الوحدة 5

المتطابقات والمعادلات المثلثية

السابق

- لقد تعلمتَ تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا وحل المثلثات قائمة الزاوية والمائلة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - استخدام المتطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
  - حل المعادلات المثلثية.
  - استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد قيمة التعابير المثلثية ولحل المعادلات.
  - استخدام متطابقات ضعف الزاوية <
ونصف الزاوية، ومتطابقة تحويل حاصل الضرب لمجموع في إيجاد قيمة التعابير المثلثية وحل المعادلات.

لماذا؟ ▲

- **الأعمال التجارية** يضبط الموسيقيون نغمات آلاتهم الموسيقية من خلال الاستماع إلى *إيقاع*. وما هو إلا تداخل بين موجتين صوتيتين باختلاف بسيط بين ترددهما. ويمكن تمثيل مجموع الموجات الصوتية باستخدام معادلة مثلثية.

القراءة المسبقة باستخدام ما تعرفه عن الدوال المثلثية، تفيد بما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التمرين السريع أدناه.

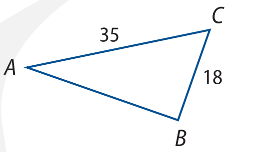
التمرين السريع

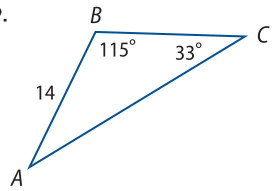
حُلّ كل معادلة عن طريق التحليل الى العوامل.

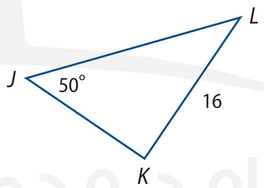
1. $x^2 + 5x - 24 = 0$
2. $x^2 - 11x + 28 = 0$
3. $2x^2 - 9x - 5 = 0$
4. $15x^2 + 26x + 8 = 0$
5. $2x^3 - 2x^2 - 12x = 0$
6. $12x^3 + 78x^2 - 42x = 0$

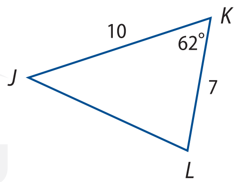
7. **الصواريخ** أُطلِق صاروخ رأسيًا في الهواء. والمسافة الرأسية التي قطعها بالأقدام يمثلها t، بينما يمثّل الزمن بالثواني $s(t) = -16t^2 + 192t$. جد المدة الزمنية التي ظل فيها الصاروخ بالهواء.

جد أطوال الأضلاع الناقصة وقياسات الزاوية لكل مثلث.

8.


9.


10.


11.


جد القيمة الصحيحة لكل تعبير. (الدرس 3-5)

12. $\cot 420°$
13. $\cos \frac{7\pi}{4}$
14. $\sec \frac{10\pi}{3}$
15. $\tan 480°$
16. $\csc \frac{2\pi}{3}$
17. $\sin 510°$

المفردات الجديدة

متطابقة مثلثة trigonometric identity

متطابقة المقلوب reciprocal identity

متطابقة نسبية quotient identity

متطابقة فيثاغورس Pythagorean identity

متطابقة الدوال الزوجية والدوال الفردية odd-even–identity

الزوايا المتتامة cofunction

إثبات صحة المتطابقة verify an identity

متطابقة المجموع sum identity

متطابقة اختزال reduction identity

متطابقة ضعف الزاوية double-angle identity

متطابقة اختصار الأس power-reducing identity

متطابقة نصف الزاوية half-angle identity

مراجعة المفردات

حل دخيل (extraneous solution) هو حل لا يوافق المعادلة الأصلية

الزاوية الربعية (quadrantal angle) هي θ هي زاوية في وضع قياسي يستقر ضلع الانتهاء لها على أحد محوريّ الإحداثيات

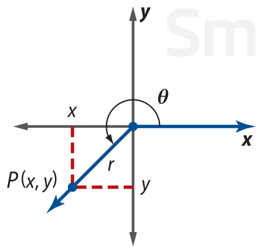
دائرة الوحدة (unit circle) دائرة نصف قطرها 1 مركزها على نقطة الأصل

الدالة الدورية (periodic function) دالة قيمُ مداها تتكرر على فترات منتظمة

الدوال المثلثية (trigonometric functions) افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية θ. افترض أن r تمثل المسافة غير الصفرية من النقطة P إلى نقطة الأصل أو أن $|r| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. بالتالي تكون الدوال المثلثية للزاوية θ هي كما يلي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\quad$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



5-1 المتطابقات المثلثية

:: السابق

- وَجَـدَتَ القيم المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: الحالي

1 تحديد واستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لإيجاد قيم النسب.

2 استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.

:: لماذا؟

- يتضمن العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، مثل تحديد مسار طائرة، استخدام الدوال المثلثية. وتصبح هذه الدوال أكثر مرونة إذا أمكنك تغيير التعابير المثلثية المتضمنة من إحدى الصيغ إلى صيغة مساوية لها ولكنها أكثر ملاءمة. ويمكنك عمل ذلك باستخدام المتطابقات المثلثية.

المفردات الجديدة

متطابقة (identity)

متطابقة مثلثية (trigonometric identity)

الزوايا المتتامة (cofunction)

1 المتطابقات المثلثية الأساسية تكون المعادلة **متطابقة** إذا كان طرفها الأيسر مساويًا لطرفها الأيمن لجميع قيم المتغير المُعرف في كلا طرفي المعادلة. فكّر في المعادلات أدناه.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = x+3$$

هذه متطابقة لأن كلا طرفي المعادلة محدد ومساوٍ لكل x حيث يكون $x \neq 3$.

$$\sin x = 1 - \cos x$$

هذه ليست متطابقة. كلا طرفي هذه المعادلة محدد ومساوٍ لقيم معينة، كما هو الحال حين يكون $x = 0$، ولكنهما ليسا مساويين لقيم أخرى يتم تحديد كلا الطرفين من خلالها، كما هو الحال حين يكون $x = \frac{\pi}{4}$.

المتطابقات المثلثية هي المتطابقات التي تضم دوال مثلثية. وبعضها يُسمى المتطابقات المثلثية الأساسية. والمتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة أدناه تتبع تمامًا تعريفات الدوال المثلثية الست التي تم شرحها سابقًا.

المفهوم الأساسي متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

المتطابقات النسبية

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

متطابقات المقلوب

$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\quad \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ $\quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لإيجاد القيم المثلثية. وكما هو الحال في أي كسر، لا يمكن أن يساوي المقام صفرًا.

مثال 1 استخدام متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

a. إذا كانت $\csc \theta = \frac{7}{4}$، فجد $\sin \theta$.

$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ متطابقة مقلوب

$= \frac{1}{\frac{7}{4}}$ $\csc \theta = \frac{7}{4}$

$= \frac{4}{7}$ اقسم

b. إذا كانت $\cot x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ وكانت $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$، فجد $\cos x$.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ متطابقة نسبية

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\cos x}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ $\cot x = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

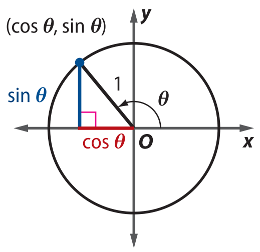
$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \cos x$ اضرب كل طرف في $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{2}{3} = \cos x$ بسّط

تمرين موجه

1A. إذا كانت $\sec x = \frac{5}{3}$، فجد $\cos x$.

1B. إذا كانت $\csc \beta = \frac{25}{7}$ وكانت $\sec \beta = \frac{25}{24}$، فجد $\tan \beta$.



يمكن تحديد المتطابقات المثلثية على دائرة الوحدة كما هو موضح. لاحظ أنه بالنسبة لأي زاوية θ، فإن Sine الزاوية و Cosine الزاوية هما الطولان الموجهان للضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية له الوتر 1. يمكننا تطبيق نظرية فيثاغورس على هذا المثلث قائم الزاوية لصياغة متطابقة مثلثية أساسية أخرى.

نظرية فيثاغورس	$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1^2$
بسّط	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

في حين أن إشارات هذه الأطوال الموجهة قد تتغير بناءً على الربع الذي يستقر عليه المثلث، فلاحظ أنه بسبب تربيع هذه الأطوال فإن المعادلة أعلاه تبقى صحيحة لأي قيمة لـ θ. هذه المعادلة هي إحدى **متطابقات فيثاغورس** الثلاث.

