ورقة عمل الحادي عشر المتقدم 9-6 التكرار والإعادة

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1– التعرف على المتتاليات الخاصة واستخدامها. 2– التعرف على دوال التكرار.

تولد أنثى نحل العسل عندما تتزاوج الملكة مع ذكر نحل، ويكون للأنثى والدين وهما الأب والأم. إلا أن ذكر نحل العسل يولد من بيض الملكة غير المخصب، وبذلك يكون لديه والد واحد فقط وهو الأم. وتتبع شجرة عائلة نحل العسل متتالية خاصة.

الجيل	1	2	3	4	5	6
الآباء	1	1	2	3	5	8

لاحظ أن كل حد موجود في قائمة الآباء يساوي مجموع الحدين السابقين. ويطلق على هذه المتتالية الخاصة متتالية فيبوناتشي، وتوجد في العديد من الأمثلة الطبيعية. وتعد متتالية فيبوناتشي مثالاً على المتتالية التكرارية. في المتتالية التكرارية، يتم تحديد كل حد باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة.

تندرج الصيغ التي استخدمتها حتى الآن في المتتاليات تحت الصيغ الصريحة. تنتج الصيغة الصريحة a_n في صورة دالة لـ n، مثل $a_n=3n+1$. تُعد الصيغة التي تصف متتالية فيبوناتشي، $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ صيغة تكرارية أو صيغة ضمنية، وهذا يعني أن كل حد سيتم تحديده باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة. ويجب أن نحصل على الحد الأولي في الصيغة التكرارية أو الضمنية.

المفهوم الأساسي الصيغ التكرارية / الضمنية للمتتاليات

المتتالية الحسابية $a_n = a_{n-1} + d$، حيث d هو الفرق المشترك

المتتالية الهندسية $a_n = r \cdot a_{n-1}$، حيث r هو النسبة المشتركة

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
صيغة الحد النوني (الصريحة)	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
الصيغة التكرارية (الضمنية)	$a_n = a_{n-1} + d \;,\; a_1 = --- \;,\; n \ge 2$	$a_n = r \cdot a_{n-1} \;,\; a_1 = --- \;,\; n \ge 2$

استخدام صيغة تكرارية/ ضمنية

جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية موضحة.

1. $a_1 = 16,\ a_{n+1} = a_n + 4$

الحد اللاحق الحد السابق

$a_1 = 16$

$a_2 = 16 + 4 = 20$

$a_3 = 20 + 4 = 24$

$a_4 = 24 + 4 = 28$

$a_5 = 28 + 4 = 32$

4. $a_1 = -4,\ a_{n+1} = 2a_n - 6$

الحد السابق

$a_1 = -4$

$a_2 = 2(-4) - 6 = -14$

$a_3 = 2(-14) - 6 = -34$

$a_4 = 2(-34) - 6 = -74$

$a_5 = 2(-74) - 6 = -154$

لإيجاد صيغة تكرارية، حدد أولاً الحد الأولي. ثم قيّم النمط لإيجاد الحدود التالية. ولا تشتمل الصيغة التكرارية التي تنتج متتالية على قيمة الحد الأولي.

استخدام صيغة تكرارية/ ضمنية

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

Example 2a. 2, 10, 18, 26, 34, …

$d = 10 - 2 = \boxed{8}$ نلاحظ أن المتتالية حسابية لأن

الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_{n-1} + 8$, $a_1 = 2$, $n \geq 2$

Example 2b. 16, 56, 196, 686, 2401, …

$r = \frac{56}{16} = \boxed{\frac{7}{2}}$ نلاحظ أن المتتالية هندسية لأن

الصيغة التكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = a_{n-1} \times r$

$a_n = a_{n-1} \times \left(\frac{7}{2}\right)$, $a_1 = 16$, $n \geq 2$

Example 2c. $a_4 = 108$ and $r = 3$

المتتالية هندسية

الصيغة الصريحة

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_4 = a_1 \times 3^3$

$108 = a_1 \times 27$

$\Rightarrow a_1 = \frac{108}{27} = 4$

الصيغة التكرارية

$a_n = a_{n-1} \times r$

$a_n = a_{n-1} \times (3)$, $a_1 = 4$, $n \geq 2$

2C. $a_3 = 16$ and $r = 4$

المتتالية هندسية.

