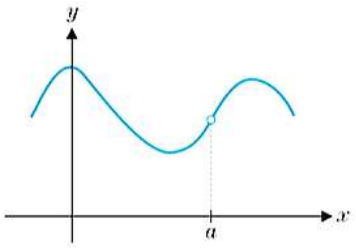
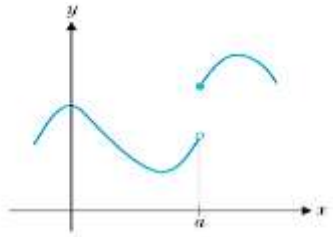
# الدرس 2.4 الاتصال و نتائجه



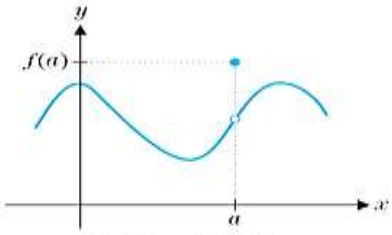

الشكل 2.22a

$f(a)$ غير معرّفة (هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = a$)



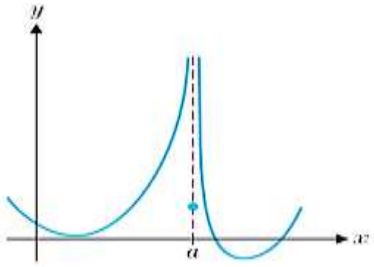

الشكل 2.22b

$f(a)$ معرّفة ولكن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة (وهناك قفزة في التمثيل البياني عند $x = a$)



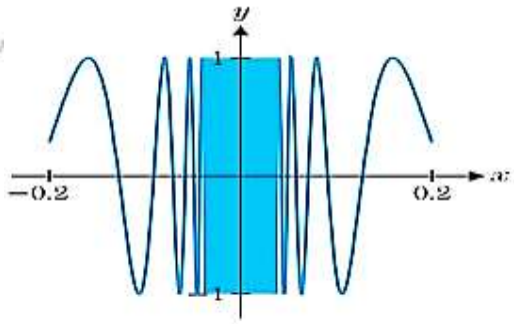

الشكل 2.22c

$\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة و $f(a)$ معرّفة، ولكن $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = a$).




الشكل 2.22d

$\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة (الدالة "تشهد ارتفاعًا لانهائيًا" عندما تقترب $x$ من $a$).




الشكل 2.25b

$y = \cos(1/x)$

دراسة الاتصال جبرياً

**التعريف 4.1**

لدالة $f$ معرّفة في فترة مفتوحة تتضمن $x = a$ ، نقول إنّ $f$ متصلة عند $a$ عندما تكون $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

**ارشاد**

كي نثبت أنّ الدالة متصلة عند $a$ باستخدام التعريف

i. نحسب $f(a)$
ii. نحسب $\lim_{x \to a} f(x)$ ( يجب أن تكون موجودة )
iii. يجب أن تتساوى النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ مع قيمة الدالة $f(a)$

**النظرية 4.1**

الدوال المتصلة على مجالها

i. كثيرات الحدود
ii. الدوال المثلثية
iii. الدوال المثلثية العكسية
iv. الدالة الأسية $e^x$
v. الدالة اللوغاريتمية
vi. الدوال الجذرية

**النظرية 4.2**

على فرض أنّ $f$ و $g$ متصلتان عند $x = a$ فإنّ كل مما يلي صحيحاً :

i. $(f \pm g)(x)$ متصلة عند $x = a$
ii. $(f \cdot g)(x)$ متصلة عند $x = a$
iii. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ متصلة عند $x = a$ ، إذا كانت $g(x) \neq 0$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

**النتيجة 4.1**

إذا كانت الدالة $g$ متصلة عند $a$ والدالة $f$ متصلة عند $g(a)$ ، فإنّ التركيب $f \circ g$ متصلة عند $a$.

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

**النظرية 4.3**

لتكن $\lim_{x \to a} g(x) = L$ و $f$ دالة متصلة عند $L$. فإنّ $\lim_{x \to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$

**التعريف 4.2** الاتصال على فترة مغلقة

إذا كانت $f$ متصلة عند كل نقطة في فترة مفتوحة $(a, b)$ ،
تكون الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت متصلة في الفترة المفتوحة $(a, b)$ و كان

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad and \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

نقول عن الدالة $f(x)$ أنها متصلة ، إذا كانت متصلة في الفترة $(-\infty, \infty)$

## اتصال الدوال النسبية

حدّد أين تكون الدالة $f$ متصلة ، و قم بتوسيع تعريف الدالة إلى دالة جديدة متصلة على فترة أكبر ( في حال كان الانفصال قابل للازالة )