المفهوم الأساسي متطابقات فيثاغورس

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\qquad$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\qquad$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

ستُثبت صحة متطابقتي فيثاغورس المتبقيتين في التمرينين 69 و 70.

قراءة الرياضيات

أسس الدوال المثلثية $\sin^2 \theta$ تُقرأ هكذا: *sine square theta* وتُفسّر على أنها تربيع الكمية $\sin \theta$.

لاحظ رمز الاختصار المستخدم لتمثيل أسس الدوال المثلثية: $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$، و $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$ و $\tan^2 \theta = (\tan \theta)^2$، وهكذا.

مثال 2 استخدام متطابقات فيثاغورس

إذا كانت $\tan \theta = -8$ وكانت $\sin \theta > 0$، فجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$

استخدم متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\tan \theta$.

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	متطابقة فيثاغورس
$(-8)^2 + 1 = \sec^2 \theta$	$\tan \theta = -8$
$65 = \sec^2 \theta$	بسّط
$\pm\sqrt{65} = \sec \theta$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.
$\pm\sqrt{65} = \frac{1}{\cos \theta}$	متطابقة عكسية
$\pm\frac{\sqrt{65}}{65} = \cos \theta$	حُل لإيجاد $\cos \theta$

بما أن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ سالبة و $\sin \theta$ موجب، إذًا ينبغي أن تكون $\cos \theta$ سالبة. إذًا، فستكون $\cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$. ويمكنك حينها استخدام متطابقة ناتج القسمة هذه لإيجاد $\sin \theta$.

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	متطابقة نسبية
$-8 = \frac{\sin \theta}{-\frac{\sqrt{65}}{65}}$	$\tan \theta = -8$ و $\cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$
$\frac{8\sqrt{65}}{65} = \sin \theta$	اضرب كل طرف في $-\frac{\sqrt{65}}{65}$.

تحقق

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	متطابقة فيثاغورس
$\left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$	$\sin \theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ و $\cos \theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$
$\frac{64}{65} + \frac{1}{65} = 1$ ✓	بسّط

نصيحة دراسية

التحقق من الإجابات من المفيد تأكيد إجاباتك باستخدام متطابقة مختلفة عن المتطابقات التي استخدمتها لحل المسألة، كما في المثال 2. بحيث لا تقع في نفس الخطأ مرتين.

تمرين موجه

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة.

2A. $\tan \theta$ و $\csc \theta$؛ $\cot \theta = -3$، و $\cos \theta < 0$

2B. $\cos x$ and $\sec x$؛ $\sin x = \frac{1}{6}$، $\cos x > 0$

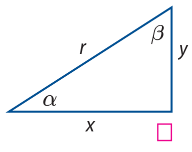
مجموعة أخرى من المتطابقات المثلثية الأساسية تتضمن نسب متساوية القيمة

في المثلث قائم الزاوية الموضح، الزاويتان α و β هما زاويتان متتامتان. باستخدام نِسب المثلث قائم الزاوية، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.

$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta = \cot (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\sec \alpha = \csc \beta = \csc (90^\circ - \alpha) = \frac{r}{y}$$



من خلال هذه العبارات، يمكننا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين التالية، وهي صحيحة لكل الأعداد الحقيقية، وليس لقياسات الزاوية الحادة فقط.

المفهوم الأساسي متطابقات الزاويتين المتتامتين

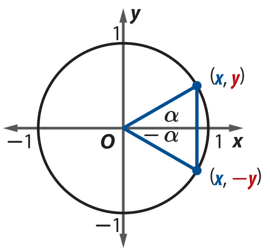
$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ستُثبت صحة هذه المتطابقات لأي زاوية في الدرس 4-3.

نصيحة دراسية

كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين يمكن كذلك كتابة كل من متطابقات الزاويتين المتتامتين بدلالة الدرجات. فعلى سبيل المثال، $\sin \theta = \cos (90° - \theta)$.

لقد عرفت أيضًا أن كلًا من النسب المثلثية الأساسية(sin, cos, tan, cot, sec, csc) هي إما فردية أو زوجية. باستخدام دائرة الوحدة، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$\sin \alpha = y \qquad \sin (-\alpha) = -y$

$\cos \alpha = x \qquad \cos (-\alpha) = x$

تذكّر من درس سابق أن الدالة f زوجية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$. وفردية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. وهذه العلاقات تؤدي إلى المتطابقات الفردية الزوجية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات الدوال الزوجية و الفردية

$\sin (-\theta) = -\sin \theta$	$\cos (-\theta) = \cos \theta$	$\tan (-\theta) = -\tan \theta$
$\csc (-\theta) = -\csc \theta$	$\sec (-\theta) = \sec \theta$	$\cot (-\theta) = -\cot \theta$

يمكنك استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإيجاد القيم المثلثية.

مثال 3 استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية الفردية

إذا كانت $\tan \theta = 1.28$، فجد $\cot \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

حلل

$$\cot \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cot \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= -\cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$ متطابقة الدوال الزوجية الفردية

$$= -\tan \theta$$ متطابقة الدالة متساوية القيمة

$$= -1.28$$ $\tan \theta = 1.28$

تمرين موجه

3. إذا كانت $\sin x = -0.37$، فجد $\cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2 تبسيط التعابير المثلثية وإعادة كتابتها

لتحويل التعبير المثلثي لأبسط صورة، ابدأ بإعادة كتابته بدلالة النسبة المثلثية sine الزاوية أو بدلالة cosine الزاوية فقط.

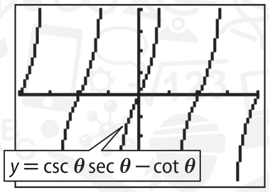
مثال 4 التحويل لأبسط صورة بإستخدام sin و cos فقط

حوّل لأبسط صورة $\csc\theta \sec\theta - \cot\theta$.

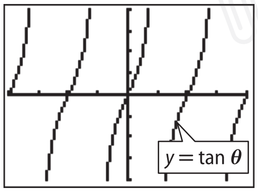
جد الحل جبريًا

$\csc\theta\sec\theta - \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	أعد الكتابة بدلالة sin و cos باستخدام المتطابقات العكسية والمتطابقات النسبية.
$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	جد ناتج الضرب.
$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$	أعد كتابة الكسور باستخدام مقام مشترك.
$= \dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$	اطرح.
$= \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$	نظرية فيثاغورس
$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ or $\tan\theta$	اقسم البسط والمقام على $\sin\theta$.

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلان البيانيان اللذان يمثلان $y = \csc\theta\sec\theta - \cot\theta$ و $y = \tan\theta$ يبدوان متطابقين.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



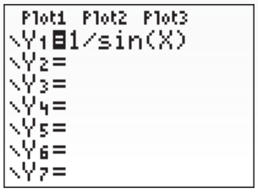
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

4. حوّل لأبسط صورة $\sec x - \tan x \sin x$.

نصيحة تقنية

تمثيل الدوال العكسية بيانيًا عند استخدام حاسبة لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا، مثل $y = \csc x$، فيمكنك إدخال معكوس الدالة.



ويمكن تحليل التعابير المثلثية لأبسط صورة من خلال تطبيق المتطابقات والتحليل الى العوامل.

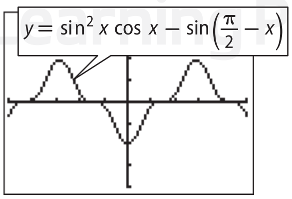
مثال 5 التحويل لأبسط صورة باستخدام التحليل إلى العوامل

حوّل لأبسط صورة $\sin^2 x\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

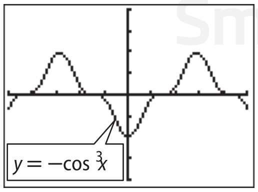
جد الحل جبريًا

$\sin^2 x\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2 x\cos x - \cos x$	متطابقة زاويتين متتامتين
$= -\cos x\,(-\sin^2 x + 1)$	اخراج العامل المشترك $-\cos x$ من كل حد.
$= -\cos x\,(1 - \sin^2 x)$	خاصية التبديل
$= -\cos x\,(\cos^2 x)$ or $-\cos^3 x$	متطابقة فيثاغورس

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلات البيانية أدناه تبدو متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

5. حوّل لأبسط صورة $-\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \tan^2 x\sec x$.

انتبه!

التمثيل البياني في حين يمكن لمنهجية التمثيل البياني الموضحة في المثالين 4 و 5 أن تقدم الدعم لفكرة المساواة بين تعبيرين، فلا يمكن استخدامها لإثبات أن تعبيرين متساويان. من المستحيل توضيح أن التمثيلين البيانيين متطابقان على كامل امتداد مجاليهما باستخدام الجزء الموضح من التمثيل البياني على حاسبتك.

