

## التمثيل البياني للدوال المثلثية

# الدرس 11-7

### 1 التركيز

#### التخطيط الرأسي

قبل الدرس 11-7 دراسة الدوال الدورية.

الدرس 11-7 وصف دوال sine و cosine وظل الزاوية وتمثيلها بيانيًا. وصف الدوال المثلثية الأخرى وتمثيلها بيانيًا.

بعد الدرس 11-7 تمثيل الدوال بيانيًا وتفسيرها من حيث سعتها وترددها وفترتها وإزاحة طورها.

### 2 التدريس

#### الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

#### اطرح السؤال التالي:

- كيف تُقاس أطوال الموجات في الرسم التخطيطي؟ في الرسم التخطيطي، تُقاس أطوال الموجات بين أعلى نقطتين في موجتين متسلسلتين.
- اذكر طريقة أخرى لقياس طول الموجة. يمكن أن تقاس أطوال الموجات عن طريق حساب المسافة بين أي نقطتين متناظرتين لموجتين متتابعيتين.
- في الرسم التخطيطي، كم عدد أطوال الموجات البنفسجية المكافئة لطول موجة واحدة حمراء؟ 3

#### لماذا؟

#### الحالي

#### السابق



- موجات الضوء المرئي لها أطوال موجية أو فترات مختلفة. فالأحمر له أطول طول موجي والبنفسجي له أقصر طول موجي.

- 1 وصف دوال sine و cosine وظل الزاوية وتمثيلها بيانيًا.
- 2 وصف الدوال المثلثية الأخرى وتمثيلها بيانيًا.

- لقد استكشفت الدوال الدورية.

1 دوال sine و cosine و Tangent من الممكن أيضًا تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا على المستوى الإحداثي. تذكر أن التمثيلات البيانية للدوال الدورية لها أنماط متكررة، أو دورات. يُسمى الطول الأفقي لكل دورة الفترة. وتساوي **سعة** التمثيل البياني لدالة sine أو cosine نصف الفارق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

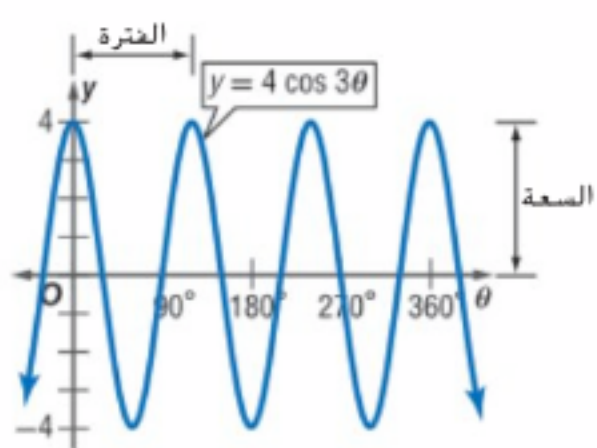
المفهوم الأساسي دالة sine ودالة cosine		
الدالة الأصلية	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
السعة	1	1
الفترة	$360^\circ$	$360^\circ$

ومثلها هو الحال مع الدوال الأخرى. فإن الدوال المثلثية قابلة للتحويل. بالنسبة للتمثيلات البيانية لكل من  $y = a \sin b\theta$  و  $y = a \cos b\theta$ ، فإن السعة =  $|a|$  والفترة =  $\frac{360^\circ}{|b|}$ .

#### مثال 1 إيجاد السعة والفترة

أوجد السعة والفترة للدالة  $y = 4 \cos 3\theta$ .

$$\begin{aligned} |a| &= |4| = 4 && \text{السعة;} \\ \frac{360^\circ}{|b|} &= \frac{360^\circ}{|3|} = 120^\circ && \text{الفترة;} \end{aligned}$$



#### تمرين موجّه

أوجد السعة والفترة لكل دالة.

- 1A.  $y = \cos \frac{1}{2}\theta$  السعة: 1؛ الفترة:  $720^\circ$       1B.  $y = 3 \sin 5\theta$  السعة: 3؛ الفترة:  $72^\circ$

#### المفردات الجديدة

السعة amplitude  
التردد frequency

ممارسات في الرياضيات  
فهم طبيعة المسائل والمثابرة  
في حلها.



## 1 دوال sine و cosine و tan الزاوية

**المثال 1** يعرض كيفية إيجاد سعة الدالة المثلثية وفترتها. **والمثال 2** يعرض كيفية استخدام السعة والفتره لتمثيل الدالة المثلثية بيانيًا. في حين أن **المثال 3** يعرض كيفية كتابة دالة مثلثية لتمثيل حالة من الحياة اليومية. **والمثال 4** يعرض كيفية استخدام فترة دالة ظل الزاوية وخطوطها المقاربة لتمثيل الدالة بيانيًا.

### التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

### أمثلة إضافية

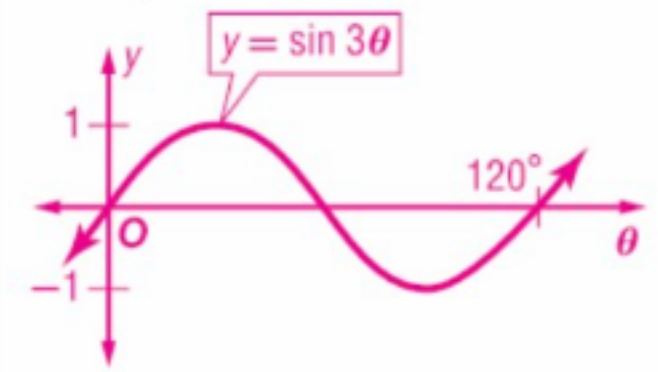
1 أوجد السعة والفتره للدالة

$$y = \sin \frac{1}{3}\theta$$

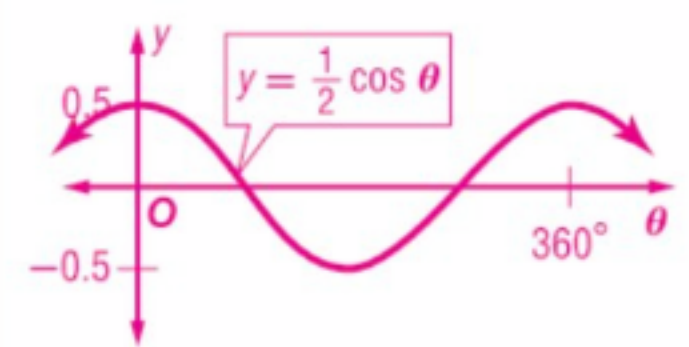
السعة: 1؛ الفتره: 1080°

2 ممثّل كل دالة بيانيًا.

a.  $y = \sin 3\theta$



b.  $y = \frac{1}{2} \cos \theta$



#### نصيحة دراسية

**الفترات** في  $y = a \sin b\theta$  و  $y = a \cos b\theta$  تمثل عدد الدورات بـ  $360^\circ$  في المثال 1. يشير العدد 3 في  $y = 4 \cos 3\theta$  إلى وجود ثلاث دورات بـ  $360^\circ$ . إذا، توجد دورة واحدة بـ  $120^\circ$ .

