الوحدة 12 المتطابقات والمعادلات المثلثية

:: السابق

لقد مثّلت الدوال المثلثية بيانيًا وحددت الفترة والسعة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية.

:: الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استخدام المنطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
- استخدام متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينها.
- استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية.

:: لماذا؟ ▲

الإلكترونيات يمكن تمثيل الكثير من النواحي الخاصة بالإلكترونيات باستخدام الدوال المثلثية. تنقل أجهزة المذياع والتلفاز والهاتف الخلوي إضافةً إلى الإنترنت اللاسلكي إشاراتها جميعًا باستخدام أمواج لا سلكية تمثّلها دوال مثلثية. ويمكن إيجاد مقدار الطاقة في أداةٍ إلكترونيةٍ عبر استخدام معادلةٍ مثلثية.

مشروع الوحدة

تدوير العجلة

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن المتطابقات المثلثية لإكمال مشروع معين.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة التجارية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن 21.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

تعريف: المتطابقة المثلثية هي معادلةٌ تضم دالةً مثلثيةً صحيحةً عند جميع قيم المتغير.

مثال: المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ هي متطابقة زاوية سالبة.

اطرح السؤال التالي: ما المتطابقات الأخرى التي تعلمتها في هذا العام تقريبًا؟ يمكن أن تختلف الإجابات؛ يمكن أن يذكر الطلاب مصفوفات المتطابقات أو الدالة المحايدة.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

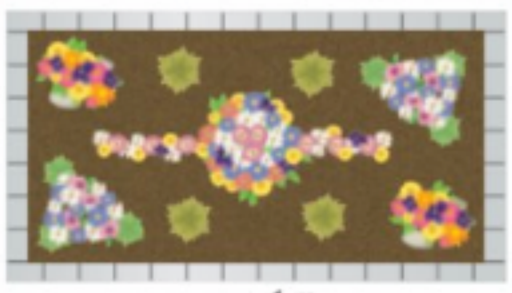
1. $-16a^2 + 4a$ $-4a(4a - 1)$
2. $5x^2 - 20$ $5(x + 2)(x - 2)$
3. $x^3 + 9$ أولية
4. $2y^2 - y - 15$ $(2y + 5)(y - 3)$

5. **الهندسة** تساوي مساحة قطعةٍ مستطيلةٍ من الورق المقوى $x^2 + 6x + 8$ سنتيمترات مربعة. فإذا كان طول قطعة الورق المقوى $(x + 4)$ سنتيمترًا، فكم يساوي عرضها؟ $(x + 2)$ cm.

حُــلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

6. $x^2 + 6x = 0$ $\{-6, 0\}$
7. $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\{-7, 5\}$
8. $x^2 - 9 = 0$ $\{-3, 3\}$
9. $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\{3, 4\}$

10. **البستنة** تبني خديجة حوضًا للأزهار في الفناء الخلفي. وتنوي أن تكون مساحة الحوض 42 مترًا مربعًا. أوجد القيم الممكنة لـ x. 6



أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

11. $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12. $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13. $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
14. $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. **ألعاب الملاهي** يمكن إيجاد المسافة من أعلى نقطةٍ في الأرجوحة الدوارة وبين سطح الأرض عبر ضرب 30 مترًا في $\sin 90°$. فما ارتفاع الأرجوحة الدوارة حين تكون عند منتصف المسافة بين أعلى نقطةٍ وبين الأرض؟ 15 m

مراجعة سريعة

مثال 1 (مستخدم في الدرس 12-2)

حلّل $x^3 + 2x^2 - 24x$ إلى عواملها الأولية.

$$x^3 + 2x^2 - 24x = x(x^2 + 2x - 24)$$

من المفترض أن ناتج ضرب معاملات حدود x يساوي -24. ومن المفترض أن يساوي مجموعها 2. ناتج ضرب العددين 6 و -4 يساوي -24 ويساوي مجموعهما 2.

$$x(x^2 + 2x - 24) = x(x + 6)(x - 4)$$

مثال 2 (مستخدم في الدرس 12-7)

حُــلّ المعادلة التالية $x^2 + 6x + 5 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$x^2 + 6x + 5 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x + 5)(x + 1) = 0$ التحليل إلى العوامل.

$x + 5 = 0$ $x + 1 = 0$

$x = -5$ $x = -1$

مجموعة الحلول هي $\{-5, -1\}$.

مثال 3 (مستخدم في الدرس 12-3)

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 135°$.

زاوية المرجع تساوي $180° - 135°$ أو $45°$.

$\cos 45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. بما أن الزاوية $135°$ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

السؤال الأساسي

- كيف يمكن لتمثيل مفهوم الرياضيات نفسه بطرقٍ مختلفةٍ أن يكون مفيدًا؟ الإجابة النموذجية: اعتمادًا على الحالة، فقد يكون من المفيد أكثر استخدام تمثيلٍ مرئي كتمثيلٍ بياني أو رسم تخطيطي. وفي حالاتٍ أخرى، قد يكون من المفيد أكثر استخدام تمثيلٍ عدديٍ أو جبريٍ كمعادلةٍ أو جدول قيم.

المطويات® منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

التركيز يكتب الطلاب ملاحظاتٍ أثناء استكشافهم المتطابقات والمعادلات المثلثية في دروس هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب إعداد مطوياتٍ وتسميتها حسب ما هو موضح. واجعل الطلاب يستخدموا الجزء المناسب عند تناولهم كل درس في هذه الوحدة. وشجعهم على تطبيق ما تعلموه حول المتطابقات المثلثية عبر كتابة أمثلتهم الخاصة أيضًا.

وقت الاستخدام اقترح على الطلاب إضافة المزيد إلى مطوياتهم أثناء دراسة الوحدة واستخدام تلك المطويات عند مراجعة المفاهيم للاستعداد لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 12. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات® منظّم الدراسة

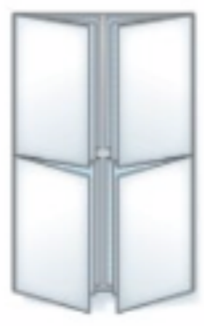
المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 12 حول المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية. ابدأ بورقةٍ قياسها ″17 × ″11 وأربع أوراق رسم بياني.

1 **اطوِ** الأضلاع القصيرة للورقة التي قياسها ″17 × ″11 لتلتقي بمنتصف الورقة.

2 **قُص** كل لسانٍ إلى نصفين كما هو موضح.

3 **قُصّ** أربع أوراقٍ من ورقة الرسم البياني إلى نصفين واطوِ كل نصف ورقة إلى نصفين.

4 **أدخل** النصفين المطويين تحت كلٍ من الألسنة الأربعة وضع دبابيس على طول الطيّة. سَم كل لسانٍ كما هو موضح.



المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية	trigonometric identity
متطابقة ناتج القسمة	quotient identity
متطابقة عكسية	reciprocal identity
متطابقة فيثاغورس	Pythagorean identity
متطابقة الزاويتين المتتامتين	cofunction identity
متطابقة الزاوية السالبة	negative angle identity
معادلة مثلثية	trigonometric equation

مراجعة المفردات

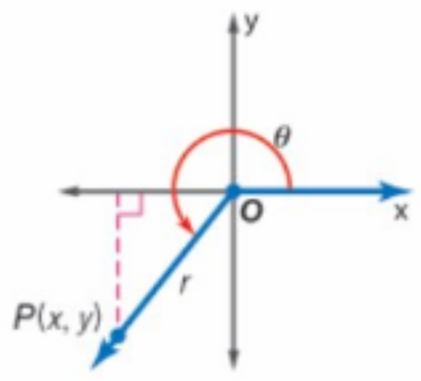
القانون هو جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها

المتطابقة هي معادلة تبقى صحيحةً لجميع قيم المتغيرات التي تضمها

النسب المثلثية لكل زاوية قياسها θ هناك نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء، بحيث يكون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. والنسبالمثلثية للزاوية θ هي كالتالي.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\csc \theta = \frac{r}{y}$ $\sec \theta = \frac{r}{x}$ $\cot \theta = \frac{x}{y}$



الدرس 12-1 المتطابقات المثلثية

.. السابق

- لقد أوجدت قيم دوال مثلثية.

.. الحالي

1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية.

2 استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

.. لماذا؟

- تدعى كمية الضوء التي يقدّمها مصدرٌ لسطحٍ *بالاستضاءة*. وترتبط الاستضاءة E – مقدرةً بوحدة "قدم شمعة" على سطحٍ ما – ببعد السطح R عن مصدر الضوء. يمكن استخدام القانون $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ حيث تمثل I شدّة مصدر الضوء مقدرة بالشمعة وتمثل θ الزاوية بين حزمة الضوء ومستقيم عمودي على السطح – في الحالات التي تكون الإضاءة فيها مهمة، كالتصوير الضوئي.

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثية
trigonometric identity

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

1 إيجاد القيم المثلثية

يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصورة $E = \frac{I \cos \theta}{R^2}$. هذا مثال عن متطابقة مثلثية. **المتطابقة المثلثية** معادلة تحتوي على نسبة مثلثية، أو أكثر وهي صحيحةٌ لكلّ القيم التي يكون فيها كل تعبيرٍ في المعادلة معرّفًا.

إذا كنت تستطيع أن تثبت أن قيمةً محددةً للمتغير في المعادلة تجعل المعادلة خاطئة، إذًا فعليك أن تقدم مثالاً مضادًا. ويكفي مثالٌ مضادٌ واحدٌ لإثبات أن معادلةً ما ليست متطابقة.

المفهوم الأساسي المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات ناتج القسمة

$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$

المتطابقات العكسية

$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sin \theta \neq 0$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$, $\csc \theta \neq 0$
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$, $\sec \theta \neq 0$
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, $\tan \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$, $\cot \theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

متطابقات الزوايا السالبة

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

يطلق على متطابقات الزوايا السالبة في بعض الأحيان اسم متطابقات الدوال الزوجية والفردية.

المتطابقة $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ صحيحة إلا من أجل قياسات زوايا من قبيل $90°$ و $270°$ و ... و $90° + k180°$، حيث k عدد صحيح. يساوي cosine لكل من قياسات هذه الزوايا. إذًا $\tan \theta$ ليس معرفًا عندما $\cos \theta = 0$. وثمّة متطابقةٌ مشابهةٌ لذلك هي $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-1 إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية. واستخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

بعد الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في الطرف الأيمن من قانون الاستضاءة، ما المتغيرات التي تظهر في البسط؟ وما المتغيرات التي تظهر في المقام؟ الشدة؛ الاستضاءة والمسافة
- في المثلث قائم الزاوية، ما نسبة $\sec \theta$؟ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور}}$
- ما الدالة العكسية لـ $\sec \theta$؟ $\frac{1}{\cos \theta}$, $\cos \theta \neq 0$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية. ويمكنك إيجاد قيمٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مثال 1 استخدام المتطابقات المثلثية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	متطابقة فيثاغورس
$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$	بطرح $\sin^2 \theta$ من كل طرف.
$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin \theta$.
$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$	بتربيع $\frac{1}{4}$.
$\cos^2 \theta = \frac{15}{16}$	اطرح: $\frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$	أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن θ سالبة. ولذلك، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد إجابةٍ تقريبية.

الخطوة 1 أوجد $\text{Arcsin}\ \frac{1}{4}$.

$\sin^{-1} \frac{1}{4} \approx 14.48°$ استخدم حاسبة.

نظرًا إلى أن $90° < \theta < 180°$. فإن $\theta \approx 180° - 14.48°$ أو حوالي $165.52°$.

الخطوة 2 أوجد $\cos \theta$.

عوّض θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3 قارن مع القيم الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} 0.97$

$0.97 \approx -0.968$ ✓

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc \theta$ إذا كانت $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ و $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	متطابقة فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2 \theta$	عوض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot \theta$.
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2 \theta$	بالتربيع $-\frac{3}{5}$.
$\frac{34}{25} = \csc^2 \theta$	اجمع: $\frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$.
$\pm \frac{\sqrt{34}}{5} = \csc \theta$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc \theta$ سالبة. وهكذا فإن $\csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تمرين موجّه

1A. أوجد $\sin \theta$ إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{3}$ و $270° < \theta < 360°$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B. أوجد $\sec \theta$ إذا كانت $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ و $180° < \theta < 270°$. $-\frac{7\sqrt{5}}{15}$

نصيحة دراسية

الأرباع فيما يلي جدول لمساعدتك في تذكّر أيّ القيم تكون موجبةً وأيّها تكون سالبةً في كل ربع.

الدالة	+	−
$\sin \theta$	1, 2	3, 4
$\cos \theta$	1, 4	2, 3
$\tan \theta$	1, 3	2, 4
$\csc \theta$	1, 2	3, 4
$\sec \theta$	1, 4	2, 3
$\cot \theta$	1, 3	2, 4

2 تبسيط التعابير

يعني تبسيط تعبيرٍ يضمّ نسب مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيمةٍ عدديةٍ بدلالة نسبةٍ مثلثيةٍ واحدةٍ في حال كان ذلك ممكنًا.

1 إيجاد القيم المثلثية

يوضح **المثال 1** كيفية إيجاد قيم دالةٍ مثلثيةٍ لزاويةٍ تقع في ربعٍ محدد.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **a.** أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \theta$ إذا كان $\sec \theta = -2$ و $180° < \theta < 270°$. $\tan \theta = \sqrt{3}$

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ و $90° < \theta < 180°$. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

التدريس المتمايز OL AL

إذا كان الطلاب يواجهون صعوبةً مع المتطابقات المثلثية.

إذًا فاطلب منهم العمل في مجموعاتٍ من ثلاثة طلاب. واطلب من كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات الواردة في مربع "المفهوم الأساسي" والعمل معًا لإثبات صحتها. ويتعيّن على الطلاب إثبات صحة نتائجهم باستخدام تعريفات sine و cosine و وظل الزاوية بدلالة أضلاع مثلثٍ قائم الزاوية.

مثال 2 تبسيط التعابير

بسّط التعبير $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ و } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

بسّط كل تعبير مما يلي.

2A. $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$ $\sin^2\theta$

2B. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$ $\tan\theta$

ويمكن أن يكون تبسيط التعابير المثلثية مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية تبسيط التعابير واستخدامها

الإضاءة راجع بداية الدرس.

a. أكتب الصيغة بدلالة E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2\sec\theta = I \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } RE^2.$$

$$ER^2\frac{1}{\cos\theta} = I \qquad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{E}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كل طرف في } \theta.$$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ اشرح.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{اضرب كل طرف بـ } E.$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كل طرف على } R^2.$$

$$E = \frac{I\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط.}$$

لا؛ ليست المعادلتان متكافئتين. تُبسط المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ إلى $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$.

تمرين موجّه

3. أعد كتابة $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ بدلالة $\sin\theta$. $\frac{1-2\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \sin^4\theta}$

نصيحة دراسية

التبسيط من الأسهل في أغلب الأحيان كتابة جميع التعابير بدلالة sine و/أو cosine.

الربط بتاريخ الرياضيات

أريابهاتا (476-550 ميلادي) لعلّ أريابهاتا هو الأشهر من بين علماء الرياضيات الهنود. وقد ارتبط اسمه بصورة وثيقة بموضوع الحساب المثلثي. إذ كان أول من أدخل الدوال المثلثية العكسية وحساب المثلثات الكروية. كما حسب أريابهاتا أيضًا القيم التقريبية للعدد باي إضافة للدوال المثلثية.

2 تبسيط التعابير

يوضح **المثال 2** كيفية تبسيط تعبيرٍ عبر كتابته بدلالة دالةٍ مثلثيةٍ واحدة. ويوضح **المثال 3** تبسيط تعبيرٍ من الحياة اليومية يضم دوال مثلثية.

أمثلة إضافية

2 بسّط $\sin\theta(\csc\theta - \sin\theta)$. $\cos^2\theta$

3 **الإضاءة** راجع بداية الدرس.

a. أوجد حل قانون الاستضاءة بدلالة R. $R = \sqrt{\frac{I\cos\theta}{E}}$

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a مكافئةٌ لـ $\frac{1}{R^2} = \frac{E}{I\sec\theta}$؟ لا

التركيز على محتوى الرياضيات

المتطابقات يجب على الطلاب أن يتذكروا جيدًا متطابقات ناتج القسمة والمتطابقات العكسية والمتطابقات الفيثاغورية. ففي حين أنه من المفيد تذكّر أنواع أخرى من المتطابقات، فإنه يمكن اشتقاق المتطابقات الأخرى من المتطابقات الأساسية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

صفحة الويب أنشئ صفحة ويب للصف الدراسي تتضمن جميع المتطابقات والصيغ المثلثية التي تضمها هذه الوحدة. واطلب من الطلاب الاشتراك في خدمة تلقيم مقتطفات الأخبار (RSS feed) حتى يتمكنوا من متابعة تحديثك للصفحة بكل سهولة.

التدريس المتمايز BL

التوسّع يهتمّ الطلاب فوق المستوى في الغالب بتعلّم الكيفية التي ظهرت بها أفكار رياضيات محددة. توسّع في الربط بتاريخ الرياضيات بالتحدث عن عالم الرياضيات الهندي أريابهاتا. ويمكن للطلاب دراسة الاكتشافات الرياضية السابقة لأريابهاتا، والتي قادت إلى الحاجة للدوال المثلثية العكسية في سياق عمله.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إرشاد للمعلمين الجدد

النسب المثلثية يمكنك استخدام التعريفات المألوفة لكل من sine و cosine وظل الزاوية باعتبارها نسب الضلع المقابل والضلع المجاور والوتر في المثلث القائم لتبيّن السبب في أن $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.

1. إذا كانت $\cot\theta = 2$، فأوجد $\tan\theta$. $\frac{1}{2}$
2. إذا كانت $\sin\theta = \frac{4}{5}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{3}{5}$
3. إذا كانت $\cos\theta = \frac{2}{3}$، فأوجد $\sin\theta$. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
4. إذا كانت $\cos\theta = \frac{2}{3}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

مثال 2 بسّط كلاً من التعابير التالية.

5. $\tan\theta\cos^2\theta$ $\sin\theta\cos\theta$
6. $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ 1
7. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ $\cot^2\theta$

مثال 3

8. **المثابرة** عندما يمرّ ضوء غير مستقطب عبر عدسة نظارة شمسية مستقطبة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ الضوء بعد ذلك عبر عدسةٍ مستقطبةٍ أخرى يقع محورها عند زاوية θ بالنسبة للعدسة الأولى، فإن شدّة الضوء تنخفض مرة أخرى. ويمكن إيجاد شدّة الضوء الخارج باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$.

وفيها I_0 هي شدّة الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة الثانية، و I هي شدّة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين محوري الاستقطاب.

a. بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$. $I = I_0\cos^2\theta$

b. استخدم الصيغة المبسّطة لتحديد شدّة الضوء المارّ عبر عدسة استقطابٍ ثانيةٍ يشكّل محورها زاويةً قياسها 30° بالنسبة للعدسة الأصلية. $I = \frac{3}{4}I_0$؛ للضوء ثلاثة أرباع شدته قبل أن يمرّ عبر العدسة المستقطبة الثانية.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$.

9. إذا كانت $\cos\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{5}{4}$
10. إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\tan\theta$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{4}{5}$
12. إذا كانت $\tan\theta = 2$، فأوجد $\sec\theta$. $\sqrt{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $180° < \theta < 270°$.

13. إذا كانت $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، فأوجد $\csc\theta$. $-\frac{5}{4}$
14. إذا كانت $\sec\theta = -3$، فأوجد $\tan\theta$. $2\sqrt{2}$
15. إذا كانت $\cot\theta = \frac{1}{4}$، فأوجد $\csc\theta$. $\frac{-\sqrt{17}}{4}$
16. إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$، فأوجد $\cos\theta$. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كانت $270° < \theta < 360°$.

17. إذا كانت $\cos\theta = \frac{5}{13}$، فأوجد $\sin\theta$. $-\frac{12}{13}$
18. إذا كانت $\tan\theta = -1$، فأوجد $\sec\theta$. $\sqrt{2}$
19. إذا كانت $\sec\theta = \frac{5}{3}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{3}{5}$
20. إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$، فأوجد $\cos\theta$. $\frac{4}{5}$

مثال 2 بسّط كلاً من التعابير التالية.

