

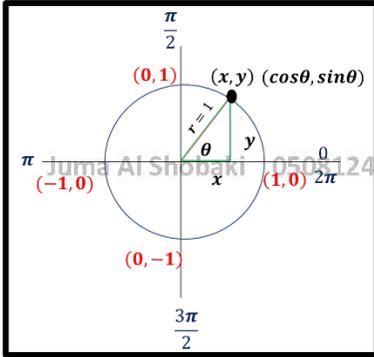
الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية (1-3)

Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions

تكون الدالة f دورية ، وزمنها الدوري T ، إذا كان $f(x+T) = f(x)$ لكل قيم x بحيث يكون x و $x+T$ في مجال f وتكون أصغر قيمة ($T > 0$) لهذا العدد هي الزمن الدوري الأساسي

Jalshobaki.com

- The function f is periodic, and its period is T , if $f(x+T) = f(x)$ for all x values where x and $x+T$ are in the domain of f and the smallest value ($T > 0$) for this number is the fundamental period



II	I
$\pi - \theta$	θ
$\sin +$	$\cos +$
$\csc +$	All (+)
$\tan +$	$\sec +$
$\pi + \theta$	$2\pi - \theta$
III	IV

الرسم يمثل دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ و θ الزاوية مقاسة بعكس عقارب الساعة و تقاس بالراديان مالم يذكر غير ذلك

- The diagram represents the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ and θ the angle is measured counterclockwise and is measured in radians unless otherwise noted

الدوال المثلثية الأساسية $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ومقلوباتها $\csc x$, $\sec x$, $\cot x$

للتحويل من راديان إلى درجة $\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ (مثال) (الزاوية بالراديان) $\times \frac{180^\circ}{\pi}$

للتحويل من درجة إلى راديان $(60^\circ) \times \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) = \frac{\pi}{3}$ (مثال) (الزاوية بالدرجات) $\times \frac{\pi}{180^\circ}$

الدوال $\sin \theta$, $\cos \theta$ دوال دورية ودورتها 2π ، حيث دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ تمثل معادلة دائرة نصف قطرها وحدة واحدة ، ومحيط الدائرة $c = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$

- Functions $\sin \theta$, $\cos \theta$ are Periodic functions of 2π , where the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ represents the equation of a circle with radius one unit, and the circumference $c = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$
- The circle is 360° , so $2\pi = 360^\circ$

- The function $\tan \theta$ is periodic, and its period is π

الدالة $\tan \theta$ دورية ، ودورتها π لكل قيم θ ، تكون 2π هي أصغر زاوية تحقق النظرية $f(x+T) = f(x)$ ، ولهذا فهما دوال دورية والزمن الدوري لكل منها هو 2π

- For all values of θ , 2π is the smallest angle that verifies the theorem $f(x+T) = f(x)$ so they are periodic functions and the period for each is 2π

العلاقة المشتركة بين الدوال المثلثية:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad , \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

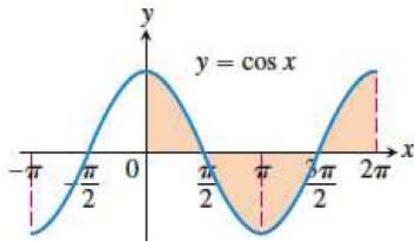
$$2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$3) \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

$$4) \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x \quad , \quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

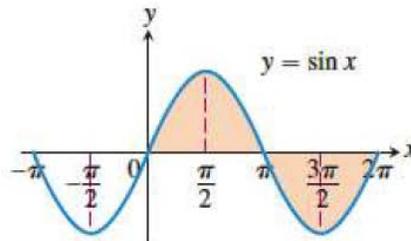
رسومات الدوال المثلثية ومعكوساتها، وأهم المتطابقات المثلثية المطلوب فهمها وحفظها