#### نصيحة دراسية

**السعة** التمثيلات البيانية لكل  $y = a \sin b\theta$  و  $y = a \cos b\theta$  لها قيم عظمى عند  $y = a$  وقيم صغرى عند  $y = -a$ .

استخدم التمثيلات البيانية للدوال الأصلية لتمثيل  $y = a \sin b\theta$  و  $y = a \cos b\theta$  بيانيًا. ثم استخدم السعة والفتره لرسم المنحنيات الصحيحة لـ sine و cosine. يمكنك أيضًا استخدام نقاط تقاطع  $\theta$  لمساعدتك على تمثيل الدوال بيانيًا.

نقاط تقاطع  $\theta$  في  $y = a \sin b\theta$  و  $y = a \cos b\theta$  في دورة واحدة هي كالآتي.

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

### مثال 2 التمثيل البياني لدالة sine ودالة cosine

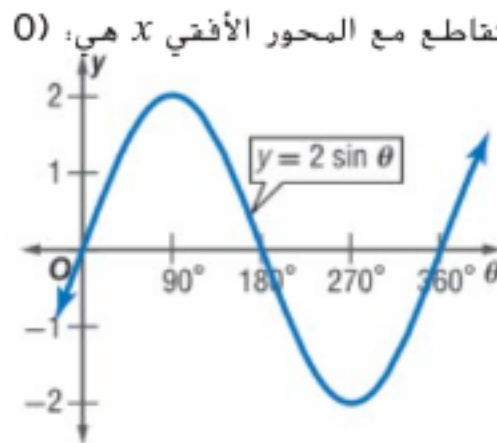
مثّل كل دالة بيانيًا.

a.  $y = 2 \sin \theta$

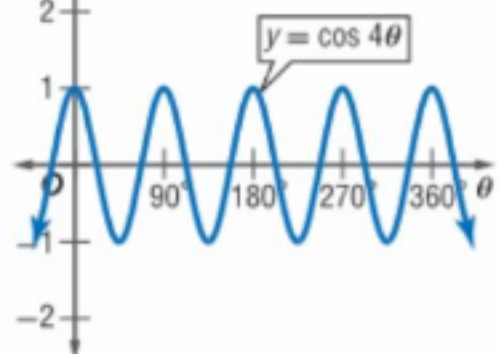
أوجد السعة والفتره ونقاط التقاطع مع المحور الأفقي  $x$ .  $a = 2$  و  $b = 1$ .  
السعة:  $|a| = |2| = 2$   
الفتره:  $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$   
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي  $x$ :  $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$$



b.  $y = \cos 4\theta$



السعة:  $|a| = |1| = 1$

$$\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي  $x$ :

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$$

تمرين موجّه 2B, 2A. انظر الهامش.

2A.  $y = 3 \cos \theta$

2B.  $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل الحركة الدورية بالحياة اليومية. مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو الموجات الصوتية. وغالبًا ما توصف هذه الموجات باستخدام التردد. **والتردد** هو عدد الدورات في وحدة زمنية محددة.

وتردد التمثيل البياني للدالة هو المعكوس الضربي لفترة هذه الدالة.

إذا، إذا كانت فترة الدالة تساوي  $\frac{1}{100}$  من الثانية، فإن التردد يساوي 100 دورة في الثانية.

670 | الدرس 11-7 | التمثيل البياني للدوال المثلثية

### التدريس المتمايز OL AL

**المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني** اطلب من الطلاب العمل في مجموعات لصنع ملصقات تعرض رسومًا للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية الست. شجّع الطلاب على تلوين الميزات الأساسية لجميع التمثيلات البيانية بالألوان المرمّزة. بما فيها الفتره والسعة والخطوط المقاربة وهكذا.





#### الربط بالحياة اليومية

تستطيع الأفيال سماع الصوت القادم من مسافة تبعد 8 كيلومترات. ويستطيع الإنسان سماع أصوات ينحصر ترددها بين 20 Hz و 20000 Hz. المصدر: School for Champions

#### نصيحة دراسية

**السعة والفترة** لاحظ أن السعة تؤثر على المحور الرأسى بالتمثيل البياني. والفترة تؤثر على المحور الأفقي.

#### مثال 3 من الحياة اليومية تمثيل الحالات الدورية بالنماذج

**الصوت** يُعرف الصوت الذي يقل تردده عن نطاق أذن الإنسان باسم **الصوت دون السمعي**. تستطيع الأفيال سماع أصوات في المدى دون السمعي، بترددات منخفضة تصل إلى 5 هرتز (Hz). أو 5 دورات في الثانية.

a. أوجد فترة الدالة التي تمثل الموجات الصوتية.

توجد 5 دورات في الثانية، والفترة هي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة. إذا، الفترة هي  $\frac{1}{5}$  أو 0.2 ثانية.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل الموجات الصوتية  $y$  على هيئة دالة للزمن  $t$ . ثم مثل المعادلة بيانيًا.

اكتب العلاقة بين الفترة و  $b$ .

$$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{|b|}$$

التعويض

$$0.2 = \frac{2\pi}{|b|}$$

بضرب كل طرف في  $|b|$ .

$$0.2|b| = 2\pi$$

بضرب كل طرف في 5: تكون  $b$  موجبة.

$$b = 10\pi$$

اكتب المعادلة العامة لدالة sine.

$$y = a \sin b\theta$$

$\theta = t$  و  $b = 10\pi$  و  $a = 1$

$$y = 1 \sin 10\pi t$$

بسّط.

$$y = \sin 10\pi t$$

#### تمرين موجّه

3. **الصوت** يستطيع الإنسان سماع أصوات بترددات منخفضة تصل إلى 20 هرتز.

A. أوجد فترة الدالة.  $\frac{1}{20}$  أو 0.05 ثانية

B. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة cosine لتمثيل الموجات الصوتية. ثم مثل المعادلة بيانيًا.  **$y = \cos 40\pi t$ : انظر ملحق إجابات الوحدة 11 للاطلاع على التمثيل البياني.**

دالة tangent الزاوية هي إحدى الدوال المثلثية التي يوجد في تمثيلاتها البيانية خطوط مقاربة.

#### المفهوم الأساسي دالة tangent الزاوية

الدالة الأصلية	$y = \tan \theta$
المجال	$\theta \mid \theta \neq 90 + 180n$ {عدد صحيح $n$ }
المدى	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة
الفترة	$180^\circ$
نقاط تقاطع $\theta$ في دورة واحدة	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

بالنسبة للتمثيل البياني لـ  $y = a \tan b\theta$  الفترة =  $\frac{180^\circ}{|b|}$ . لا توجد سعة وخطوط المقاربة هي مضاعفات فردية لـ  $\frac{180^\circ}{2|b|}$ .

