# الدرس 11-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

| .. السابق | .. الحالي | .. لماذا؟ |
|---|---|---|
| • أوجدت قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة. | 1 إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة. <br> 2 إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع. | • في لعبة الملاهي المبينة على اليسار، تدور السيارات ذهابًا وإيابًا حول نقطة مركزية. ويمكن وصف مواضع الأذرع التي تدعم السيارات، باستخدام زوايا مثلثية في الوضع القياسي مع جعل النقطة المركزية للعبة عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي. |

**المفردات الجديدة**

زاوية ربعية
quadrantal angle

زاوية مرجع
reference angle

**ممارسات في الرياضيات**

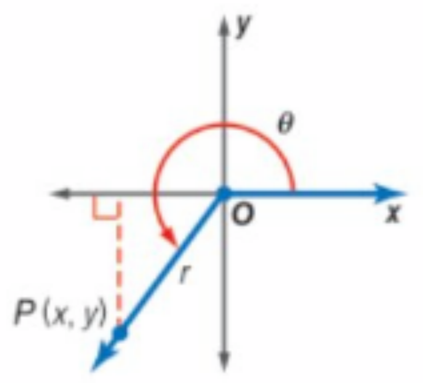
مراعاة الدقة.

## 1 النسب المثلثية للزوايا العامة

يمكنك إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الأكبر من 90° أو الأقل من 0°.

### المفهوم الأساسي النسب المثلثية للزوايا العامة

افترض أن $\theta$ هي زاوية في وضع قياسي وأن $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء. باستخدام نظرية فيثاغورس، $r=\sqrt{x^2+y^2}$. النسب المثلثية الست للزاوية $\theta$ مُعرَّفة أدناه.

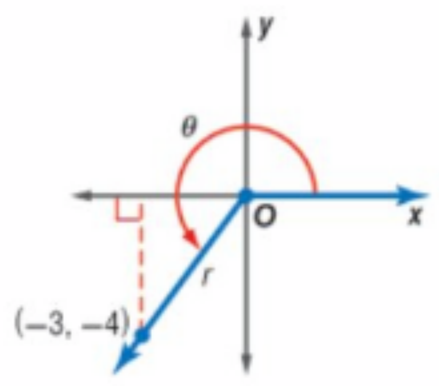



$\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}, x\neq 0$

$\csc\theta=\frac{r}{y}, y\neq 0$ $\quad$ $\sec\theta=\frac{r}{x}, x\neq 0$ $\quad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}, y\neq 0$

### مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

**ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-3, -4)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ $\theta$.**




**الخطوة 1** ارسم الزاوية، وأوجد قيمة $r$.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{25}=5$$

**الخطوة 2** استخدم $x=-3$ و $y=-4$ و $r=5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$ $\quad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$ $\quad$ $\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$ $\quad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

**تمرين موجّه**

1. ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-6, 2)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ $\theta$. **انظر الهامش.**





## 1 التركيز

### التخطيط الرأسي

**قبل الدرس 11-3** إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.

**الدرس 11-3** إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا العامة. إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

**بعد الدرس 11-3** استكشاف التمثيلات البيانية لدوال ظل الزاوية وقاطع التمام والقاطع وظل التمام.

## 2 التدريس

### الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** في الدرس وأخبرهم أن موضعي الذراعين هما 220° في اتجاه عقارب الساعة و 50° عكس اتجاه عقارب الساعة من الوضع القياسي.

**اطرح السؤال التالي:**

- ما الربع المشار إليه بـ "20° في اتجاه عقارب الساعة"؟ الربع الرابع
- ما الربع المشار إليه بـ "200° عكس اتجاه عقارب الساعة"؟ الربع الثالث
- كيف يمكنك وصف الموضع "20° في اتجاه عقارب الساعة" بالنسبة إلى الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة؟ 340° عكس اتجاه عقارب الساعة

## 1 الدوال المثلثية للزوايا العامة

**المثال 1** يوضح كيفية إيجاد قيمة الدوال المثلثية بالنسبة لنقطة معينة. و **المثال 2** يوضح كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية الست لزاوية ربعية.

## التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

### أمثلة إضافية

**1** ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ في الموضع القياسي يتضمن النقطة $(8, -15)$. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية $\theta$.

$\sin\theta = -\frac{15}{17}; \cos\theta = \frac{8}{17};$

$\tan\theta = -\frac{15}{8}; \sec\theta = \frac{17}{8};$

$\csc\theta = -\frac{17}{15}; \cot\theta = -\frac{8}{15}$

**2** ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ في الموضع القياسي يتضمن النقطة عند $(0, -2)$. أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية $\theta$.

$\sin\theta = -1; \cos\theta = 0; \tan\theta$ غير معرفة؛ $\csc\theta = -1; \sec\theta$ غير معرفة؛ $\cot\theta = 0$