21. $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ $\sec^3\theta$
22. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\theta$ $\cos\theta$
23. $\cot\theta\sec\theta$ $\csc\theta$
24. $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$ $\csc\theta$
25. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ 1
26. $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $-\cot\theta$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-27, 42, 44-48, 50-67	9-27 فردي, 51-54	10-26 زوجي 42, 44-48, 50. 55-67
OL أساسي	9-33 فردي, 34-42, 44-48, 50-67	9-27, 51-54	28-42, 44-48, 50, 55-67
BL متقدم	28-64, (اختياري: 65-67)		

مثال 3

27 **الإلكترونيات** عندما يمرّ تيارٌ كهربائيٌ في سلكٍ موضوعٍ ضمنَ حقلٍ مغناطيسي، كما في مجفف الشعر، تتولّد قوةٌ تؤثّر في السلك. ويمكن تحديد قوة الحقل المغناطيسي باستخدام القانون $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$.
حيث تمثل F القوة المؤثرة في السلك، وتمثل I شدّة التيار المار بالسلك، وتمثل ℓ طول السلك، وتمثل θ الزاوية التي يصنعها السلك مع الحقل المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة $\sin \theta$. (تلميح: حُلّ لإيجاد F.) $F = I\ell B \sin \theta$

B **بسّط كلًا من التعابير التالية.**

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ $\cot^2 \theta$ **29.** $\tan \theta \csc \theta$ $\sec \theta$ **30.** $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$ 1

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$ 2 **32.** $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$ $\cos^2 \theta$ **33.** $2 - 2\sin^2 \theta$ $2\cos^2 \theta$

34. **الشمس** تتعلق قدرة جسمٍ على امتصاص الطاقة بعاملٍ يدعى انبعاثية الجسم e. يمكن حساب الانبعاثية باستخدام القانون $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$، حيث تمثل W معدّل امتصاص بشرة شخصٍ للطاقة الصادرة عن الشمس، وتمثل S الطاقة الصادرة عن الشمس مقدرةً بالواط لكل متر مربع، وتمثل A مساحة السطح المعرّض للشمس، وتمثل θ الزاوية بين الإشعاعات الشمسية وخطٍ عموديٍ على الجسم. **a.** $W = eAS \cos \theta$

a. حُلّ المعادلة لإيجاد W. واكتب إجابتك باستخدام $\sin \theta$ أو $\cos \theta$ فقط.

b. أوجد قيمة W إذ كان $e = 0.80$، و $\theta = 40°$، و $A = 0.75\ m^2$، و $S = 1000\ W/m^2$. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئة. $459.63\ W$

35. **تمثيل النماذج** تعرض الخريطة بعضًا من المباني في حيّ إيمان، والتي تزورها بصورةٍ دورية. يساوي $\text{sine}\ \theta$ المتشكّلة بين الطرق التي تربط بين المكتبة والمدرسة ومنزل إيمان $\frac{4}{9}$.

a. ما cosine للزاوية؟ $\frac{\sqrt{65}}{9}$

b. ما ظل الزاوية؟ $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

c. ما sine المتشكلة من الطرقات التي تربط بين منزل معلّم الفنون والمدرسة ومنزل إيمان وما cosine وظلّها؟

35c. $\frac{4}{9}, -\frac{\sqrt{65}}{9}, -\frac{4\sqrt{65}}{65}$

36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ متطابقةً مثلثية. تأمل المتطابقة الهندسية $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$.

a. **جدوليًا** انسخ الجدول أدناه وأكمله.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b. **بيانيًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني من أجل تمثيل $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ في صورة دالتين منفصلتين، وارسم التمثيل البياني. **انظر الهامش.**

c. **تحليليًا** إذا لم يكن التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين، إذًا فالمعادلة ليست متطابقة. هل يتطابق التمثيلان البيانيان؟ **نعم**

d. **تحليليًا** استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتحديد ما إن كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة. (تحقق من ضبط حاسبتك على نمط الدرجات.) **نعم**

تدريس الممارسات في الرياضيات

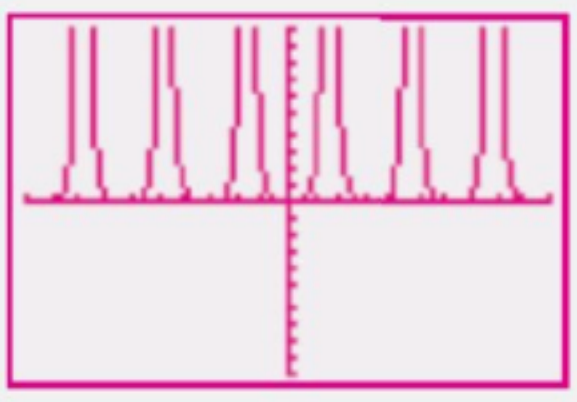
تمثيل النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 36 جدولاً للقيم وحاسبة تمثيل بياني لتحديد ما إذا كانت معادلةٌ ما متطابقةً مثلثية.

إجابة إضافية

36b.



[-540, 540] scl: 90 في [-10, 10] scl: 1

37. التزلج يهبط متزلجٌ كتلته m على تلةٍ زاويتها θ درجةً بسرعة ثابتة. وعند تطبيق قوانين نيوتن على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي: $F_n - mg\cos\theta = 0$ و $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$. حيث تمثل g التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية، وتمثل F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، وتمثل μ_k معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد μ_k بوصفها دالة لـ θ. $\mu_k = \tan\theta$

بسّط كل تعبير

38. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta}{1-\csc^2\theta}$ $-\tan\theta\sec\theta$

39. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$ -1

40. $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$ $\sin\theta$

41. $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\tan(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ $-\cot^2\theta$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي يتناقش إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبهم المنزلي متطابقة. حيث يقول إبراهيم إنه ونظرًا لتجربيه عشر قيمٍ محددةٍ وإلى أنّها جميعًا كانت صالحة. فلا بدّ أنها متطابقة. في حين يقول أحمد إنه لا يمكن استخدام سوى قيمٍ محددةٍ بمثابة أمثلةٍ مضادةٍ لإثبات عدم كون معادلةٍ متطابقة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
أحمد؛ قد تكون هناك قيمٌ أخرى لا تكون المعادلة من أجلها صحيحة.

43. التحدِ أوجد مثالاً مضادًا لتثبت أن $1 - \sin x = \cos x$ ليست متطابقة. **الإجابة النموذجية: $x = 45°$**

44. التبرير وضّح كيف يمكن إعادة كتابة قانون الاستضاءة الوارد في بداية هذا الدرس لإثبات أن $\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$.
انظر الهامش.

45. الكتابة في الرياضيات تعود شهرة العالم فيثاغورس في جلّها إلى نظرية فيثاغورس. وتعدّ المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثالاً عن متطابقات فيثاغورس. فلِمَ تصنّف هذه المتطابقة كذلك برأيك؟

45. الإجابة النموذجية: يمكن النظر إلى الدالتين $\cos\theta$ و $\sin\theta$ على أنهما طولا ساقي مثلثٍ قائم الزاوية، ويمكن النظر إلى العدد 1 على أنه قياس الوتر المقابل.

46. البرهان أثبت أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.
انظر الهامش.

47. مسألة غير محددة الإجابة اكتب تعبيرين مكافئين لـ $\tan\theta\sin\theta$. **الإجابة النموذجية: $\sin\theta$ ، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$**

48. التبرير اشرح كيف يمكنك استخدام القسمة لإعادة كتابة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ بالصورة $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$. **اقسم كل الحدود على $\sin^2\theta$.**

49. التحدِ أوجد $\cot\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $90° \le \theta < 180°$. $-\frac{4}{3}$

50. تحليل الخطأ تبسّط إيمان وأسماء $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إيمان

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta + 1$$
$$= \sec^2\theta$$

أسماء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$= \sin^2\theta$$

50. أسماء؛ لم تستخدم إيمان المتطابقة التي تنصّ على أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ وارتكبت خطأً في جمع تعابير نسبية.

إجابة إضافية

44. $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$

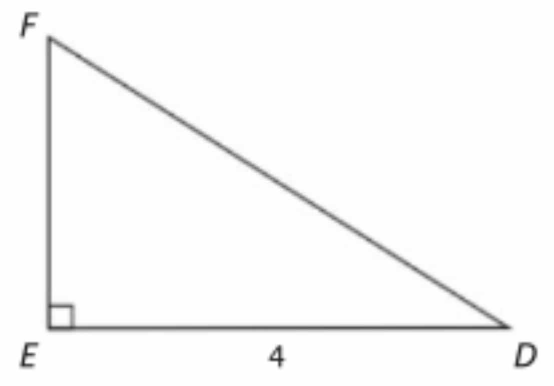
$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{ER^2}$ — $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$ER^2 = I\cos\theta$ — بالضرب التبادلي.

$\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$ — بقسمة كل طرف على I.

تدريب على الاختبار المعياري

51. استعن بالشكل الموضح أدناه. إذا كان $\cos D = 0.8$. فما طول $\overline{DF}$؟ **A**



A 5   C 3.2

B 4   D $\frac{4}{5}$

52. الاحتمالات يحتوي وعاءٌ على 16 كرة زجاجية خضراء و كرتين زجاجيتين حمراوين و 6 كرات زجاجية صفراء. فكم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تنبغي إضافتها إلى الوعاء من أجل مضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟ **J**

F 4   H 8

G 6   J 12

53. SAT/ACT تصغر أماني أمل بـــ 6 سنوات. ويساوي عمر آمنة ضعف عمر أمل. ويساوي مجموع أعمارهنّ جميعًا 54. فأيّ معادلةٍ مما يلي يمكن استخدامها لإيجاد عمر أمل؟ **D**

A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$

B $x - 6x + (x + 2) = 54$

C $x - 6 + 2x = 54$

D $x + (x - 6) + 2x = 54$

E $2(x + 6) + (x + 6) + x = 54$

54. أيّ من الدّوال التالية تمثّل نموًا أسيًا؟ **G**

F $y = (0.3)^x$

G $y = (1.3)^x$

H $y = x^3$

J $y = x^{\frac{1}{3}}$

مراجعة شاملة

أوجد كل قيمةٍ مما يلي، واكتب قياسات الزوايا بالراديان، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

55. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.09**

56. $\text{Sin}^{-1}\frac{\pi}{2}$ **غير موجودة**

57. $\text{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$ **0.52**

58. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\,\frac{6}{7}\right)$ **0.60**

59. $\sin\left(\text{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **0.5**

60. $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{3}{5}\right)$ **0.8**

61. الفيزياء يربط ثقلٌ إلى نابضٍ ويعلّق من السقف. وفي حالة التوازن، يتوضّع الثقل على ارتفاع 4 أمتارٍ فوق الأرضية. يُسحب الثقل إلى الأسفل مسافة 1 مترٍ ثمّ يُحرّر. اكتب معادلة بعد d الثقل الموجود فوق سطح الأرضية بصورة دالة للزمن t ثانية على فرض أن الثّقل يعود إلى وضعيته الدنيا كلّ 4 ثوان. $d = 4 - \cos\frac{\pi}{2}t$ **or** $d = 4 - \cos 90°t$

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

62. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4} \cdot 2^{k-1}$ $\frac{31}{4}$

63. $\sum_{k=1}^{7} 81\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $\frac{1093}{9}$

64. $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{3} \cdot 5^{k-1}$ **32,552**

مراجعة المهارات

حُــلّ كل من المعادلات التالية.

65. $a + 1 = \frac{6}{a}$ **−3, 2**

66. $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$ **11**

67. $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$ **2**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 42. على الطلاب أن يروا أن أحمد على صواب. اشرح للطلاب أن الاستنتاج الاستدلالي (التعميم بناء على عدة أمثلة) لا يمكن أن يثبت صحة متطابقة. بل إن أي مثالٍ مضاد محددٍ يكفي للإثبات أن المعادلة ليست متطابقة. بالنسبة للتمرين رقم 50. يجب أن يرى الطلاب أن أسماء على صواب (لأن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) وأن إيمان ليست على صواب $\left(\text{لأن } \frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)$ اشرح للطلاب أنهم حين يبسّطون تعبيرًا مثلثيًا، فإنهم يستخدمون الخواصّ نفسها التي يستخدمونها عند تبسيط أي تعبيرٍ نسبي.

4 التقويم

الكرة البلورية أخبر الطلاب بأن ينتقلوا إلى الدرس 2-12. واطلب منهم أن يكتبوا كيف يعتقدون أن من شأن ما تعلّموه اليوم أن يساعدهم في الدرس 2-12.

إجابة إضافية

46. $\tan(-A) = \frac{\sin(-A)}{\cos(-A)}$

$= \frac{-\sin A}{\cos A}$

$= -\frac{\sin A}{\cos A}$

$= -\tan A$

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع اسأل الطلاب إن كان من الممكن دومًا تبسيط تعبيرٍ مثلثي عبر كتابته بدلالة دالةٍ مثلثيةٍ واحدة. واطلب منهم تقديم مثالٍ إذا لم يكن من الممكن تفسير السبب في إمكانية ذلك.

الدرس 12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

السابق

- لقد استخدمت المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الحالي

1 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى صيغة الطرف الآخر.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية عبر تحويل كل طرفٍ في المتطابقة إلى الصيغة نفسها.

لماذا؟

- حين كان خالد يركض على مضمارٍ دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديًا على الأرض، بل كان يميل بعيدًا عن الوضعية الرأسية. وتد الزاوية الحادة غير السالبة θ التي يصنعها جد خالد مع الشاقول باسم *زاوية الميل* وتوصف بالمعادلة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$.

هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة الدوال المثلثية. فهناك معادلةٌ أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin\theta = \cos\frac{v^2}{gR}\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل هاتان المعادلتان مستقلتان تمامًا بعضهما عن بعض أم أنهما نسختان مختلفتان عن علاقةٍ واحدة؟

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل أحد طرفي متطابقة

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافةً إلى تعاريف النسب المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقة ما، فيتعين عليك إثبات صحتها من أجل جميع قيم θ.

المفهوم الأساسي إثبات المتطابقات عبر تحويل طرف واحد

الخطوة 1 بسّط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

مثال 1 تحويل طرف واحد في متطابقة

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$.

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$ اضرب البسط والمقام بـ $1+\cos\theta$.

$\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$ $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$

$\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1+\cos\theta$ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$1+\cos\theta = 1+\cos\theta$ ✓ بقسمة البسط والمقام على $\sin^2\theta$.

تمرين موجّه

1. أثبت صحة المتطابقة $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$. **انظر الهامش.**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-2 استخدام المتطابقات لإيجاد القيم المثلثية وتبسيط التعابير.

الدرس 12-2 إثبات صحة متطابقات مثلثية بتحويل أحد طرفي معادلةٍ إلى صيغة الطرف الآخر. إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل كل طرفٍ في المعادلة إلى الصيغة نفسها.

بعد الدرس 12-2 استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة متطابقاتٍ مثلثيةٍ أخرى أو تبسيطها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في الطرف الأيمن من معادلة *زاوية الميل*، ما المتغير الذي يظهر في البسط؟ وما المتغير الذي يظهر في المقام؟ v؛ g و R
- كيف يمكنك التعبير عن $\tan\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$؟ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- هل $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ يساوي $\frac{v^2}{gR}$ أو $\frac{gR}{v^2}$؟ $\frac{v^2}{gR}$

عندما تثبت صحة متطابقةٍ مثلثية، فإنك في الحقيقة تحلّ بترتيبٍ عكسي. ففي المثال 1، خذ الخطوة الأخيرة $\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta$ بما أن تلك الخطوة صحيحةٌ بوضوح، فيمكنك أن تستنتج أن الخطوة قبل الأخيرة صحيحةٌ أيضًا، وهكذا دواليك بالعودة إلى المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على الاختبار المعياري تبسيط التعابير

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} =$$

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

قراءة فقرة الاختبار

أوجد تعبيرًا يساوي على الدوام التعبير المعطى. ولاحظ أن خيارات الإجابات جميعها إما تضمّ $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. ولذلك حُل باتجاه اختزال النسب المثلثية الأخرى.

حَل فقرة الاختبار

حوّل التعبير المعطى ليطابق أحد الخيارات.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\text{، }\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب.}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام والضرب.}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{بالضرب.}$$

الإجابة هي C.

تمرين موجّه

2. $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta) =$ **H**

F $\cot^2\theta$ **G** $\tan^2\theta$ **H** $\cos^2\theta$ **J** $\sin^2\theta$

2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

من الأسهل أحيانًا تحويل كل طرفٍ من طرفي المتطابقة بصورةٍ منفصلة إلى صيغةٍ مشتركة. ومن شأن الاقتراحات التالية أن تساعدك في إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

المفهوم الأساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- عوّض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل إلى العوامل أو اضرب حسب الضرورة. وقد يتعيّن عليك ضرب البسط والمقام بالتعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كلاً من طرفي المتطابقة بدلالة الـ Sine و Cosine فقط. ثمّ بسّط كلاً من الطرفين قدر الإمكان.
- لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تقم بإجراء العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

انتبه!

المثابرة
يشبه إثبات صحة متطابقةٍ التحقق من حل معادلة. يجب عليك تبسيط أحد الطرفين أو كليهما بصورةٍ منفصلةٍ إلى أن يصبحا متماثلين.

نصيحة عند حل الاختبار

التحقق من الإجابات تحقق من صحة إجابتك عبر اختيار قيمٍ لــ θ. ثم أوجد قيمة التعبير الأصلي وقارنه مع إجابتك المختارة.

1 تحويل طرف واحد في معادلة

يوضح **المثال 1** كيفية إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ بتحويل أحد طرفي معادلة. ويوضح **المثال 2** كيفية إيجاد تعبيرٍ مكافئٍ لتعبيرٍ مثلثي معطىً.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يراقب الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات تقدّمهم ويقيّمونه ويغيّرون طريقتهم عند الضرورة. فذكّر الطلاب أنه لا يتساوى تعبيران حتى يصبحا من الصيغة نفسها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta\cos\theta\tan\theta = 1$.

$$\csc\theta\cos\theta\tan\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \ \checkmark$$

2 تدريب على الاختبار المعياري

$$\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \tan\theta = \text{A}$$

A $\cot\theta$ **C** 0

B $\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$ **D** $\cos^2\theta$

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

1. $$\cot^2\theta - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$$

$$\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta \ \checkmark$$

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ من طالبين أو أكثر لإثبات صحة بعض المتطابقات في التمارين 17-8. واجعلهم يسجلوا التقنيات التي وجدوا أنها مفيدة. اطلب من الطلاب مقارنة قائمة تقنياتهم بقائمة الاقتراحات المعطاة. واجعلهم أيضًا يناقشوا الإستراتيجيات الفاشلة. أي الاستراتيجيات نجحت وأيها فشلت، وما السبب؟

2 تحويل كل من طرفي المتطابقة

يوضح **المثال 3** كيفية إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ بتحويل كلا طرفي معادلة.

مثال إضافي

3 أثبت أن $\csc\theta + \sec\theta = \dfrac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$ متطابقة.

$$\csc\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \checkmark$$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. $\csc^2\theta - \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \cot\theta\tan\theta$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

مثال 3 الإثبات بتحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$.

المعادلة الأصلية	$1 - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$
بتحليل كل طرف إلى العوامل.	$(1 - \tan^2\theta)(1 + \tan^2\theta) \stackrel{?}{=} \sec^2\theta\,(2 - \sec^2\theta)$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$[1 - (\sec^2\theta - 1)]\sec^2\theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2\theta)\sec^2\theta$
بسط.	$(2 - \sec^2\theta)\sec^2\theta = (2 - \sec^2\theta)\sec^2\theta \checkmark$

تمرين موجّه

3. أثبت صحة المتطابقة $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$. **انظر الهامش.**

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي: **1–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

1. $\cot\theta + \tan\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$
2. $\cos^2\theta = (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$
3. $\sin\theta = \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta + \cot\theta}$
4. $\tan^2\theta = \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$
5. $\tan^2\theta\csc^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
6. $\tan^2\theta = (\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$

مثال 2

7. **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقةٍ فيها $\dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ **D**

A $\sin^2\theta$ **B** $\cos^2\theta$ **C** $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

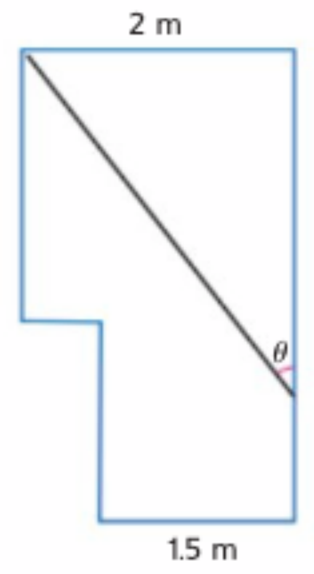
التدريب وحل المسائل

مثال 1 أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:. **8–17. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

8. $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$
9. $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$
10. $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$
11. $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$
12. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$
13. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$
14. $\tan\theta = \dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$
15. $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$
16. $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$
17. $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

مثال 2

18. **السلّم** استنتج بعض الطلاب تعبيرًا لحساب طول سلّم، علمًا أنه حين يُحمل بصورةٍ مسطحةٍ فإنه يمكن أن يشغل زاويةً بحيث يمتدّ من رواقٍ عرضه 1.5 مترًا إلى رواقٍ عرضه متران كما هو موضح. وقد حدّدوا أن الطول الأقصى ℓ لسلمٍ يشغل هذا الركن يعطى بالعلاقة $\ell(\theta) = \dfrac{2\sin\theta + 1.5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$. وعندما حلّت المعلمة المسألة، استنتجت أن $\ell(\theta) = 2\sec\theta + 1.5\csc\theta$. فهل التعبيران متكافئان؟ **نعم**



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	8-32, 52, 54-57, 59-76	9-31 فردي, 60-63	8-32 زوجي, 52, 54-57, 59, 64-76
OL أساسي	9-31 فردي, 33-34, 35-49 فردي, 50-52, 54-57, 59-76	8-32, 60-63	33-52, 54-57, 59, 64-76
BL متقدم	33-72, (اختياري: 73-76)		

714 | الدرس 12-2 | إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يأتي:** **32–19. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

19. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21. $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25. $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

26. $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30. $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

B .33 **التبرير المنطقي** يمثل الرسم التخطيطي على الجهة اليسرى لعبة كرة الحبل. حين تدور الكرة حول العمود، تمسح القطعة المستقيمة $\overline{SP}$ سطحًا مخروطيًا. تعطى الصيغة التي تعبر عن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية التي يشكلها الحبل مع العمود θ بالمعادلة $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$. هل $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا معادلةٌ تعبر عن العلاقة بين L و θ؟ **نعم**

.34 **الجري** يأخذ جزء من مضمار سباقٍ شكل قوسٍ دائري نصف قطره 16.7 مترًا. وعندما تجري عدّاءةٌ على طول القوس، فإن Sine زاوية ميل جسدها θ يساوي $\frac{1}{4}$. أوجد سرعة العدّاءة. واستخدم صيغة زاوية الميل الواردة في بداية الوحدة، $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$، حيث $g = 9.8$ و R تمثل نصف القطر. (إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولاً.) **6.5 m/s**

عند تبسيط التعبير، فهل يساوي 1 أم 1−؟

35. $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ **1**

36. $\sin\theta\csc(-\theta)$ **−1**

37. $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ **1**

38. $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ **1**

39. $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$ **1**

40. $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ **−1**

بسّط التعبير إلى ثابتٍ أو إلى نسبة مثلثيةٍ أساسية.

41. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ **$\cos\theta$**

42. $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$ **$\tan\theta$**

43. $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$ **2**

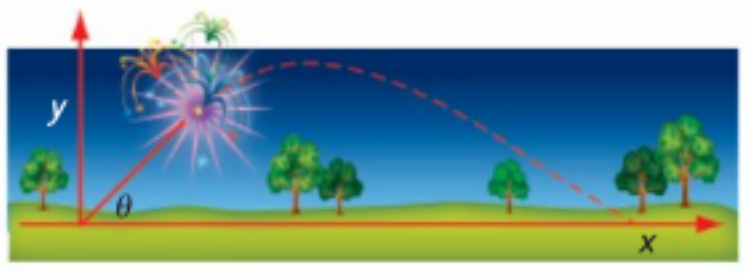
44. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ **1**

45. $\tan\theta\cos\theta$ **$\sin\theta$**

46. $\cot\theta\tan\theta$ **1**

47. $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ **1**

48. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$ **$\tan^2\theta$**



.49 **فيزياء** عند إطلاق إحدى الألعاب النارية من سطح الأرض، يرتبط ارتفاعها y وإزاحتها الأفقية x بالمعادلة $y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$؛ حيث تمثل v_0 السرعة البدائية للمقذوف، وتمثل θ زاوية إطلاق المقذوف، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

$$y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2}(1+\tan^2\theta) + x\tan\theta$$

715

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب منطقي؟"

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في بناء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

E المتابعة

استكشفَ الطلابُ المتطابقات المثلثية وأثبتوا صحتها.

اطرح السؤال التالي:

- لِمَ تعد المتطابقات المثلثية مفيدة؟ الإجابة النموذجية: توفّر المتطابقات المثلثية طريقةً لتبسيط الدوال المثلثية المعقدة عبر إعادة كتابة التعابير الموجودة ضمن الدوال بصيغٍ مكافئة، ولكنها أكثر ملاءمة.

التركيز على محتوى الرياضيات

تحويل طرفٍ واحدٍ أو الطرفين يمكن إثبات صحة متطابقةٍ بتحويل طرفٍ واحدٍ من المعادلة أو الطرفين في الوقت نفسه. وقد يفضّل بعض الطلاب العمل على طرفٍ واحدٍ فقط في كل مرةٍ لتجنّب الارتباك.

50. الإلكترونيات عند مرور تيارٍ متناوبٍ تردده f وذروته I_0 عبر مقاومة R، فإن القدرة التي تبلغ المقاومة عند الزمن t ثانية تعطى بالعلاقة $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi ft$.

a. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$. $P = I_0{}^2 R(1 - \cos^2 2\pi ft)$

b. اكتب تعبيرًا للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$. $P = \dfrac{I_0{}^2 R}{\csc^2 2\pi ft}$

51. رمي كرة في هذه المسألة، سوف تستكشف مسار الكرة الذي تمثّله المعادلة $h = \dfrac{v_0{}^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث تمثل θ قياس الزاوية بين الأرض ومسار الكرة، وتمثل v_0 سرعتها المبدئية بالأمتار في الثانية، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية. قيمة g تساوي $9.8\ m/s^2$.

a. إذا كانت السرعة البدائية للكرة تساوي 47 مترًا في الثانية، أوجد ارتفاع الكرةعند الزوايا $30°$ و $45°$ و $60°$ و $90°$. قرّب إلىأقرب جزءٍ من عشرة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

b. مثّل المعادلة بيانيًا على حاسبةٍ للتمثيل البياني. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

c. أثبت أن الصيغة $h = \dfrac{v_0{}^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصيغة المعطاة أعلاه. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

52. الفرضيات حدّد المتطابقة التي لا تنتمي إلى المتطابقات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

sin. $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ $:= 2 \sin^2 \theta$ المتطابقات الثلاثة الأخرى متطابقات مثلثية، ولكن هذه ليست كذلك.

53. التحدٍ حوّل الطرف الأيمن من $\tan^2 \theta = \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$ لتثبت أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

$\tan^2 \theta = \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \longrightarrow \tan^2 \theta = \tan^2 \theta \longrightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

54. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا لا يمكنك تربيع كلا طرفي معادلةٍ عندما تثبت صحة متطابقة مثلثية.
لا تنطبق خواصّ المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تجرِ العمليات على الكميات في كلٍ من طرفي متطابقةٍ ليست مثبتة.

55. التبرير اشرح سبب كون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة في حين $\theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست كذلك. **الإجابة النموذجية: مثال مضاد $45°$، $30°$**

56. كتابة سؤال يعاني أحد الزملاء في الصف من صعوبةٍ أثناء محاولة إثبات صحة متطابقةٍ مثلثيةٍ تتضمن العديد من النسب المثلثية لزوايا لها درجات متعددة. اكتب معادلةً لمساعدته في حلّ المسألة.
الإجابة النموذجية: هل حاولت استخدام المتطابقة الأكثر شيوعًا $\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma = 1$ – للتبسيط؟

57. الكتابة في الرياضيات لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالبًا بدلالة الـ Sine وقانون الـ Cosine؟ **انظر الهامش**

58. التحدٍ لتكن $x = \frac{1}{2} \tan \theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. اكتب $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$ بدلالة دالة مثلثيةواحدة لـ θ. $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$

59. التبرير برّر المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

إجابة إضافية

57. الإجابة النموذجية: الـ sine والـ cosine هما الدالتان المثلثيتان اللتان يعلمهما معظم الأشخاص. ويمكن كتابة جميع التعابير المثلثية بدلالة sine و cosine. كذلك فإنه بإعادة كتابة التعابير المثلثية المعقدة بدلالة sine و cosine ، فقد يكون من الأسهل إجراء العمليات وتطبيق الخصائص المثلثية.

716 | الدرس 12-2 | إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدريب على الاختبار المعياري

60. SAT/ACT يضطر صاحب إحدى الشركات الصغيرة إلى توظيف عمّال موسميين حينما تقتضي الحاجة ذلك. توضح القائمة التالية عدد العاملين الذين تم توظيفهم شهريًا على مدى 5 أشهر.

5, 14, 6, 8, 12

إذا كان متوسط هذه البيانات يساوي 9، فما هو الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي لهذه البيانات؟ (قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة) **A**

A 3.5 D 8.6
B 3.9 E 12.3
C 5.7

61. أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x-4)^2+y^2-16=0$. **H**

F $C(-4, 0);\ r = 4$ وحدات
G $C(-4, 0);\ r = 16$ وحدة
H $C(4, 0);\ r = 4$ وحدات
J $C(4, 0);\ r = 16$ وحدة

62. الهندسة يساوي محيط مثلث قائم الزاوية 36 سنتيمترًا. فإذا علمت أن طول الساق الأطول ناقصًا منه ضعف طول الساق الأقصر يساوي 6 سنتيمترات، فما أطوال أضلاع المثلث الثلاثة جميعها؟ **C**

A 3 cm., 4 cm., 5 cm.
B 6 cm., 8 cm., 10 cm.
C 9 cm., 12 cm., 15 cm.
D 12 cm., 16 cm., 20 cm.

63. بسّط $128^{\frac{1}{4}}$. **G**

F $2\sqrt[4]{2}$
G $2\sqrt[4]{8}$
H 4
J $4\sqrt[4]{2}$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 1-12)

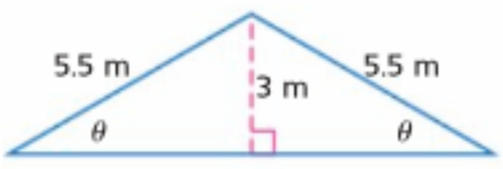
64. $\tan\theta$، إذا كان $\cot\theta = 2$؛ $0° \le \theta < 90°$ $\frac{1}{2}$

65. $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$؛ $0° \le \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

66. $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$؛ $90° < \theta < 180°$ $\frac{5}{4}$

67. $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$؛ $270° < \theta < 360°$ $\frac{3}{5}$

68. الهندسة المعمارية للدعامة الخاصة بسقفٍ شكل مثلثين قائمين كما هو موضح في الشكل على الجهة اليسرى. أوجد θ. **30°**



69. وجبات سريعة يعرض الجدول التوزيع الاحتمالي لوجبات التوفير التي طلبت في أحد المطاعم أيّام الأحد صباحًا. استخدم المعلومات لتحديد قيمة توقع الوجبات المطلوبة. **AED 4**

وجبات التوفير المطلوبة

الوجبات	AED 3	AED 4	AED 5	AED 6
الاحتمال	0.5	0.2	0.1	0.2

أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب لقطع الزائد له المعادلة المعطاة. ثمّ مثّل القطع بيانيًا. 70–72. انظر الهامش.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

71. $\frac{(y+6)^2}{20} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

72. $x^2 - 36y^2 = 36$

مراجعة المهارات

بسّـــط.

73. $\frac{2+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$ $\frac{12+7\sqrt{2}}{23}$

74. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

75. $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ $\sqrt{x}+1$

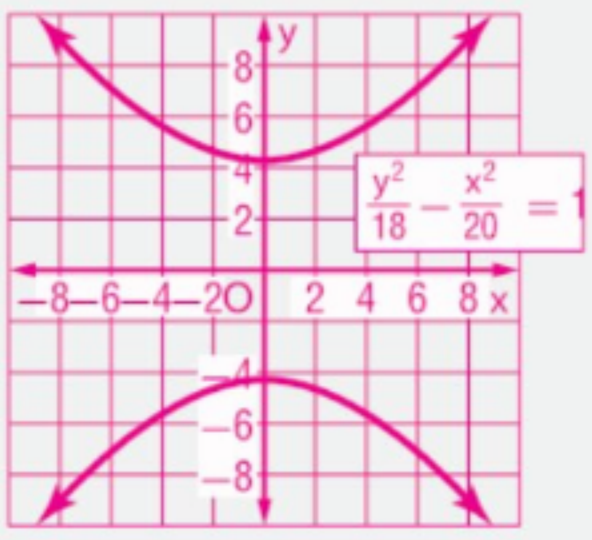
76. $\frac{-2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

4 التقويم

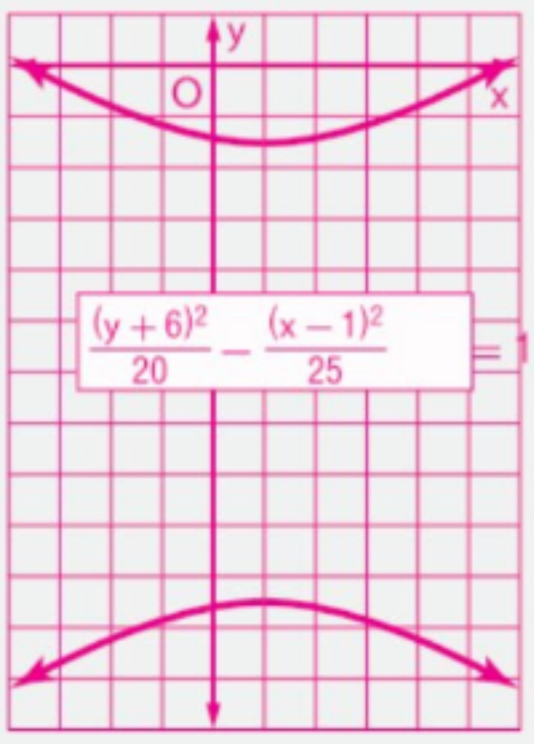
حصاد الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا كيف أن تعلم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس 1-12 قد ساعدهم في إثبات صحة متطابقاتٍ أكثر تعقيدًا في درس اليوم.

إجابات إضافية

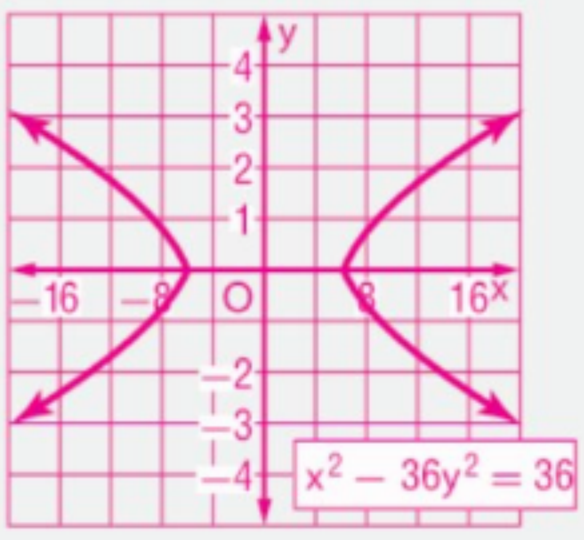
70. $(0, \pm3\sqrt{2})$; $(0, \pm\sqrt{38})$;
$y = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}x$



71. $(1, -6 \pm 2\sqrt{5})$; $(1, -6 \pm 3\sqrt{5})$;
$y + 6 = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-1)$



72. $(\pm6, 0)$; $(\pm\sqrt{37}, 0)$; $y = \pm\frac{1}{6}x$

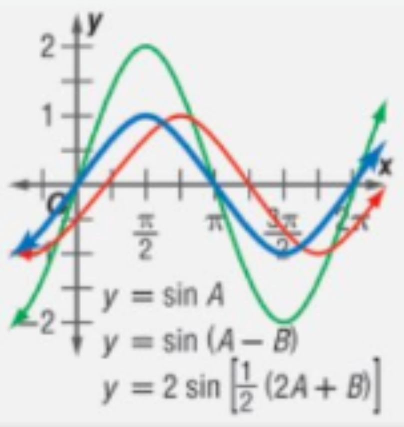


التدريس المتمايز BL

التوسّع إن $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة، ما يعني أنها لا تكون صحيحةً مع جميع القيم الحقيقية لـــ x. أوجد قيم x التي تجعل المعادلة صحيحة. $0° + k \cdot 360°$ أو $90° + k \cdot 360°$، حيث k هو أي عددٍ صحيح.

الدرس 12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

السابق	الحالي	لماذا؟
• أوجدتَ قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.	**1** إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق. **2** إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق.	• هل سبق أن استخدمت مزودًا لاسلكيًا لشبكة الإنترنت وفقدت الإشارة مؤقتًا؟ يسبّب مرور أمواجٍ في مكانٍ واحدٍ وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجةٍ سعتها أكبر أو أصغر من أي من الموجتين المركّبتين لها.



ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات المجموع والفرق

لاحظ أن المعادلة الثالثة المبيّنة أعلاه تتضمن مجموع A و B. من المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لــ $\sin 15°$ عبر إيجاد قيمة $\sin (60° - 45°)$. توجد صيغٌ يمكن استخدامها لإيجاد قيم تعابير مثل $\sin (A - B)$ أو $\cos (A + B)$.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	• $\tan (A - B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية المجهولة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin 105°$

استخدم المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$\sin 105° = \sin (60° + 45°)$ — $A = 60°$ و $B = 45°$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — أوجد قيمة كل تعبير.

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — اضرب.

b. $\cos (-120°)$

استخدم المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$\cos (-120) = \cos (60° - 180°)$ — $A = 60°$ و $B = 180°$

$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$ — متطابقة الفرق

$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$ — أوجد قيمة كل تعبير.

$= -\frac{1}{2}$ — اضرب.

تمرين موجّه

1A. $\sin 15°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

1B. $\cos (-15°)$ $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 12-3 إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا العامة.

الدرس 12-3 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما. إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما.

بعد الدرس 12-3 استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

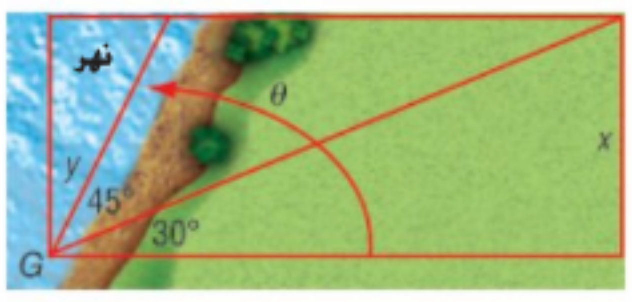
- في أي مكانٍ آخر سمعت عن مصطلح *الاستقراء*؟ الإجابة النموذجية: على التلفاز والمذياع
- ما وجه مقارنة سعة الموجة المتضامّة في ذروتها بسعة الموجتين البدائيتين؟ سعة الموجة المتضامّة هو مجموع سعتي الموجتين البدائيتين.

(يُتبَع في الصفحة التالية)

يمكنك استخدام متطابقات مجموع الزوايا وفرقها لحلّ تطبيقاتٍ من الحياة اليومية.

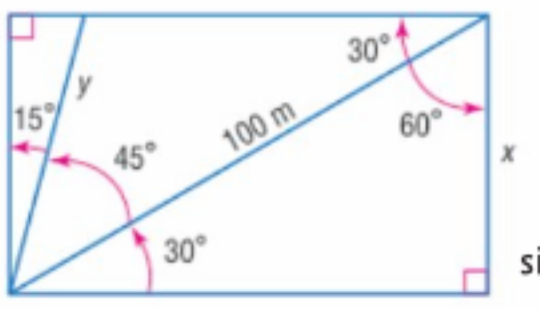
مثال 2 من الحياة اليومية متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تقيس عالمة جيولوجيا الزاوية بين ضلعٍ في قطعة أرضٍ مستطيلة الشكل وبين المستقيم الممتدّ من موضعها إلى الزاوية المقابلة في قطعة الأرضِ تلك، لتجد أنها تساوي °30. ثمّ تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الذي يصل بالنقطة التي يمر بها النهر على ذلك العقار، لتجد أنها تساوي °45. تقف العالمة على بعد 100 مترٍ من الزاوية المقابلة للعقار. فكم تبعد عن نقطة مرور النهر بالعقار؟



الفهم تطلب المسألة إيجاد المسافة بين عالمة الجيولوجيا ونقطة مرور النهر بخط العقار، أي y.

التخطيط ارسم صورةً توضح المعطيات التي تعرفها من خلال المعلومات المعطاة.



الحل حُلّ لإيجاد x.

$$\sin 30° = \frac{x}{100} \qquad \text{تعريف sine}$$

$$x = 100 \sin 30°$$

$$x = 50 \qquad \text{بما أن قطعة الأرض مستطيلة، فكل ضلعين متقابلين متساويان.}$$

انظر الآن إلى المثلث في أقصى الجهة اليسرى وحُلّ لإيجاد y.

$$\cos 15° = \frac{50}{y} \qquad \text{تعريف cosine}$$

$$\cos (45° - 30°) = \frac{50}{y} \qquad 15 = 45 - 30$$

$$\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{50}{y} \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{y} \qquad \text{أوجد القيمة.}$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{50}{y} \qquad \text{بسّط.}$$

$$\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)y = 200 \qquad \text{الضرب التقاطعي}$$

$$y = \frac{200}{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$$

$$y = 50\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

$$y = 50\sqrt{6} - 50\sqrt{2} = 51.8 \text{ تقريبًا}$$

تبعد عالمة الجيولوجيا حوالي 51.8 مترًا عن نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

التحقق استخدم حاسبةً لإيجاد معكوس Cosine تمام $15° \approx \frac{50}{51.8}$. ✓

تمرين موجّه

2. يمكن وصف الحركة التوافقية لجسمٍ ما بالعلاقة $x = 4 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$، حيث تمثل x البعد عن نقطة التوازن بالسنتيمتر وتمثل t الزمن بالدقائق. أوجد المسافة الدقيقة عن نقطة التوازن بعد 45 ثانية. $2\sqrt{2}$ سنتيمترًا إلى الأسفل

نصيحة في حل المسائل

تشكيل نموذج شكّل نموذجًا لتصوير حالات المسائل. ويمكن أن يكون النموذج رسمًا أو شكلًا معدا من أجسام مختلفة، كالقطع الجبرية أو المطويات الورقية.

- لماذا تقطع الموجة المتضامّة المحور الأفقي x في نقطةٍ لا تقطع فيها الموجتان البدائيتان المحور؟ الموجة المتضامّة هي مجموع الزاويتين الأخريين. وهي تقطع المحور الأفقي x عند نقطتين، حيث تقع إحدى الموجتين البدائيتين فوق المحور الأفقي x والموجة الأخرى تبعد المسافة نفسها تحت المحور الأفقي x.

1 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

يوضح **المثال 1** كيفية استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإيجاد القيم الدقيقة للتعابير المثلثية.

ويبيّن **المثال 2** كيفية استخدام متطابقة الفرق لحل مسألةٍ من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b. $\cos (-75°)$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 **المسافة** راجع المثال 2. إذا كان z يمثل المسافة بين الزاوية العلوية اليسرى للمنشأة وبين النقطة التي يقطع عندها النهر الحدّ العلوي، فإن $\tan 15° = \frac{z}{50}$ أو $\tan (45° - 30°) = \frac{z}{50}$. استخدم متطابقة $\tan (A - B)$ لإيجاد قيمةٍ دقيقةٍ لـــ z.

$z = \frac{50\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$ والتي يمكن تبسيطها إلى. $z = 100 - 50\sqrt{3}$

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب تحديد الأنماط وحالات التشابه والفروق في متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما. ثم اطلب من الطلاب كتابة جملٍ قصيرةٍ يصفون فيها ما قاموا بتحديده.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يمكنك أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات.

نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي اصنع قائمة بالقيم المثلثية للزوايا التي يتراوح قياسها بين $0°$ و $360°$ والتي يسهل فيها استخدام متطابقات المجموع والفرق. استخدم قائمتك بمثابة مرجع.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

a. $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin \theta$ المعادلة الأصلية

$\cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$ متطابقة المجموع

$0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$ بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\sin \theta = \sin \theta$ ✓ بسّط.

b. $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$

$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} \cos \theta$ المعادلة الأصلية

$\sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos \theta$ متطابقة المجموع

$\sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos \theta$ بإيجاد قيمة كل تعبير.

$\cos \theta = \cos \theta$ ✓ بسط.

تمرين موجّه

3A. $\sin (90° - \theta) = \cos \theta$

3B. $\cos (90° + \theta) = -\sin \theta$

$3A.\ \sin(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos \theta;$
$\sin 90° \cos \theta - \cos 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta;$
$1 \cos \theta - 0 \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta;$
$\cos \theta = \cos \theta$
$3B.\ \cos(90° + \theta) \stackrel{?}{=} -\sin \theta;$
$\cos 90° \cos \theta - \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta;$
$0 \cos \theta - 1 \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta;$
$-\sin \theta = -\sin \theta$

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

1. $\cos 165°$ $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
2. $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
3. $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
4. $\sin (-30°)$ $-\frac{1}{2}$
5. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin (-210°)$ $\frac{1}{2}$

مثال 2

7. **تمثيل النماذج** عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البنّاء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجةً سعتها أكبر من سعة أي من الموجتين المركّبتين لها. ويحدث التداخل الهدّام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا موجةً لها سعة أصغر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20 \sin (3\theta + 45°)$، بينما يمكن تمثيل الإشارة الثانية بالمعادلة $y = 20 \sin (3\theta + 225°)$.

a. أوجد مجموع الدالتين. 0

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثّلتان بالمعادلتين؟
التداخل هدّام، حيث تلغي كل إشارةٍ الأخرى تمامًا.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:** 8, 11 انظر الهامش.