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي



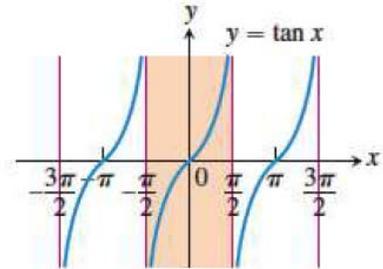
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \leq y \leq 1$
Period: 2π

(a)



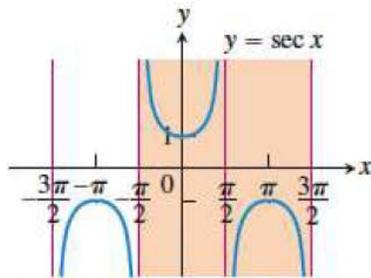
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \leq y \leq 1$
Period: 2π

(b)



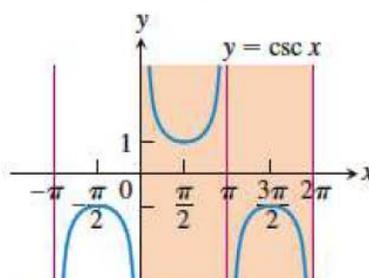
Domain: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(c)



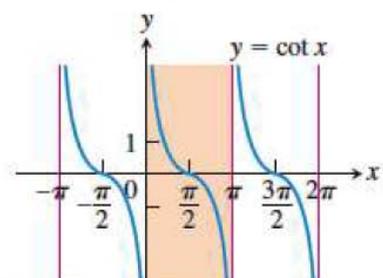
Domain: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
Range: $y \leq -1$ and $y \geq 1$
Period: 2π

(d)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Range: $y \leq -1$ and $y \geq 1$
Period: 2π

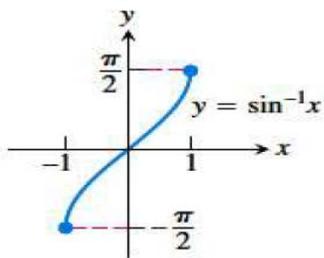
(e)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

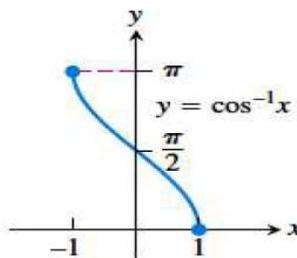
(f)

Domain: $-1 \leq x \leq 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



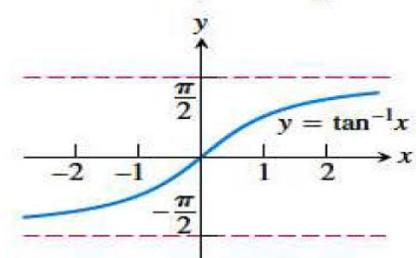
(a)

Domain: $-1 \leq x \leq 1$
Range: $0 \leq y \leq \pi$



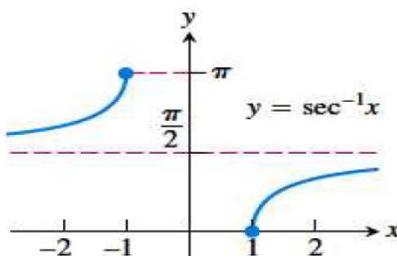
(b)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



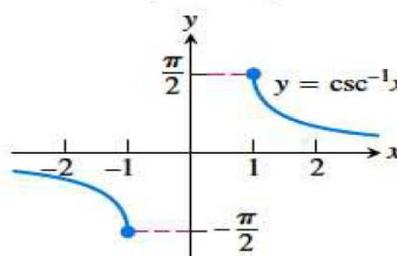
(c)

Domain: $x \leq -1$ or $x \geq 1$
Range: $0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$



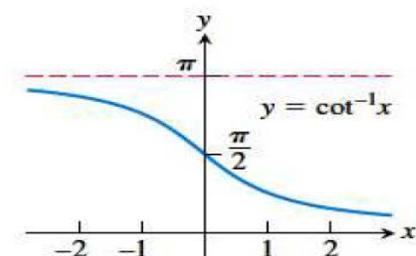
(d)