---

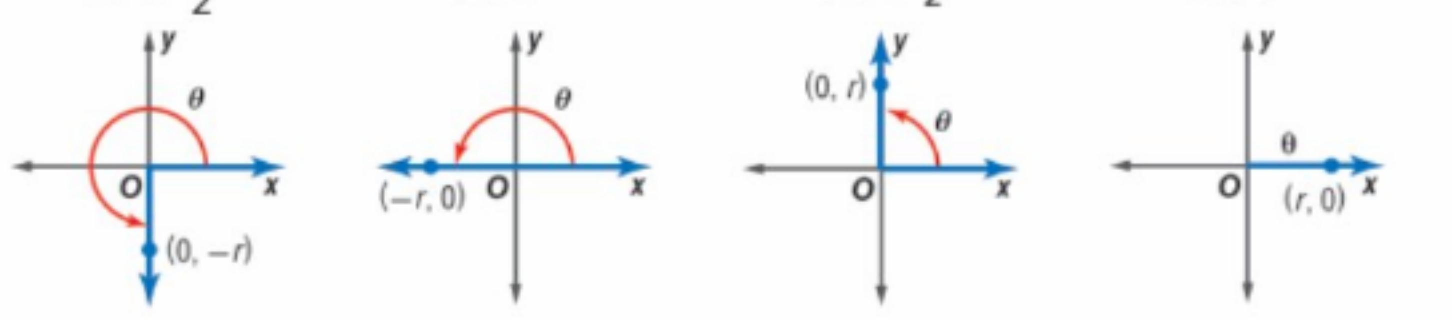
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ في وضع قياسي على المحور $x$ أو $y$، فتُسمى الزاوية **زاوية ربعية**.

**نصيحة دراسية**

**الزوايا الربعية** قياس الزاوية الربعية هو مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

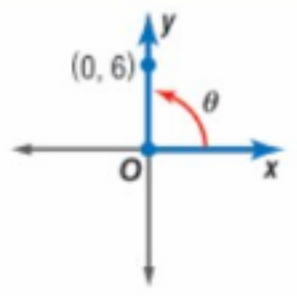
### المفهوم الأساسي الزوايا الربعية

$\theta = 0°$ أو 0 راديان | $\theta = 90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ راديان | $\theta = 180°$ أو $\pi$ راديان | $\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان




### مثال 2 الزوايا الربعية

**ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(0, 6)$. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ $\theta$.**




النقطة عند $(0, 6)$ تقع عند محور $y$ الموجب. إذًا، الزاوية الربعية $\theta$ هي $90°$. استخدم $x = 0$ و $y = 6$ و $r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ | $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = \theta$ | $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{6}{0}} =$ غير مُعرَّفة

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ | $\sec\theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{6}{0}} =$ غير مُعرَّفة | $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = \theta$

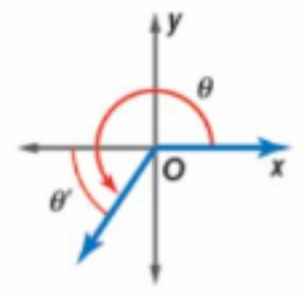
**تمرين موجّه**

**2.** ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-2, 0)$. أوجد قيم النسب المثلثية الست لـ $\theta$.

2. $\sin\theta = 0$، $\cos\theta = -1, \tan\theta = 0,$ $\csc\theta =$ غير مُعرَّفة، $\sec\theta$ −1، $\cot\theta =$ غير مُعرَّفة

## 2 النسب المثلثية بزوايا المرجع

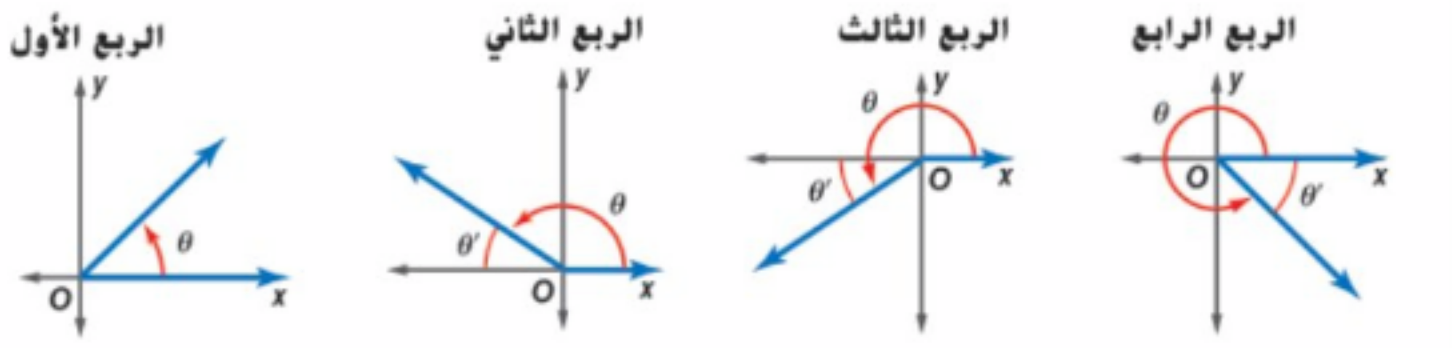
إذا $\theta$ كانت زاوية غير ربعية في وضع قياسي، فإن **زاوية المرجع** $\theta'$ لها تكون الزاوية الحادة التي يصنعها ضلع الانتهاء لـ $\theta$ مع المحور $x$. فيما يلي قواعد إيجاد قياسات زوايا المرجع حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0° < \theta < 2\pi$.




**قراءة في الرياضيات**

**زاوية ثيتا الأولية** $\theta'$ تُقرأ ثيتا الأولية.

### المفهوم الأساسي زوايا المرجع




| الربع الرابع | الربع الثالث | الربع الثاني | الربع الأول |
|---|---|---|---|
| $\theta' = 360° - \theta$ | $\theta' = \theta - 180°$ | $\theta' = 180° - \theta$ | $\theta' = \theta$ |
| $\theta' = 2\pi - \theta$ | $\theta' = \theta - \pi$ | $\theta' = \pi - \theta$ | |





**انتبه!**

**تصحيح المفاهيم الخاطئة** في المثال 1. راقب الطلاب الذين يعتقدون أن $r$ يجب أن يكون عددًا سالبًا في أي وقت عندما تكون قيمة أي من $x$ أو $y$ قيمة سالبة.