يمكنك تحويل بعض التعابير المثلثية لأبسط صورة عن طريق جمع الكسور.

مثال 6 التحويل لأبسط صورة باستخدام جمع الكسور

حوّل لأبسط صورة $\frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x}$.

$$\frac{\sin x \cos x}{1-\sin x} - \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos x\,(\cos x)}{(1-\sin x)(\cos x)} - \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(\cos x)(1-\sin x)}$$ مقام مشترك

$$= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{1-\sin^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$ جد حاصل الضرب.

$$= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{\sin x \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$ اطرح.

$$= \frac{(\cos^2 x)(\sin x - 1)}{(-\cos x)(\sin x - 1)}$$ حلل البسط والمقام إلى العوامل.

$$= -\cos x$$ اختصر العوامل المشتركة.

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x}$

6B. $\frac{\csc x}{1+\sec x} + \frac{\csc x}{1-\sec x}$

في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج أحيانًا إلى إعادة كتابة التعبير المثلثي بحيث لا يضم كسرًا. حينما يكون المقام من الصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$. يمكنك أحيانًا فعل ذلك عن طريق ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام وتنفيذ متطابقة فيثاغورس.

مثال 7 إعادة الكتابة لحذف الكسور

أعد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ **في صورة تعبير لا يضم كسرًا.**

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 + \cos x$، وهو $1 - \cos x$.

$$= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$ جد حاصل الضرب.

$$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$ اكتب بصيغة توضح الفارق بين كسرين.

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$ حلل.

$$= \csc^2 x - \cot x \csc x$$ متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

مراجعة المفردات

المُرافق (conjugate) عامل ذو حدين يُضرب في العامل ذي الحدين الأصلي ويكون حاصل الضرب هو الفرق بين المربعين (الدرس 3-0)

تمرين موجه

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا.

7A. $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

7B. $\frac{4}{\sec x + \tan x}$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة. (مثال 1)

1. إذا كان $\cot\theta = \frac{5}{7}$، فجد $\tan\theta$.

2. إذا كان $\cos x = \frac{2}{3}$، فجد $\sec x$.

3. إذا كان $\tan\alpha = \frac{1}{5}$، فجد $\cot\alpha$.

4. إذا كان $\sin\beta = -\frac{5}{6}$، فجد $\csc\beta$.

5. إذا كان $\cos x = \frac{1}{6}$ وكان $\sin x = \frac{\sqrt{35}}{6}$، فجد $\cot x$.

6. إذا كان $\sec\varphi = 2$ وكان $\tan\varphi = \sqrt{3}$، فجد $\sin\varphi$.

7. إذا كان $\csc\alpha = \frac{7}{3}$ وكان $\cot\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$، فجد $\sec\alpha$.

8. إذا كان $\sec\theta = 8$ وكان $\theta = 3\sqrt{7}$، فجد $\csc\theta$.

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 2)

9. $\sec\theta$ و $\cos\theta$; $\tan\theta = -5, \cos\theta > 0$

10. $\cot\theta$ و $\sec\theta$; $\sin\theta = \frac{1}{3}, \tan\theta < 0$

11. $\tan\theta$ و $\sin\theta$; $\sec\theta = 4, \sin\theta > 0$

12. $\sin\theta$ و $\cot\theta$; $\cos\theta = \frac{2}{5}, \sin\theta < 0$

13. $\cos\theta$ و $\tan\theta$; $\csc\theta = \frac{8}{3}, \tan\theta > 0$

14. $\sin\theta$ و $\cos\theta$; $\cot\theta = 8, \csc\theta < 0$

15. $\cot\theta$ و $\sin\theta$; $\sec\theta = -\frac{9}{2}, \sin\theta > 0$

16. $\tan\theta$ و $\csc\theta$; $\cos\theta = -\frac{1}{4}, \sin\theta < 0$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 3)

17. إذا كان $\csc\theta = -1.24$، فجد $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

18. إذا كان $\cos x = 0.61$، فجد $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

19. إذا كان $\tan\theta = -1.52$، فجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

20. إذا كان $\sin\theta = 0.18$، فجد $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

21. إذا كان $\cot x = 1.35$، فجد $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (المثالان 4 و5)

22. $\csc x \sec x - \tan x$

23. $\csc x - \cos x \cot x$

24. $\sec x \cot x - \sin x$

25. $\frac{\tan x + \sin x \sec x}{\csc x \tan x}$

26. $\frac{1 - \sin^2 x}{\csc^2 x - 1}$

27. $\frac{\csc x \cos x + \cot x}{\sec x \cot x}$

28. $\frac{\sec x \csc x - \tan x}{\sec x \csc x}$

29. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$

30. $\cot x - \csc^2 x \cot x$

31. $\cot x - \cos^3 x \csc x$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 6)

32. $\frac{\cos x}{\sec x + 1} + \frac{\cos x}{\sec x - 1}$

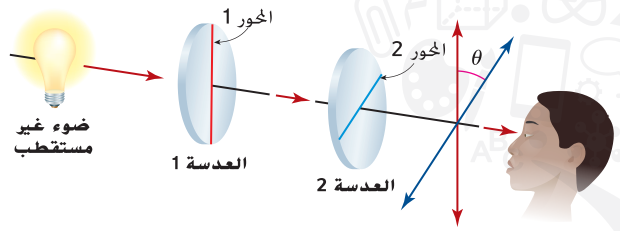
33. $\frac{1 - \cos x}{\tan x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

34. $\frac{1}{\sec x + 1} + \frac{1}{\sec x - 1}$

35. $\frac{\cos x \cot x}{\sec x + \tan x} + \frac{\sin x}{\sec x - \tan x}$

36. $\frac{\sin x}{\csc x + 1} + \frac{\sin x}{\csc x - 1}$

37. **النظارات الشمسية** تُصنع العديد من النظارات الشمسية من عدسات مستقطبة تقلل من شدة الضوء. ويمكن حساب شدة الضوء الظاهر من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، يمكن حساب I باستخدام $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$، حيث يكون I_0 هو شدة الضوء الداخل لنظام العدستين وتكون θ هي زاوية محور العدسة الثانية بالنسبة لزاوية محور العدسة الأولى. (مثال 6)



a. حوّل صيغة شدة الضوء الظاهر من نظام العدستين المستقطبتين لأبسط صورة.

b. إذا كانت النظارة الشمسية تحتوي على نظام من عدستين مستقطبتين بحيث يكون المحوران على زاوية 30° من بعضهما البعض. فما الجزء الذي يظهر من شدة الضوء الداخلة إلى النظارة الشمسية؟

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا. (مثال 7)

38. $\frac{\sin x}{\csc x - \cot x}$

39. $\frac{\csc x}{1 - \sin x}$

40. $\frac{\cot x}{\sec x - \tan x}$

41. $\frac{\cot x}{1 + \sin x}$

42. $\frac{3\tan x}{1 - \cos x}$

43. $\frac{2\sin x}{\cot x + \csc x}$

44. $\frac{\sin x}{1 - \sec x}$

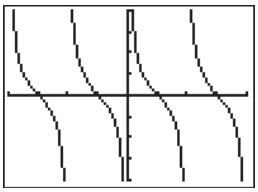
45. $\frac{\cot^2 x \cos x}{\csc x - 1}$

46. $\frac{5}{\sec x + 1}$

47. $\frac{\sin x \tan x}{\cos x + 1}$

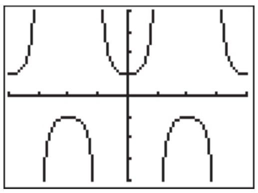
حدد ما إذا كانت كل دالة مثلثية رئيسة موضحة هي دالة فردية أم زوجية. اشرح استدلالك.

48.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

49.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

.50 **كرة القدم** عند ركل كرة قدم من سطح الأرض، فإن ارتفاعها المتمثل في y وإزاحتها الأفقية x مرتبطان بواسطة $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث تكون v_0 هي سرعة الكرة الابتدائية، وتكون θ هي الزاوية التي رُكِلت بها الكرة، وتكون g هي تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه المعادلة بحيث تكون $\tan\theta$ هي الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

اكتب كل تعبير بدلالة دالة مثلثية واحدة.