Domain: $x \leq -1$ or $x \geq 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$



(e)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $0 < y < \pi$



(f)

متطابقات مثلثية مهمة جداً للحفظ تلزم في المرحلة الثانوية والجامعية

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$

2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Jalshobaki.com

6. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

7. $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\csc^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

السعة، الدورة، التكرار (التردد)، إزاحة الطور، والإزاحة العمودية للدوال الجيبية ($\sin x, \cos x$)

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

الشوبكي

Amplitude, Period, Frequency, Phase Shift, and Vertical Shift of ($\sin x, \cos x$)

$$y = a \sin(bx + c) + d$$

$$y = a \cos(bx + c) + d$$

السعة: $|a|$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{1}{\text{الدورة}}$ إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|}$ الإزاحة الرأسية (الخط المتوسط): d Amplitude: $|a|$ Period: $\frac{2\pi}{|b|}$ Frequency: $\frac{1}{\text{Period}} = \frac{|b|}{2\pi}$ Phase Shift: $-\frac{c}{|b|}$ Vertical Shift: d

في الأسئلة التالية حدد السعة، الدورة، التكرار، إزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل مما يلي؟

Identify the amplitude, period, frequency, phase shift, and vertical shift?

1) $y = 2\sin(2x + 2\pi) - 1$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2) $f(x) = 3\sin 2x$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

3) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Find all solutions of the given equation?

في الأسئلة التالية جد كافة حلول المعادلة المعطاة فيما يلي؟

1) $2\sin x - 1 = 0$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

2) $2\cos x - 1 = 0$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

3) $\sin(2x) = 1$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

5) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

6) $\sin x - \cos 2x = 0$

7) $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$

8) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

9) $\sin 2x - \cos x = 0$, $[0, 360^\circ]$

10) $\cos^2 x + \cos x = 0$

11) $\sin^2 x - \sin x = 0$

في الأسئلة التالية، حدّد ما إذا كانت الدالة دورية، وإذا كانت دورية، فجد الدورة (الأساسية الأصغر)؟

Determine whether the function is periodic, If it is periodic, find the smallest (fundamental) period?

1) $f(x) = \cos 2x + 3 \sin \pi x$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

2) $f(x) = \sin x - \cos \sqrt{2}x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

3) $f(x) = \sin 2x - \cos 5x$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

4) $f(x) = \cos 3x - \sin 7x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

في الأسئلة التالية، استخدم مدى θ ، لتحديد قيمة الدالة المشار إليها؟

Use the range for θ to determine the indicated function value?

1) $\sin \theta = \frac{1}{3}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, جد $\cos \theta$?

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

$$2) \sin\theta = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad \text{جد } \tan\theta?$$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

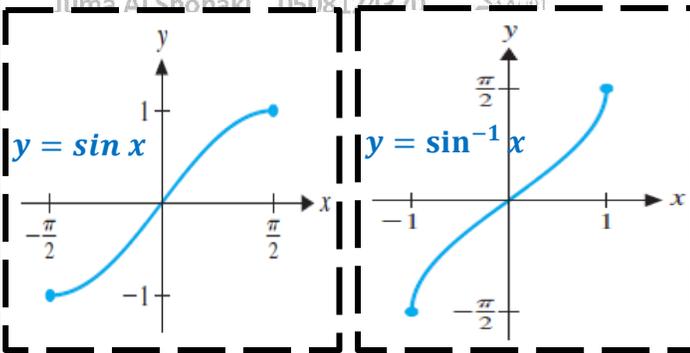
Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Inverse Trigonometric Functions

الدوال المثلثية المعكوسة



➤ لإيجاد معكوس الدوال المثلثية، يجب أولاً تقييد المجال للدوال بحيث تصبح واحد لواحد أولاً لنستطيع إيجاد معكوس لها على هذه الفترة

- To find the inverse of the trigonometric functions, the domain of the functions must first be restricted so that it becomes one-to-one first so that we can find its inverse over this interval

