

الأنظمة الجاسئة

Systems of Particles and Extended Objects

8

8.1 مركز الكتلة ومركز الثقل (C.M.)

التعريف (C.M.)
إنَّ مركز الكتلة (مركز الثقل) هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.

⊗ إذا كان الجسم منتظم الشكل فإن نقطة مركز الكتلة (C.M.) تكون في منتصف الجسم لكن إذا كان الجسم غير منتظم الشكل فإن نقطة مركز الكتلة تكون أقرب للجزء الأثقل في الجسم.

لتحديد نقطة مركز الكتلة لأكثر من جسم

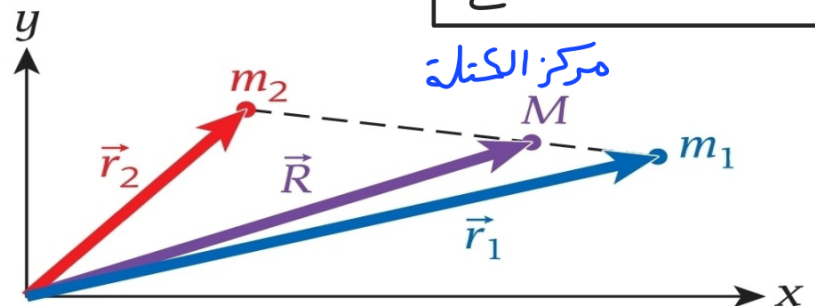
$$X_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Y_{cm} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Z_{cm} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

① إحداثيات الجسم 1: $x_1 / y_1 / z_1$

② إحداثيات الجسم 2: $x_2 / y_2 / z_2$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$\vec{r}_1 =$ موقع m_1
 $\vec{r}_2 =$ موقع m_2
 $\vec{R} =$ موقع مركز كتلة النظام



الشكل 8.2 موقع مركز الكتلة لنظام مكون من كتلتين m_1 و m_2 .
حيث $M = m_1 + m_2$

مراجعة المفاهيم 8.1

في الحالة الموضحة في الشكل 8.2. ما المقادير النسبية للكتلتين m_1 و m_2 ؟

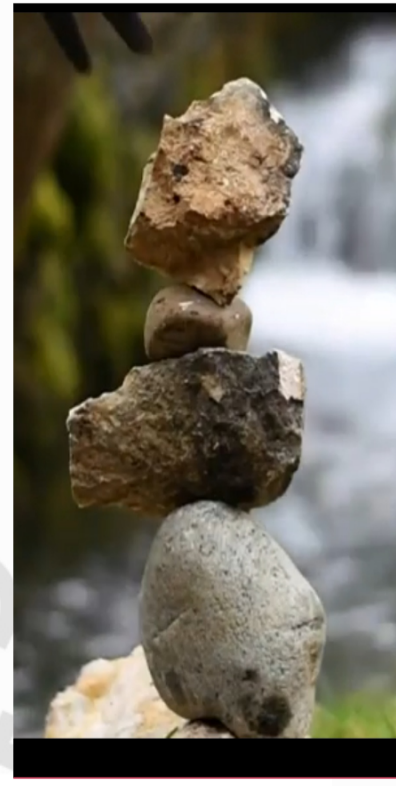
$$m_1 < m_2 \text{ (a)}$$

$$m_1 > m_2 \text{ (b)}$$

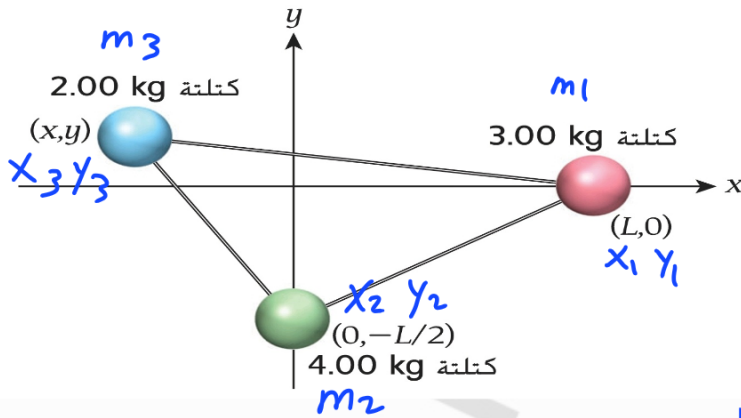
$$m_1 = m_2 \text{ (c)}$$

(d) لا يمكن تحديد أي الكتلتين أكبر استنادًا إلى المعلومات المتوفرة في الشكل فقط.