51. $\tan x - \csc x \sec x$

52. $\cos x + \tan x \sin x$

53. $\csc x \tan^2 x - \sec^2 x \csc x$

54. $\sec x \csc x - \cos x \csc x$

.55 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف كيفية التحقق من المتطابقات المثلثية. فكّر في الدوال الموضحة.

i. $y_1 = \tan x + 1$
$y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x$

ii. $y_3 = \tan x \sec x - \sin x$
$y_4 = \sin x \tan^2 x$

a. **العرض الجَدْوَلي** انسخ وأكمل الجدول أدناه بدون تمثيل الدوال بيانيًا.

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
y_1					
y_2					
y_3					
y_4					

b. **التمثيل البياني** مثّل كل دالة بيانيًا على حاسبة بيانية.

c. **التمثيل اللفظي** كوّن مرافقًا عن العلاقة بين y_1 و y_2. كرر العملية لكل من y_3 و y_4.

d. **طريقة التحليل** هل المرافقات التي كوّنتها في الجزء c صحيحة للمجال الكامل لكل دالة؟ اشرح استنتاجك.

أعد كتابة كل تعبير في صورة لوغاريتم منفرد وحوّل الإجابة لأبسط صورة.

56. $\ln|\sin x| - \ln|\cos x|$

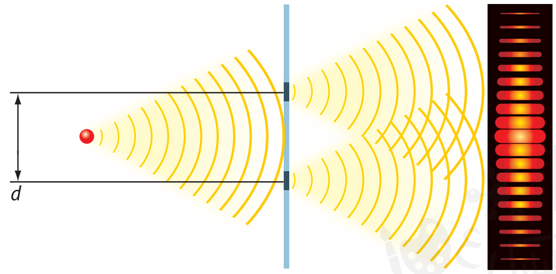
57. $\ln|\sec x| - \ln|\cos x|$

58. $\ln(\cot^2 x + 1) + \ln|\sec x|$

59. $\ln(\sec^2 x - \tan^2 x) - \ln(1 - \cos^2 x)$

.60 **الكهرباء** التيار الساري في سلك في مجال مغناطيسي يسبب فرض قوة على السلك. ويمكن تحديد قوة المجال المغناطيسي باستخدام الصيغة $B = \frac{F\csc\theta}{I\ell}$، حيث تكون F هي القوة الواقعة على السلك، وتكون I هي التيار داخل السلك، وتكون ℓ هي طول السلك، وتكون θ هي الزاوية التي يصنعها السلك مع المجال المغناطيسي. في بعض كتب الفيزياء، يتم توضيح الصيغة كما يلي $F = I\ell B\sin\theta$ وضّح أن الصيغتين متساويتان.

.61 **موجات الضوء** حين يشع الضوء عبر فتحتين ضيقتين، تظهر سلسلة من الحواف المضيئة والمظلمة. يمكن حساب الزاوية θ، بمقياس الزوايا النصف قطرية، المحددة لموقع الحافة رقم m^{th} بواسطة $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$ حيث تكون d هي المسافة بين الفتحتين وتكون λ هي طول موجة الضوء.

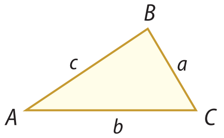


a. أعد كتابة الصيغة بدلالة θ.

b. حدد الزاوية المحددة لموقع الحافة المئة عندما يكون طول موجي للضوء يبلغ 550 نانومتر يشع عبر الفتحتين المزدوجتين اللتين تفصل بينهما مسافة 0.5 ميليمتر.

مسائل مهارات التفكير العليا

.62 **التحقق من الصحة** أثبت أن مساحة المثلث هي $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث تكون $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. (**إرشاد:** مساحة المثلث المائل هي $A = \frac{1}{2}bc\sin A$)



.63 **تحليل الخطأ** تريد مها وموزة تحويل ما يلي لأبسط صورة $\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$. وتظن مها أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\frac{\cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x}$، وتظنُ موزة أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\csc^2 x - \tan^2 x$. هل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

التحدي اكتب كلاً من الدوال المثلثية الأساسية بناءً على الدوال التالية.

64. $\sin x$ **65.** $\cos x$ **66.** $\tan x$

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة *صحيحة أم خاطئة*. اشرح استنتاجك.

.67 $\csc^2 x \tan x = \csc x \sec x$ صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الحقيقية.

.68 يمكن استخدام متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإثبات أن التمثيلات البيانية التي تخص $y = \cos x$ و $y = \sec x$ متماثلة بالنسبة للمحور الرأسي y.

الإثبات أثبت كل متطابقة فيثاغورس.

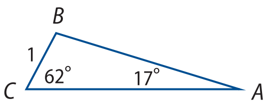
69. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ **70.** $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

.71 **الكتابة المسبقة** استخدم مخططًا أو جدولاً لمساعدتك على تنظيم المتطابقات المثلثية الرئيسية الموجودة في الدرس 1-4.

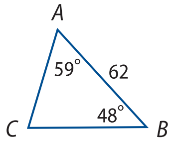
مراجعة شاملة

حُلّ كل مثلث. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

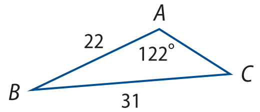
72.



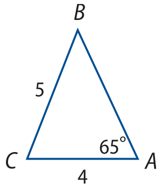
73.



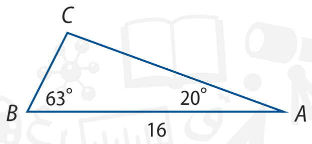
74.



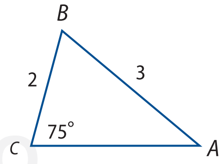
75.



76.



77.



جد القيمة الصحيحة لكل تعبير، إن وُجِدت.

78. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{7}{9}\right)$

79. $\tan(\arctan 3)$

80. $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

81. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

82. $\cos^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{\pi}{2}\right)$

83. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

84. **علم الأجناس البشرية** **قِياسُ التَّنامِي** هو دراسة العلاقة بين حجم كائن حي وحجم أي جزء من أجزائه. قرر أحد الباحثين إجراء اختبار لقياس التنامي بين حجم رأس الإنسان مقارنةً بجسمه بينما يتقدم الشخص في العمر. تمثل البيانات في الجدول الذَّكَر الأمريكي العادي.

a. جد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات من خلال تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي.

b. استخدم نموذج البيانات المقربة خطيًا لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.

c. استخدم نموذجك للتنبؤ بطول الذكر الأمريكي الذي محيط رأسه يساوي 61 سنتيميتر.

معدل نمو الذكر الأمريكي العادي (بعمر من 0 إلى 3 أعوام)

محيط الرأس (cm)	الطول (cm)
35.8	49.5
45.7	67.1
46.5	75.4
47.5	82
48.5	87.4
49.3	91.9
49.8	95.8

المصدر: المركز القومي للإحصاءات الصحية

لنفترض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{6, 9\}$, $B = \{6, 9, 10\}$, $C = \{0, 1, 6, 9, 11\}$, $D = \{2, 5, 11\}$. **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.**

85. $A \subset B$

86. $D \subset U$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

87. **SAT/ACT** إذا كان $x > 0$. فإن

$$\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{(x+1)^2-1}{x+2}+\frac{(x+2)^2-1}{x+3}=$$

A $(x+1)^2$

B $(x-1)^2$

C $3x-1$

D $3x$

E $3(x-1)^2$

88. **مراجعة** إذا كان $\sin x = m$ وكان $0 < x < 90°$. فإن $\tan x =$

F $\frac{1}{m^2}$

G $\frac{1-m^2}{m}$

H $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

J $\frac{m}{1-m^2}$

89. أيٌّ مما يلي يتساوى مع

$$\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\tan\theta?$$

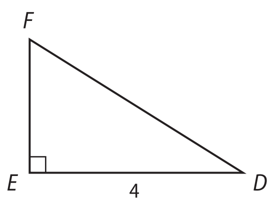
A $\tan\theta$

B $\cot\theta$

C $\sin\theta$

D $\cos\theta$

90. **مراجعة** انظر إلى الشكل. إذا كانت $\cos D = 0.8$. فما طول $\overline{DF}$؟



F 5

G 4

H 3.2

J $\frac{4}{5}$

الدرس

2–5 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

.. السابق

- حوّلت التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

.. الحالي

1 التحقق من صحة المتطابقات المثلثية.