8. $\sin (90° + \theta) = \cos \theta$
9. $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$
10. $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$
11. $\sin (\theta + \pi) = -\sin \theta$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر بعض الطلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة تطبيق المجموع والفرق لصيغ الزوايا.

2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يوضح **المثال 3** كيفية استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يحلّل الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. فشجّع الطلاب على التعرّف على قياسات الزوايا التي يمكن تطبيق المتطابقات عليها بسهولة.

تمثيل النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

مثال إضافي

3 أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:

a. $\cos (360° - \theta) = \cos \theta$

$\cos (360° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos 360° \cos \theta + \sin 360° \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta = \cos \theta$ ✓

b. $\cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$

$\cos (\pi - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$\cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-\cos \theta = -\cos \theta$ ✓

إجابات إضافية

8.

$\sin (90° + \theta) \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\sin 90° \cos \theta + \cos 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta = \cos \theta$ ✓

9.

$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$\cos \frac{3\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$0 \cdot \cos \theta - 1 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$-\sin \theta = -\sin \theta$ ✓

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.**

12. $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **13.** $\cos 135°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **14.** $\cos \frac{7\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

15. $\sin \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **16.** $\tan 195°$ $2-\sqrt{3}$ **17.** $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

مثال 2

18. **الإلكترونيات** في دارةٍ يمرّ بها تيارٌ متناوب، يمكن استخدام الصيغة $c = 2\,sin\,(120t)$ لإيجاد شدة التيار c بالأمبير بعد مرور t ثانية.

a. أعد كتابة الصيغة باستخدام مجموع زاويتين. **الإجابة النموذجية:** $c = 2\sin(90t + 30t)$

b. استخدم صيغة مجموع الزاويتين لإيجاد الشدة الدقيقة للتيار عند $t = 1$ ثانية. $\sqrt{3}$ أمبير

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:** 19–22. انظر الهامش.

19. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ **20.** $\cos(60° + \theta) = \sin(30° - \theta)$

21. $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$ **22.** $\tan(\theta + 45°) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

B **23.** **التبرير** يمكن تمثيل درجات الحرارة العظمى في مدينة مينيابوليس بولاية مينيسوتا بالمعادلة $y = 31.65\,sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث تمثّل الأشهر x بأعدادٍ متسلسلة على النحو التالي: يناير = 1، فبراير = 2، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة الصغرى في مدينة مينيابوليس بالمعادلة $y = 30.15\,sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$.

a. اكتب متباينةً جديدةً عبر جمع التعابير على الجهة اليسرى في كل معادلة وقسمة الناتج على 2. $y = 30.9\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 42.65$

b. ما معنى الدالة التي كتبتها في الجزء **a**؟ تمثل الدالة الجديدة متوسط درجات الحرارة العظمى والصغرى لكل شهر.

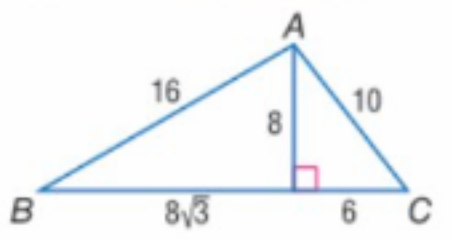
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

24. $\tan 165°$ $-2+\sqrt{3}$ **25.** $\sec 1275°$ $\sqrt{2}-\sqrt{6}$ **26.** $\sin 735°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

27. $\tan \frac{23\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$ **28.** $\csc \frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ **29.** $\cot \frac{113\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

30. **القوة** في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى، تعطى القوة F اللازمة لتثبيت خزنة في موضعها على منحدرٍ بالعلاقة التالية $F = \frac{W(\sin A + \mu\cos A)}{\cos A - \mu\sin A}$. حيث W هو وزن الخزنة و $\mu = \tan\theta$. أثبت أن $F = W\tan(A + \theta)$. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

31 **خياطة اللحاف** كجزءٍ من خياطة لحاف، يضع الخيّاط حاملين كلٌ منهما على شكل مثلث قائم معًا لتشكيل قطعة مثلثة جديدة. أطوال أضلاع أحد الحاملين هي 6 سنتيمترات و 8 سنتيمترات و 10 سنتيمترات. ويضم الحامل الثاني أضلاعًا أطوالها 8 سنتيمترات و $8\sqrt{3}$ سنتيمترات و 16 سنتيمترًا. يوضع الحاملان بحيث يتقابل الضلعان اللذان طول كل منهما ثمانية سنتيمترات، كما هو موضح في الشكل ليتشكّل المثلث ABC.



a. ما القيمة الدقيقة لـ sine الخاص بالزاوية BAC؟ $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

b. ما القيمة الدقيقة لـ cosine الخاص بالزاوية BAC؟ $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

c. ما قياس الزاوية BAC؟ 96.9°

d. هل المثلث المتشكل من المثلثين قائم أيضًا؟ لا

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12-22, 38. 39, 41-57	13215 فردي, 43-46	12-22 زوجي, 38, 39, 41, 42, 47-57
OL أساسي	13-29 فردي, 30-33, 35. 37-39, 41-57	12-22, 43-46	23-39, 41, 42, 47-57
BL متقدم	23-54. (اختياري: 55-57)		

إجابات إضافية

10.
$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$
$$\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$
$$\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$
$$\frac{(\sin\theta)\cdot 0 + (\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0 - (\sin\theta)\cdot 1} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$
$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$
$$-\cot\theta = -\cot\theta \checkmark$$

11.
$$\sin(\theta + \pi) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$(\sin\theta)(-1) + (\cos\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$-\sin\theta = -\sin\theta \checkmark$$

19.
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$(0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$-\sin\theta = -\sin\theta \checkmark$$

20.
$$\cos(60° + \theta) \stackrel{?}{=} \sin(30° - \theta)$$
$$\cos 60°\cos\theta - \sin 60°\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 30°\cos\theta - \cos 30°\sin\theta$$
$$\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \checkmark$$

21.
$$\cos(180° + \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$\cos 180°\cos\theta - \sin 180°\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-1\cdot\cos\theta - 0\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

22.
$$\tan(\theta + 45°) \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$
$$\frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$
$$\frac{\tan\theta + 1}{1 - (\tan\theta)(1)} \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$
$$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \checkmark$$

39. الإجابة النموذجية: لتحديد تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية، عليك تحديد Sine أو Cosine مجموع زاويتين أو فرقهما. ويحدثالتداخل حين تمرّ الأمواج في الفراغ نفسه وفي الوقت نفسه. عندما تكون الموجة المتراكبة أكبر سعةً من الأمواج الجزئية، ينتج التداخل البنّاء. وعندما يكون للموجة المتراكبة سعةٌ أصغر، ينتج التداخل الهدّام.

C **.32 البصريات** عندما يمرّ الضوء بصورةٍ متماثلةٍ عبر منشور، فإن معامل انكسار الزجاج n بالنسبة للهواء يساوي $n = \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin \frac{b}{2}}$، حيث تمثل a قياس زاوية الانحراف، وتمثل b قياس الزاوية الرأسية للمنشور.

a. أثبت في المنشور الموضح أن: $n = \sqrt{3}\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$. **انظر الهامش.**

b. أوجد قيمة n في المنشور الموضح. $\sqrt{3}$

.33 التمثيلات المتعددة عليك أن تنفي في هذه المسألة الفرضية القائلة إن $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

b, c. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

a. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
60°	45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b. **بيانيًا** افترض أن B أقل دائمًا بمقدار 15° من A. استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل $y = \sin(x + x - 15)$ و $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c. **تحليليًا** حدّد ما إذا كانت $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$ متطابقة. واشرح استنتاجك.

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. 37–34. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

34. $\sin(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35. $\cos(A + B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36. $\sec(A - B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37. $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

.24 الإجابة النموذجية: $A = 35°, B = 60°, C = 85°; 0.7002 + 1.7321 + 11.4301 \stackrel{?}{=} (0.7002)(1.7321)(11.4301); 13.86 = 13.86$ ✓

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

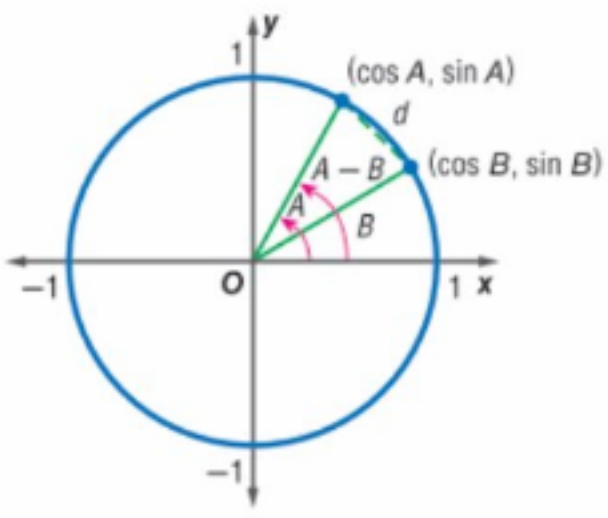
.38 الاستنتاج بسّط التعبير التالي دون تفكيك أي من المجاميع أو الفروق. $\sin(-2\theta)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

.39 الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام متطابقات المجموع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. أضف شرحًا للفرق بين التداخل البنّاء والهدّام.

.40 التحدِّ اشتقّ متطابقةً لـــ $\cot(A + B)$ بدلالة cot A و cot B. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

.41 الفرضيات يعرض الشكل زاويتين A و B في موضعيهما القياسيين على الدائرة الواحدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ و $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



.42 مسألة غير محددة الإجابة تأمل النظرية التالية. إذا كانت A و B و C زوايا مثلثٍ مائل، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لـــ A و B و C. وتحقق من أن الاستنتاج صحيح من أجل قيمك المحددة.

التمثيلات المتعددة
يستخدم الطلاب في التمرين 33 معلوماتٍ منظمةً في جدولٍ وحاسبة تمثيل بياني لنفي فرضيةٍ حول العمليات المثلثية.

722 | الدرس 12-3 | متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

تدريب على الاختبار المعياري

43. **الإجابة الشبكية** يساوي متوسط سبعة أعداد 0. ويساوي مجموع ثلاثة من هذه الأعداد -9. فما مجموع بقية الأعداد؟ **9**

44. المتغيرات a و b و c و d و f و أعداد صحيحة في متتالية فيها $a = 2$ و $b = 12$. لإيجاد الحدّ التالي، ضاعف الحدّ الأخير واجمع ذلك الناتج إلى الحدّ الذي يسبق الحدّ الأخير منقوصًا منه واحد. فعلى سبيل المثال، $c = 25$ لأن $2(12) = 24$ و $2 - 1 = 1$ و $24 + 1 = 25$. ما قيمة f؟ **C**

A 74

B 144

C 146

D 256

45. **SAT/ACT** حلّ $x^2 - 5x < 14$. **H**

F $\{x|-7 < x < 2\}$

G $\{x|x < -7$ أو $x > 2\}$

H $\{x|-2 < x < 7\}$

J $\{x|x < -2$ أو $x > 7\}$

K $\{x|x > -2$ و $x < 7\}$

46. **الاحتمالات** توزّع معلّمةٌ عشوائيًا 15 قلمًا أصفر و 10 أقلام خضراء. فما احتمال أن يكون القلم الأول الذي توزعه أصفر والقلم الثاني أخضر؟ **B**

A $\frac{1}{24}$ C $\frac{2}{5}$

B $\frac{1}{4}$ D $\frac{23}{25}$

مراجعة شاملة

مثال 3 **أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:** (الدرس 12-2) **47, 48. انظر الهامش.**

47. $\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

48. $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

بسّـــط كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

49. $\sin\theta\csc\theta - \cos^2\theta$ $\mathbf{\sin^2\theta}$

50. $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$ $\mathbf{\cot\theta}$

51. $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$ $\mathbf{\sec\theta}$

52. **الجيتار** عند ضرب وتر الجيتار، فإنه يزاح عن نقطةٍ ثابتةٍ في المنتصف ويهتزّ جيئةً وذهابًا ليصدر نغمةً موسيقية. وتعتمد النغمة المحددة على التردد، أو عدد دورات اهتزاز الوتر في الثانية. لإصدار النغمة A، فإن التردد يساوي 440 دورةً في الثانية، أو 440 هرتز (Hz).

a. أوجد دور هذه الدالة. $\frac{1}{440}$ **ثانية**

b. مثّل بيانيًا ارتفاع النقطة الثابتة على الوتر عن موضع سكونها بدلالة الزمن. وافترض أن للمسافة القصوى فوق موضع السكون قيمة 1 وحدة، وافترض أن المسافة الصغرى تحت هذا الموقع تساوي 1 وحدة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

برهِن صحة كلٍ من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة. **53, 54. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

53. $4^n - 1$ مقسومةً على 3.

54. $5^n + 3$ مقسومةً على 4.

مراجعة المهارات

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

55. $7 + \sqrt{4x + 8} = 9$ **−1**

56. $\sqrt{y + 21} - 1 = \sqrt{y + 12}$ **4**

57. $\sqrt{4z + 1} = 3 + \sqrt{4z - 2}$ **لا يوجد حل**

التدريس المتمايز BL OL

التوسّع أخبر الطلاب أن $\sin 20° $ يساوي تقريبًا 0.3420. واطلب منهم استخدام هذه المعلومة لإيجاد $\sin 65°$ و $\cos 65°$. **0.9063, 0.4226**

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب إعداد قائمةٍ تتضمن الزوايا الواقعة بين 0° و 360°، والتي يمكن عندها استخدام صيغ المجموع والفرق بسهولة. ثم اجعلهم يذكروا الجوانب المشتركة بين الزوايا.

إجابات إضافية

32a.
$$\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin\frac{b}{2}}$$
$$= \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+60°)\right]}{\sin\frac{60°}{2}}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{a}{2}+30°\right)}{\sin 30°}$$
$$= \frac{\sin\frac{a}{2}\cos 30° + \cos\frac{a}{2}\sin 30°}{\sin 30°}$$
$$= \frac{\left(\sin\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{3}\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$$

47.
$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$$
$$\sin\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=}$$
$$\cos\theta + \sin\theta$$
$$\cos\theta + \sin\theta = \cos\theta + \sin\theta \checkmark$$

48.
$$\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta = \tan^2\theta \checkmark$$

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 12-1 إلى 12-3 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابة إضافية

5. $\frac{31.5\sqrt{3593.25}}{3593.25}$

الوحدة 12 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 12-1 إلى 12-3

بسّط كل تعبير مما يلي. (الدرس 12-1)

1. $\cot\theta\sec\theta$ **$\csc\theta$**
2. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**
3. $\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ **$\cos\theta$**
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$ **1**

5. **التاريخ** في عام 1971، تم اعتماد علم الإمارات العربية المتحدة. وفي هذا العلم، $\tan\theta=\frac{31.5}{51}$. أوجد قيمة $\sin\theta$. **انظر الهامش.**

أوجد قيمة كل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-1)

6. $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta=\frac{3}{5}$; $0°<\theta<90°$ **$\frac{4}{5}$**
7. $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta=\frac{1}{2}$; $270°<\theta<360°$ **$-\frac{\sqrt{5}}{2}$**
8. $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta=\frac{4}{3}$; $0°<\theta<90°$ **$\frac{\sqrt{7}}{3}$**

9. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يكافئ $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 12-1) **D**

A $\cos\theta$

B $\csc\theta$

C $\tan\theta$

D $\sec\theta$

10. **مدن الملاهي** افترض أن طفلاً يجلس على الحصان الخارجي في دوامة الخيول. ويبلغ قطر دوامة الخيول 16 مترًا. وتُعطى زاوية ميلها بالمعادلة $\tan\theta=\frac{v^2}{gR}$، حيث R هو نصف قطر المسار الدائري و v هي السرعة بالمتر في الثانية و g تساوي 9.8 أمتار في الثانية المربعة. (الدرس 12-1)
    a. إذا كان Sine زاوية ميل الطفل يساوي $\frac{1}{5}$، فما زاوية الميل التي يصنعها الطفل؟ **حوالي 11.5°**
    b. ما السرعة المتجهة لدوامة الخيول؟ **حوالي 4 m/s**
    c. إذا كانت سرعة دوامة الخيول 3.6 أمتار في الثانية، فما قيمة زاوية ميل الراكب؟ **حوالي 9.4°**

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

11. $\cot^2\theta+1=\frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$
12. $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta}=1$
13. $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=(1+\cos\theta)\sec\theta$
14. $\tan\theta(1-\sin\theta)=\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

11–14. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

15. **الحاسوب** يُقاس الوجه الأمامي لشاشة الحاسوب عادةً بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 12-2)

a. أوجد قيمة h. **18**

b. استعن بالرسم التخطيطي الموضح لإثبات أن $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

16. $\tan^2\theta+1=\frac{\tan\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$
17. $\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta}{\sec\theta-1}=(\sec\theta+1)\cot\theta$
18. $\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta=\tan^2\theta-\sin^2\theta$
19. $\cot\theta(1-\cos\theta)=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}$

16–19. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 12-3)

20. $\cos 105°$ **$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$**
21. $\sin(-135°)$ **$\frac{-\sqrt{2}}{2}$**
22. $\tan 15°$ **$2-\sqrt{3}$**
23. $\cot 75°$ **$2-\sqrt{3}$**

24. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 12-3) **H**

F $\sqrt{2}$

G $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

H $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

J $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25. أثبت أن $\cos 30°\cos\theta+\sin 30°\sin\theta=\sin 60°\cos\theta+\cos 60°\sin\theta$ عبارة عن متطابقة. (الدرس 12-3) **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

الدرس 12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

.. السابق

- أوجدت قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

.. الحالي

1 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات ضعف الزاوية..

2 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات نصف الزوايا.

.. لماذا؟

- تضمّ نافورة باكنغهام في شيكاغو أنابيب نفّاثة موضوعة عند زوايا محددة لقذف الماء في الهواء وتشكيل أقواس. عند قذف تيارٍ من الماء في الهواء بسرعة متجهة v وزاوية θ مع المحور الأفقي، يتوقع النموذج أن الماء سيقطع مسافة أفقية تساوي $D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ ويبلغ ارتفاعًا أقصى يساوي $H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$. تساعد نسبة H إلى D على تحديد ارتفاع النافورة وعرضها الكليين. عبّر عن $\frac{H}{D}$ في صورة دالة للزاوية θ.

مارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 متطابقات ضعف الزاوية

من المفيد أحيانًا الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة دالة لضعف زاويةٍ أو نصفها.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال 1 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

الخطوة 1 استخدم المتطابقة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ لإيجاد قيمة $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — اطرح.

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الأول، فإن cosine موجب. لذلك، $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2 أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — متطابقة الزاوية المزدوجة

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب.

تمرين موجّه

1. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

725

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-4 إيجاد قيمتي sine و cosine باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

الدرس 12-4 إيجاد قيمتي sine و cosine عن طريق استخدام متطابقات الزاوية المزدوجة. وإيجاد قيمتي sine وcosine باستخدام متطابقات نصف الزاوية.

بعد الدرس 12-4 إيجاد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ و $\sin^2\theta$؟ اشرح. $\sin 2\theta$ يمثل sine الزاوية التي تساوي ضعف θ؛ $\sin^2\theta$ تمثل مربع قيمة $\sin\theta$.
- هل سيتضمن تعبير $\frac{H}{D}$ في صورة دالة لـ θ المتغير v؟ لا. فعند التبسيط، يكون $\frac{v^2}{v^2} = 1$
- هل سيتضمن g؟ اشرح. لا. $\frac{1}{2g} \div \frac{1}{g}$ يساوي $\frac{1}{2}$. إذًا فإنه لن يحتوي المتغير g.

مثال 2 متطابقات ضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين $0°$ و $90°$.

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\cos\theta$ و $\sin\theta$، فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد cosine. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b. $\tan 2\theta$

الخطوة 1 أوجد $\tan\theta$ لاستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{تعريف الـ tan}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \sin\theta = \frac{2}{3} \text{ و } \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{إنطاق المقام.}$$

الخطوة 2 أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}} \quad \text{تربيع المقام.}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \text{بسّط.}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تمرين موجّه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ و $90° < \theta < 180°$.

2A. $\cos 2\theta$ $-\frac{7}{9}$ **2B.** $\tan 2\theta$ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

نصيحة دراسية

اشتقاق الصيغ يمكنك استخدام متطابقة $\sin(A+B)$ لإيجاد Sine ضعف زاوية θ و $\sin 2\theta$. ومتطابقة $\cos(A+B)$ لإيجاد cosine لضعف زاوية θ و $\cos 2\theta$.

مهنة من الحياة اليومية

الكهربائي يختصّ الكهربائي في توصيل الأجزاء الكهربائية. ويخضع الكهربائيون لتدريبٍ يدوم مدة 3-5 سنوات. وهم بحاجةٍ إلى تعلّم المبادئ النظرية للكهرباء وأكواد البناء. كما أن نيل الشهادة يتطلب خبرةً عمليةً واجتياز اختبارٍ كتابي.

2 متطابقات نصف الزاوية

من المفيد أحياناً الاعتماد على متطابقاتٍ لإيجاد قيمة نسبة نصف زاوية.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات التالية صحيحة لكل قيم θ.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

1 متطابقات ضعف الزاوية

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لتعبيرٍ باستخدام متطابقات ضعف الزاوية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{4}$ وإذا كانت الزاوية θ تقع بين $0°$ و $90°$. -0.125

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ إذا كان $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع بين $90°$ و $0°$.

a. $\tan 2\theta$ $\frac{24}{7}$

b. $\sin 2\theta$ $\frac{24}{25}$

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي ذكّر الطلاب بالمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ وصيغتيها المختلفتين اللتين تتشكلان عبر طرح $\sin^2\theta$ أو $\cos^2\theta$ من الطرفين. واشرح أن هناك ثلاث صور لصيغة $\cos 2\theta$ نتيجةً للصور الثلاث للمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

2 متطابقات نصف الزاوية

يبيّن **المثال 3** كيفية استخدام متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة لدالةٍ مثلثيةٍ لزاويةٍ في الربع المعطى. ويوضح **المثال 4** كيفية تبسيط معادلةٍ تضم تعابير مثلثية. ويبيّن **المثال 5** كيفية إثبات المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات أضعاف الزوايا.