معكوس دالة $y = \sin x$

1

Note that if we restrict the domain $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ it is a one-to-one function, and its range is $[-1, 1] \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$ لاحظ إذا قيدنا المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ تكون دالة واحد لواحد، ويكون مداها $[-1, 1] \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

$$y = \sin x$$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Sh

70 الشوبكي

$$x = \sin y \Rightarrow \sin^{-1}(x) = \sin^{-1} \sin y$$

$$y = \sin^{-1}(x) \Rightarrow \forall x \in [-1, 1] \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{لكل } x$$

$$\sin(\sin^{-1}x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad \text{وعليه فإن}$$

$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

يطلق لفظ وتعبر $\arcsin x$ بدلاً من $\sin^{-1}x$



في الأسئلة التالية أوجد كل مما يلي؟

$$1) \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$2) \sin\left(\sin^{-1}(2)\right) =$$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

3) $\sin^{-1}(-1) =$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

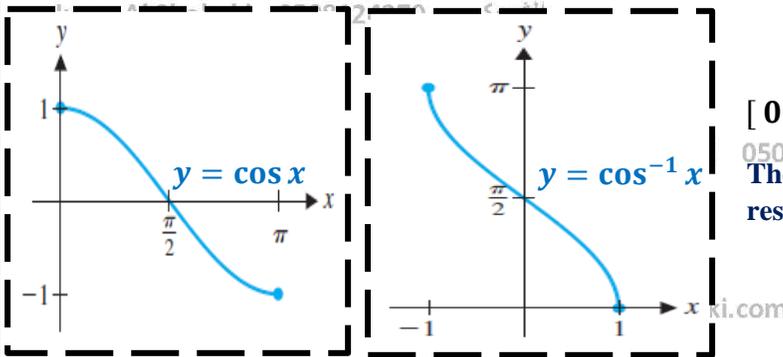
5) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

A) $\frac{2\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) غير معرفة

D) $\frac{\pi}{6}$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2 معكوس دالة $y = \cos x$ تكون دالة $y = \cos x$ واحد لواحد في تقييد المجال من $[0, \pi]$

0508124370 الشوبكي

The function $y = \cos x$ is one-to-one in the domain restriction from $[0, \pi]$ 

$y = \cos x$



$x = \cos y$

مجاله هو مدى الدالة الرئيسية $\cos^{-1}(x = \cos y) \Rightarrow y = \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$ بالضرب في \cos^{-1} Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي $x \in [-1, 1]$ ، لكل قيم $\cos(\cos^{-1} x) = x$ وعليه فإن

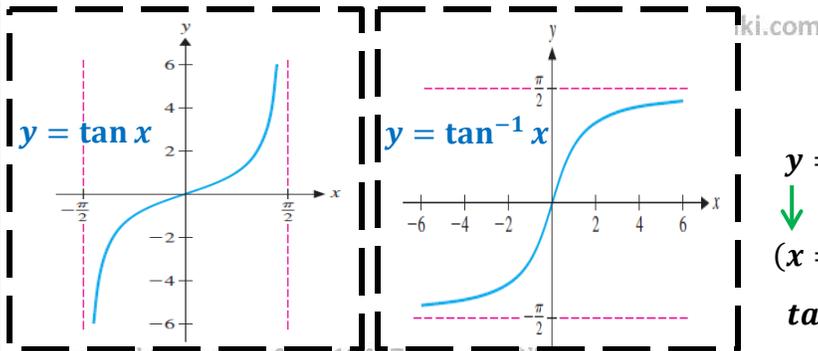
$x \in [0, \pi]$ ، لكل قيم $\cos^{-1}(\cos x) = x$

في الأسئلة التالية أوجد كل مما يلي؟

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

1) $\cos^{-1}(0) =$

2) $\cos^{-1}(1) =$

**3** معكوس دالة $y = \tan x$ نقيّد المجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، ويكون المدى $(-\infty, \infty)$

$y = \tan x$



$(x = \tan y) \iff -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ إذا فقط

