



الفصل الدراسي الأول

النهايات والاتصال

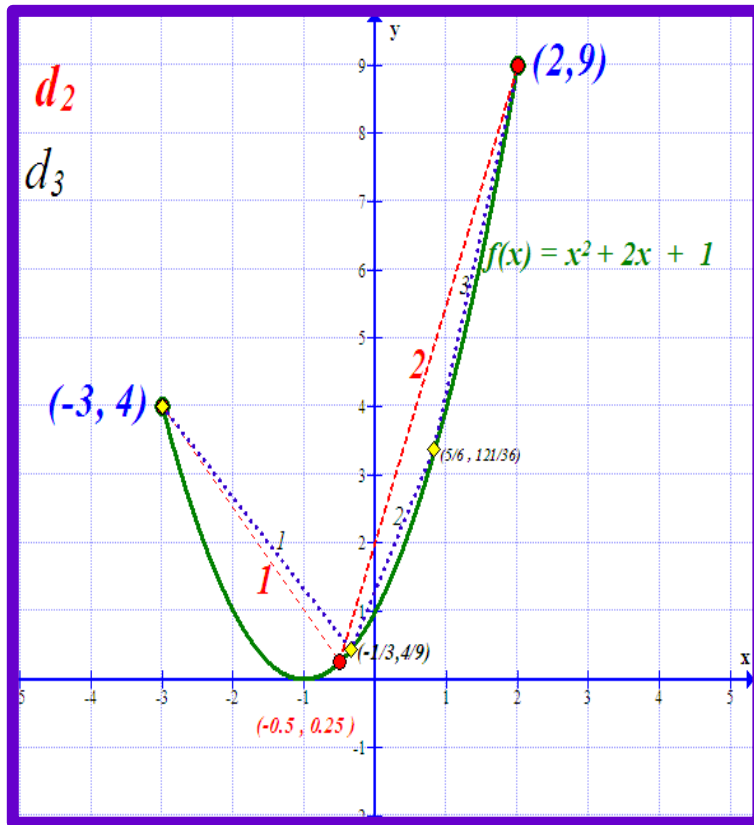
2023-2022

إعداد : الأستاذ محمود مراد 0528113301



$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad : \quad -3 \leq x \leq 2$$

1 التكن



فأجب أولا : ارسم منحنى الدالة  $f(x)$

ثانيا : قدر طول المنحنى  $f(x)$

ثالثا : قدر ميل المنحنى  $f(x)$  عند

$$x=1$$

(2) اوجد كل من النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{(x-2)^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \csc x + \tan 2x}{3x + \sin |2x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2 - 4x| - 2}{3 - \sqrt{x+8}}$$