مثال إضافي

3 **a.** أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع في الربع الثاني. $\sqrt{\frac{1}{10}}$ أو $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 165°$. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

انتبه!

تجنّب الأخطاء أكّد على "نصيحة للتدريس" في الهامش المجاور للمثال 3. ومن شأن تحديد الإشارة الصحيحة للإجابة في بداية الحساب أن يساعد بعض الطلاب في تلافي نسيان هذه الخطوة في نهاية حساباتهم.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اقسم الصف الدراسي إلى مجموعات، وكلّف كل مجموعةٍ بحل مسألة نصف زاويةٍ أو زاوية مزدوجة. واطلب من المجموعة إعداد تسجيل فيديو يعرض كيفية تطبيق الصيغة المناسبة لحل المسألة. وحاول تكليف الصفّ بأكبر عددٍ ممكنٍ من المسائل.

مثال 3 متطابقات نصف الزاوية

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ و θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — استخدم متطابقة لفيثاغورس لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ — $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$ — أوجد قيمة الأس.

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$ — اطرح.

$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$ — أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ — $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ — بسّط.

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ — إنطاق المقام.

إذا كانت الزاوية θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. فإذًا، $\cos\frac{\theta}{2}$ هو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$ — $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$ — $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $67.5°$ تقع في الربع الأول؛ إذًا القيمة موجبة.

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — اطرح الكسور.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ — $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ — اضرب.

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ — $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — بسّط.

تمرين موجّه

3. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

نصيحة دراسية

اختيار العلامة قد تحتاج في الخطوة الأولى للحل إلى تحديد الربع الذي سيقع فيه ضلع الانتهاء لـ $\frac{\theta}{2}$. وبعدها يمكنك استخدام العلامة الصحيحة بدءًا من ذلك فصاعدًا.

قراءة في الرياضيات

زائد أم ناقص تقرأ العلامة الأولى لمتطابقة نصف الزاوية زائد أو ناقص. وبعكس متطابقات الزوايا المضاعفة، فيجب عليك تحديد العلامة.

التركيز على محتوى الرياضيات

اشتقاق الصيغ صيغ ضعف الزاوية حالاتٌ خاصةٌ لصيغ مجموع زاويتين، والتي درسناها في الدرس السابق. ويتم الحصول على صيغ ضعف الزاوية عبر مساواة A و B في صيغ مجموع زاويتين.

مثال 4 من الحياة اليومية التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

النافورة راجع بداية الدرس. أوجد $\frac{H}{D}$.

$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$	المعادلة الأصلية
$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$	بسّط البسط والمقام.
$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$	بسّط.
$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	بسّط.
$= \frac{1}{4}\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4B. $\cos\frac{7\pi}{8}$ $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

الربط بالحياة اليومية

نافورة حديقة سيتي هول بارك في نيويورك تقع في قلب مانهاتن أمام دار البلدية.

المصدر: Fodor's

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضًا استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها لإثبات المتطابقات.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$.

$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$	المتطابقة الأصلية
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب البسط والمقام في $\sin\theta$.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$	اضرب الطرف الأيمن في 1.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$	اضرب.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$	بسّط.
$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ ✓	$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$; $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

تمرين موجّه

5. أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$. **انظر الهامش.**

أمثلة إضافية

4 **النافورة** راجع بداية الدرس. وأوجد قيمة $\frac{D}{H}$. $\frac{4}{\tan\theta}$ أو $4\cot\theta$

5 أثبت أن $\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) = \sin^3\theta$ متطابقة.

$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta[\cos^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta(\sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin^3\theta = \sin^3\theta$ ✓

المتابعة

استكشف الطلاب المتطابقات والمعادلات المثلثية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تقرّر ما التقنيات التي يتعيّن عليك استخدامها عند إثبات صحة متطابقةٍ مثلثية؟ الإجابة النموذجية: إن أمكن، بسّط الطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة عبر تعويض المتطابقات المثلثية الأساسية فيه. وعند التعامل مع متطابقةٍ أكثر تعقيدًا، فإنه يمكنك حل كل طرف على حدةٍ للحصول على تعبيرٍ مشترك.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

5. $4\cos^2 x - \sin^2 2x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x(1 - \sin^2 x) \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^4 x = 4\cos^4 x$ ✓

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالنمط السمعي/الموسيقي إن كان ممكنًا، فاطلب من معلّم موسيقى في مدرستك التحدث إلى الطلاب عن الأصوات الموسيقية التوافقية. وقد يرغب أيضًا الطلاب الذين يعزفون على آلاتٍ موسيقيةٍ ذات أوتار في مشاركة بعض ما قد تعلّموه عن الأصوات التوافقية والموجات الموسيقية. فإذا لم يكن هناك معلّم موسيقى متاح، فربما يكون بمقدور معلّم الفيزياء توضيح الأصوات التوافقية أو إحضار آلةٍ تولّد أمواجًا مستقرّة داخل حجرة الصف.

728 | الدرس 12-4 | متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابات إضافية

10. $\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$ ✓

11. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 1+2\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta) \stackrel{?}{=} 1+2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1+2\sin\theta\cos\theta$

$1+2\sin\theta\cos\theta = 1+2\sin\theta\cos\theta$ ✓

24a. $\dfrac{1\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos L}{1+\cos L}}}{1\mp\sqrt{\dfrac{1-\cos L}{1+\cos L}}}$

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **الدقة** أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

1. $\sin\theta=\frac{1}{4};\ 0°<\theta<90°$ — $\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$
2. $\sin\theta=\frac{4}{5};\ 90°<\theta<180°$ — $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{2\sqrt5}{5}, \frac{\sqrt5}{5}$
3. $\cos\theta=-\frac{5}{13};\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ — $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}$
4. $\cos\theta=\frac{3}{5};\ 270°<\theta<360°$ — $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{\sqrt5}{5}, -\frac{2\sqrt5}{5}$
5. $\tan\theta=-\frac{8}{15};\ 90°<\theta<180°$ — $-\frac{240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$
6. $\tan\theta=\frac{5}{12};\ \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ — $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

7. $\sin\frac{\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

8. $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$

مثال 4

9. **كرة القدم** يركل لاعب كرةً بزاوية قياسها $37°$ مع الأرض وسرعة متجهة أولية قيمتها 16 مترًا في الثانية. تُعطى المسافة d التي تقطعها الكرة في الهواء دون أن يعترضها أي عائق بالمعادلة $d=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$. في هذه الصيغة، g هي التسارع بفعل الجاذبية الأرضية ويساوي 10 أمتار في الثانية المربعة، و v هي السرعة المتجهة الأولية.

a. بسّط هذه الصيغة باستخدام متطابقة زاوية مضاعفة. $d=\frac{v^2\sin 2\theta}{g}$

b. باستخدام الصيغة المبسطة. ما المسافة التي ستقطعها هذه الكرة؟ ≈ 24 m

مثال 5 أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي: **10, 11. انظر الهامش.**

10. $\tan\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

11. $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

التدريب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

12. $\sin\theta=\frac{2}{3};\ 90°<\theta<180°$ — $-\frac{4\sqrt5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt6\cdot\sqrt{3+\sqrt5}}{6}, \frac{\sqrt6\cdot\sqrt{3-\sqrt5}}{6}$
13. $\sin\theta=-\frac{15}{17};\ \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ — $\frac{240}{289}, -\frac{161}{189}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$
14. $\cos\theta=\frac{3}{5};\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ — $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{\sqrt5}{5}, \frac{2\sqrt5}{5}$
15. $\cos\theta=\frac{1}{5};\ 270°<\theta<360°$ — $-\frac{4\sqrt6}{25}, -\frac{23}{25}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{15}}{5}$
16. $\tan\theta=\frac{4}{3};\ 180°<\theta<270°$ — $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{2\sqrt5}{5}, -\frac{\sqrt5}{5}$
17. $\tan\theta=-2;\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ — $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}}, \sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

18. $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$
19. $\sin\frac{3\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$
20. $\cos\frac{7\pi}{12}$ $-\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$
21. $\tan 165°$ $\sqrt3-2$
22. $\tan\frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{7+4\sqrt3}$
23. $\tan 22.5°$ $\sqrt{1-2\sqrt2}$

24. **الجغرافيا** إن إسقاط مركاتور للكرة الأرضية هو طريقةٌ للإسقاط تزداد فيها المسافة بين خطوط العرض بزيادة بعدها عن خط الاستواء. ويُحسب موقع نقطةٍ في هذا الإسقاط باستخدام التعبير $\tan\left(45°+\frac{L}{2}\right)$، حيث L هو خط عرض هذه النقطة.

a. اكتب التعبير التالي بدلالة الدالة المثلثية لـ L. **انظر الهامش.**

b. خط عرض مدينة تالاهاسي في فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية هو 30° شمالاً. أوجد قيمة التعبير إذا كانت $L=30°$. $\sqrt3$

729

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12–29, 37, 39–60	13–29 فردي، 43–46	12–28 زوجي، 37, 39–42, 47–60
OL أساسي	13–29 فردي، 30, 31–37 فردي، 39–60	12–29, 43–46	30–37, 39–42, 47–60
BL متقدم	30–57, (اختياري: 58–60)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

نقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم والمنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

مثال 4

25 **الإلكترونيات** تأمل دارة تيار متردد تتألف من منبع للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدارة عند الزمن t تساوي $I_0 \sin t\theta$. إذًا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. حيث R هي قيمة المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$. $P = \frac{1}{2} I_0^2 R - \frac{1}{2} I_0^2 R \cos 2t\theta$

مثال 5

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي: **26–29. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

26. $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

27. $1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta}$

28. $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

29. $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

B 30. **كرة القدم** افترض أن حارس مرمى يركل كرةً بثباتٍ بسرعة متجهة أولية قدرها 30 مترًا في الثانية. أثبت أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما تكون $\theta = 45° + A$ كما هي عندما $\theta = 45° - A$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

31. $\cos \theta = \frac{4}{5};\ 0° < \theta < 90°$ $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

32. $\sin \theta = \frac{1}{3};\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

33. $\tan \theta = -3;\ 90° < \theta < 180°$ $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

34. $\sec \theta = -\frac{4}{3};\ 90° < \theta < 180°$ $-\frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

35. $\csc \theta = -\frac{5}{2};\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ $-\frac{4\sqrt{21}}{25}, \frac{17}{25}, -\frac{4\sqrt{21}}{17}$

36. $\cot \theta = \frac{3}{2};\ 180° < \theta < 270°$ $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

مسائل مهارات التفكير العليا مسائل مهارات التفكير العليا

C 37. **التفكير النقدي** تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر **ملحق إجابات الوحدة 12**

بثينة

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin (45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

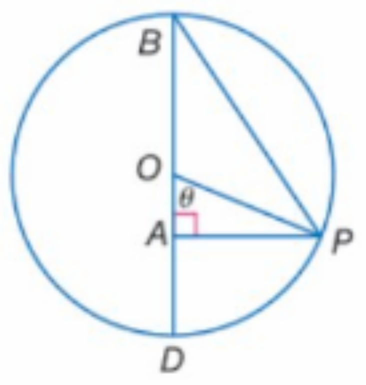
بدرية

$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

$\sin \frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

38. $\angle PBD$ زاوية محاطة تحصر القوس نفسه الذي تحصره الزاوية المركزية $\angle POD$، إذًا $m\angle PBD = \frac{1}{2}\theta$. بموجب حساب المثلثات القائمة، فإن $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1 + OA} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



38. **التحدِ** الدائرة O هي دائرة وحدة. استعن بالشكل لإثبات أن $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.

39. **الكتابة في الرياضيات** اكتب موضوعًا قصيرًا عن الشروط التي يمكنك بموجبها استخدام كلٍ من المتطابقات الثلاث للزاوية $\cos 2\theta$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

40. **البرهان** استخدم صيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة 2θ. واستخدم صيغة $(A + B)$ لاشتقاق صيغة $\cos 2\theta$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

41. **الاستنتاج** اشتقّ متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعفها. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

42. **مسألة غير محددة الإجابة** افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثباتٍ بحيث تغادر القاعدة بسرعة متجهة أولية قدرها 35 مترًا في الثانية وأن $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. اشرح السبب في بلوغ المسافة القصوى عندما تكون $\theta = 45°$. **الإجابة النموذجية: بما أن $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$، فإن d تأخذ قيمتها القصوى عندما يكون $\sin 2\theta = 1$ ؛ أي $2\theta = 90°$ أو $\theta = 45°$.**

730 | الدرس 12-4 | متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

تدريب على الاختبار المعياري

43. الإجابة القصيرة الزاويتان C و D متكاملتان. قياس الزاوية C يساوي سبعة أضعاف قياس الزاوية D. أوجد قياس الزاوية D بالدرجات. **22.5**

44. SAT/ACT لدى الآنسة منى قائمةٌ بالرواتب السنوية للعاملين في دائرتها. فأي مقياسٍ للبيانات يصف قيمة الدخل الوسطى للرواتب؟ **B**

A المتوسط
B الوسيط
C المنوال
D المدى
E الانحراف المعياري

45. حدّد مجال الدالة التالية ومداها: $f(x) = |4x + 1| - 8$. **G**

F $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$, $R = \{y \mid y \geq -8\}$
G $D =$ {كل الأعداد الحقيقية}, $R = \{y \mid y \geq -8\}$
H $D = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$,
$R =$ {كل الأعداد الحقيقية}
J $D =$ {كل الأعداد الحقيقية}،
$R =$ {كل الأعداد الحقيقية}

46. الهندسة يرصّف جمال ممرًا حجريًا حول بركة ماءٍ دائرية. ولديه ما يكفي من الأحجار لعمل ممر يبلغ 144 مترًا طولاً. فإذا استهلك جميع الأحجار لإحاطة البركة، فما نصف قطر البركة؟ **B**

A $\frac{12}{\pi}$ m
B $\frac{72}{\pi}$ m
C 72π m
D 144π m

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 3-12)

47. $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
48. $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
49. $\sin 285°$ $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
50. $\cos(-30°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
51. $\sin(-240°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
52. $\cos(-120°)$ $-\frac{1}{2}$

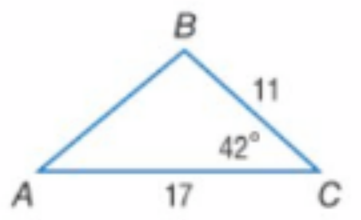
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي: (الدرس 2-12) **53, 54. انظر الهامش.**

53. $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

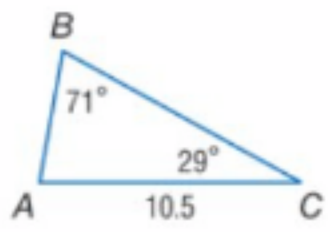
حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر الشروع بقانون *sine* أو قانون *cosine*. ثم حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-12)

55.


sine: $C \approx 44°$ أو $B \approx 102°$ و $b \approx 21.0$ أو $B \approx 10°$، $C \approx 136°$، $b \approx 3.7$

56.


cosine: $A \approx 40°$، $B \approx 98°$، $c \approx 11.5$

57.


sine: $A = 80°$، $a \approx 10.9$، $c \approx 5.4$

مراجعة المهارات

حُـلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

58. $x^2 + 5x - 24 = 0$ $\{-8, 3\}$
59. $x^2 - 3x - 28 = 0$ $\{-4, 7\}$
60. $x^2 - 4x = 21$ $\{-3, 7\}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب كتابة تعبير لـ $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.
الإجابة النموذجية: $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 37. ينبغي أن يرى الطلاب أن بثينة استبدلت على نحوٍ خاطئٍ $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ بـ $\frac{\sqrt{4}}{4}$. في حين عوّضت بدرية على نحوٍ خاطئٍ $\cos 30°$ بـ $\frac{1}{2}$ بدلاً من التعويض بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. اشرح للطلاب أن كلتا الخطوتين الأوليين $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ و $\sin 15° = \sin\frac{30°}{2}$ تصلحان بمثابة خطوتين أوليين. ولكن خطوة بثينة الرابعة ينبغي أن تكون $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ وينبغي أن تكون خطوات بدرية بعد المستقيم الأول هي $\sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب أن يذكروا كيفية تحديد ما إذا كانت مسألةٌ تضم متطابقة ضعف زاوية أو نصف زاوية فضلاً عن كيفية استخدام كل نوعٍ من المتطابقات.

إجابات إضافية

53. $\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta = \cot\theta + \sec\theta$ ✓

54. $\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} (1 - \cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta = \sin^2\theta + \tan^2\theta$ ✓

الاستكشاف 12-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات المثلثية

يتركب التمثيل البياني للدالة المثلثية من نقاط تمثل جميع القيم التي تحقق الدالة. ولحل معادلةٍ مثلثية، فإن عليك حساب جميع قيم المتغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني لحل المعادلات المثلثية عبر التمثيل البياني لكل طرفٍ من المعادلة في صورة دالةٍ ومن ثم تحديد نقاط التقاطع.

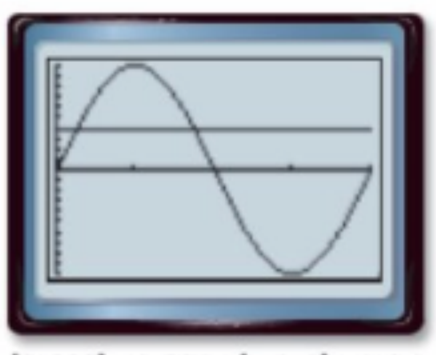
ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الحلول الحقيقية

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحلّ $\sin x = 0.4$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثّلهما بيانيًا. وأعد كتابة المعادلة في صورة معادلتين $Y1 = \sin x$ و $Y2 = 0.4$. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا. نظرًا إلى أن الفترة بالدرجات، فاضبط حاسبتك على نمط الدرجات.

خطوات العملية على الحاسبة: MODE ▼ ▼ ▶ ENTER
Y= SIN X,T,θ,n)
ENTER 0.4 ENTER GRAPH


[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 تقريب الحلول. بناءً على التمثيل البياني، يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطع ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استخدم خاصية **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

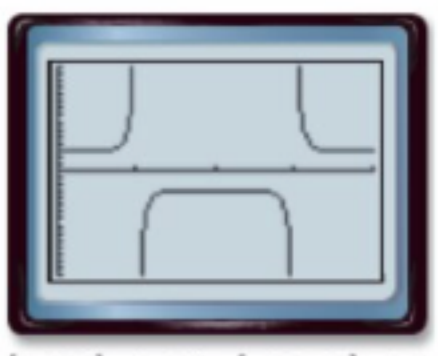
الحلّان هما $x \approx 23.57°$ و $x \approx 156.4°$.

النشاط 2 عدم وجود حلول حقيقية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1 أدخل المعادلتين المرتبطتين ومثلهما بيانيًا. المعادلتان المرتبطتان اللتان يتعين تمثيلهما بيانيًا هما $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ و $y_2 = 0$.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= TAN X,T,θ,n) x^2 COS
X,T,θ,n) + 3) X,T,θ,n
) ENTER 0 ENTER


[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

الخطوة 2 لا تتقاطع هاتان الدالتان.

ولذلك ليس للدالة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ أي حلول حقيقية.

التمارين

استخدم حاسبةً للتمثيل البياني لحل كلٍ من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7;\ 0° \le x < 360°$ **44.4°, 135.6°**
2. $\tan x = \cos x;\ 0° \le x < 360°$ **38.17°, 141.8°**
3. $3 \cos x + 4 = 0.5;\ 0° \le x < 360°$ **لا يوجد حل حقيقي**
4. $0.25 \cos x = 3.4;\ -720° \le x < 720°$ **لا يوجد حل حقيقي**
5. $\sin 2x = \sin x;\ 0° \le x < 360°$ **0°, 60°, 180°, 300°**
6. $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ إذا كانت $-360° \le x < 360°$ **−360°, −180°, 0°, 180°**

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات المثلّثية.

المواد الخاصة لكل طالب

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus أو حاسبة تمثيل بياني من نوع آخر

نصيحة للتدريس

في النشاط 1، يمكن أيضًا إيجاد حلولٍ تقريبيةٍ عبر استخدام الميزة Trace ولكن في معظم الحالات، ستعطي ميزة التقاطع حلولاً أكثر دقة.

ذكّر الطلاب بأن يستخدموا النوافذ المناسبة لتمثيلاتهم البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية بحيث يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في تصحيح أخطاء خطوات العملية على الحاسبة. اطلب منهم إتمام النشاطين 1 و 2 والتمرين 1.

اطرح السؤال التالي:

- كيف ترتبط حلول المعادلات بنقاط تقاطع التمثيلات البيانية؟ الحلول هي قيم x الخاصة بنقاط التقاطع.
- كيف تعرف أن معادلةً ما ليس لها حلول؟ لا يتقاطع التمثيلان البيانيان لـ Y1 و Y2.

تدريب اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 2 إلى 6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم ما إن كان الطلاب يستوعبون كيف تؤثر الفترة المحددة في الحلول.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تناول التمارين 1-6 عند فترةٍ مختلفةٍ أو دون فترة، واجعلهم يشرحوا كيف يؤثر ذلك في حلولهم.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-5 إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

الدرس 12-5 حَل المعادلات المثلثية. وإيجاد الحلول الدخيلة في المعادلات المثلثية.