2 تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

.. لماذا؟

- تتحرك لعبتان ناريتان بنفس السرعة v. ويرغب فني الألعاب النارية في تفجير إحداهما على ارتفاع أعلى من الأخرى عن طريق تعديل الزاوية θ الخاصة بالمسار الذي يشكله كل صاروخ مع الأرض. ولحساب أقصى ارتفاع h لكل صاروخ. فالصيغة $h = \frac{v^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ يمكن استخدامها، ولكن هل ستؤدي $h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$ إلى نفس النتيجة؟

مفردات جديدة

إثبات صحة المتطابقة
verify an identity

1 التحقق من صحة المتطابقات المثلثية لقد استخدمتَ المتطابقات المثلثية لإعادة كتابة التعابير بصيغ متكافئة وأحيانًا بصيغ أكثر جدوى. عند اثبات صحتها، يمكن استخدام هذه المتطابقات *الجديدة* أيضًا لحل المسائل أو لإعادة كتابة تعابير مثلثية أخرى.

إن **إثبات صحة متطابقة** يعني *التحقق* من أن كلا طرفي المتطابقة متساويان لكل قيم المتغير المعرف في كلا الطرفين من خلالها. ويتم هذا عن طريق تحويل التعبير في أحد طرفي المتطابقة إلى التعبير في الطرف الآخر عن طريق سلسلة من التعابير الوسيطة التي تتساوى كلها مع التعبير الأول. وكما هو الحال مع أنواع الإثباتات الأخرى، كل خطوة يبررها سبب. وهذا السبب هو عادةً متطابقة مثلثية أو عملية جبرية أخرى تم التحقق من صحتها.

ستجد في الأغلب أنه من الأسهل البدء في التحقق من صحة متطابقة مثلثية عن طريق البدء من الطرف الذي به التعبير الأكثر تعقيدًا ثم المتابعة للوصول إلى التعبير الأقل تعقيدًا.

مثال 1 اثبات صحة متطابقة فيثاغورس

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \cos^2 x$.

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا. لذا عليك البدء بهذا التعبير أولاً.

$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \cot^2 x \sin^2 x$ متطابقة مقلوب

$= \left(\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}\right)\cancel{\sin^2 x}$ متطابقة نسبية

$= \cos^2 x$ ✓ متطابقة فيثاغورس

لاحظ أن عملية اثبات الصحة تنتهي بوجود تعبير على الطرف الآخر من المتطابقة.

تمرين موجه

أثبت صحة كل متطابقة.

1A. $\sec^2 \theta \cot^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta$

1B. $\tan^2 \alpha = \sec \alpha \csc \alpha \tan \alpha - 1$

وهناك في العادة أكثر من طريقة لإثبات صحة متطابقة. فعلى سبيل المثال، المتطابقة في المثال 1 يمكن التحقق من صحتها أيضًا كما يلي.

$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x}$ اكتب في صور الفرق بين كسرين

$= 1 - \sin^2 x$ بسّط وطبّق متطابقة مقلوب

$= \cos^2 x$ متطابقة فيثاغورس

حين يكون هناك الكثير من الكسور التي لها مقامات مختلفة في أحد التعابير، يمكنك إيجاد مقام مشترك لتقليل التعبير إلى كسر واحد.

مثال 2 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام جمع الكسور

أثبت أن $2\csc x = \dfrac{1}{\csc x + \cot x} + \dfrac{1}{\csc x - \cot x}$

الطرف الأيمن من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء من هناك، وإعادة كتابة كل كسر باستخدام المقام المشترك $(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)$.

ابدأ بالطرف الأيمن من المتطابقة.
$$\frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$$

المقام المشترك
$$= \frac{\csc x - \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)} + \frac{\csc x + \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$$

اجمع.
$$= \frac{2\csc x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$$

جد حاصل الضرب.
$$= \frac{2\csc x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= 2\csc x \checkmark$$

تمرين موجه

2. أثبت أن $2\sec\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

ولحذف كسر مقامه بالصيغة $u \pm 1$ أو $1 \pm u$، تذكّر أن تحاول ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام. ثم يُحتمل أنه يمكنك تطبيق متطابقة فيثاغورس.

مثال 3 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام الضرب

أثبت أن $\csc\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

لأن الطرف الأيسر من هذه المتطابقة يضم كسرًا، فهو أكثر تعقيدًا بقليل من الطرف الأيمن. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 - \cos\alpha$، وهو $1 + \cos\alpha$.
$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

جد حاصل الضرب.
$$= \frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= \frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

اقسم على $\sin\alpha$.
$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

اكتب في صورة مجموع كسرين.
$$= \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

متطابقة المقلوب ومتطابقة نسبية.
$$= \csc\alpha + \cot\alpha \checkmark$$

تمرين موجه

3. أثبت أن $\csc x - \cot x = \dfrac{\tan x}{\sec x + 1}$.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة ليس عليك دومًا البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا من المعادلة. فإذا بدأت بالطرف الأيمن في المثال 3، فإنه بإمكانك إثبات صحة المتطابقة.

$$\csc\alpha + \cot\alpha$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \checkmark$$

وحتى يتم إثبات صحة متطابقة، لا يمكنك افتراض أن كلا الطرفين متساويان. ولهذا، لا يمكنك استخدام خصائص المعادلة لإجراء العمليات الجبرية على كل طرف من طرفي المتطابقة، مثل جمع نفس الكمية على كل طرف من المعادلة.

حين يضم التعبير الأكثر تعقيدًا في متطابقة أُسسًا، جرّب التحليل الى العوامل.

مثال 4 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام التحليل الى العوامل

أثبت أن $\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta = \csc\theta$

$\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta$ — ابدأ بالطرف الأيسر من المتطابقة.

$= \cot\theta \sec\theta (\csc^2\theta - \cot^2\theta)$ — حلل الى العوامل.

$= \cot\theta \sec\theta$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$ — المتطابقات العكسية ومتطابقة نسبية

$= \frac{1}{\sin\theta}$ — جد حاصل الضرب.

$= \csc\theta$ ✓ — متطابقة مقلوب

تمرين موجه

4. أثبت أن $\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x = \sec^2 x$.

فمن المفيد أحيانًا العمل بشكل مستقل على كل طرف من طرفي المتطابقة للحصول على تعبير وسيط مشترك.

مثال 5 اثبات صحة متطابقة بالعمل على كل طرف بشكل مستقل

أثبت أن $\frac{\tan^2 x}{1+\sec x} = \frac{1-\cos x}{\cos x}$

يبدو أن كلا الطرفين معقد، ولكن الطرف الأيسر أكثر تعقيدًا بقليل لأن مقامه يضم حدين. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

$\frac{\tan^2 x}{1+\sec x} = \frac{\sec^2 x - 1}{1+\sec x}$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1+\sec x}$ — حلل الى العوامل.

$= \sec x - 1$ — اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$.

من هذه النقطة، ليس واضحًا كيفية تحويل $\sec x - 1$ إلى $\frac{1-\cos x}{\cos x}$، لذا عليك البدء بالطرف الأيمن والعمل لتحويله إلى صيغة وسيطة $\sec x - 1$.

$\frac{1-\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}$ — اكتب في صورة الفارق بين كسرين.

$= \sec x - 1$ — استخدم متطابقة ناتج القسمة وبسّط

لإكمال الإثبات، حُل بترتيب عكسي لربط طرفي الإثبات.

$\frac{\tan^2 x}{1+\sec x} = \frac{\sec^2 x - 1}{1+\sec x}$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1+\sec x}$ — حلل إلى العوامل.

$= \sec x - 1$ — اقسم على $\sec x + 1$

$= \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}$ — استخدم متطابقة ناتج القسمة واكتبها 1 في صورة $\frac{\cos x}{\cos x}$

$= \frac{1-\cos x}{\cos x}$ ✓ — اجمع الكسور.

تمرين موجه

5. أثبت أن $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

نصيحة دراسية

خطوات إضافية أثناء إثبات صحة متطابقة، قد يكون عدد الخطوات اللازمة لتبرير التحقق واضحًا. ولكن، إذا لم يكن واضحًا، فمن الأسلم عادةً تضمين خطوات أكثر من اللازم بدلاً من اعتماد خطوات أقل من اللازم.

ملخص المفاهيم إستراتيجيات لإثبات صحة المتطابقات المثلثية

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأبسط، مع إبقاء الطرف الآخر من المتطابقة في الحسبان على أنه هدفك.
- استخدم متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، وإعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فرق، وضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل المقام أو البسط بصيغة $1 \pm u$ أو صيغة $u \pm 1$ إلى حد فردي باستخدام المُرافق ومتطابقة فيثاغورس.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير وسيط مشترك.
- إذا لم تَظهر جدوى أي إستراتيجية، فحاول تحويل التعبير بالكامل إلى تعبير لا يشتمل إلا على جيوب الزوايا وجيوب التمام.