## التدريس باستخدام التكنولوجيا

**نظام إجابة الطلاب** قدم للطلاب عددًا من الأمثلة (مثل $\cos 120°$ و $\csc(-35°)$ و $\tan(-165°)$). اسأل الطلاب عما إذا كانت قيمة كل دالة مثلثية موجبة أم سالبة. اطلب من الطلاب الإجابة بالحرف A عن القيمة الموجبة والحرف B عن القيمة السالبة.

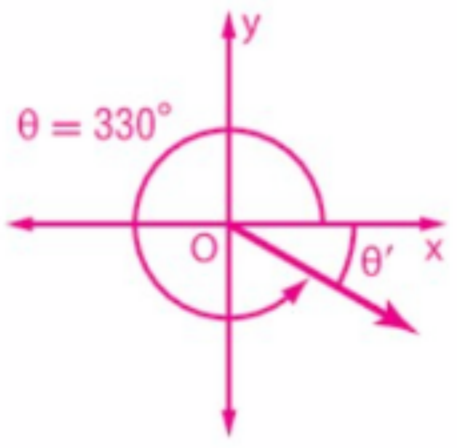
## 2 الدوال المثلثية مع زوايا المرجع

**المثال 3** يوضح كيفية إيجاد زاوية المرجع لزاوية معينة. و**المثال 4** يوضح كيفية استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة مثلثية. في حين أن **المثال 5** يوضح كيفية حل مسألة من الحياة اليومية تتضمن زوايا مرجع.

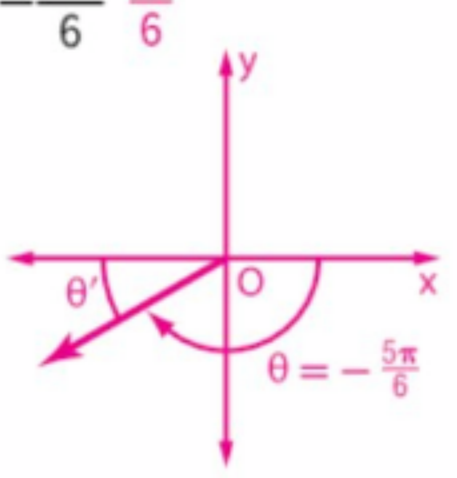
### مثال إضافي

**3** ارسم كل زاوية مما يلي، ثم أوجد زاوية المرجع لها.

**a.** $330°$ $30°$

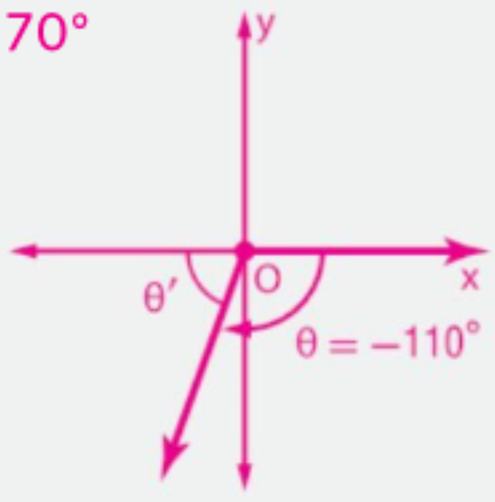



**b.** $-\frac{5\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}$

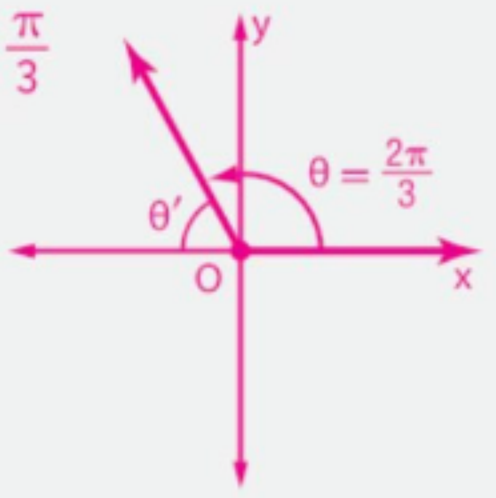



### إجابات إضافية (تمرين موجّه)

**3A.** $70°$




**3B.** $\frac{\pi}{3}$




إذا كان قياس $\theta$ أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، فاستخدم إذًا زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء يكون قياسها موجب بين $0°$ و $360°$ لإيجاد زاوية المرجع.

### مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

**ارسم كل زاوية مما يلي، ثم أوجد زاوية المرجع لها.**

**a.** $210°$

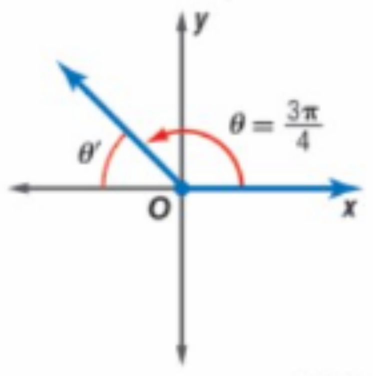
ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$210° - 180° = 30°$

**b.** $-\frac{5\pi}{4}$

زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء، $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$




ضلع الانتهاء لـ $210°$ يقع
يقع ضلع الانتهاء لـ $\frac{3\pi}{4}$
في الربع الثالث.