بعد الدرس 12-5 استخدام حساب المثلثات لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- خذ أي نقطةٍ على الأرجوحة الدوّارة. ما مسافة انتقال تلك النقطة خلال دورةٍ واحدة؟ 40π أو حوالي 125.7 مترًا
- ما المسافة التي يقطعها موقعٌ ما على الأرجوحة الدوارة خلال دقيقةٍ واحدة؟ 60π أو حوالي 188.5 مترًا
- عند $t = 0$. ما قيمة $20 \cos 3\pi t$؟ 20

الدرس 12-5 حل المعادلات المثلثية

السابق

- تحققت من صحة المتطابقات المثلثية.

الحالي

1 حل المعادلات المثلثية.

2 إيجاد الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

لماذا؟

- عندما تركب أرجوحةً دوارةً قطرها 40 مترًا وتدور بسرعة 1.5 دورة في الدقيقة، يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق الأرض بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t.$$

بعد تشغيل الأرجوحة، كم يستغرق الأمر قبل أن يصبح مقعدك على ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض لأول مرة؟

المفردات الجديدة

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات المثلثية

قد درسنا حتى الآن في هذه الوحدة نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية يدعى المتطابقة. والمتطابقات المثلثية هي معادلاتٌ صحيحةٌ لكل قيم المتغير المُعرّف فيه الطرفان. في هذا الدرس، سوف ندرس **معادلات مثلثية** لا تكون صحيحة إلا بالنسبة لقيم محددةٍ للمتغير. ويشبه حل هذه المعادلات حل المعادلات الجبرية.

مثال 1 حل المعادلات عند معرفة الفترة

حُلّ $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلل إلى العوامل.

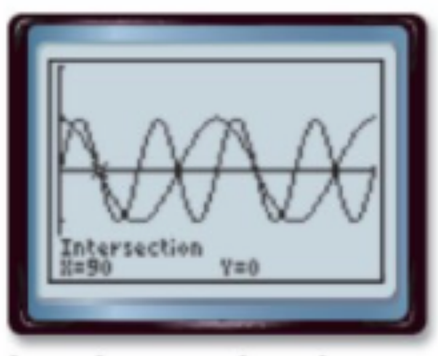
$\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ أو $\cos \theta = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\theta = 90°$

$\theta = 30° = 150°$

الحلول هي 30° و 90° و 150°.

التحقق يمكنك التحقق من حلك بالتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta \cos \theta$ و $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ في المستوى الإحداثي نفسه على حاسبة التمثيل البياني. ثم أوجد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. يمكنك أن ترى أن هناك عددًا غير منتهٍ من هذه النقاط. ولكن اهتمامنا ينصب فقط على النقاط الواقعة بين 0° و 180°.



[0, 720] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.5

تمرين موجّه

1. أوجد جميع حلول $\sin 2\theta = \cos \theta$ إذا كانت $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

تُحلّ المعادلات المثلثية عادةً لإيجاد قيم المتغير الواقعة بين 0° و 360° أو بين 0 راديان و 2π راديان. وهناك حلولٌ خارج تلك الفترة. وتختلف هذه الحلول الأخرى بفروقٍ تساوي مضاعفاتٍ صحيحةً لفترة الدالة.

1 حل المعادلات المثلثية

يوضح **المثال 1** كيفية حلّ معادلاتٍ مثلثيةٍ مع العلم بفترة معطاة. ويوضح **المثال 2** كيفية حلّ معادلاتٍ مثلثيةٍ للحصول على قياسات زوايا بالراديان. ويبيّن **المثال 3** كيفية حلّ مسائل من الحياة اليومية تضم معادلاتٍ مثلثية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حل $2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta$ إذا كان $0° \le \theta \le 180°$. $30°, 150°$

2 **a.** أوجد حل $\cos\theta + \frac{1}{4} = \sin^2\theta$ لجميع قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسةً بالدرجات.
$k \cdot 360°, 300° + k + 60°$ $360°$، حيث k هي أي عدد صحيح

b. أوجد حل $2\cos\theta = -1$ لجميع قيم θ إذا كانت الزاوية θ مقيسة بوحدات الراديان.
$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. حيث k هي أي عددٍ صحيح

3 **مدن الملاهي** راجع بداية الدرس. كم يستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع $(10\sqrt{2} + 21)$ مترًا فوق سطح الأرض؟

$10\sqrt{2} + 21 = 21 - 20\cos 3\pi t;$

$10\sqrt{2} = -20\cos 3\pi t;$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3\pi t;$

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\pi t;$

$\frac{3}{4}\pi = 3\pi t$

$\frac{1}{4} = t$

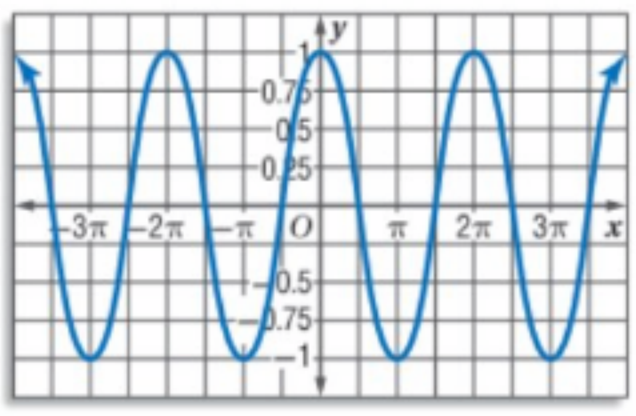
$\frac{1}{4}\text{ min} = 15\text{ sec}$

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ $\cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta$ لإيجاد حلول $\cos\theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك $-\pi$ و -3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في الفترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π. فترة دالة cosine هي 2π راديان. إذًا فيمكن كتابة الحلول في الصورة $\pi + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

نصيحة دراسية
التعبير عن الحلول في صيغة مضاعفات إن التعبير $\pi + 2k\pi$ يتضمن 3π ومضاعفاته، ولذلك فليس من الضرورة إدراجهما بصورة منفصلة.

تمرين موجّه

2A. حُلّ $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

2B. حُلّ $2\sin\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

2A. $90° + k \cdot 180°$ و $120° + k \cdot 360°$ و $240° + k \cdot 360°$
2B. $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ و $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

غالبًا ما تُستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية حل المعادلات المثلثية

حدائق الملاهي **راجع بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ مقعدك ارتفاع 31 مترًا فوق سطح الأرض؟**

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض عن h بـ 31.
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كل طرف.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كل طرف على -20.
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	أوجد معكوس cosine.
$\frac{4\pi}{3} = 3\pi t$ أو $\frac{2\pi}{3} = 3\pi t$	معكوس cosine $-\frac{1}{2}$ هو $\frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$.
$\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$	k هو أي عدد صحيح.
$\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$	اقسم كل طرف على 3π.

يُحصَل على القيمة الموجبة الصغرى لـ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو حوالي 13 ثانية.

تمرين موجّه

3. كم من الوقت يستغرق الأمر كي يبلغ مقعدك ارتفاع 41 مترًا فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟ **حوالي 20 ثانية**

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج في المثال 2. أوضِح للطلاب كيفية البحث عن أنماطٍ في الحلول. إذ ينبغي أن يبحث الطلاب عن أزواج من الحلول الفرق بين كل منها π أو 2π بالضبط.

2 الحلول الدخيلة

الحلول الدخيلة بعض الدوال المثلثية ليس لها حل. على سبيل المثال، ليس للدالة $\cos\theta = 4$ حل لأن قيم $\cos\theta$ تقع بين -1 و 1 متضمنًا هذين العددين. لذا، تكون مجموعة حلول $\cos\theta = 4$ خالية.

مثال 4 تحديد ما إذا كان هناك حل

حُــلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\sin\theta - 2 = 0$ أو $2\sin\theta + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin\theta = 2$ ، $2\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

هذا ليس حلاً بما أن جميع قيم $\sin\theta$ تقع بين -1 و 1، مشتملاً على القيمتين الطرفيتين.

الحلول هي $\frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$.

التحقق

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

b. $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كانت $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ تربيع كل طرف.

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ $\quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ ضع الطرف الأيسر مساويًا لــ 0.

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ حلل إلى العوامل.

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ ، $\cos\theta = 0$

$\theta = 180$ ، $\theta = 90° = 270°$

التحقق

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\ne 1 \text{ ✗} \end{aligned}$$

الحلّان هما $90°$ و $180°$.

تمرين موجّه **4B. متطابقة؛ ولذلك، هناك عدد لا نهائي من الحلول**

4A. $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ **لا يوجد حل** **4B.** $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

إذا لم تكن المعادلة قابلةً للحل بسهولةٍ باستخدام تحليل العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير باستخدام المتطابقات المثلثية. ولكن استخدام المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع، قد يعطي حلولاً دخيلة. إذًا فمن الضروري التحقق من حلك باستخدام المعادلة الأصلية.

نصيحة في حل المسائل

الانتظام ابحث عن الأنماط في حلولك. وابحث عن أزواج من الحلول التي يساوي الفرق بينها π أو 2π بالتحديد واكتب حلولك بأبسط نمط ممكن.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل خلال تناول الطلاب لهذا الدرس، اطلب منهم إنشاء قائمةٍ صفيةٍ على اللوحة تُحدّد الأخطاء الشائعة التي يرتكبونها. وشجّع الطلاب على إضافة اقتراحاتٍ تتعلق بكيفية تجنب أخطائهم. فعلى سبيل المثال، من الأخطاء الشائعة أن يضبط أحدهم حاسبته على الدرجات في وقت يتعين عليه ضبطها على وحدات الراديان لحلّ مسألةٍ ما أو العكس.

2 الحلول الدخيلة

يوضح **المثال 4** كيفية حل معادلةٍ مثلثيةٍ واختبار الحلول الدخيلة. ويوضح **المثال 5** كيفية استخدام المتطابقات لحل معادلةٍ مثلثية.

مثال إضافي

4 حُــلّ كل من المعادلات التالية.

a. $\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

b. $\cos\theta = 1 - \sin\theta$ إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$ $\quad 0°, 90°, 360°$

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية. ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. ويقيّمون باستمرار مدى منطقية نتائجهم الوسيطة. شجّع الطلاب على دراسة حلولهم عن كثبٍ وكتابتها بأبسط صورةٍ ممكنة.

التركيز على محتوى الرياضيات

العدد اللا نهائي من الحلول لكثيرٍ من المعادلات المثلثية عددٌ لا نهائيّ من الحلول. فإن لم تُحدد فترةٌ لحصر عدد الحلول، فيجب تحديد العدد اللا نهائي من الحلول عن طريق استخدام تعبيرٍ بدلاً من مجرد استخدام عدد. وهناك حلٌ يظهر لكل تدوير كامل حول نقطة الأصل. وهو حل له الصيغة $a° + k \cdot 360°$، حيث k هي أي عددٍ صحيح.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

دفتر الملاحظات اطلب من الطلاب كتابة ملاحظات في دفتر الملاحظات اليومية عن كيفية حل المعادلات المثلثية. واطلب منهم أن يصفوا أوجه تشابه هذه العملية واختلافها عن حل أنواع أخرى من المعادلات.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حُــلّ $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ بوضع طرفٍ واحدٍ مساويًا للصفر 0.

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلل إلى العوامل.

$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\tan^2\theta = 3$ $\tan^2\theta = -1$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ لا يعطي هذا الجزء أي حلولٍ نظرًا إلى أن $\tan^2\theta$ ليست سالبةً على الإطلاق.

$\theta = 60° + 180°k$ و $\theta = -60° + 180°k$. حيث k أي عددٍ صحيح. الحلّان هما $60° + 180°k$ و $-60° + 180°k$.

> **نصيحة دراسية**
> **حل المعادلات المثلثية** تذكر أن حل معادلة مثلثية يعني الحلّ لإيجاد جميع قيم المتغير.

تمرين موجّه

حُــلّ كل من المعادلات التالية.

5A. $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$ **5A.** $90° + k \cdot 180°$

5B. $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$ **5B.** $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\cdot\pi$ و $\dfrac{11\pi}{6} + 2k\cdot\pi$

التحقق من فهمك

مثال 1 **الانتظام** حُلّ كل معادلة مما يلي إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$.

1. $2\sin\theta + 1 = 0$ **210°, 330°**
2. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$ **180°**
3. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ **60°, 180°, 300°**
4. $2\cos\theta = 1$ **60°, 300°**
5. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **150°, 210°**
6. $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **120°, 150°, 300°, 330°**
7. $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$ **30°, 150°**
8. $\sin\theta + \cos\theta = 1$ **0°, 90°, 360°**

مثال 2 حُــلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

9. $4\sin^2\theta - 1 = 0$ **9.** $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ or $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
10. $2\cos^2\theta = 1$ $\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$
11. $\cos 2\theta\sin\theta = 1$ $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
12. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ $\frac{\pi}{2} + 4\pi k$
13. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$ $\pi + 2k\pi$
14. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

حُــلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

15. $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$
16. $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$
17. $2\sin^2\theta - 1 = 0$ $45° + k\cdot 90°$
18. $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$
19. $\cos 2\theta\sin\theta = 1$ $270° + k\cdot 360°$
20. $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$ $0° + k\cdot 180°, 90° + k\cdot 360°$

14. $0 + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$
15. $90° + k\cdot 180°$
16. $0° + k\cdot 180°, 90° + k\cdot 360°$
18. $30° + k\cdot 360°, 150° + k\cdot 360°, 90° + k\cdot 180°$

مثال 3

21. **الضوء** يمكن تقدير عدد ساعات النهار d في هارتفورد، كونيتيكت. باستخدام المعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t هو عدد الأيام بعد 21 مارس.
   - a. ما الأيام التي يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات بالتحديد؟
   - b. باستخدام النتائج في الجزء a، اذكر ما أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. واشرح كيف عرفت ذلك. **انظر الهامش.**

21a. ستكون هناك $10\frac{1}{2}$ ساعات من النهار بعد 21 مارس بـ 213 و 335 يومًا؛ أي في 20 أكتوبر و 19 فبراير .

مثال إضافي

5 حُــلّ $\tan^4\theta - 4\sec^2\theta = -7$ لجميع قيم θ إذا كانت θ تقاس بالدرجات. $\theta = 60° + 180°k, 120° + 180°k$، أو $90° + 45° \cdot k$. حيث k أي عددٍ صحيح.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 29 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجد، ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل، ويقيّمون على نحوٍ مستمرٍ مدى صحة نتائجهم الوسيطة.

إرشاد للمعلمين الجدد

الرمز في جميع إجابات هذا الدرس التي تتضمن k، يُعتبر k على أنه أي عددٍ صحيح.

إجابة إضافية

21b. كل يوم من 19 فبراير إلى 20 أكتوبر؛ التفسير النموذجي: بما أن أطول أيام السنة يصادف يوم 22 يونيو، فلا بد أن يزداد طول الأيام الواقعة بين 19 فبراير و 20 أكتوبر حتى تاريخ 22 يونيو ومن ثم سوف تتناقص من حيث الطول حتى تاريخ 20 أكتوبر.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	30-48, 58, 60-62, 64-83	31-47 فردي، 64-67	30-48 زوجي، 58, 60-62, 68-83
OL أساسي	31-55 فردي، 56-58, 60-62, 64-83	30-48, 64-67	49-58, 60-62, 68-83
BL متقدم	49-80, (اختياري: 81-83)		

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار. "هل هذا جواب منطقي؟"

المثالان 4-5 حُـلّ كلاً من المعادلات التالية. $25.\ \frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

22. $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ $\frac{\pi}{2}+\pi k$
23. $\tan^2\theta + 2\tan\theta + 1 = 0$ $\frac{3\pi}{4}+\pi k$
24. $\cos^2\theta + 3\cos\theta = -2$ $\pi + 2\pi k$
25. $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$
26. $\tan\theta = 1$ $45° + k \cdot 180°$ أو $\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$
27. $\cos 8\theta = 1$ $0° + k\cdot 45°$ أو $0 + k\cdot\frac{\pi}{4}$
28. $\sin\theta + 1 = \cos 2\theta$ $0° + k\cdot 180°, 210° + k\cdot 360°, 330° + k\cdot 360°$
29. $2\cos^2\theta = \cos\theta$ $\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حُـلّ كل معادلة مما يلي عند الفترة المعطاة. $30.\ 60°, 120°, 240°, 300°$ $32.\ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

30. $\cos^2\theta = \frac{1}{4};\ 0° \le \theta \le 360°$
31. $2\sin^2\theta = 1;\ 90° < \theta < 270°$ $135°, 225°$
32. $\sin 2\theta - \cos\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$
33. $3\sin^2\theta = \cos^2\theta;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
34. $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0;\ 180° < \theta < 360°$ $240°, 300°$
35. $4\sin^2\theta - 1 = 0;\ 180° < \theta < 360°$ $210°, 330°$

مثال 2 حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

$36.\ \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$
$37.\ \pi+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$
$38.\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi$

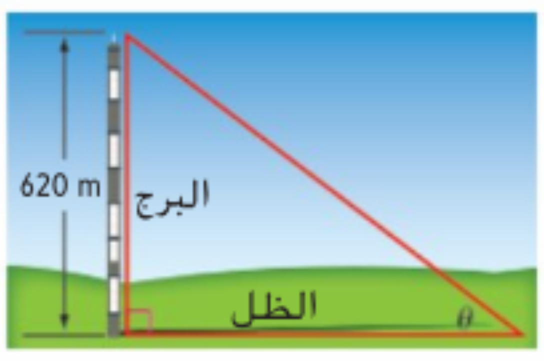
36. $\cos 2\theta + 3\cos\theta = 1$
37. $2\sin^2\theta = \cos\theta + 1$
38. $\cos^2\theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\cos\theta$
39. $3\cos\theta - \cos\theta = 2$ $0 + 2k\pi$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد كلّ قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.

40. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ $45° + k\cdot 180°$
41. $\tan\theta - \sin\theta = 0$ $0° + k\cdot 180°$
42. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3$ $270° + k\cdot 360°$
43. $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ $30° + k\cdot 360°, 150° + k\cdot 360°$

مثال 3

44. **الإلكترونيات** من أعلى الأبنية في العالم أحد أبراج النقل التلفزيوني بالقرب من فارغو في داكوتا الشمالية بالولايات المتحدة. وارتفاعه 620 مترًا. فما قياس الزاوية θ إذا كان طول ظل البرج 1.6 كيلومتر؟
21° تقريبًا



$45.\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi$ or $210° + k\cdot 360°, 330° + k\cdot 360°$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

45. $2\sin^2\theta = 3\sin\theta + 2$
46. $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 3$ $46.\ \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi$ أو $30° + k\cdot 360°, 150° + k\cdot 360°, 90° + k\cdot 360°$
47. $\sin^2\theta + \cos 2\theta = \cos\theta$ $0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $0° + k\cdot 360°, 90° + k\cdot 180°$
48. $2\cos^2\theta = -\cos\theta$ $48.\ \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi$ أو $90° + k\cdot 180°, 120° + k\cdot 360°, 240° + k\cdot 360°$

B 49. **الاستنتاج المنطقي** نظرًا إلى المدّ والجزر في المحيط، يتغير عمق y نهر التايمز في لندن، بالأمتار، مع دالة sine لـــ x التي تمثل الساعة في اليوم. وفي يوم محدد، كانت تلك الدالة تساوي $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ تقابل 12:00 منتصف الليل، 1:00 صباحًا، 2:00 صباحًا، ... 12:00 منتصف ليل الليلة التالية.

a. ما العمق الأقصى لنهر التايمز في ذلك اليوم؟ 11 m

b. في أي وقتٍ حدث ذلك العمق الأقصى؟ 7:00 صباحًا و 7:00 مساءً.

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

50. $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$
51. $2\sin^2\theta + (\sqrt{2}-1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{4}+2\pi k, \frac{7\pi}{4}+2\pi k$

حُـلّ كل معادلةٍ مما يلي إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

52. $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ $30° + 360°k, 150° + 360°k, 330° + 360°k$
53. $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$ $120° + 360°k, 240° + 360°k$

حُــلّ كل من المعادلات التالية.

54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$ πk

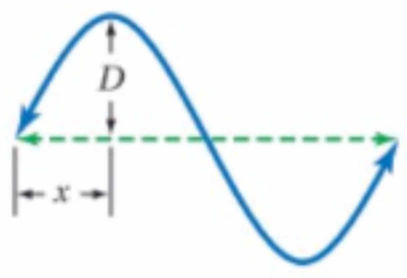
55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

56. **الماس** حسب قانون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 هي قرينة انكسار الوسط الذي يدخله الضوء، و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية الانكسار بالدرجات.

a. تساوي قرينة انكسار الماس 2.42، وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. فإذا أصابت حزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي 35°، فما زاوية الانكسار؟ **13.71°**

b. اشرح كيف يمكن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعةٌ من الألماس أصلية. **قِس زاويتي الورود والانكسار لتحديد قرينة الانكسار. فإذا كانت القرينة تساوي 2.42، فإن قطعة الألماس أصلية.**

57. **المثابرة** يمكن تمثيل موجةٍ في وتر جيتارٍ باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin (6.5x) \sin (2500t)$، وفيها D هي الإزاحة بالملّيمتر عند الموضع x ملّيمترًا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t ثانية. أوجد أول زمنٍ موجبٍ يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 0.5 متر من الطرف الأيسر إزاحةٌ مسافتها 0.01 ملّيمتر. **0.0026 ثانية**



58. **التمثيلات المتعددة** تأمل المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

a. **جدوليًا** أنشئ جدول قيم حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي تجعل $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ ؟ **a–3d انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

b. **بيانيًا** مثّل $y = \sin \theta$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه حيث $0° \leq \theta \leq 360°$. ما قيم θ التي يكون عندها التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ ؟

c. **تحليليًا** بناءً على إجاباتك عن الجزأين a و b، حلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ لإيجاد كل قيم θ.

d. **جبريًا** حلّ كل متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360°$. ثم حلّ كلاً منها لإيجاد كل قيم θ.

i. $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$

iii. $-\sin \theta \geq 0$

iv. $\cos \theta - 1 < -\frac{1}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مهارات التفكير العليا

59. **التحدِ** حلّ $\sin 2x < \sin x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$ دون استخدام الآلة الحاسبة. $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ **أو** $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

60. **التبرير** قارن ووبيّن الفرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما التقنيات المتماثلة؟ وما التقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟ **انظر الهامش.**

61. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول في أغلب الأحيان؟ **انظر الهامش.**

62. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب مثالاً لمعادلةٍ مثلثيةٍ يكون لها حلّان بالضبط إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$. **الإجابة النموذجية: $2 \cos \theta = 0$، 90° و 270°**

63. **التحدِ** كم عدد الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$ لـ $a \sin (b\theta + c) = d$. إذا كان $a \neq 0$ و b عددًا صحيحًا موجبًا؟ **$0, b,$ أو $2b$**

إجابات إضافية

60. يمكن أن يتطلب كل نوع من المعادلات جمع العدد نفسه إلى كلا طرفي المعادلة أو طرحه أو الضرب فيه أو القسمة عليه. ويمكن في أغلب الأحيان حلّ المعادلات المثلثية عبر التحليل إلى عوامل. ولا تتطلب المعادلات الخطية والتربيعية متطابقات. ويمكن حل جميع المعادلات الخطية والتربيعية جبريًا، بينما يمكن حل بعض المعادلات المثلثية بصورةٍ أسهل عبر استخدام حاسبة تمثيل بياني. وللمعادلة الخطية حلّ وحيدٌ على الأكثر. وللمعادلات التربيعية حلّان على الأكثر. وللمعادلة المثلثية عادة عددٌ لا نهائيّ من الحلول، إلا إذا كانت قيم المتغير مقيدة.