لأن m مركز الكتلة
أقرب لـ m_1



8.30 • إحداثيات مركز كتلة الجسم غير النقطي الموضح في الشكل هي $(L/4, -L/5)$. ما إحداثيات الكتلة التي تبلغ 2.00 kg ؟



مركز الكتلة = (C.M.)

$$\left(\frac{L}{4}, -\frac{L}{5} \right)$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\frac{L}{4} = \frac{3(L) + 4(0) + 2x_3}{3 + 4 + 2}$$

$$\frac{L}{4} = \frac{3L + 2x_3}{9}$$

$$9L = 12L + 8x_3 \rightarrow 9L - 12L = 8x_3$$

$$-3L = 8x_3 \rightarrow x_3 = \frac{-3L}{8}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$-\frac{L}{5} = \frac{3(0) + 4(-\frac{L}{2}) + 2y_3}{3 + 4 + 2}$$

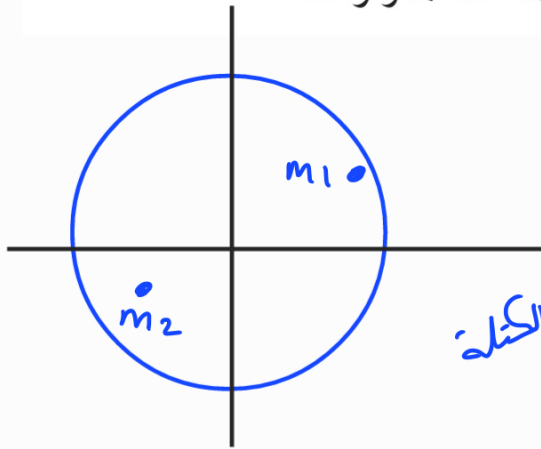
$$-\frac{L}{5} = \frac{-2L + 2y_3}{9}$$

$$-9L = -10L - 10y_3$$

$$L = 10y_3 \rightarrow y_3 = \frac{L}{10}$$



8.31 • يقف بهلوانات صغار في وضع سكون على منصة أفقية دائرية مرتكزة على حامل عند نقطة منتصفها. لذا من المفترض أن تقع نقطة الأصل للنظام الإحداثي الديكارتي ثنائي الأبعاد عند منتصف المنصة. ويقف بهلوان كتلته 30.0 kg عند (3.00 m, 4.00 m)، بينما يقف بهلوان آخر كتلته 40.0 kg عند (-2.00 m, -2.00 m). بافتراض أن البهلوانات يقفون في وضع سكون في مواقعهم، فأين يجب أن يقف بهلوان كتلته 20.0 kg بحيث يكون مركز كتلة النظام المكون من البهلوانات الثلاثة عند نقطة الأصل وتكون المنصة متوازنة؟



$$m_1 = 30 \text{ kg} \quad (4, 3)$$

$$m_2 = 40 \text{ kg} \quad (-2, -2)$$

$$m_3 = 20 \text{ kg} \quad (x, y)$$

مركز الكتلة

$$C.M = (0, 0)$$

اين سيقف

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$0 = \frac{30(4) + 40(-2) + 20x}{30 + 40 + 20}$$