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

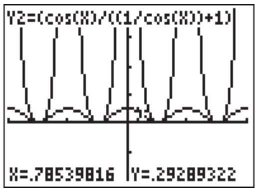
تحديد المتطابقات واللامتطابقات يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف ما إذا كان من المحتمل أن المعادلة هي متطابقة أم لا من خلال التمثيل البياني للدوال المرتبطة بكل طرف من المعادلة.

مثال 6 تحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا

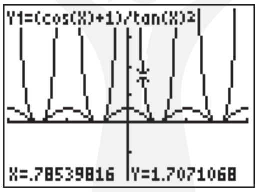
استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين.

a. $\dfrac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sec\beta+1}$

التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة لا تتطابق في كل قيم x التي تحدد كلتا الدالتين. حين تكون فإنّ $x=\frac{\pi}{4}$، $Y1 \approx 1.7$ ولكن $Y2 \approx 0.3$. وعندها تكون هذه المعادلة ليست متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

b. $\dfrac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sec\beta-1}$

المعادلة تبدو كأنها متطابقة لأن التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة تتطابق. تحقق من صحة هذا جبريًا.

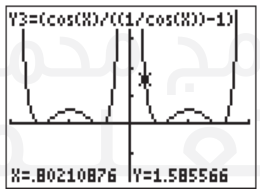
$$\frac{\cos\beta}{\sec\beta-1}=\frac{\cos\beta}{\sec\beta-1}\cdot\frac{\sec\beta+1}{\sec\beta+1}$$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $\sec\beta - 1s$.

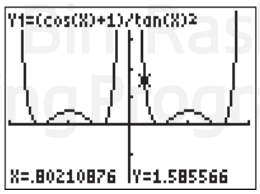
$$=\frac{\cos\beta\sec\beta+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ جد حاصل الضرب.

$$=\frac{\cos\beta\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ متطابقة مقلوب

$$=\frac{1+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ بسّط

$$=\frac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}\ \checkmark$$ خاصية التبديل ومتطابقة فيثاغورس





$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

تمرين موجه

6A. $\csc\theta=\dfrac{\cot\theta\tan^2\theta+\cot\theta}{\sec\theta}$

6B. $\dfrac{\cos x+1}{\sec^2 x}=\dfrac{\cos x}{\sec x-1}$

انتبه!

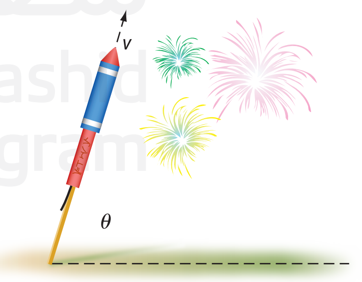
استخدام تمثيل بياني يمكنك استخدام حاسبة بيانية للمساعدة في تأكيد لامتطابقة، ولكنك لا تستطيع استخدام حاسبة بيانية *لإثبات* أن إحدى المعادلات هي متطابقة. عليك تقديم تحقق جبري من صحة متطابقة.

تمارين

أثبت صحة كل متطابقة. (الأمثلة 1-3)

1. $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$
2. $\sec^2\theta(1 - \cos^2\theta) = \tan^2\theta$
3. $\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta = \sin^3\theta$
4. $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta = \sin\theta$
5. $\cot^2\theta\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot^4\theta$
6. $\tan\theta\csc^2\theta - \tan\theta = \cot\theta$
7. $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$
8. $\dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} + \dfrac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$
9. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \tan\theta = \sec\theta$
10. $\dfrac{\sin\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
11. $\dfrac{1}{1 - \tan^2\theta} + \dfrac{1}{1 - \cot^2\theta} = 1$
12. $\dfrac{1}{\csc\theta + 1} + \dfrac{1}{\csc\theta - 1} = 2\sec^2\theta\sin\theta$
13. $(\csc\theta - \cot\theta)(\csc\theta + \cot\theta) = 1$
14. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
15. $\dfrac{1}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1}{1 + \sin\theta} = 2\sec^2\theta$
16. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = 2\sec\theta$
17. $\csc^4\theta - \cot^4\theta = 2\cot^2\theta + 1$
18. $\dfrac{\csc^2\theta + 2\csc\theta - 3}{\csc^2\theta - 1} = \dfrac{\csc\theta + 3}{\csc\theta + 1}$

19. **الألعاب النارية** إذا أُطلق صاروخ من مستوى الأرض، فإن أقصى ارتفاع يصل إليه يُعطى بالعلاقة $h = \dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$، بحيث تكون θ هي الزاوية بين الأرض والمسار الأولي للصاروخ، وتكون v هي سرعة الصاروخ الابتدائية، وتكون g هي تسارع الجاذبية الأرضية التي مقدارها تربيع $9.8\ \text{m/s}^2$. (مثال 3)



a. أثبت أن $\dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$.

b. لنفترض أنه تم إطلاق صاروخ آخر بزاوية قياسها $80°$ من الأرض بسرعة ابتدائية تبلغ $110\ \text{m/s}$. فجد أقصى ارتفاع للصاروخ.

أثبت صحة كل متطابقة. (المثالان 4 و5)

20. $(\csc\theta + \cot\theta)(1 - \cos\theta) = \sin\theta$
21. $\sin^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
22. $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 - \cot^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$
23. $\dfrac{1 + \csc\theta}{\sec\theta} = \cos\theta + \cot\theta$
24. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$
25. $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = \dfrac{1}{2\cos^2\theta - 1}$
26. $\tan^2\theta\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
27. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$
28. $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$
29. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$
30. $\dfrac{1 + \tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$
31. $\dfrac{2 + \csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

32. **علم البصريات** إذا وُضع منشوران بنفس القوة بجوار بعضهما البعض، يمكن تحديد إجمالي قوتها باستخدام الصيغة $z = 2p\cos\theta$، حيث z هي القوة المجمعة للمنشورين، وتكون p هي قوة كل منشور على حدة، وتكون θ هي الزاوية بين المنشورين. فتحقق من أن $2p\cos\theta = 2p(1 - \sin^2\theta)\sec\theta$. (مثال 4)

33. **التصوير الفوتوغرافي** كمية الضوء المارة عبر مرشح استقطاب يمكن تمثيلها في نموذج باستخدام الصيغة $I = I_m\cos^2\theta$، حيث تكون I هي كمية الضوء المارة عبر المرشح، وتكون I_m هي كمية الضوء المُشعة على المرشح، وتكون θ هي زاوية الدوران بين مصدر الضوء والمرشح. أثبت أن $I_m\cos^2\theta = I_m - \dfrac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$. (مثال 4)

الحاسبة البيانية اختبر ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا عن طريق التمثيل البياني. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين. (مثال 6)

34. $\dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x}$
35. $\sec x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$
36. $\sec^2 x - 2\sec x\tan x + \tan^2 x = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
37. $\dfrac{\cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} = 1 - 2\sin^2 x$
38. $\dfrac{\tan x - \sec x}{\tan x + \sec x} = \dfrac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}$
39. $\cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x}$

أثبت صحة كل متطابقة.

40. $\sqrt{\dfrac{\sin x \tan x}{\sec x}} = |\sin x|$

41. $\sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \left|\dfrac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$

42. $\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc x - \cot x| = 0$

43. $\ln|\cot x| + \ln|\tan x \cos x| = \ln|\cos x|$

أثبت صحة كل متطابقة.

44. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \tan^4\theta$

45. $-2\cos^2\theta = \sin^4\theta - \cos^4\theta - 1$

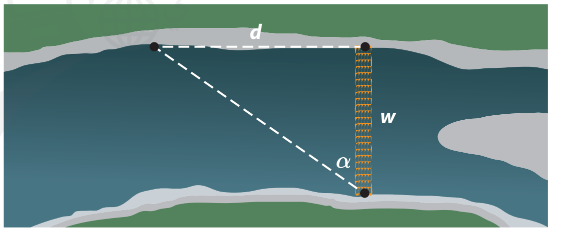
46. $\sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^4\theta - (\tan^4\theta + \sec^2\theta)$

47. $3\sec^2\theta \tan^2\theta + 1 = \sec^6\theta - \tan^6\theta$

48. $\sec^4 x = 1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

.50 **البيئة** عالم أحياء يدرس التلوث وَضَعَ شبكة بعرض نهر ووضع أدوات في نقطتين مختلفتين على ضفة النهر لجمع العينات. وفي الرسم التخطيطي الموضح، فإن d هي المسافة بين المحطات وw هي عرض النهر.