61. الإجابة النموذجية: جميع المعادلات المثلثية دورية، ولذلك، حالما يتم إيجاد حل واحدٍ أو أكثر لفترةٍ محددة، فستكون هناك حلولٌ أخرى يمكن إيجادها عبر جمع مضاعفاتٍ صحيحةٍ لفترة الدالّة إلى هذه الحلول.

72. $\sin (270° - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$\sin 270° \cos \theta - \cos 270° \sin \theta \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-1 \cos \theta - 0 \stackrel{?}{=} -\cos \theta$

$-\cos \theta = -\cos \theta$ ✓

73. $\cos (90° + \theta) \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$\cos 90° \cos \theta - \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$0 - 1 \sin \theta \stackrel{?}{=} -\sin \theta$

$-\sin \theta = -\sin \theta$ ✓

74. $\cos (90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$\cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$

$\sin \theta = \sin \theta$ ✓

75. $\sin (90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos \theta$

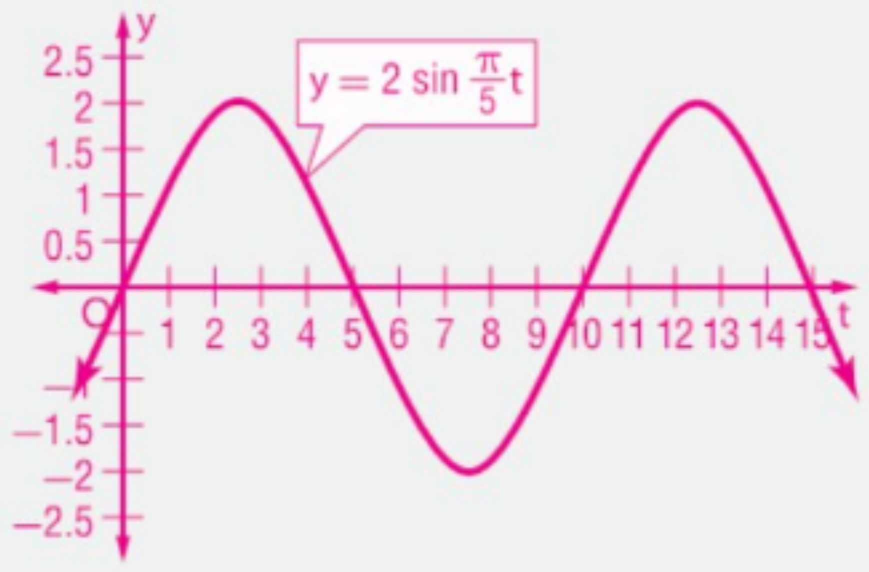
$\sin 90° \cos \theta - \cos 90° \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$1 \cdot \cos \theta - 0 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta - 0 \stackrel{?}{=} \cos \theta$

$\cos \theta = \cos \theta$ ✓

76b.



تدريب على الاختبار المعياري

64. الإجابة الموسّعة حصل بلال على AED 2500 بمثابة مكافأة لتخرّجه. وقد أودع المبلغ في حسابٍ للتوفير كانت نسبة المرابحة فيه 5.5% في العام.

a. فكم أصبح في حساب التوفير بعد 5 سنواتٍ إذا لم يقم بأيّ إيداعات أو سحوبات إضافية؟ **AED 3267.40**

b. بعد كم عامٍ سيكون المبلغ المودعُ في حسابه قد تضاعف؟ **حوالي 13 yr**

65. الاحتمال أوجد احتمال الحصول على العدد 3 ثلاث مرات متتالية إذا رُمي مكعب أعداد ثلاث مرات. **A**

A $\frac{1}{216}$ C $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{36}$ D $\frac{1}{4}$

66. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه. **F**

$$f(x) = x^4 + 10x^2 + x + 8$$

F 62 H 30
G 38 J 8

67. SAT/ACT يستمرّ نمط النقاط المبين أدناه إلى ما لا نهاية، بحيث تضاف نقاطٌ إضافيةٌ في كل خطوة.

ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتحديد عدد النقاط في الخطوة رقم n؟ **E**

A $2n$ D $2(n + 2)$
B $n(n + 2)$ E $2(n + 1)$
C $n(n + 1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي. (الدرس 4-12)

68. $\cos 165°$ $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

69. $\sin 22\frac{1}{2}°$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

70. $\sin \frac{7\pi}{8}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

71. $\cos \frac{7\pi}{12}$ $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:. (الدرس 2-12) **72-75. انظر الهامش.**

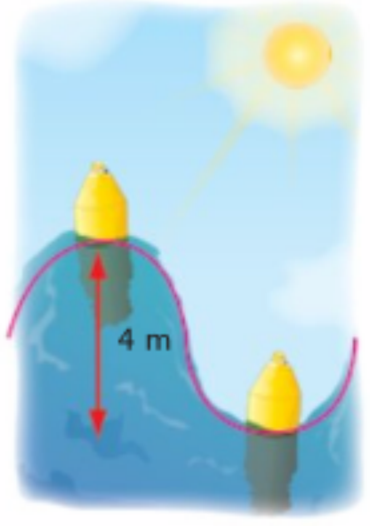
72. $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$

73. $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

74. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

75. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

76. السلامة في الماء ترتفع عوّامةٌ في الميناء وتنخفض مع حركة الأمواج. تساوي المسافة بين النقطة العليا والسفلى 4 أمتار. وتتحرك العوامة من نقطتها العليا إلى نقطتها الدنيا وعودةً إلى نقطتها العليا كل 10 ثوانٍ.



a. اكتب معادلةً لتمثيل حركة العوّامة. وافترض أنها في وضع التوازن عند $t = 0$ وأنها في طريقها إلى الأعلى من مستوى الماء الطبيعي. $y = 2\sin\frac{\pi}{5}t$

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع العوّامة بدلالة الزمن. **انظر الهامش.**

c. ما ارتفاع العوّامة بعد 12 ثانية؟ **حوالي 1.9 m**

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلةٍ حسابيةٍ مما يلي.

77. $a_1 = 17,\ a_n = 197,\ S_n = 2247$ **17, 26, 35**

78. $a_1 = -13,\ a_n = 427,\ S_n = 18{,}423$ **−13, −8, −3**

79. $n = 31,\ a_n = 78,\ S_n = 1023$ **−12, −9, −6**

80. $n = 19,\ a_n = 103,\ S_n = 1102$ **13, 18, 23**

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة نسبيّة بيانيًا. **81-83. انظر الهامش.**

81. $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

82. $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$

83. $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

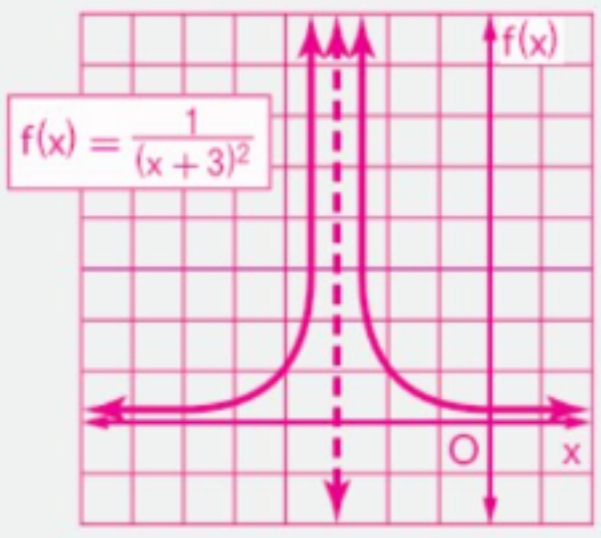
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

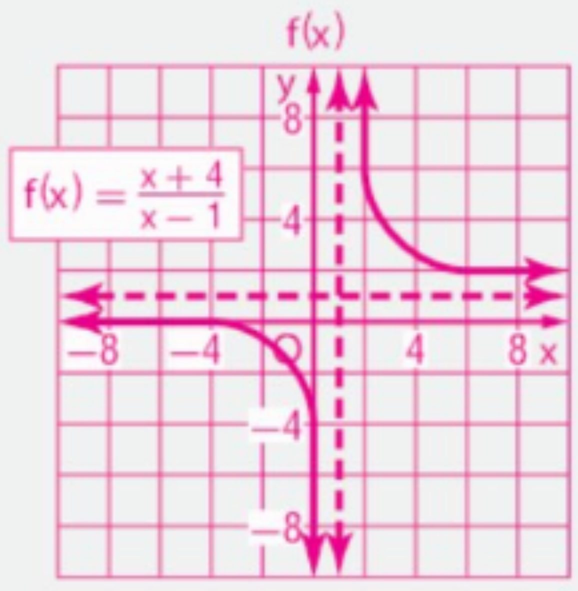
الطلاب اطلب من الطلاب كتابة معادلةٍ تتضمن $\sin^2\theta$ ولها حلٌ وحيدٌ بالضبط للفترة $90° < \theta < 270°$.

إجابات إضافية

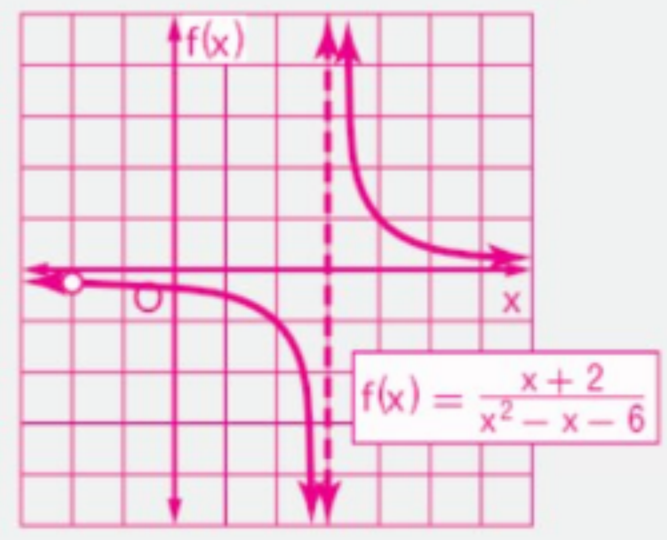
81.



82.



83.



التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب استكشاف حلول المعادلة $\sin x = \frac{x}{k}$، حيث k هو عددٌ صحيحٌ موجب. وكلّفهم بتحديد كيفية تغيّر عدد حلول المعادلة بتغيّر k. وما قيمة x التي تعطي حلاً للمعادلة المتعلقة بجميع قيم k؟ 0

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 9–1، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم. واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرًا إلى أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

الوحدة 12 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 12-5 و 12-2 و 12-1)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقات بين الدوال المثلثية.
- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط المعادلات والتعابير المثلثية وإثباتها وحلّها.

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 12-3)

- بالنسبة لجميع قيم A و B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها (الدرس 12-4)

- متطابقات أضعاف:

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

- متطابقة الزاويتين المتتامتين cofunction identity
- متطابقة الزاوية السالبة negative angle identity
- متطابقة فيثاغورس Pythagorean identity
- متطابقة ناتج القسمة quotient identity
- متطابقة عكسية reciprocal identity
- معادلة مثلثية trigonometric equation
- متطابقة مثلثية trigonometric identity

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. يمكن استخدام ________ لإيجاد $75°$ sine و Cosine إذا كان $90°$ sine و $15°$ cosine معروفين. **متطابقة فرق زاويتين**
2. المتطابقتان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هما مثالان على ________. **المتطابقات النسبية**
3. ________ هي معادلةٌ تضم متطابقاتٍ مثلثية، وهي صحيحةٌ لجميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معرّفة. **المتطابقة المثلثية**
4. يمكن استخدام ________ لإيجاد $\sin 60°$ باستخدام الزاوية $30°$ بمثابة مرجع. **متطابقة الزاوية المزدوجة**
5. تكون ________ صحيحةً فقط عند قيم محددة للمتغير. **المعادلة المثلثية**
6. يمكن استخدام صيغة ________ لإيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$. **نصف الزاوية**
7. المتطابقتان $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ و $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ هما مثالان على ________. **المتطابقات العكسية**
8. يمكن استخدام ________ لإيجاد $120°$ sine أو Cosine إذا كان $90°$ sine و $30°$ cosine معروفين. **متطابقة مجموع زاويتين**
9. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي مثال على ________. **متطابقة فيثاغورس**

740 | الوحدة 12 | دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المقدمة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

15. $\frac{15\sqrt{709}}{709}$

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta \checkmark$

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta \div \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta \checkmark$

مراجعة درس بدرس

12-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

10. $\sin\theta$ إذا كانت $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

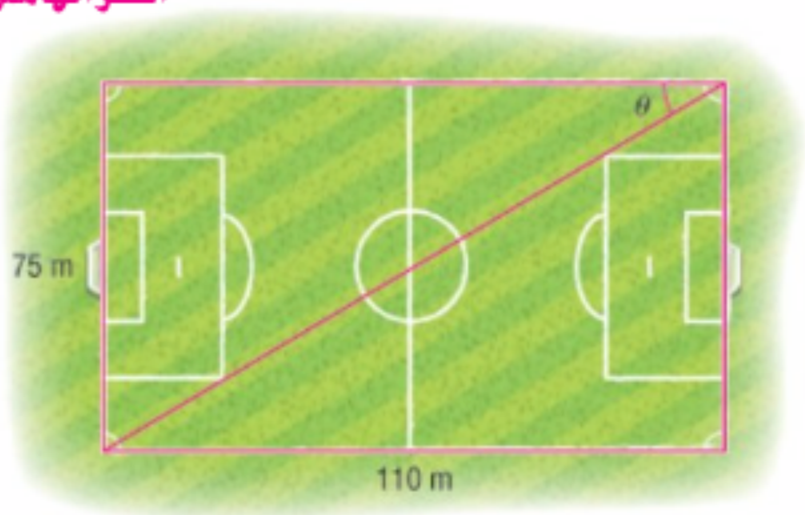
11. $\sec\theta$ إذا كانت $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$ **$-\sqrt{3}$**

12. $\tan\theta$ إذا كانت $\cot\theta = 2$ و $0° < \theta < 90°$ **$\frac{1}{2}$**

13. $\cos\theta$ إذا كانت $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ و $180° < \theta < 270°$ **$-\frac{4}{5}$**

14. $\csc\theta$ إذا كانت $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ and $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{41}}{5}$**

15. **كرة القدم** في مباريات كرة القدم الدولية، يساوي البعدان الأعظمان لأرض الملعب 110 أمتار في 75 مترًا. أوجد $\sin\theta$. **انظر الهامش.**



بسّط كل تعبير.

16. $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$

17. $\tan\theta\csc\theta$ **$\sec\theta$**

18. $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$

19. $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$ **$\sec\theta$**

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ و $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقة مثلثية
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	اطرح $\cos^2\theta$ من كل طرف.
$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$	عوّض عن $\cos\theta$ بـ $\frac{3}{4}$.
$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$	تربيع $\frac{3}{4}$.
$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$	اطرح.
$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$	أوجد الجذر التربيعي لكلٍ من الطرفين.

نظرًا إلى أن الزاوية θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة. وبالتالي، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \cot\theta$$

12-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

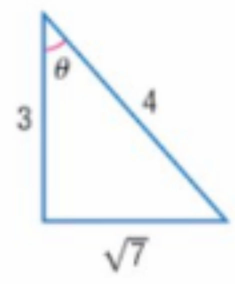
أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

20. $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21. $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22. $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$ **20–23. انظر الهامش.**

23. **الهندسة** يستخدم المثلث القائم الموضح على اليسار في صناعة نوع من الألحفة. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتثبت أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$	المتطابقة الأصلية
$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta + \csc\theta$	بسّط.
$\cot\theta + \csc\theta = \cot\theta + \csc\theta \checkmark$	بسّط.

22. $\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1 \checkmark$

23. $\tan^2\theta + 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{7}{9} + 1 = \frac{7}{9} + \frac{9}{9} = \frac{16}{9}$;

$\sec^2\theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

إجابات إضافية (تدريب على الاختبار)

2. $\cos(30° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin(60° + \theta)$

$\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta \stackrel{?}{=}$

$\sin 60° \cos\theta + \cos 60° \sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$ ✓

3. $\cos(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(\cos\theta)(-1) + (\sin\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sec\theta = \sec\theta$ ✓

11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta}$ ✓

12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\sec^2\theta\csc^2\theta = \csc^2\theta\sec^2\theta$ ✓

12 دليل الدراسة والمراجعة تابع

12-3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب الآتية:.

24. $\cos(-135°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

25. $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

26. $\sin 210°$ $-\frac{1}{2}$

27. $\sin 105°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

28. $\tan 75°$ $\sqrt{3}+2$

29. $\cos 105°$ $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أثبت صحة كلاً من المتطابقات.

30. $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$ 30–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32. $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استخدم $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$
$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

12-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيم الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$، و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍ مما يلي.

33. $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34. $\sin\theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35. $\cos\theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

33–36. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

36. **البيسبول** الملعب الداخلي للعبة البيسبول هو عبارة عن مربع طول ضلعه 27 متراً.

a. أوجد طول القطر.

b. اكتب النسبة الخاصة بـ $\sin 45°$ باستخدام أطوال ملعب البيسبول الداخلي.

c. استخدم الصيغة $\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ لإثبات صحة النسبة التي كتبتها في الجزء b.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و θ تقع في الربع الثاني.

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح.

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$ اقسم.

$= \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ بسّط.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

12-5 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول لكل معادلة مما يلي بالفترة المعطاة.

37. $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$ $60°, 300°$

38. $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

39. $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$ $90°, 210°, 270°, 330°$

40. $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$ $270°$

41. $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

مثال 6

أوجد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المتطابقة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

$\cos\theta = 0$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{2}; \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

13. $\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1}{\sec\theta} + \frac{\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta$ ✓

الوحدة 12 تدريب على الاختبار

1. **الاختيار من متعدد** ما التعبير الذي يكافئ $\sin\theta + \cos\theta$ ؛$\cot\theta$؟ D

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

2. أثبت صحة المتطابقة $(30^\circ - \theta) = \sin(60^\circ + \theta)$.
انظر الهامش.
3. أثبت صحة المتطابقة $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$.
إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ وكانت $90^\circ < \theta < 180^\circ$؟ J

F $\frac{5}{3}$

G $\frac{\sqrt{34}}{8}$

H $-\frac{4}{5}$

J $\frac{4}{5}$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

5. $\cot\theta$، إذا كانت $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270^\circ < \theta < 360^\circ$ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$
6. $\tan\theta$، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $-\sqrt{3}$
7. $\sec\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -2$، $180^\circ < \theta < 270^\circ$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. $\cot\theta$، إذا كانت $\csc\theta = -\frac{5}{3}$، $270^\circ < \theta < 360^\circ$ $-\frac{4}{3}$
9. $\sec\theta$، إذا كانت $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0^\circ \le \theta < 90^\circ$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

10. $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ 10–13. انظر الهامش.
11. $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$
12. $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$
13. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$
14. $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15. **الاختيار من متعدد** ما القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟ B

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

B $\sqrt{2} - 1$

C $1 - \sqrt{2}$

D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16. **التاريخ** يعتقد بعض الباحثين أن بَنّائي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأكبر، لربما حاولوا بناء أوجه الأهرامات على هيئة مثلثاتٍ متساوية الأضلاع. ولكنهم اضطروا بعد ذلك إلى تغييرها إلى أشكالٍ أخرى. افترض أنّ هرمًا يشيّد بحيث يكون وجهه مثلثًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 مترًا.
a, b. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

a. أوجد ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع.

b. استخدم الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وقياسات المثلث متساوي الأضلاع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2(30^\circ) = \sin 60^\circ$. أوجد القيم الدقيقة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

17. $\cos(-225^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
18. $\sin 480^\circ$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
19. $\cos 75^\circ$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
20. $\sin 165^\circ$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

21. **الصواريخ** يُطلق نموذج صاروخ بسرعةٍ متجهة ابتدائية تساوي 20 مترًا في الثانية. ويُمكن إيجاد مدى المقذوف باستخدام الصيغة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$، حيث يمثل R المدى، ويمثل v السرعة المتجهة الابتدائي، ويمثل g تسارع الجاذبية الأرضية أو 9.8 أمتار في الثانية تربيع، وتمثل θ زاوية الإطلاق . فما الزاوية المطلوبة لكي يبلغ مدى الصاروخ 25 مترًا؟
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

حُــلّ كل معادلة مما يلي لكلّ قيم θ إذا كانت θ بالراديان.

22. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$
23. $2\sin 3\theta - 1 = 0$ $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

حُــلّ كل معادلة مما يلي بالفترة $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ إذا كانت θ بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$ $0^\circ, 360^\circ$
25. $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ $0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ$

الدرس 12-2

1. $\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\tan^2\theta}{\tan\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\cot\theta + \tan\theta = \tan\theta + \cot\theta$ ✓

2. $\cos^2\theta \stackrel{?}{=} (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

$\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = \cos^2\theta$ ✓

3. $\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta + \cot\theta}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}$

$\sin\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1}$

$\sin\theta = \sin\theta$ ✓

4. $\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

5. $\tan^2\theta\csc^2\theta \stackrel{?}{=} 1 + \tan^2\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = \sec^2\theta$ ✓

6. $\tan^2\theta \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$

$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta - 1$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

8. $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\cos^2\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

9. $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

$\csc^2\theta = \csc^2\theta$ ✓

10. $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$1 + \dfrac{1}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = \sec^2\theta$ ✓

11. $\sin\theta\sec\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\sin\theta \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

12. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta - \cot\theta)^2$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta - 2\cot\theta\csc\theta + \cot^2\theta$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin^2\theta} - 2 \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin^2\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}$

$\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ ✓

13. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

$\tan\theta - \cot\theta = \tan\theta - \cot\theta$ ✓

14. $\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$

$\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$

$\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \tan\theta$ ✓

15. $\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$

$\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

23. $(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{2+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \left(2+\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta+1$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = (\sin\theta+\cos\theta)^2$ ✓

24. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$

$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$

$\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ ✓

25. $\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

$\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\csc^2\theta-1}{\csc\theta+1}$

$\csc\theta-1 \stackrel{?}{=} \dfrac{(\csc\theta-1)(\csc\theta+1)}{\csc\theta+1}$

$\csc\theta-1 = \csc\theta-1$ ✓

26. $\cos\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} \csc\theta-\sin\theta$

$(\cos\theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin\theta}-\sin\theta$

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ ✓

27. $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\sin\theta\cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$1=1$ ✓

16. $(\sin\theta-1)(\tan\theta+\sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\sin\theta\tan\theta+\sin\theta\sec\theta-\tan\theta-\sec\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\dfrac{\sin^2\theta-1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\dfrac{-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

17. $\cos\theta\cos(-\theta)-\sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$

$\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\,(-\sin\theta) \stackrel{?}{=} 1$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$1=1$ ✓

19. $\sec\theta-\tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ ✓

20. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sec\theta = \sec\theta$ ✓

21. $\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta+\cot\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}$ ✓

22. $\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$

$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$

$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$\sin\theta+\cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$

$\sin\theta+\cos\theta = \sin\theta+\cos\theta$ ✓

28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \checkmark$$

29. $\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + 1$$

$$\csc^2\theta = \csc^2\theta \checkmark$$

30. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} - \frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$

$$\frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$

$$\sin\theta - \cos\theta = \sin\theta - \cos\theta \checkmark$$

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$$1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta + 1 - \tan^2\theta$$

$$1 = 1 \checkmark$$

32. $\sec\theta - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$

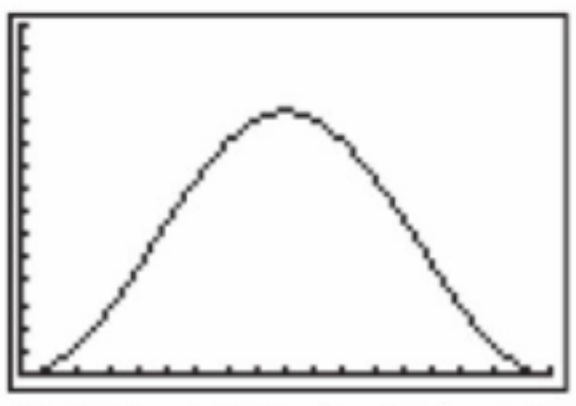
$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$

$$\tan\theta\sin\theta = \tan\theta\sin\theta \checkmark$$

51a.

قياس الزاوية	الارتفاع
30°	28.2 m
45°	56.4 m
60°	84.5 m
90°	112.7 m

51b.



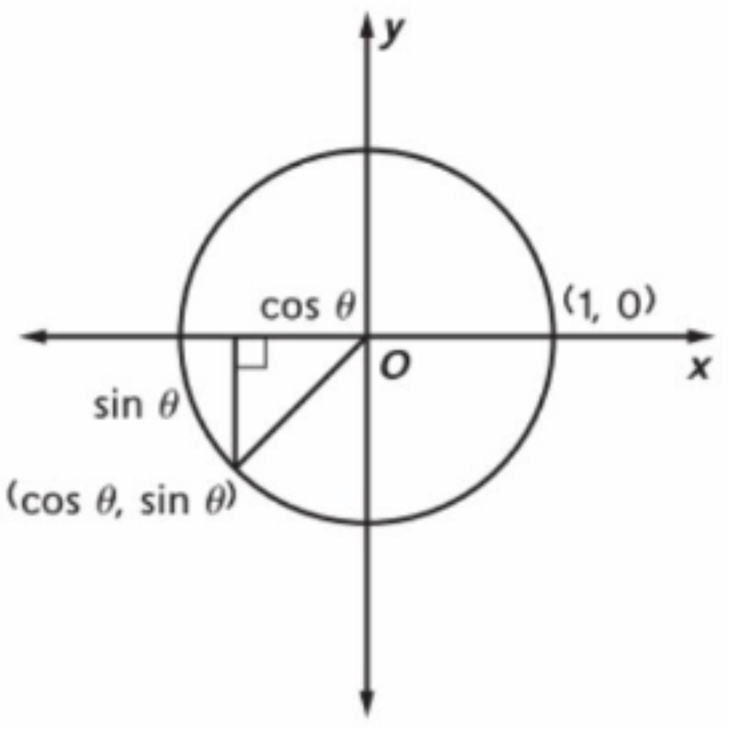
[0, 180] scl: 10 by [0, 150] scl: 10

51c. $\dfrac{v_0{}^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$

$$\frac{v_0{}^2\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{2g\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$$

$$\frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g} \checkmark$$

59. باستخدام دائرة الوحدة ونظرية فيثاغورس، يمكننا تعليل أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



إذا قسمنا كل حد للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ على $\cos^2\theta$. فيمكننا تبرير أن $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

إذا قسمنا كل حد للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ على $\sin^2\theta$. فيمكننا تبرير أن $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

الدرس 12-3

30. $F = \dfrac{W(\sin A + \mu\cos A)}{\cos A - \mu\sin A}$

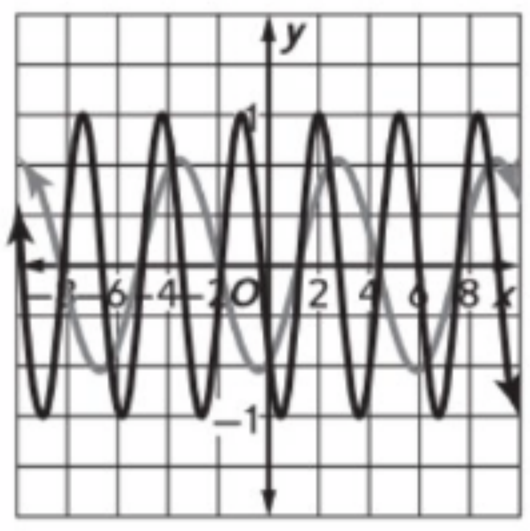
$$= \frac{W(\sin A + \tan\theta\cos A)}{\cos A - \tan\theta\sin A}$$

$$= \frac{W\left(\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\tan\theta\cos A}{\cos A}\right)}{\dfrac{\cos A}{\cos A} - \dfrac{\tan\theta\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{W(\tan A + \tan\theta)}{1 - \tan A\tan\theta}$$

$$= W\tan(A + \theta)$$

33b.



33c. لا؛ المثال المضاد هو: $\cos(30° + 45°) = \cos 30° + \cos 45°$. ويساوي $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو حوالي 1.5731. بما أن قيمة cosine لا يمكن أن تكون أكبر من 1، فهذه العبارة حتمًا غير صحيحة.

34. $\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}} \cdot \dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{1}$$

$$\sin(A+B) = \sin(A+B) \ \checkmark$$

35. $\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}} \cdot \dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{1}$$

$$\cos(A+B) = \cos(A+B) \ \checkmark$$

36. $\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}} \cdot \dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\cos(A-B)}$$

$$\sec(A-B) = \sec(A-B) \ \checkmark$$

37.

$$\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 B \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^2 B(\sin^2 A + \cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1) - (\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B \ \checkmark$$

40. $\cot(A+B) = \dfrac{1}{\tan(A+B)}$

$$= \dfrac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

$$= \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}$$

$$= \dfrac{1 - \frac{1}{\cot A} \cdot \frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} \cdot \dfrac{\cot A \cot B}{\cot A \cot B}$$

$$= \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

41. $d = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$

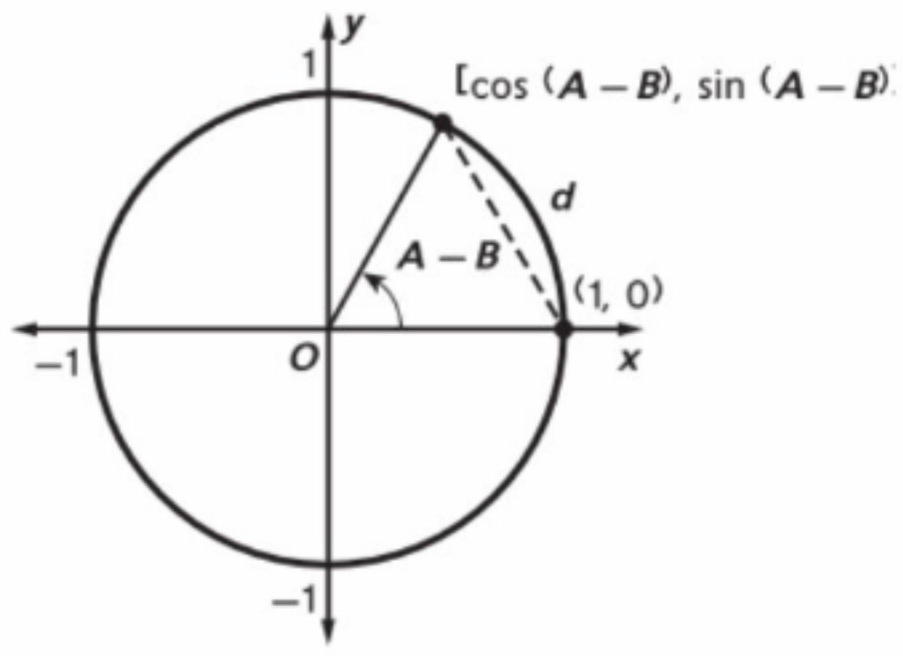
$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$d^2 = (\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta)$$

$$d^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$d^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

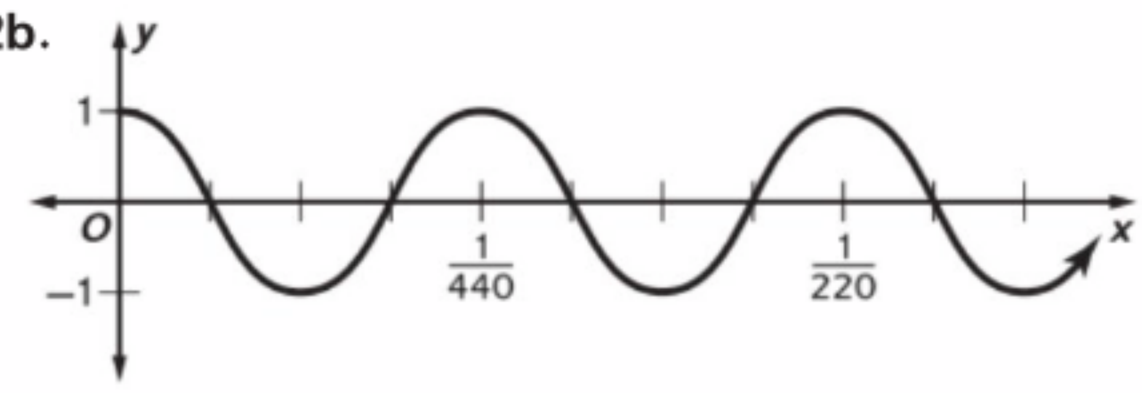
$$d^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$



أوجد الآن قيمة d^2 عندما تقع الزاوية التي قياسها $\alpha - \beta$ في موضع قياسي في دائرة الوحدة، كما في الشكل الموضح أعلاه.

$$d = \sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + [\sin(\alpha-\beta)-0]^2}$$
$$d^2 = [\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + [\sin(\alpha-\beta)-0]^2$$
$$= [\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1] + \sin^2(\alpha-\beta)$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

52b.



53. الخطوة 1: $4^1 - 1 = 3$، وهذه الإجابة قابلة للقسمة على 3. العبارة صحيحة عند القيمة $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 عند قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ ما لـ k. وهذا يعني أن $4^k - 1 = 3r$ عند عددٍ كليٍ ما r.

الخطوة

$$4^k - 1 = 3r$$
$$4^k = 3r + 1$$
$$4^{k+1} = 12r + 4$$
$$4^{k+1} - 1 = 12r + 3$$
$$4^{k+1} - 1 = 3(4r + 1)$$

بما أن r عددٌ كلي، فإن $4r + 1$ عددٌ كلي. ولذا فإن $4^{k+1} - 1$ قابلٌ للقسمة على 3. إذًا فالعبارة صحيحةٌ عند $n = k + 1$. ولذلك، $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 عند جميع القيم الصحيحة الموجبة لـ n.

54. الخطوة 1: $5^1 + 3 = 8$، وهذه الإجابة قابلة للقسمة على 4. العبارة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $5^k + 3$ قابل للقسمة على 4 عند قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ ما لـ k. وهذا يعني أن $5^k + 3 = 4r$ عند عددٍ صحيحٍ موجبٍ ما r.

الخطوة 3:

$$5^k + 3 = 4r$$
$$5^k = 4r - 3$$
$$5^{k+1} = 20r - 15$$
$$5^{k+1} + 3 = 20r - 12$$
$$5^{k+1} + 3 = 4(5r - 3)$$

بما أن r عددٌ صحيحٌ موجب، فإن $5r - 3$ عددٌ صحيحٌ موجب. وبالتالي، فإن $5^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذًا فالعبارة صحيحةٌ عند $n = k + 1$. ولذلك، $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة لكلّ الأعداد الصحيحة الموجبة n.

اختبار نصف الوحدة

11.
$$\sec^2\theta + 1 \overset{?}{=} \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\csc^2\theta \overset{?}{=} \frac{\cos\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\csc^2\theta \overset{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta \ \checkmark$$

12.
$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} \overset{?}{=} 1$$
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \tan\theta \overset{?}{=} 1$$
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \overset{?}{=} 1$$
$$1 = 1 \ \checkmark$$

13.
$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} \overset{?}{=} (1+\cos\theta)\sec\theta$$
$$\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1-\cos\theta} \overset{?}{=} (1+\cos\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1-\cos\theta} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} \overset{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$
$$\frac{1}{\cos\theta} + 1 = \frac{1}{\cos\theta} + 1 \ \checkmark$$

14.
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta} \cdot \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) \overset{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot (1-\sin\theta)$$
$$\tan\theta(1-\sin\theta) = \tan\theta(1-\sin\theta) \ \checkmark$$

15b. $\cot\theta = \frac{24}{18}, \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{24}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{24}{18}$، إذًا $\frac{24}{18} = \frac{24}{18}$

16.
$$\tan^2\theta + 1 \overset{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \overset{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \overset{?}{=} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \overset{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin\theta}$$
$$\sec^2\theta \overset{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\sec^2\theta = \sec^2\theta \ \checkmark$$

الدرس 12-4

26. $\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \dfrac{\tan\theta}{\tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta = \tan 2\theta$ ✓

27. $1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sec\theta + \sin\theta}{\sec\theta}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}$

$\stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}$

$\stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ ✓

28. $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2}$ ✓

29. $\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$ ✓

17. $\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta + 1} \cdot \dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{1} \cdot \dfrac{1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$(\sec\theta + 1)\cot\theta = (\sec\theta + 1)\cot\theta$ ✓

18. $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \tan^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta \cdot \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta$ ✓

19. $\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta} \cdot \dfrac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) = \cot\theta(1 - \cos\theta)$ ✓

25. $\cos 30^\circ\cos\theta + \sin 30^\circ\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60^\circ\cos\theta + \cos 60^\circ\sin\theta$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta$ ✓

30. عندما يكون $\theta = 45° + \alpha$. فإن

$$d = \frac{v^2 \sin 2\,(45° + \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin (90° + 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90° \cos 2\alpha + \cos 90° \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2\alpha + 0 \cdot \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

عندما $\theta = 45° - \alpha$. فإن

$$d = \frac{v^2 \sin 2\,(45° - \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \sin (90° - 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90° \cos 2\alpha - \cos 90° \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2\alpha - 0 \cdot \sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

37. لا؛ جمعت بثينة الجذور التربيعية على نحوٍ خاطئ؛ واستخدمت بدرية متطابقة نصف الزاوية على نحوٍ خاطئ؛ استخدمت بدرية $\sin 30°$ في الصيغة بدلاً من البحث عن الـ cosine أولاً.

39. إذا تم إعطاؤك قيمة $\cos \theta$ فقط، فإن المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ هي المتطابقة الأفضل للاستخدام. وإذا أُعطيت قيمة $\sin \theta$ فقط، فإنّ المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ تكون هي الأفضل للاستخدام. وإذا أُعطيت كلتا قيمتي $\cos \theta$ و $\sin \theta$. إذًا فالمتطابقة $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ تفي بالغرض كسابقتيها.

40. $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$
$= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$
$= 2 \sin \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$
$= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$
$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

يمكنك إيجاد صيغ بديلة لـ $\cos 2\theta$ عبر إجراء تعويضاتٍ في التعبير $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.

$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta$
$= 1 - 2\sin^2 \theta$

عوّض $1 - \sin^2 \theta$ مكان $\cos^2 \theta$.
بسّط.

$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)$
$= 2\cos^2 \theta - 1$

عوّض $1 - \cos^2 \theta$ بدلاً من $\sin^2 \theta$.
بسّط.

41. $1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta$

$1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \cos A$ — عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A بدلاً من 2θ.

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ — حلّ لإيجاد $\sin^2 \frac{A}{2}$.

$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ — خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

أوجد $\cos \frac{A}{2}$.

$2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$ — $2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$ متطابقة الزاوية المزدوجة

$2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$ — $2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$ عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A بدلاً من 2θ.

$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$ — حلّ لإيجاد $\cos^2 \frac{A}{2}$.

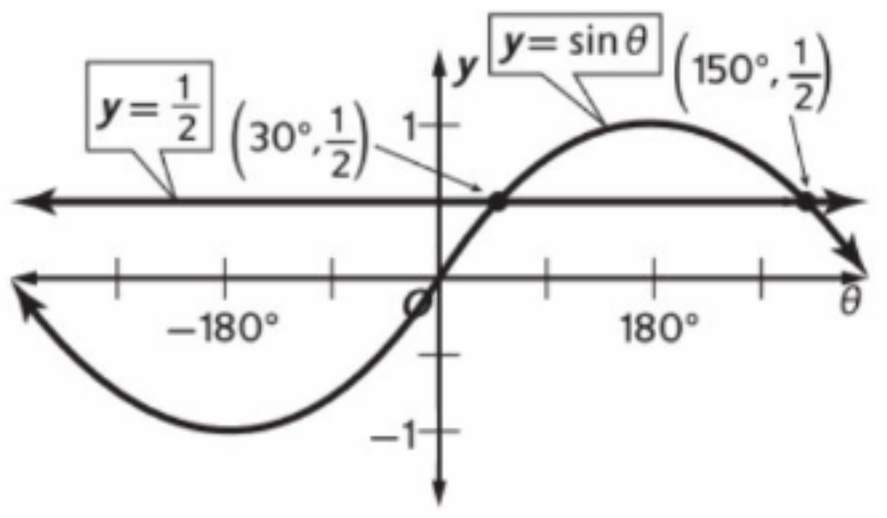
$\cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ — خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الدرس 12-5

58a.

θ	$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$
0°	1	210°	$-\frac{1}{2}$
30°	$\frac{1}{2}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	270°	-1
90°	1	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	330°	$-\frac{1}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	360°	0
180°	0		

58b. يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30° < \theta < 150°$.



58c. يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30° < \theta < 150°$. وفترة $\sin \theta$ تساوي $[-360°, 360°]$. إذًا فحلول $\sin \theta > \frac{1}{2}$ هي $30° + k \cdot 360° < \theta < 150° + k \cdot 360°$.

تدريب على الاختبار

14. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \cot\theta$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ ✓

16a. $18^2 = 9^2 + a^2$; $324 = 81 + a^2$; $243 = a^2$; $a = 9\sqrt{3}$

16b. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$;

$\sin 2(30°) = 2\sin 30° \cos 30°$;

$\sin 60° = 2\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}\right) = \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin 60° = 9\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21. $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$; $25 = \frac{20^2}{9.8}\sin 2\theta$; $0.6125 = \sin 2\theta$; $\theta \approx 18.9°$

58d. i. $0° \le \theta \le 45°$ and $315° \le \theta \le 360°$; $0° + k \cdot 360° \le \theta \le 45° + k \cdot 360°$ and $315° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; ii. $0° \le \theta \le 60°$ and $120° \le \theta \le 360°$; $0° + k \cdot 360° \le \theta \le 60° + k \cdot 360°$ and $120° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; iii. $180° \le \theta \le 360°$; $180° + k \cdot 360° \le \theta \le 360° + k \cdot 360°$; iv. $60° \le \theta \le 300°$; $60° + k \cdot 360° \le \theta \le 300° + k \cdot 360°$

دليل الدراسة والمراجعة

30. $\sin(\theta + 90) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin\theta\cos 90° + \cos\theta\sin 90° \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

31. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(-1)\cos\theta - (0)\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

32. $\tan(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - \tan\pi}{1 + \tan\theta\tan\pi} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - 0}{1 + (\tan\theta)(0)} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta}{1} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\tan\theta = \tan\theta$ ✓

33. $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

34. $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4}$,

$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{15}}}{4}$

35. $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{9}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, and $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

36a. $c^2 = 90^2 + 90^2$; $c^2 = 8100 + 8100$; $c^2 = 16{,}200$; $c = 90\sqrt{2}$

36b. $\sin 45° = \frac{90}{90\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

36c. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}}$;

$\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$