1)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 - 9}$  -----

---

2)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 9}$  -----

---

3)  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 3x - 4}$  -----

---

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$  -----

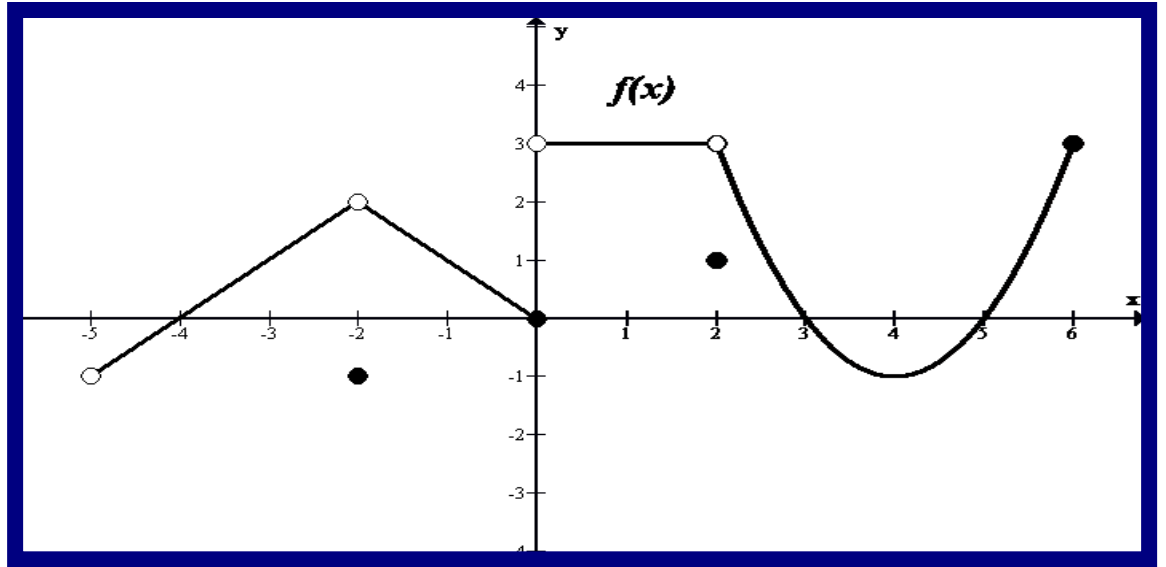
---

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) =$  -----

---

6)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$  -----

4 تأمل الشكل التالي الذي يمثل بيان الدالة  $f(x)$  واجب (ان امكن)  
7



1)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 4x - 5)$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 4f(-2))$

6)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

7)  $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{f(x)}$

وجد قيم  $a$  التي تجعل

8)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  غير موجودة -----

9)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left( f(x) \frac{|x+4|}{4+x} \right)$

10) قيمة  $x$  التي تكون عندها نهاية الدالة  $f(x)$  لجهه اليمين فقط موجودة هي \_\_\_ وقيمتها ---

11) قيمة  $x$  التي تكون عندها نهاية الدالة  $f(x)$  لجهه اليسار فقط موجودة هي -- وقيمتها ---

\* قوانين التربيع ( فيثاغورث ) :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x , \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 , \quad \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1 , \quad \csc^2 x - \tan^2 x = 1$$

\* قوانين المقلوب :

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x , \quad \frac{1}{\csc x} = \sin x , \quad \sin x \csc x = 1$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x , \quad \frac{1}{\sec x} = \cos x , \quad \cos x \sec x = 1$$

$$\frac{1}{\tan x} = \cot x , \quad \frac{1}{\cot x} = \tan x , \quad \tan x \cot x = 1$$

قوانين ( الزوجية و الفردية )

$$\sin(-x) = -\sin x , \quad \csc(-x) = -\csc(x)$$

$$\cos(-x) = \cos x , \quad \sec(-x) = \sec(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan x , \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$

\* قوانين مساعدة في حل المثلث القائم الزاوية :

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AB}$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

قوانين ضعف الزاوية

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

قوانين المجموع و الفرق

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

الدوال المثلثية متساوية القيمة

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

قوانين نصف الزاوية

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

قوانين ازالة الاس

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

تحويل ناتج الضرب لمجموع

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

تحويل المجموع الى ناتج الضرب

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

5) باستخدام القيم العددية الدقيقة استنتج قيمة النهايات التالية  
( قدر النهايات التالية )

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$$

$x$	$f(x)$
1.1	
1.01	
1.001	

$x$	$f(x)$
0.9	
0.99	
0.999	

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-3| - 4}{x^2 - 2x - 3}$$

$x$	$f(x)$

$x$	$f(x)$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$x$	$f(x)$

$x$	$f(x)$

6 ) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{x} & : x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 4}{2x - 4} & : 0 < x < 2 \text{ وكانت} \\ \frac{x^3 + l}{2x^2 - 2x - 4} & : x \geq 2 \end{cases}$$

وكانت

فأوجد قيمة الثوابت  $K, l$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

8 ) اوجد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$$



نهاية تركيب دالتين (  $f$  بعد  $g$  )  $f \circ g$

لتكن  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  و  $f$  دالة متصلة عند  $l$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(l)$$

إذا كان  $g(x) = 3 + \sin(x)$  ,  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$  فأوجد

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(g(x))$$

اتصال تركيب دالتين  $f \circ g$

لتكن  $g$  دالة متصلة عند  $x = a$  وكانت  $f$  دالة متصلة عند  $g(a)$  فإن  $f \circ g$  متصلة عند

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a)$$

ويكون

لتكن  $g(x) = (3 + \sin x)^{12}$  ,  $f(x) = \frac{4}{x+1}$  فهل  $f \circ g$  دالة متصلة عند  $x = 1$  ؟ فسر ؟

7 ( لتكن

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ فأوجد قيمة } \lim_{x \rightarrow 2} [(2x - 1) \cdot f(x) - 5] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \sin 3x}{x \cos x}$$

8 ( اوجد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 3x \sin \left( \frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 3 + \sqrt{x} \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right)$$

