حساب النهايات

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

تتوزع على الجمع – الطرح –الضرب

ولكن في القسمة المقام $x \neq 0$

يكون فيها تعويض مباشر

- كثيرات الحدود
- $\sqrt[3]{g(x)}$
- دالة مثلثية: $\sin\theta$, $\cos\theta$
- دالة أسية او لوغاريتمية
- $|g(x)|$

مثال : (تعويض مباشر)

$$\lim_{x\to 1}(4x^3 - \frac{1}{x} + |x|)$$

$$\lim_{x\to 1}(4(1)^3 - \frac{1}{1} + |1|)$$

$$\lim_{x\to 1} = 4$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

(تعويض مباشر)

R

$\frac{\text{اي عدد}}{\text{اي عدد غير } 0}$

النهاية موجوده وتساوي عدد الناتج

(النهاية غير موجودة)

$\frac{\text{اي عدد غير } 0}{\text{صفر}}$

(نشطب)

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

تكون النهاية موجوده

نغير شكل الدالة حتى نتمكن من التعويض وايجاد النهاية

الطرق :

1) التحليل
2) الضرب في المرافق
3) توحيد المقامات

1) أخراج عامل مشترك
2) الفرق بين مربعين
3) تقدير المقدار الثلاثي
4) الفرق ومجموع مكعبين

مثل :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 3} 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-3}{3+3} = \frac{0}{6} = 0$$

مثل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5}{x-1} = \frac{7}{0}$$

النهاية غير موجوده

مثل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-5} = \frac{1}{-5}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+5} = \frac{0}{6} = 0$$

حساب النهايات

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

دالها فيها جذر

يكون فيها تعويض مباشر

$\sqrt{+}$ الناتج هو الحل

مثال :

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{2x-5})$$
$$\lim_{x\to 4}=\sqrt{3}$$

$\sqrt{=}$ لا توجد نهاية

مثال :

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2-5})$$
$$\lim_{x\to 0}=\sqrt{-5}$$

النهاية غير موجوده

$\sqrt{0}$ نبحث عن المجال ونحدد النهاية

مثال :

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-4})$$
$$\lim_{x\to 2}=\sqrt{0}$$
$$2x-4\geq 0$$
$$x\geq 2$$

النهاية غير موجوده

لان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 2-}(\sqrt{2x-4})$$

النهاية غير موجوده

$$\lim_{x\to 2+}(\sqrt{2x-4})$$
$$\lim_{x\to 2+}=0$$

(عندما يكون هناك كسر و جذر)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$$

نغير شكل الداله و نستخدم الضرب في المرافق

مثال :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})}{(x-1)}\times\frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\frac{(1-x)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

نستخرج السالب عامل مشترك

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\frac{-(-1+x)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1+\sqrt{1})}=-\frac{1}{2}$$

(ملاحظه)

$(x-y)^2$ (الفرق بين مربعين)

$(x^2-2xy+y^2)$

$(x-y)^3$ (الفرق بين مكعبين)

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$

حساب النهايات

الدوال المثلثية

(قواعد)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0}$$ تكون النهاية دائما غير موجوده

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{mx}=\frac{k}{m} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{kx}=\frac{m}{k}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin mx)^n}{x^n}=m^n$$

أمثله :

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{1}}$$ نحول القسمة الى ضرب ونقلب المقسوم عليه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

تعويض مباشر !!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1} \longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{9x}=\frac{10}{9}$$

(عندما يكون هناك مطلق)

نعيد تعريف المطلق

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x} \longrightarrow |x|=\begin{cases} x>0 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$ لان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin -x}{x}=-1$$ النهاية غير موجوده

$$\lim_{x\to a}=\sin a$$

$$\lim_{x\to a}=\cos a$$

$$\lim_{x\to a}=\tan a$$

تعويض مباشر

حيث ان a ليس من أصفار المقام

(ملاحظه)

(متطابقات فيثاغورس) يمكن استخدامها بالحل

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$
$$1+\tan^2 x=\sec^2 x$$
$$\cot^2 x+1=\csc^2 x$$

عندما تكون عندنا دالة متعددت التعريف :

1) نرسم خط الاعداد
2) نوجد النهاية لكل معادله
3) مقارنه النهايات ونحدد

النهاية موجده – النهاية غير موجوده

النهاية عند نقطة جبريا

$$\lim f(x)$$

$$L(x)\le f(x)\le g(x)$$

$$\lim_{x\to a}L(x)=k \qquad \lim_{x\to a}g(x)=k$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=k}$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$$

$$-1\le\cos\frac{1}{x^2}\le 1$$ الضرب ب x^2

$$-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x^2}\le x^2$$

$L(x)$ $\qquad$ $g(x)$

$$\lim_{x\to 0}x^2=0$$

$$\lim_{x\to 0}-x^2=0$$

النهاية تساوي 0