671

#### مثال إضافي

3

**الصوت** يمكن للبشر سماع

الأصوات من فئة التردد 40 Hz.

a. أوجد فترة الدالة التي تمثل

الموجات الصوتية.  $\frac{1}{40}$  أو 0.025 ثانية

b. افترض أن السعة تساوي

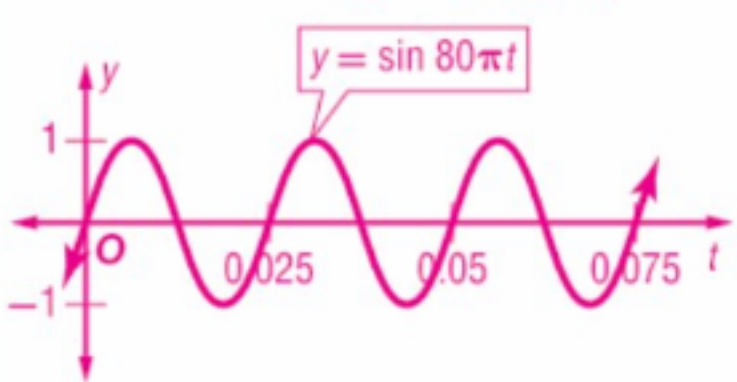
وحدة واحدة. اكتب معادلة

sine لتمثيل موجة الصوت

$y$  على هيئة دالة للزمن  $t$ .

ثم مثل المعادلة بيانيًا.

$$y = \sin 80\pi t$$



#### التركيز على محتوى الرياضيات

**السعة والفترة** التمثيلات البيانية لدوال sine و cosine لها سعة. أما التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى فليست لها سعة، بسبب عدم وجود قيم صغرى أو عظمى. والفترة هي المسافة على امتداد المحور الأفقي اللازمة للتمثيل البياني ليكمل دورة واحدة. ويمكن تحديد الفترة بسهولة من التمثيل البياني.

#### إرشاد للمعلمين الجدد

**التمثيل بيانيًا** قد ترغب في جعل

الطلاب يرسمون تمثيلاتهم البيانية

الخاصة بهم لدوال sine و cosine وظل

الزاوية. ويمكن أن ينطوي هذا التعقيب

الفوري على فائدة من حيث مساعدة

الطلاب في اكتساب المهارات اللازمة

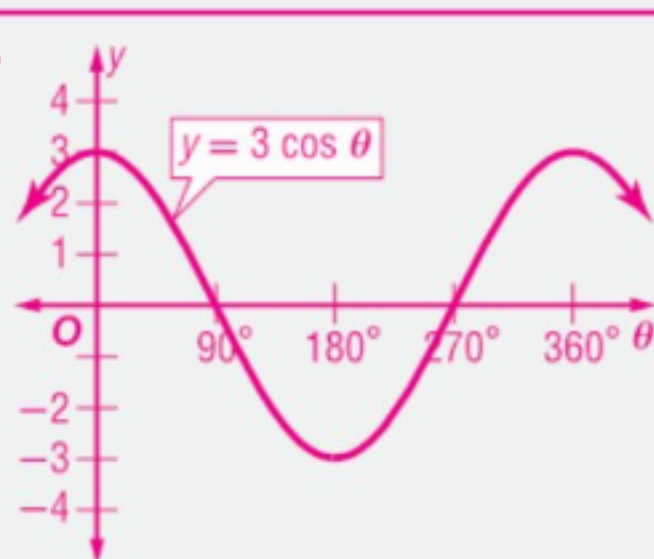
لتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا. لا سيما وأنها

أكثر تعقيدًا من معظم التمثيلات البيانية

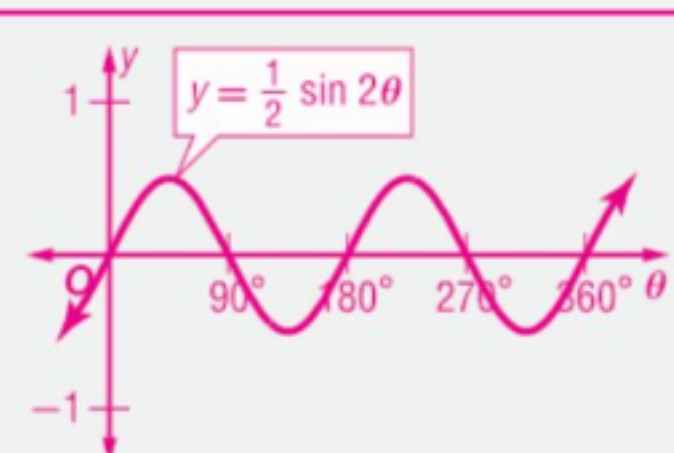
التي نفّذها الطلاب حتى هذه المرحلة.

#### إجابات إضافية (تمرين موجّه)

2A.



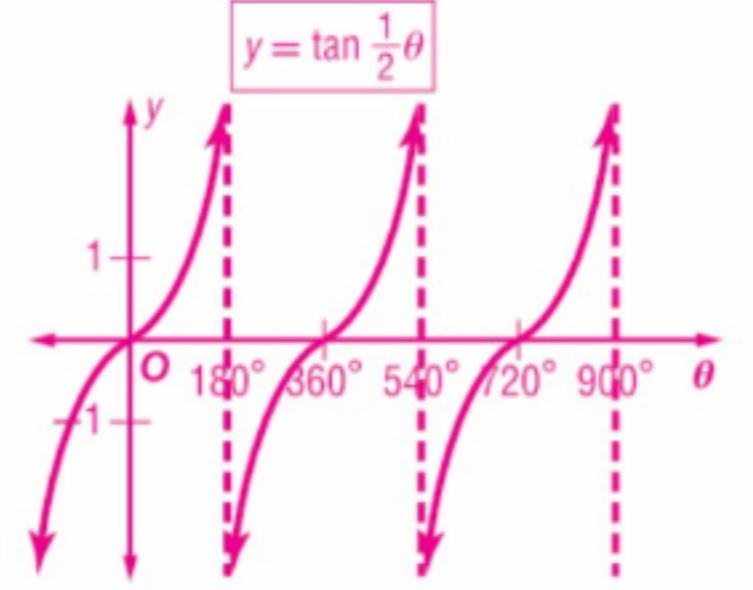
2B.





## مثال إضافي

4 أوجد فترة الدالة  $y = \tan \frac{1}{2}\theta$ . ثم  
مثل الدالة بيانياً. الفترة:  $360^\circ$

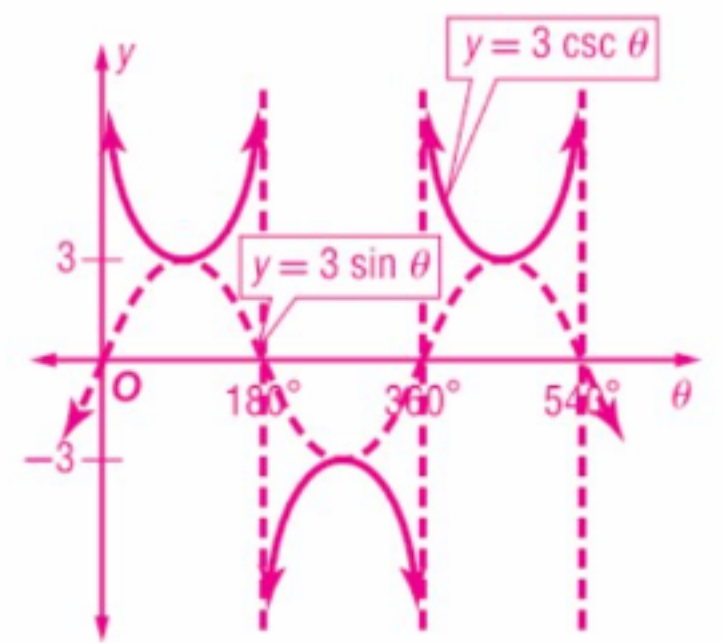


## 2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى

المثال 5 يعرض كيفية استخدام فترة إحدى الدوال الثلاث الأساسية لتمثيل دالة مثلثية أخرى بيانياً.