$\theta' = \pi - \theta =$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

**تمرين موجّه** **3A, 3B. انظر الهامش.**

**3A.** $-110°$ **3B.** $\frac{2\pi}{3}$

> **نصيحة دراسية**
> **تمثيل الزوايا بيانيًا** يمكنك الرجوع إلى الرسم التخطيطي في ملخص المفهوم، الدرس 11-2 ليساعدك على رسم الزوايا.

يمكنك استخدام زوايا المرجع لإيجاد قيمة النسب المثلثية لأي زاوية $\theta$. رمز النسبة يحدده الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$. استخدم الخطوات التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية $\theta$.

### المفهوم الأساسي إيجاد قيمة النسب المثلثية

**الخطوة 1** أوجد قياس زاوية المرجع $\theta'$.

**الخطوة 2** أوجد قيمة النسبة المثلثية لـ $\theta'$.

**الخطوة 3** حدد رمز قيمة النسبة المثلثية. استخدم رمز الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لـ $\theta$.

| الربع الثاني | الربع الأول |
|---|---|
| $\sin\theta, \csc\theta: +$ | $\sin\theta, \csc\theta: +$ |
| $\cos\theta, \sec\theta: -$ | $\cos\theta, \sec\theta: +$ |
| $\tan\theta, \cot\theta: -$ | $\tan\theta, \cot\theta: +$ |
| **الربع الثالث** | **الربع الرابع** |
| $\sin\theta, \csc\theta: -$ | $\sin\theta, \csc\theta: -$ |
| $\cos\theta, \sec\theta: -$ | $\cos\theta, \sec\theta: +$ |
| $\tan\theta, \cot\theta: +$ | $\tan\theta, \cot\theta: -$ |

يمكنك استخدام القيم المثلثية للزوايا التي قياسها $30°$ و$45°$ و$60°$ التي تعلمتها في الدرس 11-1.

**قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة**

| sine | cosine | Tangent | Cosecant | Secant | Cotangent |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin 30° = \frac{1}{2}$ | $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\csc 30° = 2$ | $\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\cot 30° = \sqrt{3}$ |
| $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\tan 45° = 1$ | $\csc 45° = \sqrt{2}$ | $\sec 45° = \sqrt{2}$ | $\cot 45° = 1$ |
| $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos 60° = \frac{1}{2}$ | $\tan 60° = \sqrt{3}$ | $\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sec 60° = 2$ | $\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |



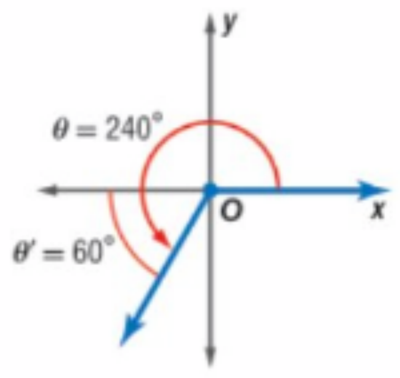


> **انتبه!**
> **تجنب الأخطاء** عند إيجاد القيم المثلثية لزاوية ما، قد يجد الطلاب أنه من المفيد رسم زاوية في الوضع القياسي وإسقاط مستقيم عمودي على المحور الأفقي $x$ لتكوين زاوية قائمة. وعندئذ يمكنهم رؤية أنه عندما يزيد قياس الزاوية من $90°$ إلى $180°$، فإن قيمة $y$ تقترب من 0، وتقترب قيمتا الضلعين الآخرين من بعضهما البعض.

## مثال 4 استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة مثلثية

**أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

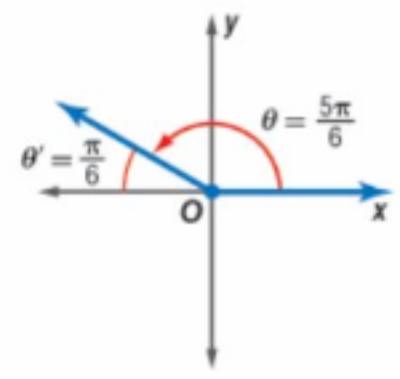
**a.** $\cos 240°$




ضلع الانتهاء لـ $240°$ يقع في الربع الثالث.

| | |
|---|---|
| أوجد قياس زاوية المرجع. | $\theta' = \theta - 180°$ |
| $\theta = 240°$ | $= 240° - 180° = 60°$ |
| نسبة cosine سالبة في الربع الثالث. | $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ |

**b.** $\csc \frac{5\pi}{6}$




ضلع الانتهاء لـ $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.

| | |
|---|---|
| أوجد قياس زاوية المرجع. | $\theta' = \pi - \theta$ |
| $\theta = \frac{5\pi}{6}$ | $= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ |
| نسبة cosecant موجبة في الربع الثاني. | $\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$ |
| $\frac{\pi}{6}$ راديان $= 30°$ | $= \csc 30°$ |
| $= \frac{1}{\sin 30}$ $\csc 30°$ | $= 2$ |

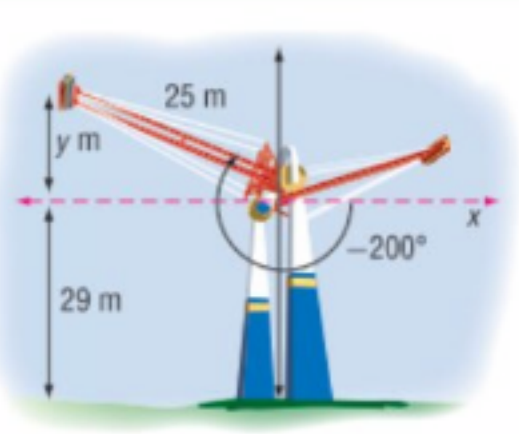
**تمرين موجّه**

**4A.** $\cos 135°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**4B.** $\tan \frac{5\pi}{6}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