بالضرب في $\tan^{-1} \Rightarrow \tan^{-1}(x = \tan y)$

$\Rightarrow y = \tan^{-1} x, \forall x \in (-\infty, \infty)$

$$y = \sec x \quad \text{معكوس القاطع}$$

4

0508124370 الشوبكي نقيّد المجال ليكون دالة واحد لواحد

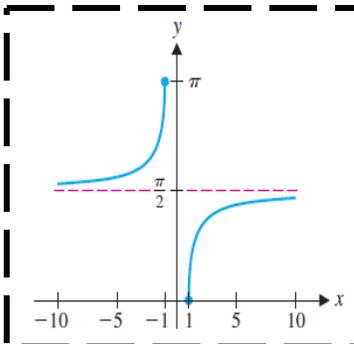
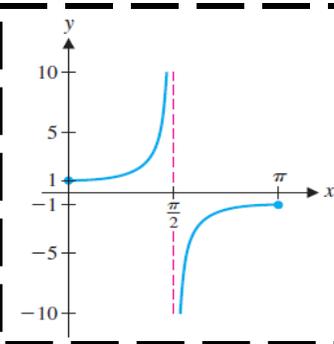
$$\text{المجال: } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

We restrict the domain to be a one-to-one function

$$\text{Domain: } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



$$y = \sec x$$



$$x = \sec y \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\sec^{-1} \text{ بالضرب في } \implies \sec^{-1}(x = \sec y) \implies y = \sec^{-1}x, \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

المدى: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ، وهو مجال الدالة العكسية $y = \sec^{-1}x$ Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, which is the domain of the inverse function $y = \sec^{-1}x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

في الأسئلة التالية جد قيمة الدالة المعكوسة عبر رسم دائرة وحدة وتحديد الزاوية الصحيحة، وإيجاد قيمة الزوج المرتب على الدائرة؟

Evaluate the inverse function by sketching a unit circle, locating the correct angle and evaluating the ordered pair on the circle?

1) $\tan^{-1}(0) =$

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

2) $\tan^{-1}(-1) =$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

3) $\sec^{-1}(2) =$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) $\csc^{-1}(2) =$

Jalshobaki.com

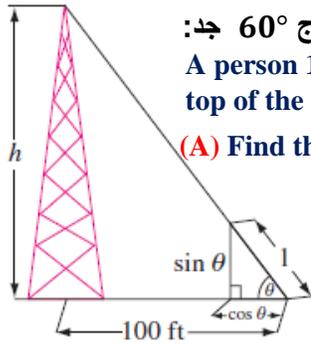
Jalshobaki.com

5) $\cot^{-1}(1) =$

6) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) =$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Finding the Height of a Tower إيجاد ارتفاع برج



س1) يقف شخص على بعد 100 ft من قاعدة برج ويكون قياس الزاوية عنده من الأرض إلى قمة البرج 60° جد:
A person 100 feet from the base of a tower measures an angle of 60° from the ground to the top of the tower. Find:

(A) Find the height of the tower ?

(A) ارتفاع البرج؟

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

(B) ما قياس الزاوية لو كان الشخص على بعد 200 ft من القاعدة؟

(B) What angle is measured if the person is 200 feet from the base?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

تبسيط التعبيرات التي تحتوي على دوال مثلثية معكوسة

Jalshobaki.com

Simplifying Expressions Containing Inverse Trigonometric Functions

Jalshobaki.com

Use a triangle to simplify each expression?

في الأسئلة التالية، استخدم مثلثاً لتحويل كل تعبير إلى أبسط صورة؟

1) $\cos(\sin^{-1}x)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2) $\cos(\tan^{-1}x)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Jalshobaki.com

Jalshobaki.com

3) $\tan(\sec^{-1}x)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) $\cot(\cos^{-1}x)$



5) $\sin(\cos^{-1}(\frac{1}{2}))$

6) $\cos(\sin^{-1}(\frac{1}{2}))$



7) $\tan(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$

8) $\csc(\sin^{-1}(\frac{2}{3}))$



9) $\cos(2 \sin^{-1} \frac{4}{5})$