## مثال إضافي

5 أوجد فترة الدالة  $y = 3 \csc \theta$ . ثم مثل الدالة بيانياً. الفترة:  $360^\circ$



## التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر عددًا من الطلاب كي يعرضوا لبقية أفراد الصف ويوضحوا كيفية رسم تمثيل بياني لدالة مثلثية. تأكد من أن تجعل كل طالب يشرح كيفية إنشاء جدول للقيم واختيار مقياس للتمثيل البياني وتعيين النقاط لرسم التمثيل البياني.

## نصيحة دراسية

**Tangent الزاوية** ليس لدالة Tangent الزاوية سعة لأنه ليس لها قيم عظمى أو صغرى.

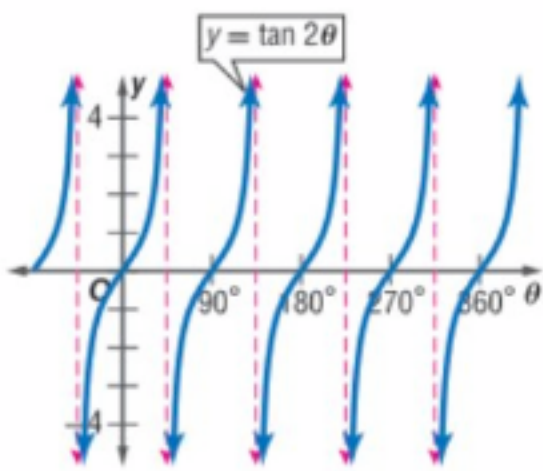
## مثال 4 تمثيل دوال Tangent الزاوية بيانياً

أوجد فترة  $y = \tan 2\theta$ . ثم مثل الدالة بيانياً.

$$\frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{2|b|} = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$$

ارسم خطوط المقاربة عند  $45^\circ$  أو  $135^\circ$ ، وهكذا. استخدم  $y = \tan \theta$ . ولكن ارسم دورة واحدة كل  $90^\circ$ .



## تمرين موجّه

4. أوجد فترة  $y = \frac{1}{2} \tan \theta$ . ثم مثل الدالة بيانياً. انظر الهامش.

## 2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية الأخرى

ترتبط التمثيلات البيانية لدوال secant و Tangent و cotangent بالتمثيلات البيانية لدوال sine و cosine وظل الزاوية.

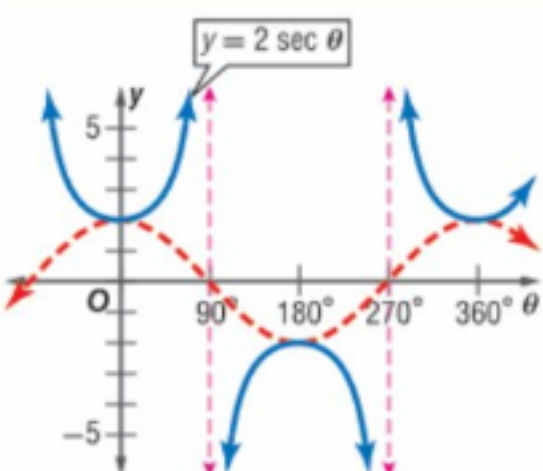
## المفهوم الأساسي دوال Cosecant و Secant و Cotangent

الدالة الأصلية	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\theta \mid \theta \neq 180n$ {عدد صحيح $n$ }	$\theta \mid \theta \neq 90 + 180n$ {عدد صحيح $n$ }	$\theta \mid \theta \neq 180n$ {عدد صحيح $n$ }
المدى	$\{y \mid y > 1 \text{ أو } y < -1\}$	$\{y \mid y > 1 \text{ أو } y < -1\}$	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
الفترة	$360^\circ$	$360^\circ$	$180^\circ$

## مثال 5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

أوجد الفترة  $y = 2 \sec \theta$ . ثم مثل الدالة بيانياً.

حيث إن  $2 \sec \theta$  معكوس ضربي لـ  $\cos \theta$ . إذا فالتمثيلات البيانية لها الفترة نفسها:  $360^\circ$ . وتحدث خطوط المقاربة الرأسية عند النقاط التي يكون فيها  $\cos \theta = 0$ . إذا. توجد خطوط المقاربة عندما تكون  $\theta = 90^\circ$  و  $\theta = 270^\circ$ . ارسم  $y = 2 \cos \theta$  واستخدمها لتمثيل  $y = 2 \sec \theta$  بيانياً.



## تمرين موجّه

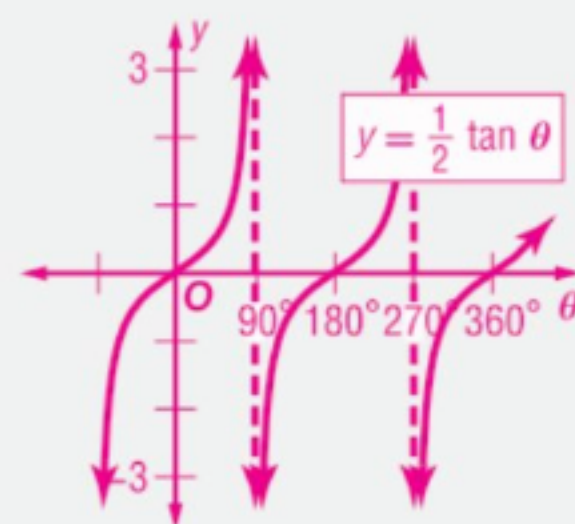
5. أوجد فترة  $y = \csc 2\theta$ . ثم مثل الدالة بيانياً. انظر الهامش.

## نصيحة دراسية

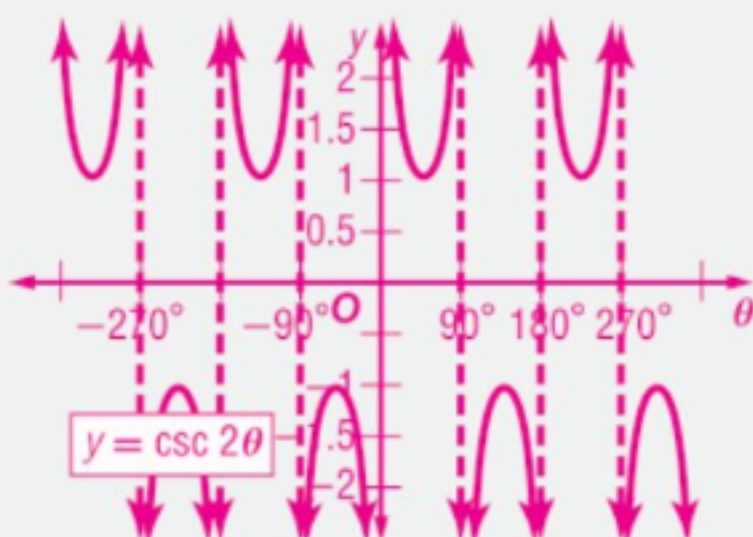
**الدوال العكسية** يمكنك استخدام التمثيلات البيانية لـ  $y = \sin \theta$  و  $y = \cos \theta$  و  $y = \tan \theta$  لتمثيل الدوال العكسية بيانياً. إلا أن هذه التمثيلات البيانية لا تكون جزءاً من التمثيلات البيانية لدوال cosecant و secant و cotangent.

## إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4. الفترة:  $180^\circ$



5. الفترة:  $180^\circ$





### التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مَثِّل الدالة بيانيًا. **4-1. انظر الهامش.**

1.  $y = 4 \sin \theta$
2.  $y = \sin 3\theta$
3.  $y = \cos 2\theta$
4.  $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5. **المناكب** عند تعليق حشرة في شبكة عنكبوت، تهتز الشبكة بتردد 14 هرتز.

- a. أوجد فترة الدالة.  $\frac{1}{14}$  أو ما يقارب 0.07 ثانية
- b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل اهتزاز الشبكة  $y$  كدالة للزمن  $t$ . ثم مَثِّل المعادلة بيانيًا.

**انظر الهامش.**

المثالان 4-5

أوجد فترة كل دالة ثم مَثِّل الدالة بيانيًا. **8-6 انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

6.  $y = 3 \tan \theta$
7.  $y = 2 \csc \theta$
8.  $y = \cot 2\theta$

### التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2

أوجد السعة والفترة لكل دالة. ثم مَثِّل الدالة بيانيًا.

9.  $y = 2 \cos \theta$
10.  $y = 3 \sin \theta$
11.  $y = \sin 2\theta$
12.  $y = \cos 3\theta$
13.  $y = \cos \frac{1}{2}\theta$
14.  $y = \sin 4\theta$
15.  $y = \frac{3}{4} \cos \theta$
16.  $y = \frac{3}{2} \sin \theta$
17.  $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$
18.  $y = 4 \cos 2\theta$
19.  $y = 3 \cos 2\theta$
20.  $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

**9-20 انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

مثال 3

21. **الاستنتاج** قارب في البحيرة يترنح لأعلى ولأسفل مع الأمواج. والفرق بين أعلى نقطة وأسفل نقطة يصل إليها القارب هو 8 سنتيمترات. ويقع القارب عند نقطة التوازن عندما يكون في منتصف طريقه بين أعلى نقطة وأسفل نقطة. وكل دورة من دورات الحركة تستمر لمدة 3 ثوانٍ.

- a. اكتب معادلة تمثل حركة القارب. وافرض أن  $h$  تمثل أعلى نقطة مغاسة بالسنتيمترات وافرض أن  $t$  تمثل الزمن مغاساً بالثواني. بفرض أن القارب يكون عند نقطة توازنه عندما  $t = 0$  ثانية.
- b. ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح ارتفاع القارب في صورة دالة الزمن.

$$h = 4 \sin \frac{2}{3}\pi t$$

**انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

22. **الكهرباء** الجهد المتوفر في أحد المنافذ الكهربائية عبارة عن دالة دورية يتذبذب. أو يتأرجح أعلى وأسفل. بين 165- فولت و 165 فولت بتردد 50 دورة في الثانية.

- a. اكتب معادلة تمثل الجهد  $V$  في صورة دالة للزمن  $t$ . افرض أنه عندما يكون  $t = 0$  ثانية، فإن التيار يساوي 165 فولت.
- b. مَثِّل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

$$V = 165 \cos 100\pi t$$

**23-28. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

23.  $y = \tan \frac{1}{2}\theta$
24.  $y = 3 \sec \theta$
25.  $y = 2 \cot \theta$
26.  $y = \csc \frac{1}{2}\theta$
27.  $y = 2 \tan \theta$
28.  $y = \sec \frac{1}{3}\theta$

673

## 3 التمرين

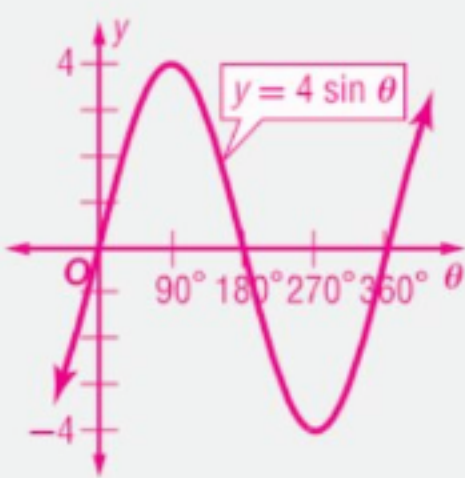
### التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

### إجابات إضافية

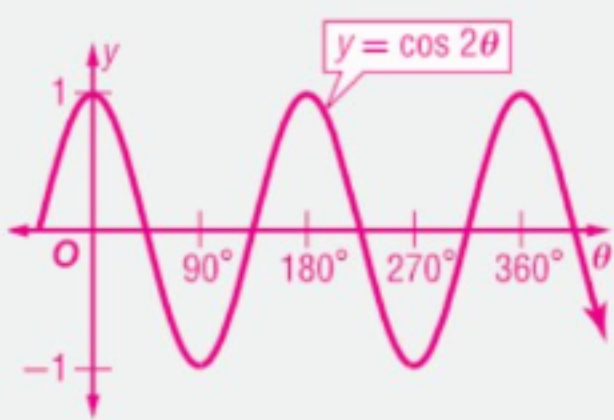
1. السعة: 4؛ الفترة  $360^\circ$



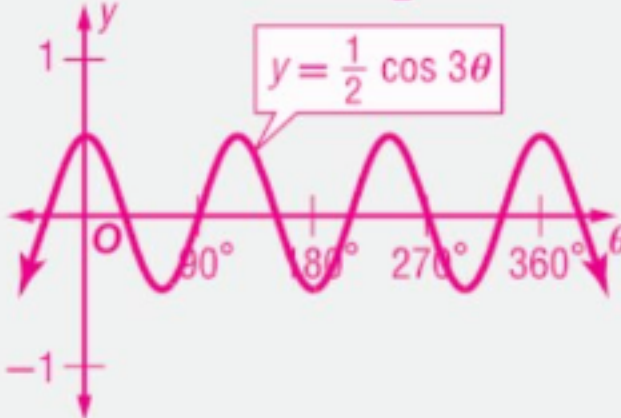
2. السعة: 1؛ الفترة  $120^\circ$



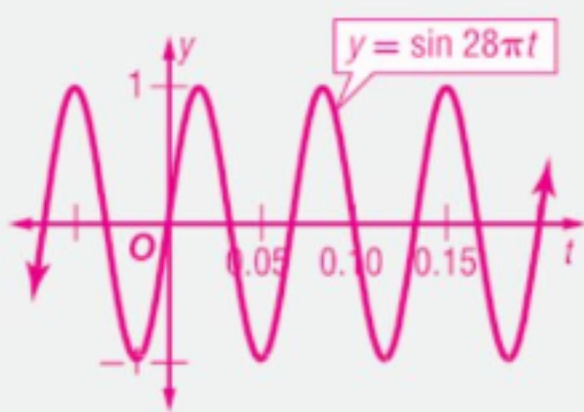
3. السعة: 1؛ الفترة  $180^\circ$



4. السعة:  $\frac{1}{2}$ ؛ الفترة  $120^\circ$



5b.  $y = \sin 28\pi t$



673

### خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL مبتدئ	9-28, 42-63	42-44, 49-63 زوجي 10-28
OL أساسي	9-27, 29-31, 33-39 فردي 42-63	29-40, 42-44, 49-63
BL متقدم	29-60, 61-63 (اختياري)	



