ بالرواتب السنوية للعاملين في دائرتها. فأي مقياسٍ للبيانات يصف قيمة الدخل الوسطي للرواتب؟ **B**

A المتوسط
B الوسيط
C المنوال
D المدى
E الانحراف المعياري

45. حدّد مجال الدالة التالية ومداها: $f(x) = |4x + 1| - 8$. **G**

F $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$, $R = \{y \mid y \leq -8\}$
G D = {كل الأعداد الحقيقية}, $R = \{y \mid y \geq -8\}$
H $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$, R = {كل الأعداد الحقيقية}
J D = {كل الأعداد الحقيقية}, R = {كل الأعداد الحقيقية}

46. الهندسة يرصُف جمال ممرًا حجريًا حول بركة ماءٍ دائرية. ولديه ما يكفي من الأحجار لعمل ممر يبلغ 144 مترًا طولاً. فإذا استهلك جميع الأحجار لإحاطة البركة، فما نصف قطر البركة؟ **B**

A $\frac{12}{\pi}$ m
B $\frac{72}{\pi}$ m
C 72π m
D 144π m

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-3)

47. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
48. $\cos 105°$ — **48.** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
49. $\sin 285°$ $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
50. $\cos(-30°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
51. $\sin(-240°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
52. $\cos(-120°)$ $-\frac{1}{2}$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 12-2) **53, 54. انظر الهامش.**

53. $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

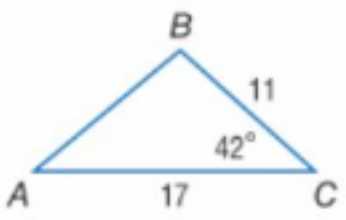
54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلثٍ عبر الشروع بقانون *sine* أو قانون *cosine*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 12-4)

55.

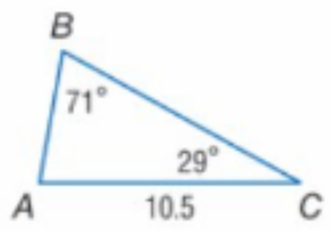
sine: $B \approx 102°$ أو $C \approx 44°$ أو $b \approx 21.0$ أو $B \approx 10°$، $C \approx 136°$، $b \approx 3.7$

56.



cosine: $A \approx 40°$، $B \approx 98°$، $c \approx 11.5$

57.



sine: $A = 80°$، $a \approx 10.9$، $c \approx 5.4$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

58. $x^2 + 5x - 24 = 0$ $\{-8, 3\}$
59. $x^2 - 3x - 28 = 0$ $\{-4, 7\}$
60. $x^2 - 4x = 21$ $\{-3, 7\}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب كتابة تعبير لــ $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.
الإجابة النموذجية: $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 37. ينبغي أن يرى الطلاب أن بثينة استبدلت على نحوٍ خاطئٍ $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ بـ $\frac{\sqrt{4}}{4}$. في حين عوّضت بدرية على نحوٍ خاطئٍ $\cos 30°$ بـ $\frac{1}{2}$ بدلاً من التعويض بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. اشرح للطلاب أن كلتا الخطوتين الأوليين $\sin 15° = \sin \frac{30°}{2}$ و $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ تصلحان بمثابة خطوتين أوليين. ولكن خطوة بثينة الرابعة ينبغي أن تكون $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ وينبغي أن تكون خطوات بدرية بعد المستقيم الأول هي $\sin \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب أن يذكروا كيفية تحديد ما إذا كانت مسألةٌ تضم متطابقة ضعف زاوية أو نصف زاويةٍ فضلاً عن كيفية استخدام كل نوعٍ من المتطابقات.

إجابات إضافية

53.
$$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta + \sec\theta = \cot\theta + \sec\theta \checkmark$$

54.
$$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$$
$$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$$
$$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\sin^2\theta + \tan^2\theta = \sin^2\theta + \tan^2\theta \checkmark$$

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات المثلّثية.