(8) أوجد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$$

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^{2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x e^{2x+1}}{x^2 - x} + 4 \cos^{-1} x \right]$$

---

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [4x + 3 \sin^{-1} x]$$

---

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln e^x - x^2}{x^2 - 1}$$

---

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^x}{1 - e^{-x}}$$

9) لتكن  $\sin(3x - 6) \leq f(x) \leq x^2 - x - 2$  معرفة حول  $x = 2$  فأوجد  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

يسير جسيم في مستوى احداثي فاذا كان موضع الجسيم في اي اللحظة هو  $f(t) = t^2 + 2t - 1$  ft حيث الزمن بالثواني فأوجد

د أ) سرعة الجسيم المتجه عند  $t = 3 \text{ sec}$

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(h)}{h}$$

ب) اوجد السرعة المتجه للجسيم في الفترة الزمنية  $[3, 5]$

لتكن الدالة  $f(x)$  متصلة على مجالها فأوجد قيمة الثوابت  $a, b$  حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\pi} \cos^{-1} x + 1 & : x < 0 \\ x^2 + 2 & : 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} + b & : x > 1 \end{cases}$$

## 12- أكمل الجدول التالي

الدالة	النقطة التي تكون عندها الدالة غير متصلة مع ذكر السبب	الفترة التي تكون عليها الدالة متصلة	هل يمكن توسيع الدالة ؟ فسر ؟	الدالة الجديدة المتصلة على نطاق أكبر ان امكن
$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$				
$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$				
$f(x) = \tan x$				
$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 : x > 1 \\ x^2 + 2 : x < 1 \end{cases}$				

الدالة	النقطة التي تكون عندها الدالة غير متصلة مع ذكر السبب	الفترات التي تكون عليها الدالة متصلة	هل يمكن توسيع الدالة ؟ فسر	الدالة الجديدة المتصلة على نطاق أكبر ان امكن
$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x \geq 2 \\ x^2 & : x < 2 \end{cases}$				
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$				
$f(x) = \sin^{-1}(x + 2)$				
$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x - \pi}\right)$				
$f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$				
$f(x) = \frac{4}{\ln x^2}$				



استخدم نظرية القيمة المتوسطة للتحقق من ان الدالة  $f(x) = x^2 - 7$  لها صفر في الفترة  $[2, 3]$   
 ثم استخدم طريقة التنصيف لإيجاد الفترة التي طولها  $\frac{1}{32}$  والتي تحتوي على الصفر

$a$	$b$	$f(a)$	$f(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

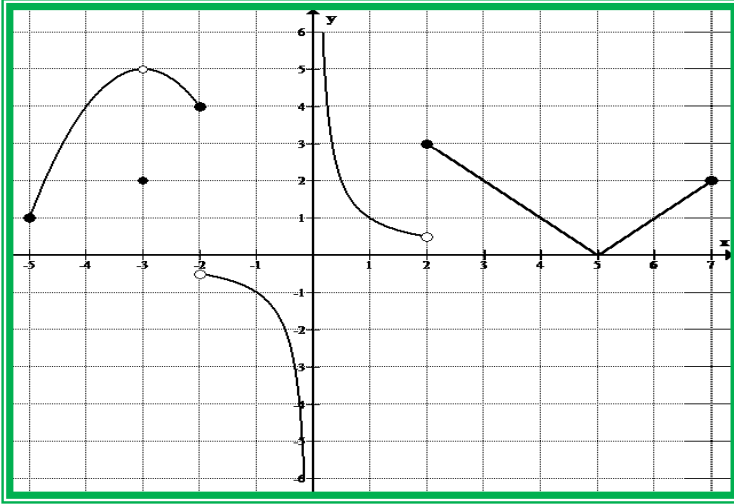
(و) اجب  
 أولا أوجد قيم  $a, b$  التي تجعل  $f$  متصلة على  $(-\infty, \infty)$   
 ثانيا مثل الدالة  $f$  في مستوى الاحداثيات

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & : x < -2 \\ ax^2 - b & : -2 \leq x < 1 \\ ax + b - 4 & : x \geq 1 \end{cases}$$

لتكن الدالة  $f(x)$  كثيرة حدود يمر بيانها بالنقطة  $(2, 3)$  وكان  $\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + 2) = -4$   
 فأوجد  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( g(x) + \frac{6}{f(x)} \right)$  مع التفسير