$$0 = \frac{30(3) + 40(-2) + 20y}{30 + 40 + 20}$$

$$x = -2 \text{ m}$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ m}$$

$$m_3 = 20 \text{ kg} \quad (-2, -\frac{1}{2})$$

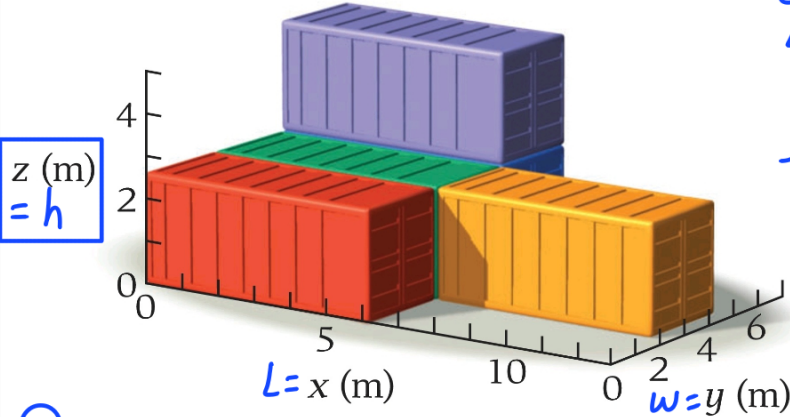
~~✗~~

تأتي حاويات الشحن الكبيرة، التي يمكن نقلها بالشاحنات أو القطارات أو السفن، بأحجام قياسية. من أكثر الحاويات شيوعًا من حيث الحجم الحاوية التي مساحتها 20' وفقًا للمعيار الدولي ISO، والتي يبلغ طولها 6.1 m وعرضها 2.4 m وارتفاعها 2.6 m. ويُسمح بأن تكون كتلة هذه الحاوية (بما تحويه طبقًا) ما يصل إلى 30,400 kg.

المسألة

ترتكز حاويات الشحن الخمس الموضحة في الشكل 8.4 على سطح سفينة حاويات. وتبلغ كتلة كل حاوية 9,000 kg. باستثناء الحاوية الحمراء التي تبلغ كتلتها 18,000 kg. إذا افترضنا أن لكل حاوية مركز كتلة في مركزها الهندسي، فما إحداثي (x) وإحداثي (y) لمركز الكتلة المشترك بين الحاويات؟ استخدم النظام الإحداثي المبين في الشكل لتوضيح موقع مركز الكتلة هذا.

الارتفاع العرض طول
 $L = 6.1 \text{ m} / w = 2.4 \text{ m} / h = 2.6 \text{ m}$
 $m = m = m = m = m = 9000 \text{ kg} = m$
 اصفر بنفسجي ازرقي اخضر
 $m = 18000 \text{ kg} = 2m$
 احمر



مركز ثقل (كتلة) كل حاوية في منتصفها

إحداثيات مركز كتلة كل حاوية

1. $C.M. = (\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}h)$ احمر
2. $C.M. = (\frac{1}{2}, 1.5w, \frac{1}{2}h)$ اخضر
3. $C.M. = (1.5L, 1.5w, \frac{1}{2}h)$ اصفر
4. $C.M. = (\frac{1}{2}L, 2.5w, \frac{1}{2}h)$ ازرقي
5. $C.M. = (\frac{1}{2}L, 2.5w, 1.5h)$ بنفسجي

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$= \frac{2m(\frac{1}{2}L) + m(\frac{1}{2}L) + m(1.5L) + m(\frac{1}{2}L) + m(\frac{1}{2}L)}{2m + m + m + m + m} = \frac{4mL}{6m}$$

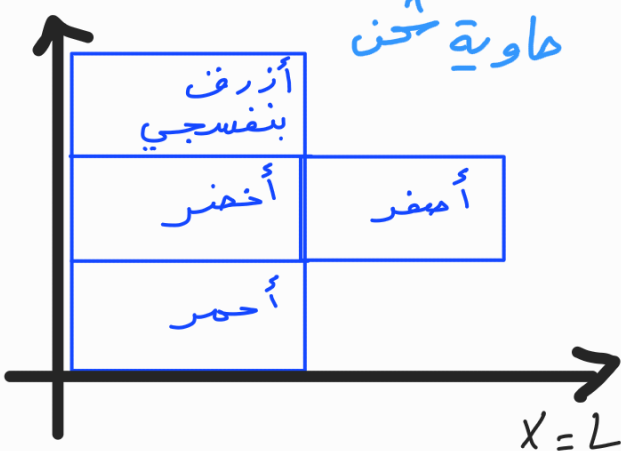
$$X_{cm} = \frac{4(6.1)}{6} \rightarrow \boxed{X_{cm} = 4.1 \text{ m}}$$