المواد الخاصة لكل طالب

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus أو حاسبة تمثيل بياني من نوع آخر

نصيحة للتدريس

في النشاط 1، يمكن أيضًا إيجاد حلول تقريبيةٍ عبر استخدام الميزة Trace ولكن في معظم الحالات، ستعطي ميزة التقاطع حلولاً أكثر دقة.

ذكّر الطلاب بأن يستخدموا النوافذ المناسبة لتمثيلاتهم البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية بحيث يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في تصحيح أخطاء خطوات العملية على الحاسبة. اطلب منهم إتمام النشاطين 1 و 2 والتمرين 1.

اطرح السؤال التالي:

- كيف ترتبط حلول المعادلات بنقاط تقاطع التمثيلات البيانية؟ الحلول هي قيم x الخاصة بنقاط التقاطع.
- كيف تعرف أن معادلةً ما ليس لها حلول؟ لا يتقاطع التمثيلان البيانيان لـ Y1 و Y2.

تدريب اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 2 إلى 6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم ما إن كان الطلاب يستوعبون كيف تؤثر الفترة المحددة في الحلول.

الإستكشاف 12-5

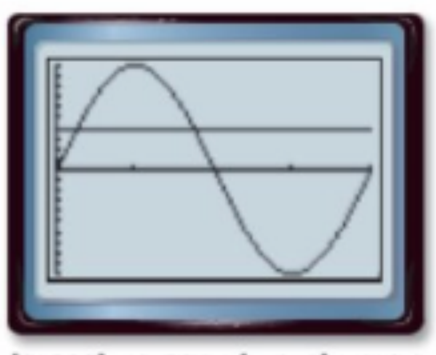
مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات المثلثية

يتركب التمثيل البياني للدالة المثلثية من نقاط تمثل جميع القيم التي تحقق الدالة. ولحل معادلةٍ مثلثية، فإن عليك حساب جميع قيم المتغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني لحل المعادلات المثلثية عبر التمثيل البياني لكل طرفٍ من المعادلة في صورة دالةٍ ومن ثم تحديد نقاط التقاطع.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الحلول الحقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\sin x = 0.4$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.



[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثّلهما بيانيًا. وأعد كتابة المعادلة في صورة معادلتين $Y1 = \sin x$ و $Y2 = 0.4$. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا. نظرًا إلى أن الفترة بالدرجات، فاضبط حاسبتك على نمط الدرجات.

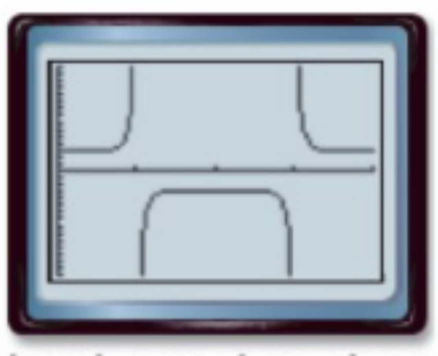
خطوات العملية على الحاسبة: MODE ▼ ▼ ▶ ENTER
Y= SIN X,T,θ,n)
ENTER 0.4 ENTER GRAPH

الخطوة 2 تقريب الحلول. بناءً على التمثيل البياني، يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطعٍ ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استخدم خاصية **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

الحلّان هما $x \approx 23.57°$ و $x \approx 156.4°$.

النشاط 2 عدم وجود حلول حقيقية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.



[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثلهما بيانيًا. المعادلتان المرتبطتان اللتان يتعين تمثيلهما بيانيًا هما $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ و $y_2 = 0$.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= TAN X,T,θ,n) x^2 COS
X,T,θ,n) + 3) X,T,θ,n
) ENTER 0 ENTER

الخطوة 2 لا تتقاطع هاتان الدالتان.

ولذلك ليس للدالة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ أي حلول حقيقية.