(ي) استخدم الرسم البياني التالي للدالة  $f(x)$  للإجابة عن الأسئلة الآتية :

اولا اكمل الجدول التالي :



قيم $x$ التي تكون عندها $f$ منفصلة	السبب

ثانيا أكمل العبارات التالية

\*مجموعة قيم  $b$  التي تكون عندها  
 $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  غير موجودة

هي

\*مجموعة قيم  $k$  التي تكون عندها  
 $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = 4$  هي

\*حتى تكون الدالة  $f$  متصلة عند  $x = -3$  يجب أن تكون  
 $f(-3)$  تساوي

\*مجال الدالة  $f(x)$  هو

\*الفترات التي تكون عندها الدالة  $f(x)$  متصلة

\*هل تحقق الدالة  $f(x)$  شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة

[ 3 , 4 ]

\*هل يمكن توسيع الدالة  $f(x)$  بحيث تكون الدالة الجديدة المتصلة على

نطاق أكبر

ثالثا : اوجد النهايات التالية ( ان امكن )

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + f(2)) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{f(x)} \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( f(x) + \frac{x-2}{|x-2|} \right) \text{ -----}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 3f(x) + \frac{\sin 2x}{x} \right) \text{ -----}$$

اوجد النقاط التي تكون عندها الدالة  $f(x)$  غير متصلة مع ذكر السبب ؟ وهل  
يمكن توسيع الدالة  $f(x)$  بحيث تكون الدالة الجديدة متصلة على نطاق اوسع  
( اكتب الدالة الجديدة ان امكن )

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & : x > 3 \\ 8 & : x = 3 \\ x^2 - 5 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \frac{|2x-5|-1}{3x-9}$$

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot(x^2)$

---

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

---

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x + 1}$

---

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 3x + 2}$

---

5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-\tan^2 x}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}}$