## مثال 5 من الحياة اليومية استخدام النسب المثلثية

**ألعاب الملاهي الأذرع الدوارة للعبة الملاهي الموضحة على اليسار طولها 25 مترًا وارتفاع المحور الذي تتأرجح منه الذراع طوله 29 مترًا. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟**




الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء، $-200° + 360° = 160°$

زاوية المرجع، $180° - 160° = 20°$

| | |
|---|---|
| نسبة sine | $\sin \theta = \frac{y}{r}$ |
| $r = 25$ و $\theta = 20°$ | $\sin 20° = \frac{y}{25}$ |
| اضرب كل طرف في 25. | $25 \sin 20° = y$ |
| استخدم آلة حاسبة لإيجاد $y$. | $8.6 \approx y$ |

بما أن $y$ يساوي 8.6 أمتار تقريبًا، فإن الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة لها هو $29 + 8.6$ أو حوالي 37.6 مترًا.

**تمرين موجّه** حوالي 32 m

**5. ألعاب الملاهي** لعبة ملاهٍ مماثلة لها أذرع دوّارة أصغر طولها 22 مترًا. ارتفاع المحور الذي تتأرجح الذراع منه يساوي 26 مترًا. وزاوية الدوران من الوضع القياسي هي $-195°$. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

### الربط بالحياة اليومية

على لعبة ملاهٍ دوّارة، اختبر الركاب انعدام الوزن كما في الهبوط الجانبي لقطار الملاهي تمامًا. دامت اللعبة لدقيقة وبلغت السرعة 96 كيلومترًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

**المصدر:** سيدار بوينت





## أمثلة إضافية

**4** أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

**a.** $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**b.** $\cot \frac{7\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**5 ألعاب الملاهي** افترض أن لعبة ملاهٍ مماثلة لتلك المذكورة في المثال 5 لها ذراع تأرجح طوله 27 مترًا. ويساوي ارتفاع المحور 30 مترًا. والزوايا متساوية. ما إجمالي ارتفاع لعبة الملاهي الجديدة عند قمة القوس؟ $y = 27 \sin 20° = 9.2$ m؛ $9.2 + 30 = 39.2$ m

## تدريس الممارسات في الرياضيات

**الاستنتاج** يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

## التدريس المتمايز OL AL

**المتعلمون بالطريقة السمعية/الموسيقية** اطلب من الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لتأليف أغنية أو أنشودة أو أغنية راب أو قصيدة قصيرة تساعدهم على تذكر القيم المثلثية للزوايا الخاصة.

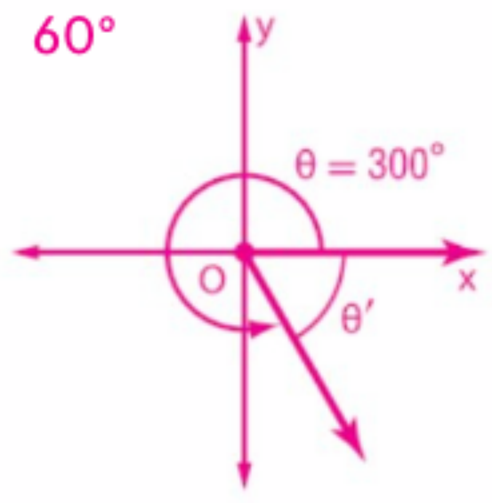
## إجابات إضافية

**1.** $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan \theta = 2$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec \theta = \sqrt{5}$, $\cot \theta = \frac{1}{2}$

**2.** $\sin \theta = -\frac{15}{17}$, $\cos \theta = -\frac{8}{17}$, $\tan \theta = \frac{15}{8}$, $\csc \theta = -\frac{17}{15}$, $\sec \theta = -\frac{17}{8}$, $\cot \theta = \frac{8}{15}$

**.3** $\sin \theta = -1$, $\cos \theta = 0$, $\tan \theta =$ غير مُعرف، $\csc \theta = -1$, $\sec \theta =$ غير مُعرف، $\cot \theta = 0$

**4.** $60°$



# 3 التمرين

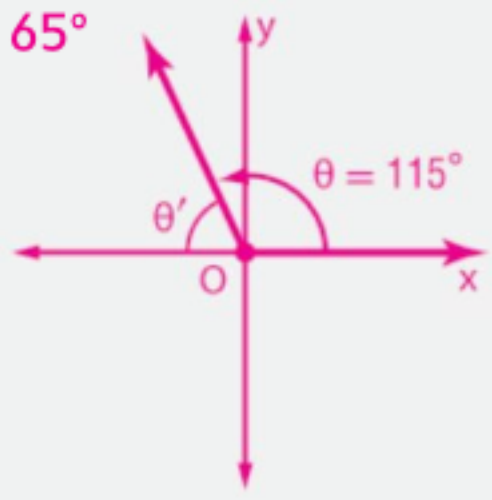
## التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

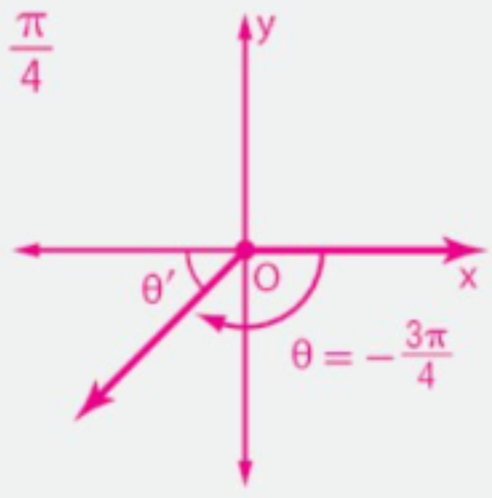
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