**الزلازل** رصدت محطة لرصد الزلازل موجة زلزال ترددها 0.5 هرتز وسعتها 1 متر. **b. انظر الهامش.**

**a.** اكتب معادلة تتضمن sine لتمثيل ارتفاع الموجة  $h$  في صورة دالة للزمن  $t$ . افرض أن نقطة توازن الموجة،  $h = 0$ . عند نقطة المنتصف بين أعلى نقطة وأسفل نقطة.

**b.** مثل الدالة بيانياً. ثم حدد ارتفاع الموجة بعد مرور 20.5 ثانية.



**30a. السعة:**  
**20 cm؛ التردد:**  
**0.5 اهتزازة في**  
**الثانية؛ الفترة:**  
**ثانيتين**

**30. المثابرة** جسم معلق في زنبرك كما هو موضح على اليسار. وهو يتذبذب حسب المعادلة  $y = 20 \cos \pi t$ . حيث تكون  $y$  هي المسافة مقاسة بالسنتيمترات من موضع نقطة التوازن في الزمن  $t$ .

**a.** صف حركة الجسم بإيجاد ما يلي: السعة مقاسة بالسنتيمترات، والتردد مقاس بعدد الاهتزازات في الثانية الواحدة، والفترة مقاسة بالثواني.

**b.** أوجد المسافة التي يقطعها الجسم من نقطة توازنه عندما تكون  $t = \frac{1}{4}$  ثانية.

**c.** المعادلة  $v = (-20 \text{ cm})(\pi \text{ rad/s}) \cdot \sin(\pi \text{ rad/s} \cdot t)$  تمثل سرعة  $v$  الجسم في زمن  $t$ . أوجد السرعة عندما تكون  $t = \frac{1}{4}$  ثوانٍ. **تقريبًا -44.4 cm/s**

**31. البيانو** تهتز أوتار البيانو بتردد 130 هرتز.

**a.** اكتب معادلة باستخدام cosine ومثلها بيانياً لتمثيل اهتزاز الوتر  $y$  في صورة دالة للزمن  $t$ . وافرض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

**b.** افرض أن تردد الاهتزاز قد تضاعف. فهل تظل السعة والفترة كما هي أم تزيد أم تقل؟ اشرح.

أوجد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثل الدالة بيانياً.

**41. مجال**

$$y = a \cos \theta$$

هو مجموعة

جميع الأعداد

الحقيقية. ومجال

$$y = a \sec \theta$$

مجموعة جميع

الأعداد الحقيقية

ما عدا القيم التي

تكون فيها

$$\cos \theta = 0$$

$$y = a \cos \theta$$

$$-a \leq y \leq a$$

ومدى

$$y = a \sec \theta$$

$$y \leq -a$$

$$y \geq a$$

**31a.**

$$y = \cos 260\pi t$$

انظر ملحق

إجابات الوحدة

11 للاطلاع على

التمثيل البياني.

$$32. y = 3 \sin \frac{2}{3} \theta$$

$$33. y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4} \theta$$

$$34. y = 2 \tan \frac{1}{2} \theta$$

$$35. y = 2 \sec \frac{4}{5} \theta$$

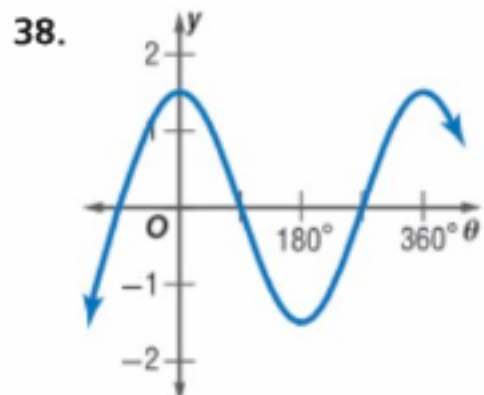
$$36. y = 5 \csc 3 \theta$$

$$37. y = 2 \cot 6 \theta$$

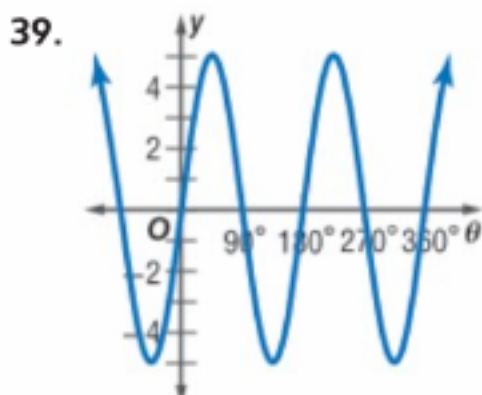
**32-37. انظر ملحق**

**إجابات الوحدة 11.**

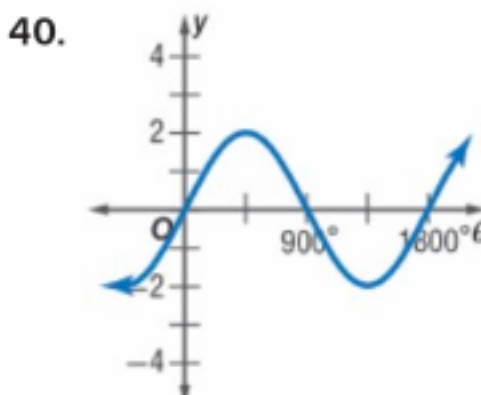
حدد فترة التمثيل البياني واكتب معادلة كل دالة.



$$360^\circ; y = \frac{3}{2} \cos \theta$$



$$180^\circ; y = 5 \sin 2 \theta$$



$$1800^\circ; y = 2 \sin \frac{1}{5} \theta$$

**42. التمثيل البياني**

$$y = \frac{11}{22} \sin \theta$$

لـ  $y = \frac{11}{22} \sin \theta$  سعته

وفترته  $360^\circ$ . والتمثيل

$$y = \sin \frac{1}{2} \theta$$

البياني لـ  $y = \sin \frac{1}{2} \theta$  سعته تساوي 1 وفترته

$720^\circ$ .

### مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**41. التحدي** صف مجال ومدى  $y = a \cos \theta$  و  $y = a \sec \theta$ . حيث  $a$  هي أي عدد حقيقي موجب.