1)  $f(x) = 3\tan^{-1}2x$

---

2)  $f(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

---

3)  $f(x) = 3 \ln(x - 2)$

---

4)  $f(x) = \frac{3}{\cos x - 1}$

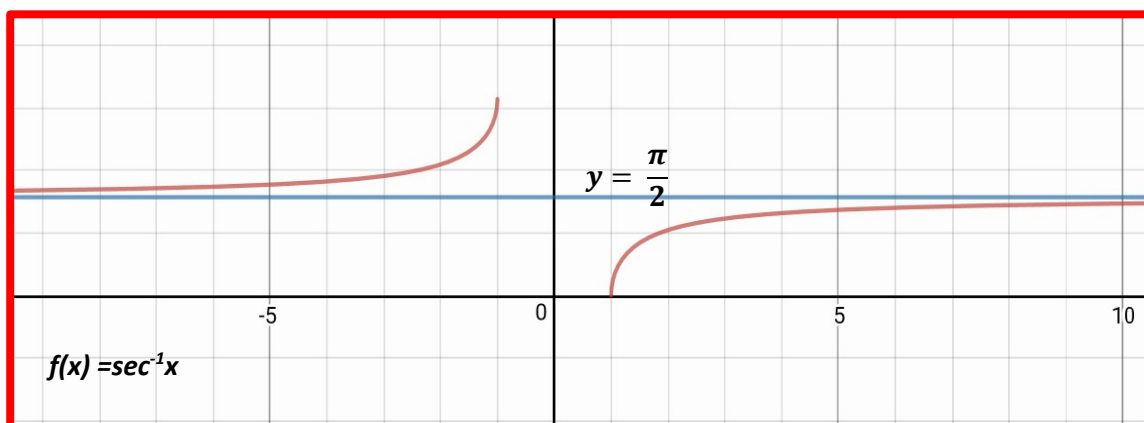
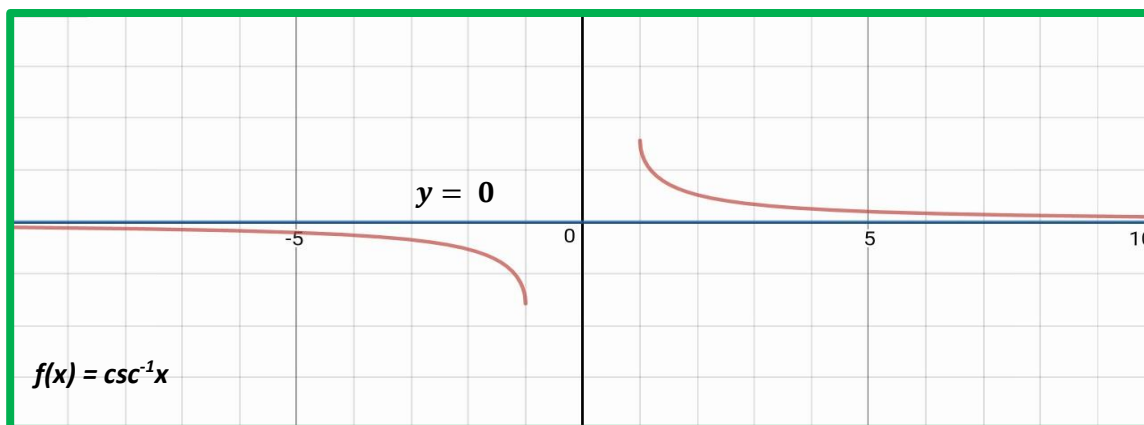
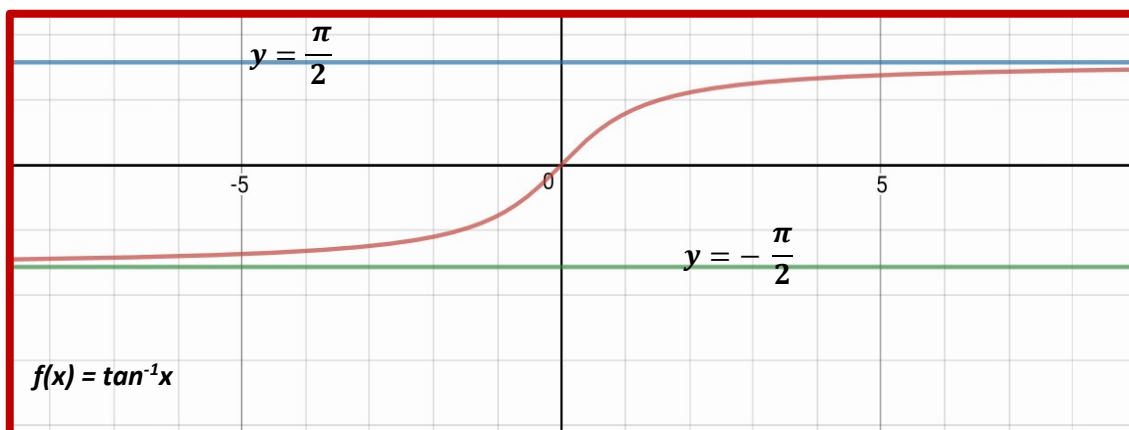
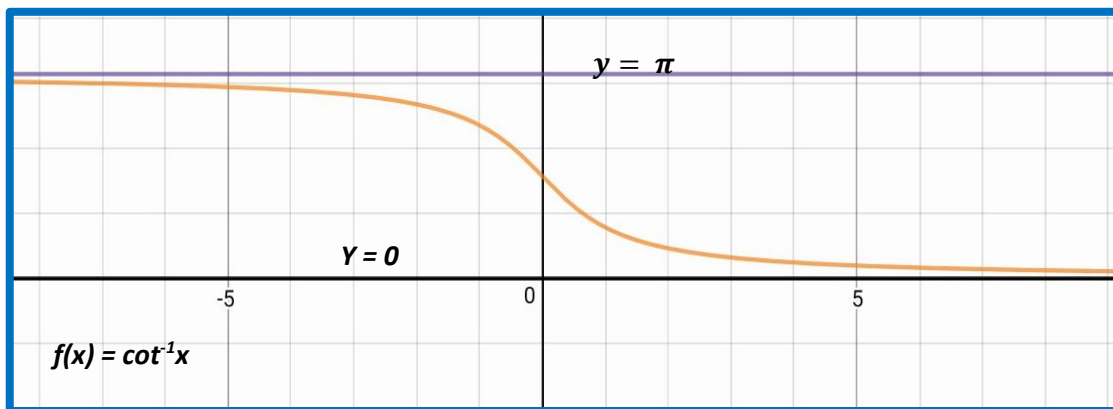
---

5)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x-6}$

---

6)  $f(x) = \sqrt{x^6 + 5x^2} - x^3$

---



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0]}{[b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0]} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$





## التواصل

T: Mahmoud Murad

0506565584

0528113301

xmmx22@hotmail.com

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والتفوق