$$Y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 + m_5 y_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$= \frac{2m(\frac{1}{2}w) + m(1.5w) + m(1.5w) + m(2.5w) + m(2.5w)}{2m + m + m + m + m} = \frac{9mw}{6m}$$

$$Y_{cm} = \frac{9(2.4)}{6} \rightarrow \boxed{Y_{cm} = 3.6 \text{ m}}$$

$$y = w$$



حاوية شحن

$$L = 6.1 \text{ m} \quad w = 2.4 \text{ m} \quad h = 2.6 \text{ m}$$

$$\text{أحمر} \left(\frac{1}{2} L, \frac{1}{2} w, \frac{1}{2} h \right)$$

$$\text{أخضر} \left(\frac{1}{2} L, 1.5 w, \frac{1}{2} h \right)$$

$$\text{أزرق} \left(\frac{1}{2} L, 2.5 w, \frac{1}{2} h \right)$$

$$\text{بنفسجي} \left(\frac{1}{2} L, 2.5 w, 1.5 h \right)$$

$$\text{أصفر} \left(1.5 L, 1.5 w, \frac{1}{2} h \right)$$

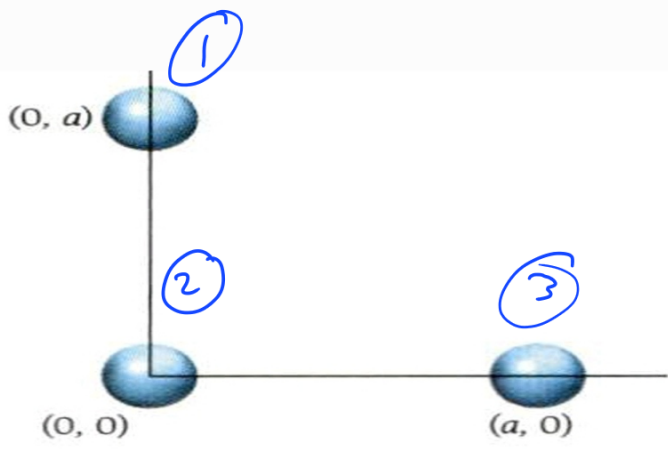
$$m_{\text{كل}} = m / m_{\text{أحمر}} = 2m$$

$$1) \quad x_{cm} = \frac{2m \left(\frac{1}{2} L \right) + m \left(\frac{1}{2} \right) + m \left(\frac{1}{2} L \right) + m \left(\frac{1}{2} L \right) + m (1.5 L)}{2m + m + m + m + m}$$

$$= \frac{4 \cancel{m} L}{6 \cancel{m}} = \frac{4 \times 6.1}{6} = 4.1 \text{ m}$$

$$2) \quad y_{cm} = \frac{2m \left(\frac{1}{2} w \right) + m (1.5 w) + m (2.5 w) + m (2.5 w) + m (1.5 w)}{2m + m + m + m + m}$$

$$= \frac{9 \cancel{m} w}{6 \cancel{m}} = \frac{9 \times 2.4}{6} = 3.6 \text{ m}$$



8.58 وضعت ثلاث كرات متماثلة كتلتها m بالترتيب الموضح في الشكل. أوجد موقع مركز الكتلة.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cm} = \frac{m(0) + m(0) + m(a)}{3m}$$

$$y_{cm} = \frac{m(a) + m(0) + m(0)}{3m}$$

$$x_{cm} = \frac{ma}{3m} = \frac{1}{3}a$$

$$y_{cm} = \frac{ma}{3m} = \frac{1}{3}a$$

$$r_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$$

~~///~~