### إجابات إضافية

5. 65°




6. $\frac{\pi}{4}$




12. $\sin\theta = \frac{12}{13}, \cos\theta = \frac{5}{13},$
$\tan\theta = \frac{12}{5}, \csc\theta = \frac{13}{12},$
$\sec\theta = \frac{13}{5}, \cot\theta = \frac{5}{12}$

13. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = -\frac{3}{5},$
$\tan\theta = -\frac{4}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4},$
$\sec\theta = -\frac{5}{3}, \cot\theta = -\frac{3}{4}$

14. $\sin\theta = 0, \cos\theta = 1, \tan\theta = 0$, $\csc\theta =$ غير معرف، $\sec\theta = 1$، $\cot\theta =$ غير مُعرف

15. $\sin\theta = -1, \cos\theta = 0, \tan\theta =$ غير معرف، $\csc\theta = -1, \sec\theta =$ غير معرف، $\cot\theta = 0$

16. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$
$\tan\theta = -\frac{1}{2}, \csc\theta = -\sqrt{5},$
$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot\theta = -2$

17. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$
$\tan\theta = \frac{1}{3}, \csc\theta = -\sqrt{10},$
$\sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \cot\theta = 3$

## التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ $\theta$. 1–3. انظر الهامش.

1. $(1, 2)$ 2. $(-8, -15)$ 3. $(0, -4)$

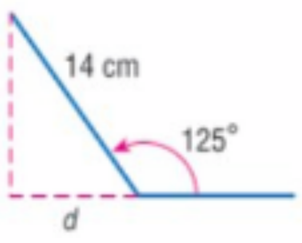
مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها. 4–6. انظر الهامش.

4. $300°$ 5. $115°$ 6. $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

7. $\sin\frac{3\pi}{4}$ $\frac{2}{2}$ 8. $\tan\frac{5\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$ 9. $\sec 120°$ $-2$ 10. $\sin 300°$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 5 11. **الترفيه** فتحت ميساء مشغل DVD المحمول بحيث يصنع زاوية 125°. ويبلغ طول الشاشة 14 سنتيمترًا.




a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

b. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار $d$ التي يمكن وضع مشغل DVD عندها. $55°; \cos 55° = \frac{d}{5\frac{1}{2}}$

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 8 cm

## التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ $\theta$. 12–17. انظر الهامش.

12. $(5, 12)$ 13. $(-6, 8)$ 14. $(3, 0)$

15. $(0, -7)$ 16. $(4, -2)$ 17. $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية المرجع لها. 18–23. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

18. $195°$ 19. $285°$ 20. $-250°$

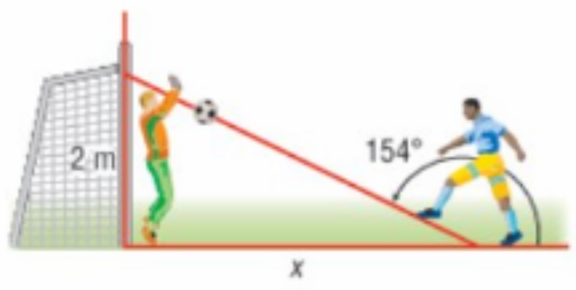
21. $\frac{7\pi}{4}$ 22. $-\frac{\pi}{4}$ 23. $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

24. $\sin 210°$ $-\frac{1}{2}$ 25. $\tan 315°$ $-1$ 26. $\cos 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 27. $\csc 225°$ $-\sqrt{2}$

28. $\sin\frac{4\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 29. $\cos\frac{5\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$ 30. $\cot\frac{5\pi}{4}$ $1$ 31. $\sec\frac{11\pi}{6}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

مثال 5 32. **الاستنتاج** يقف لاعب كرة قدم على بعد $x$ أمتار من حارس المرمى. ركل الكرة صوب المرمى، كما هو موضح في الشكل. قفز حارس المرمى وأمسك بالكرة على ارتفاع مترين في الهواء.




a. أوجد زاوية المرجع، ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة بين حارس المرمى واللاعب عندما ركل الكرة. $26°; \tan 26° = \frac{7}{x}$

b. كم المسافة تقريبًا بين حارس المرمى ولاعب كرة القدم؟ حوالي 4.3 m



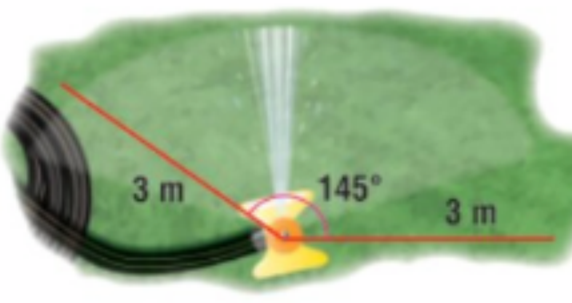


## خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

| المستوى | الواجب | خيار اليومين | |
|---|---|---|---|
| AL مبتدئ | 12-32, 48-78 | 13-31 فردي, 52-55 | 12-32 زوجي, 48-51, 56-78 |
| OL أساسي | 13-31 فردي, 33-36, 37-45 فردي, 48-78 | 12-32, 52-55 | 33-46, 48-51, 56-78 |
| BL متقدم | 33-75, (76-78 :اختياري) | | |

**B**

33. **آلة الرش** آلة رش تدور ذهابًا وإيابًا ترش المياه على مسافة 3 أمتار، من وضع أفقي. تدور الآلة 145° قبل أن تعكس اتجاهها. عند الزاوية 45°، ما المسافة التقريبية التي تبلغها المياه على يسار آلة الرش؟ **حوالي 2.5 m**




34. **كرة السلة** الصيغة $R = \frac{v_0{}^2 \sin 2\theta}{32}$ تعطي مسافة ضربة كرة السلة بسرعة متجهة أولية $V_0$ متر في الثانية بزاوية $\theta$ مع الأرض.