**42. الاستنتاج** قارن بين التمثيلات البيانية لـ  $y = \frac{1}{2} \sin \theta$  و  $y = \sin \frac{1}{2} \theta$ .

**43. مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة مثلثية لها سعة 3 وفترة  $180^\circ$ . ثم مثل الدالة بيانياً. **انظر الهامش.**

**44. الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خواص دالة مثلثية من أجل رسم تمثيلها البياني؟

**انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

### إجابة إضافية

**29b.**



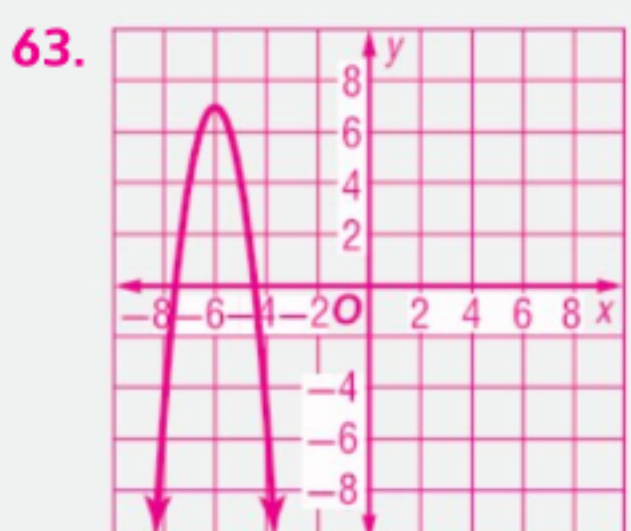
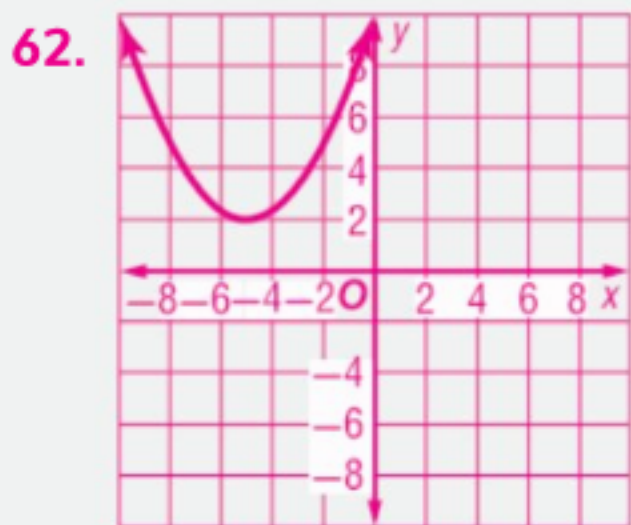
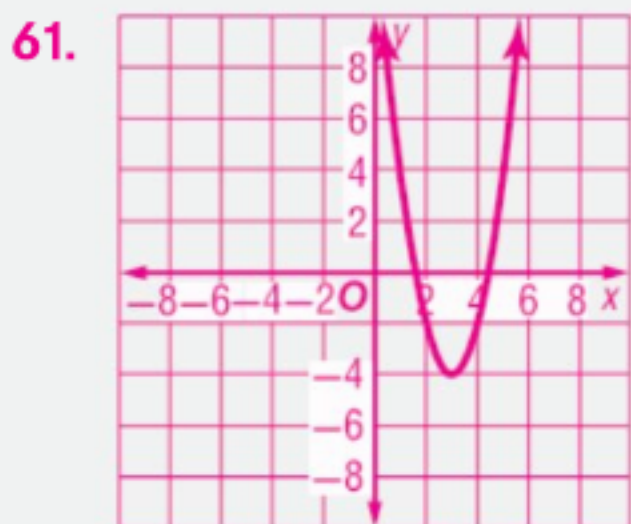
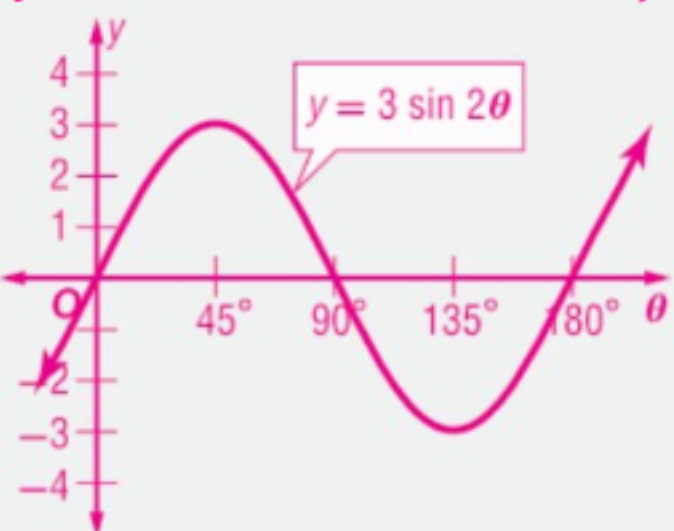


## 4 التقويم

**بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب**  
اطلب من الطلاب كتابة دالة بالصيغة  $y = a \cos b\theta$  أو  $y = a \sin b\theta$ . ثم اطلب منهم ذكر السعة والفترة للتمثيل البياني.

### إجابات إضافية

43. الإجابة النموذجية:  $y = 3 \sin 2\theta$



### تدريب على الاختبار المعياري

47. بلغ التعداد السكاني في مدينتك 312,430 منذ عشرة أعوام. فإذا كان التعداد الحالي هو 418,270، فما نسبة النمو على مدار 10 أعوام ماضية؟ **G**
- F 25%    G 34%    H 66%    J 75%
48. SAT/ACT إذا كان  $h + 4 = b - 3$  فإن  $C = (h - 2)^2$
- A  $h^2 + 4$     D  $b^2 - 14b + 49$   
B  $b^2 - 6b + 3$     E  $b^2 - 10b + 25$   
C  $b^2 - 18b + 81$

45. الإجابة القصيرة أوجد الحد رقم 100,001 في التسلسل. **700,013**  
13, 20, 27, 34, 41, ...
46. الإحصاء لعبت خمس جولات في البولينج وكانت النتيجة كالتالي: 143, 171, 167, 133, 156. فماذا كان متوسطك؟ **C**  
A 147    B 153    C 154    D 156

### مراجعة شاملة

- أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 11-2)
49.  $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$  **-1**    50.  $3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$   **$\frac{3\sqrt{6}}{4}$**     51.  $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$   **$-3\sqrt{3}$**
- حلّ كل مثلث، وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 11-5)
- 52.
- 53.
- 54.

تصل نسبة نجاح التوزيع ذي الحدين إلى 40%. وهناك 12 محاولة.

55. ما احتمال فشل 5 محاولات؟ **10.1%**

56. ما احتمال نجاح 8 محاولات على الأقل؟ **5.7%**

57. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟ **5**

58. **خدمات مصرفية** أودعت نورا AED 1000 في حساب مصرفي. وبنهاية كل عام يصدر المصرف مزاولة إلى حسابها بمقدار 3% من الرصيد، ثم يخصم رسوماً سنوية قيمتها AED 10.

a. افترض أن  $b_n$  هو المبلغ الذي أودعته نورا. اكتب معادلة تكرارية للرصيد  $b_n$  الذي سيكون في حسابها بنهاية عدد  $n$  من الأعوام.

b. أوجد الرصيد المودع في الحساب بعد أربعة أعوام.

$$b_n = 1.03b_{n-1} - 10$$

$$\text{AED } 1083.67$$

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة شروط مما يلي.