.a حدد معادلة فيما يتعلق بـ $\tan\alpha$ الذي يمكن استخدامه لإيجاد المسافة بين المحطتين.

.b أثبت أن $d = \dfrac{w\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha}$

.c أكمل الجدول الموضح حينما تكون $d = 40$ مترا.

w	20	40	60	80	100	120
α						

.d إذا كان $\alpha > 60°$ أو كان $\alpha < 20°$، فالأدوات لن تعمل بشكل سليم. استخدِم الجدول من الجزء c لتحديد أي من الموقعين – حيث يكون عرض النهر فيه 5 أو 35 أو 140 قدمًا – يمكن استخدامه لإجراء التجربة.

الدوال الزائدية *الدوال المثلثية الزائدية* يمكن تحديدها بالطرق التالية.

$\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\qquad$ $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}, x \neq 0$

$\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\qquad$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\qquad$ $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}, x \neq 0$

أثبت صحة كل متطابقة باستخدام الدوال الموضحة أعلاه.

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

52. $\sinh(-x) = -\sinh x$

53. $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

54. $\cosh(-x) = \cosh x$

الحاسبة البيانية مَثِّل كل طرف من كل معادلة بيانيًا. فإذا بدا أن المعادلة متطابقة، أثبت صحتها جبريًا.

55. $\dfrac{\sec x}{\cos x} - \dfrac{\tan x \sec x}{\csc x} = 1$

56. $\sec x - \cos^2 x \csc x = \tan x \sec x$

57. $(\tan x + \sec x)(1 - \sin x) = \cos x$

58. $\dfrac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} = -1$

.59 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الطرق المستخدمة لحل المعادلات المثلثية. فكّر في $2\sin x = 1$.

.a **تمثيل عددي** اعزل الدالة المثلثية في المعادلة بحيث يكون $\sin x$ هو التعبير الوحيد الموجود بأحد طرفي المعادلة.

.b **تمثيل بياني** مَثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي وجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $[0, 2\pi)$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا النصف قطرية.

.c **تمثيل هندسي** استخدم دائرة الوحدة للتحقق من صحة الإجابات التي وجدتها في الجزء b.

.d **تمثيل بياني** مثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي وجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $-2\pi < x < 2\pi$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

.e **تمثيل لفظي** خمّن ما هي حلول $2\sin x = 1$. اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا

.60 **التبرير** هل يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا؟ اشرح استنتاجك.

.61 **التحدي** أثبت صحة أن مساحة مثلث A موضحة بالمعادلة

$$A = \frac{\alpha^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta + \gamma)}$$

حيث يمثل كلٌ من a و b و c أضلاع المثلث ويمثل α و β و γ الزوايا المقابلة ذات الصلة.

.62 **الكتابة في الرياضيات** استخدِم خصائص اللوغاريتمات لشرح السبب في أن مجموع اللوغاريتمات الطبيعية الخاصة بالدوال المثلثية الأساسية الست لأي زاوية θ يساوي 0.

.63 **مسألة ذات إجابة مفتوحة** كوّن متطابقات لكلٍ من $\sec x$ و$\csc x$ بدلالة دالتين أو أكثر من الدوال المثلثية الأخرى.

.64 **التبرير** إذا كانت الزاويتان α و β متتامتين، فهل $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$؟ اشرح استنتاجك. علل إجاباتك.

.65 **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف تثبت صحة متطابقة مثلثية يكون فيها طرفا المعادلة متساويين في درجة التعقيد.

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

66. $\cos\theta \csc\theta$

67. $\tan\theta \cot\theta$

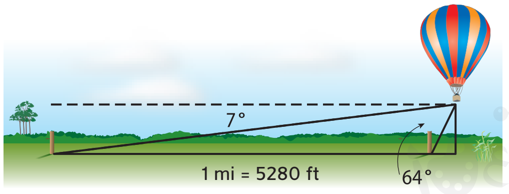
68. $\sin\theta \cot\theta$

69. $\dfrac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$

70. $\dfrac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$

71. $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

72. **ركوب المنطاد** بينما يمر منطاد هواء ساخن عبر جزء مستقيم من الطريق السريع. رأى قائده نقطتين متتابعتين من نقاط توضيح المسافة على نفس الجانب من المنطاد. وحين معاينة النقطتين، كانت زاويتا الانخفاض 64° و7°. فما ارتفاع المنطاد مقربًا لأقرب قدم؟



حدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثّل كل دالة بيانيًا.

73. $y = \frac{1}{4}\tan x$

74. $y = \csc 2x$

75. $y = \frac{1}{2}\sec 3x$

حول قياس الزاوية من الدرجات الى الزوايا النصف قطرية بدلالة π وبالعكس.

76. $660°$

77. $570°$

78. $158°$

79. $\dfrac{29\pi}{4}$

80. $\dfrac{17\pi}{6}$

81. 9

حُلّ كلاً من المتباينات التالية.

82. $x^2 - 3x - 18 > 0$

83. $x^2 + 3x - 28 < 0$

84. $x^2 - 4x \le 5$

85. $x^2 + 2x \ge 24$

86. $-x^2 - x + 12 \ge 0$

87. $-x^2 - 6x + 7 \le 0$

88. **الطعام** يفحص مدير مخبز عشوائيًا قِطَع من الكعك الذي أعدّه العاملون لضمان الطعم الصحيح والمضبوط في كل قِطعة. وينبغي أن تحتوي كل قطعة بوزن 12 أوقية على كريمة نصفها بطعم الشوكولاتة ونصفها بطعم الفانيليا. يمكن تمثيل كمية الشوكولاتة التي تختلف فيها كل شريحة بالصيغة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$. صِف التحوّلات في الدالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. SAT/ACT

$a, b, a, b, b, a, b, b, b, a, b, b, b, b, a, \ldots$

إذا استمرت المتتالية على هذه الوتيرة، فكم عدد حروف b الموجودة بين المرة الرابعة والسابعة والأربعين لظهور الحرف a؟

A 91 **C** 138 **E** 230

B 135 **D** 182

90. أي تعبير يمكن استخدامه لتكوين متطابقة فيها $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{1+\tan\theta}$ حين تكون $\tan\theta \neq -1$؟

F $\sin\theta$

G $\cos\theta$

H $\tan\theta$

J $\csc\theta$

91. **مراجعة** أيّ مما يلي لا يساوي $\cos\theta$ عندما يكون $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

A $\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta \sin\theta$

D $\tan\theta \csc\theta$

92. **مراجعة** أيّ مما يلي يساوي $\sin\theta + \cot\theta \cos\theta$؟

F $2\sin\theta$

G $\dfrac{1}{\sin\theta}$

H $\cos^2\theta$

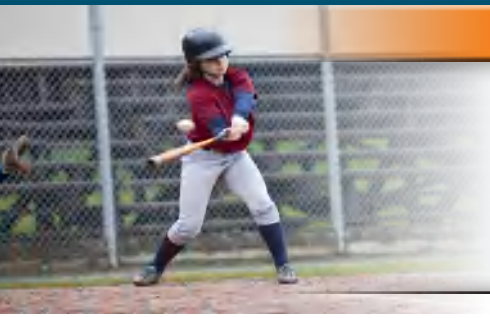
J $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta}$

الدرس 5-3 حل المعادلات المثلثية

السابق..
- لقد قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية.

الحالي..
1. حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
2. حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

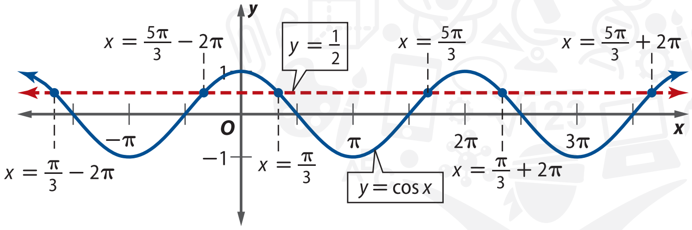
لماذا؟..
- كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بزاوية انطلاق θ وتعود إلى ارتفاع ضربها الإبتدائي بعد مسافة d من الأمتار. ولإيجاد سرعة v_0 للكرة بينما تنطلق من سطح المضرب، يمكنك حل المعادلة المثلثة $d = \frac{2{v_0}^2 \sin \theta \cos \theta}{9.8}$



1 استخدام الأساليب الجبرية للحل

في الدرس 2-4، قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية التي تكون صحيحة لجميع قيم المتغير في كلا الطرفين. وفي هذا الدرس، سندرس المعادلات المثلثية الشرطية والتي قد تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولكنها خاطئة عند القيم الأخرى.