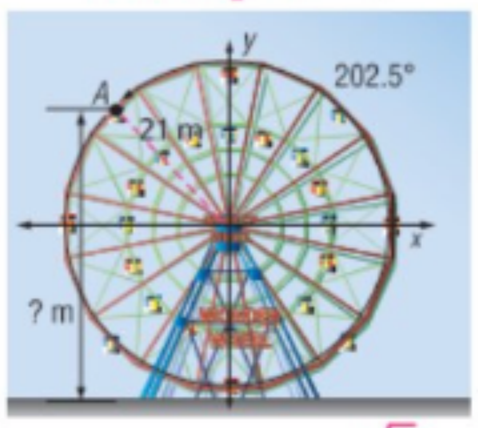
a. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 7 أمتار في الثانية بزاوية 75°، فما المسافة التي ستقطعها كرة السلة؟ **2.7 متر**

b. إذا ضُربت كرة السلة بزاوية 65° وقطعت 3 أمتار، فكم كانت سرعتها المتجهة الأولية؟ **1.2 متر في الثانية تقريبًا**

c. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 9 أمتار في الثانية وقطعت 4 أمتار، فما زاوية ضرب الكرة؟ **حوالي 12.6°**

35. **الفيزياء** رُميت صخرة من حافة واد بمقلاع بزاوية 65° وسرعة متجهة أولية قدرها 6 أمتار في الثانية. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للصخرة $x$ هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث $v_0$ هي السرعة المتجهة الأولية، و $\theta$ هي الزاوية التي ضُربت بها، و $t$ هو الزمن بالثواني. ما المسافة التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 4 ثوانٍ؟ **حوالي 10.1 m**

36. **عجلة فيريس** نصف قطر عجلة الملاهي فيريس 21 مترًا قريبًا وترتفع 4.5 أمتار عن الأرض. بعد أن يركب الشخص في العربة السفلية، تدور العجلة بزاوية 202.5° عكس اتجاه عقارب الساعة قبل أن تتوقف. كم كان ارتفاع هذه العربة فوق الأرض عندما توقفت العجلة؟ **44.9 m**




**C**

**افترض أن $\theta$ زاوية في وضع قياسي ضلع الانتهاء لها في الربع المُعطى. لكل نسبة، أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ $\theta$.** **37–40. انظر الهامش.**

37. $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

38. $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

39. $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

40. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

**47. لا؛ حيث $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$، زاوية المرجع هي 45°. مع ذلك، لكي يكون $\sin \theta$ موجبًا و $\tan \theta$ سالبًا، يجب أن تكون زاوية المرجع في الربع الثاني. إذًا، قيمة $\theta$ ينبغي أن تكون 135° أو زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء قياسها 135°.**

**أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

41. $\cot 270°$ **0**

42. $\csc 180°$ **غير مُعرَّفة**

43. $\sin 570°$ **$-\frac{1}{2}$**

44. $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ **$-\frac{\sqrt{3}}{3}$**

45. $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

46. $\cot \frac{9\pi}{4}$ **1**

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

47. **التحدِ** بالنسبة للزاوية $\theta$ في وضع قياسي، $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$. هل يمكن أن تكون قيمة $\theta$ تساوي 225°؟ برر استنتاجك.

48. **الفرضيات** حدد إذا ما كانت العبارة $3 \sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

49. **التبرير** استخدم دالتي sine و cosine واشرح لماذا تكون 180° غير مُعرَّفة. **انظر الهامش.**

50. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالاً لزاوية سالبة $\theta$ يكون فيها $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$.

51. **الكتابة في الرياضيات** صِف خطوات إيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية $\theta$ تكون أكبر من 90°. أدرج وصفًا لزاوية المرجع. **انظر الهامش.**

**48. خطأ؛ $3 \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ و $\sin 180° = 0.0$، أو 3 • $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$**

**50. الإجابة النموذجية: $\theta = -200°$**





## إجابات إضافية

37. $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4},$
$\sec \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = -\frac{3}{4}$

38. $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13},$
$\csc \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3},$
$\cot \theta = -\frac{3}{2}$

# 4 التقويم

**الكرة البلورية** اطلب من الطلاب الانتقال إلى الدرس 4-11. واطلب منهم أن يكتبوا رأيهم بشأن العلاقة بين ما تعلّموه اليوم وموضوع الدرس 4-11.

## إجابات إضافية

39. $\sin\theta = -\frac{15}{17}$, $\tan\theta = \frac{15}{8}$, $\csc\theta = -\frac{17}{15}$, $\sec\theta = -\frac{17}{8}$, $\cot\theta = \frac{8}{15}$

40. $\sin\theta = -\frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$

49. الإجابة النموذجية: نعرف أن $\cot\theta = \frac{x}{y}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ بما أن $\sin 180° = 0$، فيجب أن يكون صحيحًا أن $y = 0$. ومن ثم، فإن $\cot 180° = \frac{x}{0}$ وهو غير مُعرف.