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + x - 2}$

SAIF ALDEEN

5. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

6. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x-4}$

وضّح سبب عدم اتصال الدالة عند قيمة $x$ المعطاة

15. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $at$ $x = 1$

16. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $at$ $x = 1$

## اتصال الدوال المثلثية

حدد فترات اتصال الدوال ، و حدد نوع الانفصال إن وجد

7. $f(x) = x^2 \tan x$

**8.** $f(x) = x \cot x$

SAIF ALDEEN

## الاتصال لدالة اللوغاريتم

حدد فترات اتصال الدوال التالية و وضح نوع الانفصال

$f(x) = \ln x$ $g(x) = \ln(x-5)$

**9.** $f(x) = \ln x^2$ **10.** $f(x) = \dfrac{3}{\ln x^2}$

## دراسة اتصال الدوال متعددة التعريف

حدد فترات اتصال الدالة ، و اذكر نوع االنفصال ( إن وجد ) ، قم بتوسيع مجال الدالة ( إن أمكن )

**11.** $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

**12.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

**13.** $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x \leq -1 \\ x^2 + 5x & , -1 < x < 1 \\ 3x^3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

**14.** $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \leq 0 \\ \sin x & , \ 0 < x \leq \pi \\ x - \pi & , \quad x > \pi \end{cases}$

SAIF ALDEEN

**19.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 3 & , \ x = 2 \\ 3x - 2 & , \ x > 2 \end{cases}$

**43.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ 3x - 3 & , x > 2 \end{cases}$

حدد فيم إذا كانت الدالة متصلة من اليمين أو متصلة من اليسار عند $x = 2$

**44.** $f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 3 & , \ x = 2 \\ 3x - 3 & , \ x > 2 \end{cases}$

وضح سبب عدم الاتصال عند النقطة المعطاة

**17.** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $at\ x = 0$

**18.** $f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^x - 1}$ $at\ x = 0$

SAIF ALDEEN

## الاتصال على فترة مغلقة

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة $f$ متصلة

**21.** $f(x) = \sqrt{x+3}$

**22.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

**23.** $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

**24.** $f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$

**25.** $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

**26.** $f(x) = ln\,(\,sin\,x\,)$

**27.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$

**28.** $f(x) = \dfrac{ln\,(\,x^2 - 1\,)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

SAIF ALDEEN

النظرية 4.3

لتكن $\lim_{x\to a} g(x) = L$ و $f$ دالة متصلة عند $L$. فإنّ $\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$

52. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \neq 0 \\ 4 , & x = 0 \end{cases}$ و الدالة $g(x) = 2x$ وضّح أن $\lim_{x\to 0} f\left(g(x)\right) \neq f(\lim_{x\to 0} g(x))$

10) لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 , & x \leq 3 \\ 10 - 2x , & x > 3 \end{cases}$ $and$ $g(x) = 2x^2 + 1$ فأوجد $\lim_{x\to 1} f\left(g(x)\right)$ إذا كانت موجودة
و إذا كانت غير موجودة فوضّح السبب

11) لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 , & x \leq 1 \\ 10 - 2x , & x > 1 \end{cases}$ $and$ $g(x) = 2x^2 + 1$ فأوجد $\lim_{x\to 0} f\left(g(x)\right)$ إذا كانت موجودة
و إذا كانت غير موجودة فوضّح السبب

12) لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5 & , x \le 1 \\ -1 - 2x & , x > 1 \end{cases}$ and $g(x) = \ln x$

هل الدالة $f \circ g$ متصلة عند $x = e$ ؟ وضح السبب

SAIF ALDEEN

## ايجاد قيم الثوابت التي تجعل الدالة متصلة

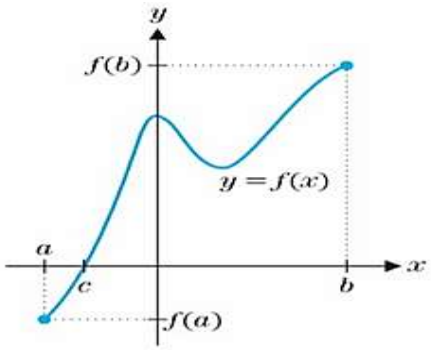
حدّد قيم الثوابت التي تجعل الدالة المعطاة متصلة

41. $f(x) = \begin{cases} a\,(\tan^{-1}x + 2) & , x < 0 \\ 2\,e^{bx} + 1 & , 0 \le x \le 3 \\ \ln(x-2) + x^2 & , x > 3 \end{cases}$

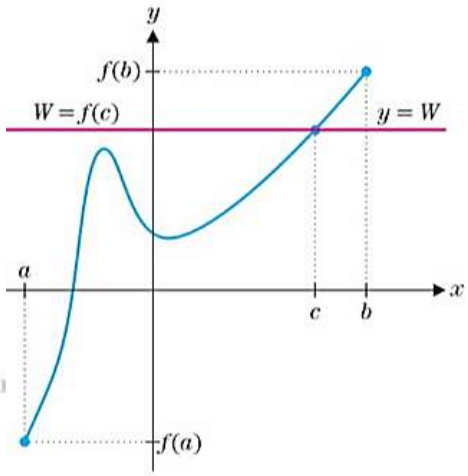
39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x} & , x < 0 \\ a & , x = 0 \\ b\cos x & , x > 0 \end{cases}$