التمارين

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحل كلٍ من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7;\ 0° \le x < 360°$ **44.4°, 135.6°**
2. $\tan x = \cos x;\ 0° \le x < 360°$ **38.17°, 141.8°**
3. $3 \cos x + 4 = 0.5;\ 0° \le x < 360°$ **لا يوجد حل حقيقي**
4. $0.25 \cos x = 3.4;\ -720° \le x < 720°$ **لا يوجد حل حقيقي**
5. $\sin 2x = \sin x;\ 0° \le x < 360°$ **0°, 60°, 180°, 300°**
6. $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ إذا كانت $-360° \le x < 360°$ **−360°, −180°, 0°, 180°**

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تناول التمارين 1-6 عند فترةٍ مختلفةٍ أو دون فترة، واجعلهم يشرحوا كيف يؤثر ذلك في حلولهم.

الدرس 12-5 حل المعادلات المثلثية

السابق
- تحققت من صحة المتطابقات المثلثية.

الحالي
1. حل المعادلات المثلثية.
2. إيجاد الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

لماذا؟
- عندما تركب أرجوحةً دوارةً قطرها 40 مترًا وتدور بسرعة 1.5 دورة في الدقيقة، يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق الأرض بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t.$$

بعد تشغيل الأرجوحة، كم يستغرق الأمر قبل أن يصبح مقعدك على ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض لأول مرة؟

المفردات الجديدة
المعادلات المثلثية
trigonometric equations

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات المثلثية

قد درسنا حتى الآن في هذه الوحدة نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية يدعى المتطابقة. والمتطابقات المثلثية هي معادلاتٌ صحيحةٌ لكل قيم المتغير المُعرّف فيه الطرفان. في هذا الدرس، سوف ندرس **معادلات مثلثية** لا تكون صحيحة إلا بالنسبة لقيم محددةٍ للمتغير. ويشبه حل هذه المعادلات حل المعادلات الجبرية.

مثال 1 حل المعادلات عند معرفة الفترة

حُلّ $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلل إلى العوامل.

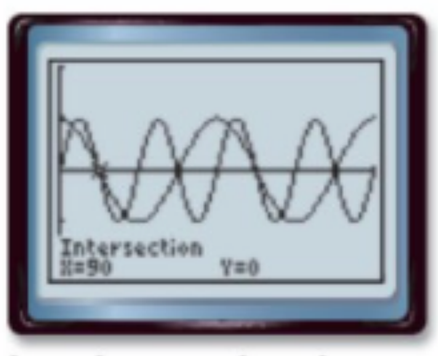
$\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ أو $\cos \theta = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = 90°$

$\theta = 30° = 150°$

الحلول هي $30°$ و $90°$ و $150°$.

التحقق يمكنك التحقق من حلك بالتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta \cos \theta$ و $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ في المستوى الإحداثي نفسه على حاسبة التمثيل البياني. ثمّ أوجد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. يمكنك أن ترى أن هناك عددًا غير منتهٍ من هذه النقاط، ولكن اهتمامنا ينصب فقط على النقاط الواقعة بين $0°$ و $180°$.



[0, 720] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.5

تمرين موجّه

1. أوجد جميع حلول $\sin 2\theta = \cos \theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

تُحلّ المعادلات المثلثية عادةً لإيجاد قيم المتغير الواقعة بين $0°$ و $360°$ أو بين 0 راديان و 2π راديان. وهناك حلولٌ خارج تلك الفترة. وتختلف هذه الحلول الأخرى بفروقٍ تساوي مضاعفاتٍ صحيحةً لفترة الدالة.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-5 إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

الدرس 12-5 حَل المعادلات المثلثية. وإيجاد الحلول الدخيلة في المعادلات المثلثية.

بعد الدرس 12-5 استخدام حساب المثلثات لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- خذ أي نقطةٍ على الأرجوحة الدوّارة. ما مسافة انتقال تلك النقطة خلال دورةٍ واحدة؟ 40π أو حوالي 125.7 مترًا
- ما المسافة التي يقطعها موقعٌ ما على الأرجوحة الدوارة خلال دقيقةٍ واحدة؟ 60π أو حوالي 188.5 مترًا
- عند $t = 0$، ما قيمة $20 \cos 3\pi t$؟ 20