51. الإجابة النموذجية: أولاً، ارسم الزاوية وحدد في أي ربع تقع. ثم استخدم القاعدة المناسبة لإيجاد زاوية المرجع لها $\theta'$. وزاوية المرجع هي الزاوية الحادة التي تتكون بين ضلع الانتهاء للزاوية $\theta$ والمحور الأفقي $x$. وبعد ذلك، أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية $\theta'$. وأخيرًا، استخدم موقع الربع لتحديد علامة قيمة الدالة المثلثية للزاوية $\theta$.

67. $\dfrac{x^2 + 7x - 35}{(x+2)(x+4)(x-7)}$

68. $\dfrac{3(x^2 + 7x - 20)}{(x+10)(x+9)(x-2)}$

69. $\dfrac{2(3x^2 + 2x - 12)}{3x(x+4)(x-6)}$



## تدريب على الاختبار المعياري

52. **الإجابة الشبكية** إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟ 108

53. **الهندسة** $D$ هي نقطة منتصف $\overline{BC}$، و $A$ و $E$ هما نقطتا منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$، على التوالي. إذا كان طول $\overline{AE}$ يساوي 12، فما طول $\overline{BC}$؟ C

A 6　　C 24
B 12　　D 48

54. التعبير $(-6 + i)^2$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟ J

F $-12i$　　H $36 - 12i$
G $36 - i$　　J $35 - 12i$

55. SAT/ACT ما الأقل فيما يلي؟ E

A $1 + \frac{1}{4}$　　D $1 \times \frac{1}{4}$
B $1 - \frac{1}{4}$　　E $\frac{1}{4} - 1$
C $1 \div \frac{1}{4}$

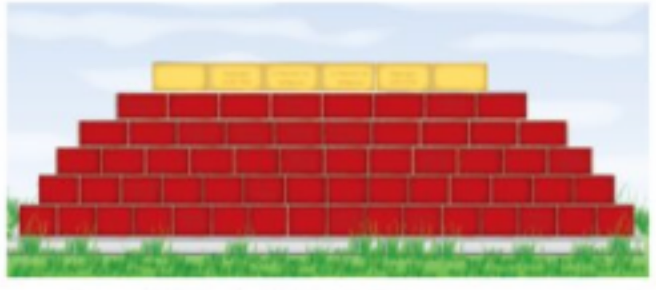
## مراجعة شاملة

**أعد كتابة كل قياس بالراديان بالدرجات.** (الدرس 11-2)

56. $\frac{4}{3}\pi$ 240°　　57. $\frac{11}{6}\pi$ 330°　　58. $-\frac{17}{4}\pi$ −765°

**حُـلّ المعادلات الآتية.** (الدرس 11-1)

59. $\cos a = \frac{13}{17}$ 40.1°　　60. $\sin 30 = \frac{b}{6}$ 3　　61. $\tan c = \frac{9}{4}$ 66.0°



62. **العمارة الهندسية** يتم إنشاء نصب تذكاري في حديقة بالمدينة. سيكون عبارة عن حائط طوبي يتكون فيه الصف العلوي من ست طوبات مطلية بالذهب محفور عليها أسماء ستة أشخاص محليين مشهورين. ويزيد كل صف بطوبتين عن الصف الذي يعلوه. أثبت أن عدد الطوب في أعلى $n$ صفوف هو $n^2 + 5n$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 11.

63. **أساطير** تقول الإسطورة إن ملكًا أراد مكافأة فتى على فعلٍ حسن. ولكنه منحه الاختيار. إما أن يحصل على AED 1,000,000 دفعةً واحدة، أو يحصل على مكافأة يومية لمدة شهر، بحيث يحصل على فلس واحد في اليوم الأول، وفلسين في اليوم الثاني، وهكذا. وبهذا يحصل على ضعف الفلسات كل يوم أكثر من اليوم السابق. كم ستكون قيمة الخيار الثاني؟ AED 10,737,418.23

**اكتب معادلة لكل دائرة علمًا بنقطتي نهاية القطر.**

64. $(2, -4), (10, 2)$ $(x-6)^2 + (y+1)^2 = 25$
65. $(-1, -10), (-7, 6)$ $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 73$
66. $(9, 0), (4, -7)$ $(x-6.5)^2 + (y+3.5)^2 = 18.5$

**بسّط كل تعبير مما يلي.** 67–69. انظر الهامش.

67. $\frac{5}{x^2 + 6x + 8} + \frac{x}{x^2 - 3x - 28}$　　68. $\frac{3x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{6}{x^2 + 7x - 18}$　　69. $\frac{4}{3x^2 + 12x} + \frac{2x}{x^2 - 2x - 24}$

**حُـلّ كل معادلة أو متباينة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.**

70. $8^x = 30$ 1.6356　　71. $5^x = 64$ 2.5841　　72. $3^{x+2} = 41$ 1.3802

**أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.**

73. $16^{-\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{2}$　　74. $27^{\frac{4}{3}}$ 81　　75. $25^{-\frac{5}{2}}$ $\frac{1}{3125}$

## مراجعة المهارات

**حُـلّ لإيجاد $x$.**

76. $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$ 6　　77. $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$ 9　　78. $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$ −4





## التدريس المتمايز BL OL

**التوسّع** عندما يكون قياس الزاوية بين 0° و90°، فإن الزاوية هي نفسها زاوية المرجع. اطلب من الطلاب كتابة تعابير لقياس زاوية المرجع للزاوية $\theta$.

إذا كان $90° < \theta < 180°$، $180° - \theta$

إذا كان $180° < \theta < 270°$، $\theta - 180°$

إذا كان $270° < \theta < 360°$، $360° - \theta$