## النظرية 4.4 ( نظرية القيمة الوسطيّة )

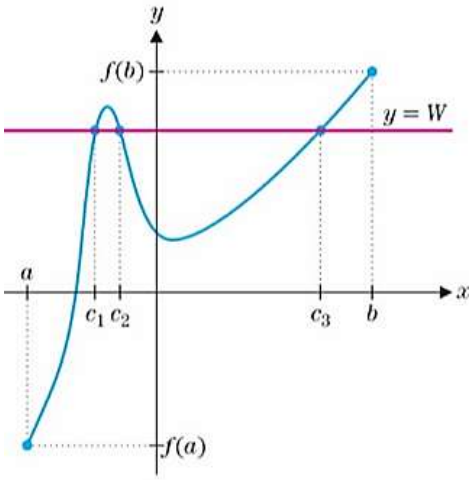
إذا كانت $f$ دالة متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ ، و كانت $W$ هي أي عدد بين $f(a)$ و $f(b)$
فإنّه يوجد عدد مثل $c \in [a,b]$ حيث $f(c) = W$




الشكل 2.30
نظرية القيمة الوسطيّة حيث $c$ هي صفر لـ $f$




الشكل 2.29a
رسم توضيحي لنظرية القيمة الوسطيّة




الشكل 2.29b
أكثر من قيمة واحدة لـ $c$

## النتيجة 4.2 ( تطبيق لنظرية القيمة الوسطيّة )

افترض أنّ $f$ دالة متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ ، و $f(a)$ and $f(b)$ لهما اشارات متعاكسة ، فإنّ هناك على الأقل عدد و احد $c \in (a,b)$ ، تكون عنده $f(c) = 0$ ( أي أنّ $c$ هو صفر للدالة )

## المثال 4.9 إيجاد أصفار الدالة بطريقة التنصيف

أوجد فترة طولها $\frac{1}{8}$ تحتوي على صفر للدالة $f(x) = x^5 + 4x^2 - 9x + 3$ في الفترة $[0,1]$

استخدم نظرية القيمة الوسطية للتحقق من أنّ $f(x)$ لها صفر في الفترة المعطاة ، ثم استخدم طريقة التنصيف لايجاد فترة طولها $1/8$ و التي تحتوي على الصفر

**33)** $f(x) = x^2 - 7 \ , \ [2,3]$

أي من الدوال تحقق شروط نظرية القيمة الوسطيّة على الفترة المعطاة

$a)\ f(x) = 2x - \frac{400}{x}$ $0n\ [-1,2]$

$b)\ g(x) = \tan x \ \ on \ \ [0,\pi]$

$c)\ h(x) = \ln x \ \ on \ \ (0,5)$

$d)\ r(x) = \sin x \ on \ [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

29. افترض أنّ القانون الضريبي في دولة ما ينص على أنّ الالتزام الضريبي المفروض على $x$ من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة موضّح بـ

$$T(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ 0.14\,x & , 0 < x < 10000 \\ c + 0.21\,x & , \ x \geq 10000 \end{cases}$$

حدّد الثابت $c$ الذي يجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم $x$ . قدّم سبباً منطقياً لكون هذه الدالة يجب أن تكون متصلة .

## تمارين اضافية

**اوجد قيمة k التي في كل مما يلي التي تجعل الدالة متصلة .**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - k & \text{if } x \le -4 \\ -10 & \text{if } x > -4 \end{cases}$$

$k =$ ☐

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{-2x^2 + 8x} & \text{if } x \neq 4 \\ k & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

$k =$ ☐

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} & \text{if } x \neq -2 \\ k & \text{if } x = -2 \end{cases}$$

$k =$ ☐

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{if } x \neq 2 \\ k & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

$k =$ ☐

1) إذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{x^2-7x+6}{x-a}$ موجودة ، فإن قيمة ( قيم ) $a$ هي .....

2) إذا كانت $\lim_{x\to -1} \frac{ax^2+bx-3}{x+1} = 5$ فأوجد قيم a و b

3) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2 - x\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$ متصلة عند $x = 0$ فأوجد قيمة $a$

4) أعد تعريف الدلة ( قم بتوسيع المجال ) $f(x) = \frac{4x-x^2}{|x-5|-1}$ بحيث تكون الدالة متصلة عند $x = 4$

SAIF ALDEEN

5 ) لتكن $f(x) = \frac{5-\sqrt{x-a}}{3-x}$
أوجد قيمة $a$ التي تجعل $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة

ثم أوجد قيمة $\lim_{x\to 3} f(x)$

6) إذا كانت $\lim_{x\to 2} \frac{ax^2+bx-10}{x-2} = 3$ فأوجد قيمة $a \text{ and } b$

7) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \ x \le 0 \\ \frac{\sqrt{2x+1}-1}{|x|} & , \ x. > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند $x = 0$ ، و حدد نوعه في حال كانت غير متصلة

8) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2-8x}{sin\, 2x} & , \ x > 0 \\ -4 & , \ x = 0 \\ \frac{4x}{|x|} & , \ x < 0 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند $x = 0$

9) أوجد قيمة $a \ and \ b$ التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة على $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & if \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & if \quad 2 \le x < 3 \\ 2x - a + b & if \quad x \ge 3 \end{cases}$$