الصيغة الصريحة

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_3 = a_1 \times 4^2$

$16 = a_1 \times 16$

$\Rightarrow a_1 = \frac{16}{16} = 1$

الصيغة التكرارية:

$a_n = a_{n-1} \times r$

$a_n = a_{n-1} \times (4)$, $a_1 = 1$, $n \geq 2$

مثال 3. المعرفة المالية كان لدى ناصر AED 15,000 في مديونية البطاقة الائتمانية عندما تخرج من الكلية. وقد ازداد الرصيد بمقدار 2% كل شهر بفعل نسبة المرابحة، ولا يُمكن لناصر أن يسدد سوى AED 400 كل شهر. اكتب صيغة تكرارية لرصيد حسابه لكل شهر. ثم حدد الرصيد بعد مرور خمسة أشهر.

نفترض أن الرصيد في البداية هو $15\,000 = a_1$

في الشهر الثاني

$a_2 = a_1 + a_1(0.02) - 400$

$a_2 = a_1(1 + 0.02) - 400$

الصيغة التكرارية

$a_n = a_{n-1}(1.02) - 400 \quad , \quad a_1 = 15\,000 \quad , \quad n \geq 2$

$a_1 = 15\,000$

$a_2 = 15000(1.02) - 400 = 14\,900$

$a_3 = 14900(1.02) - 400 = 14\,798$

$a_4 = 14798(1.02) - 400 = 14\,693.96$

$a_5 = 14693.96(1.02) - 400 = 14587.84$

$a_6 = 14587.84(1.02) - 400 = 14479.60$

بعد الشهر الخامس $\boxed{a_6 = 14479.60}$ درهم

تمرين موجّه 3. المعرفة المالية اكتب صيغة تكرارية لدين يبلغ AED 10,000، ونسبة المرابحة بقيمة 2.5 % كل شهر، مع سداد مبلغ AED 600 كل شهر. ثم جد المبالغ الخمس الأولى التي كانت متوفرة في الرصيد.

نفترض أن الرصيد في البداية $10\,000 = a_1$

$a_2 = a_1 + a_1(2.5)\% - 600$

$a_2 = a_1(1 + 2.5\%) - 600$

$a_2 = a_1(1.025) - 600$

الصيغة التكرارية

$\Rightarrow a_n = a_{n-1}(1.025) - 600 \quad , \quad a_1 = 10\,000 \quad , \quad n \geq 2$

$a_1 = 10\,000$

$a_2 = 10\,000(1.025) - 600 = 9650$

$a_3 = 9650(1.025) - 600 = 9291.25$

$a_4 = 9291.25(1.025) - 600 = 8923.53$

$a_5 = 8923.53(1.025) - 600 = 8546.62$

الإعادة هي عملية تركيب دالة بشكل متكرر من نفسها. تأمل الدالة x_0 الإعادة الأولى هي $f(x_0)$ والإعادة الثانية هي $f(f(x_0))$، والإعادة الثالثة هي $f(f(f(x_0)))$، وهكذا.

يُمكن استخدام الإعادة في إنتاج متتالية بشكل تكراري. ابدأ بالقيمة الأولية x_0. افترض أن $x1= f(x_0)$ و $x2= f(f(x_0))$ ، وهكذا.

إعادة الدالة

جد الإعادات الثلاث الأُوَل لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.

33. $f(x) = 12x + 8,\ x_0 = 4$

$x_1 = f(x_0) = f(4)$
$= 12(4) + 8 = 56$

$x_2 = f(x_1) = f(56)$
$= 12(56) + 8 = 680$

$x_3 = f(x_2) = f(680)$
$= 12(680) + 8 = 8168$

38. $f(x) = 4x^2 + 5,\ x_0 = -2$

$x_1 = 4(-2)^2 + 5 = 21$

$x_2 = 4(21)^2 + 5 = 1769$

$x_3 = 4(1769)^2 + 5 = 12517449$

41. $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = (\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) + 3 = 4.25$

$x_2 = (4.25)^2 + 2(4.25) + 3 = 29.5625$

$x_3 = (29.5625)^2 + 2(29.5625) + 3$
$= 936.0664$

39. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1,\ x_0 = 6$

$x_1 = 2(6)^2 - 5(6) + 1 = 43$

$x_2 = 2(43)^2 - 5(43) + 1 = 3484$

$x_3 = 2(3484)^2 - 5(3484) + 1$
$= 24259093$