59. يقع المركز عند (3, 6). وإحدى بؤرتيه عند (2, 3). ويقع الرأس المرافق عند (6, 1).

60. تقع البؤرتان عند (2, 1) و (2, 13). ويقع الرأس المرافق عند (5, 7).

### مراجعة المهارات

مثل كل دالة بيانياً.

61.  $y = 2(x - 3)^2 - 4$     62.  $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 + 2$     63.  $y = -3(x + 6)^2 + 7$

61-63. انظر الهامش.

675

### التدريس المتميز

**التوسع** اطلب من الطلاب أن يمثلوا بيانياً  $y = \sin(\theta - \pi)$  و  $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$  و  $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ . اطلب منهم وصف تأثير الحد الذي يتم طرحه من  $\theta$ . القيمة التي يتم طرحها من  $\theta$  تحدد مسافة إزاحة الدالة  $y = \sin \theta$  إلى يمين التمثيل البياني.



## 1 التركيز

**الهدف** استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

### المواد الخاصة لكل طالب

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus أو حاسبة تمثيل بياني من نوع آخر

### نصيحة للتدريس

لضبط الحاسبة على وضع الدرجات، اضغط على **MODE** وحرك المؤشر لتحديد **DEGREE** واضغط على **ENTER**. احرص كذلك على جعل الطلاب لمسحون قوائم **Y=** قبل بدء التمرين 1.

## 2 التدريس

### العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية والاستفادة من قدرات بعضهم البعض لإكمال النشاطين والتمرينين 1 و 2.

### اطرح السؤال التالي:

- كيف تغيّر الأقواس من معاني الدوال في الخطوتين 1 و 2؟ **في الخطوة 1**، يضاف عدد إلى قيمة  $\sin \theta$ ، بينما في الخطوة 2، يُضاف عدد إلى  $\theta$  قبل إيجاد  $\sin$ .
- كيف تغير الأقواس التمثيلات البيانية في الخطوتين 1 و 2؟ **التمثيلات البيانية في الخطوة 1** "تتحرك" للأعلى أو للأسفل، بينما التمثيلات البيانية في الخطوة 2 "تتحرك" إلى اليمين أو اليسار.

**تدريب** اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 3 إلى 7.

## 3 التقويم

### التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم ما إذا كان بوسع الطلاب وصف تأثير إضافة ثابت إلى دالة مثلثية أو إلى قيمة  $\theta$  في دالة مثلثية.

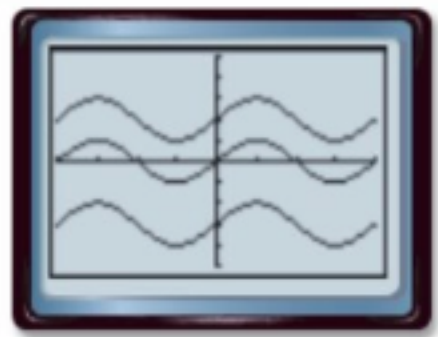
## مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيلات البيانية المثلثية



ممارسات في الرياضيات  
استخدام الأدوات الثلاثة بطريقة إستراتيجية.

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

### النشاط 1 في $k$ في $y = \sin \theta + k$



[-360, 360] scl: 90 by [-5, 5] scl: 1

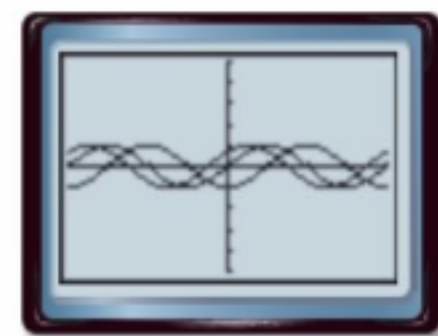
مثل بيانيًا  $y = \sin \theta$  و  $y = \sin \theta + 2$  و  $y = \sin \theta - 3$  على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

اضبط نافذة العرض لتطابق النافذة الموضحة على اليسار. وافترض أن  $Y1 = \sin \theta$  و  $Y2 = \sin \theta + 2$  و  $Y3 = \sin \theta - 3$ .

خطوات العملية على الحاسبة:  
**Y=** **SIN** **X,T,θ,n** **)** **ENTER**  
**SIN** **X,T,θ,n** **)** **+** **2** **ENTER**  
**SIN** **X,T,θ,n** **)** **-** **3** **GRAPH**

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع رأسية مختلفة.

### النشاط 2 في $h$ في $y = \sin(\theta - h)$



[-360, 360] scl: 90 by [-5, 5] scl: 1

مثل بيانيًا  $y = \sin \theta$  و  $y = \sin(\theta + 45^\circ)$  و  $y = \sin(\theta - 90^\circ)$  على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

افرض أن  $Y1 = \sin \theta$  و  $Y2 = \sin(\theta + 45)$  و  $Y3 = \sin(\theta - 90)$ . تأكد من مسح الإدخالات التي وضعتها من النشاط 1.

خطوات العملية على الحاسبة:  
**Y=** **SIN** **X,T,θ,n** **)** **ENTER**  
**SIN** **X,T,θ,n** **+** **45** **)** **ENTER**  
**SIN** **X,T,θ,n** **-** **90** **)** **GRAPH**

التمثيلات البيانية لها شكل واحد ولكن بمواضع أفقية مختلفة.

### النموذج والتحليل

2. الإجابة النموذجية: يؤدي إضافة ثابت لدالة مثلثية إلى تكرر الأنشطة مع دالة cosine ودالة tangent الزاوية. إزاحة التمثيل البياني للدالة رأسيًا.

- ما مجال الدوال الواردة في النشاطين 1 و 2 ومداها؟
- ما تأثير إضافة ثابت إلى دالة مثلثية؟
- ما تأثير إضافة ثابت إلى  $\theta$  في الدالة المثلثية؟

كرر الأنشطة مع كل مما يلي. صف العلاقة بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

- 4-7. انظر ملحق إجابات الوحدة 11.
5.  $y = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$
6.  $y = \sin(2\theta) + 4$
7.  $y = \cos \theta - 3$
8.  $y = \cos(\theta - 90^\circ) - 3$

8. اكتب معادلة عامة لدوال sine و cosine و tangent الزاوية بعد التغيرات في السعة  $a$  والفترة  $b$ . والموضع الأفقي  $h$ . والموضع الرأسي  $k$ .  $y = a \sin(b\theta - h) + k$

### من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب ذكر كيف أن قيمة  $n$  تؤثر في التمثيلين البيانيين لكل من  $y = \sin \theta + n$  و  $y = \sin(\theta + n)$  إذا كانت  $n$  تساوي عددًا نسبيًا موجبًا. التمثيل البياني لـ  $y = \sin \theta + n$  هو بمقدار  $n$  من الوحدات فوق  $y = \sin \theta$ ؛ والتمثيل البياني لـ  $y = \sin(\theta + n)$  هو بمقدار  $n$  من الوحدات إلى يسار  $y = \sin \theta$ .