فكّر في التمثيلات البيانية لكلا طرفي المعادلة المثلثية $\cos x = \frac{1}{2}$



يوضح التمثيل البياني أن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلين بالفترة $[0, 2\pi)$، $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$. حيث إن دورة $y = \cos x$ هي 2π. فإن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلول لانهائية للفترة $(-\infty, \infty)$. يمكن إيجاد حلول إضافية بجمع مضاعفات الأعداد الصحيحة للفترات، بحيث يمكننا التعبير عن جميع الحلول كتابةً

$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$. حيث يكون n هو عدد صحيح.

لحل المعادلات المثلثية التي تضم تعبيرًا مثلثيًا واحدًا فقط. ابدأ بعزل هذا التعبير.

مثال 1 الحل بعزل التعابير المثلثية

حُلّ المعادلة: $2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$.

$2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$	**المعادلة الأصلية**
$\tan x - \sqrt{3} = 0$	**اطرح tan x من كل طرف لعزل التعبير المثلث**
$\tan x = \sqrt{3}$	**اجمع $\sqrt{3}$ على كل طرف**

الدورة الخاصة بـــ tan هي π. لذا فأنت لا تحتاج إلا إيجاد الحلول بالفترة $[0, \pi)$. الحل الوحيد بهذه الفترة هو $x = \frac{\pi}{3}$. الحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ يتم إيجادها فيما بعد عن طريق جمع مضاعفات العدد الصحيح π. ولهذا، فالصيغة العامة للحل هي

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

1. حُـــلّ $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$.

مثال 2 الحل بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

حُلّ المعادلة: $4 \sin^2 x + 1 = 4$.

$4 \sin^2 x + 1 = 4$	المعادلة الأصلية
$4 \sin^2 x = 3$	اطرح 1 من كل طرف
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$	اقسم كل طرف على 4
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	خُذ الجذر التربيعي لكل طرف

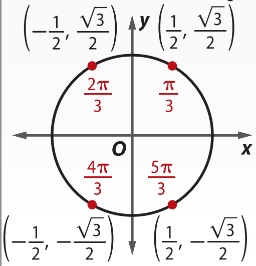
بالفترة $[0, 2\pi)$، $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حين يكون $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ وحين يكون $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ يكون $x = \frac{4\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.
بما أن دورة sin الزاوية هي 2π. فالحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ لها الصيغة العامة $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

2. حُل $3 \cot^2 x + 4 = 7$.

نصيحة دراسية

إيجاد الحلول باستخدام دائرة الوحدة بما أن sin الزاوية يتوافق مع الإحداثي y بدائرة الوحدة. فيمكنك إيجاد حلول sin بالفترة $[0, 2\pi)$ هي $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ باستخدام دائرة الوحدة كما هو موضح.



أي زاوية تشترك في ضلع الإنتهاء مع هذه الزوايا ستكون أيضًا حلاً للمعادلة.

حين لا يمكن جمع الدوال المثلثية على أحد طرفي معادلةٍ ما، جرّب طريقة التحليل الى العوامل وتطبيق خاصية ناتج الضرب الصفري. إذا كانت للمعادلة صيغة تربيعية، فحلل الى العوامل إن أمكن. وإذا تعذّر ذلك، فطبّق الصيغة التربيعية.

مثال 3 الحل باستخدام التحليل الى العوامل

حُلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $\cos x \sin x = 3 \cos x$

$\cos x \sin \theta = 3 \cos x$		المعادلة الأصلية
$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$		اعزل التعبير المثلثي
$\cos x (\sin x - 3) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos x = 0$ أو	$\sin x - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$	$\sin x = 3$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi)$

المعادلة $\sin x = 3$ ليس لها حل حيث إن القيمة العظمى الممكنة لدالة الــ **Sine** الزاوية هي **1**.
ولهذا، في الفترة $[0, 2\pi)$، إن حلول المعادلة الأصلية هي $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$.

b. $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$

$\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$		المعادلة الأصلية
$(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x - 2 = 0$		اكتب بالصيغة التربيعية
$(\cos^2 x + 2)(\cos^2 x - 1) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos^2 x + 2 = 0$ أو	$\cos^2 x - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\cos^2 x = -2$	$\cos^2 x = 1$	حُل لإيجاد $\cos^2 x$
$\cos x = \pm\sqrt{-2}$	$\cos x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف

المعادلة $\cos x = \pm\sqrt{-2}$ ليست لها حلول حقيقية. في الفترة $[0, 2\pi)$، المعادلة $\cos x = \pm 1$ لها حلان هما **0** و π.

تمرين موجه

3A. $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$

3B. $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$

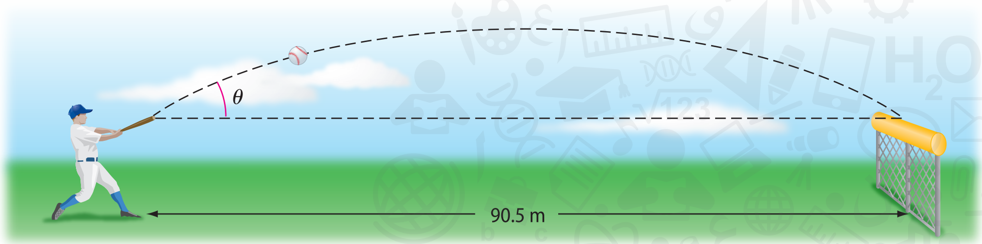
انتبه!

القسمة على العوامل المثلثية لا تقسم $\cos x$ في المثال 3a. وإذا كنت ستفعل ذلك، فلاحظ أنك قد تستنتج أن المعادلة ليس لها حل. في حين أنها في الواقع لها حلان بالفترة $[0, 2\pi)$.

تشتمل بعض المعادلات المثلثية على دوال لأضعاف زوايا، مثل $\cos 2x = \frac{1}{2}$. ولحل هذه المعادلات، عليك أولاً حل أضعاف الزاوية.

مثال 4 من الحياة اليومية الدوال المثلثية لأضعاف الزوايا

البيسبول كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بسرعة إبتدائية تبلغ 30 m/s وتتجاوز سورًا على بعد 90.5 m. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الإبتدائي للكرة المضروبة. فإذا كانت المسافة التي قطعتها الكرة متمثلة في $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$ ، حيث الوحدة للمقام 9.8 هي m/s^2، فجد فترة لزوايا الإطلاق المحتملة للكرة.



$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية
$90.5 = \frac{30^2 \sin 2\theta}{9.8}$	$d = 90.5$ و $v_0 = 30$
$90.5 = \frac{900 \sin 2\theta}{9.8}$	بسّط
$886.9 = 900 \sin 2\theta$	اضرب كل طرف في 9.8
$\frac{886.9}{900} = \sin 2\theta$	اقسم كل طرف على 900
$\sin^{-1} \frac{886.9}{900}$	تعريف Sin^{-1}

تعلمت سابقاً أن مدى دالة Sin^{-1} مقصور على الزوايا الحادة لـ θ في الفترة $[-90°, 90°]$. بما أننا نوجد Sin^{-1} الخاص بـ 2θ بدلاً من θ. فنحن بحاجة إلى التفكير في الزوايا الموجودة في الفترة $[-2(90°), 2(90°)]$ أو $[-180°, 180°]$. استخدم حاسبتك لإيجاد علاقة الزاوية الحادة وزاوية المرجع $\sin(180° - \theta) = \sin \theta$ لإيجاد الزاوية المنفرجة.

$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} = 2\theta$	تعريف Sin^{-1}
$80.2° = 99°.8 = 2\theta$	$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} \approx 80.2°$ و $\sin(180° - 80.2°) = \sin 99.8°$
$40.1° = 49°.9 = \theta$	اقسم على 2

الفترة هي $[40°.1, 49°.9]$. ستتجاوز الكرة السور إذا كانت الزاوية بين 40°.1 و49°.9.

التحقق عوّض عن قياسات الزاوية في المعادلة الأصلية لتأكيد الحل.

$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية	$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$
$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 40.1°)}{9.8}$	$\theta = 40.1°$ أو $\theta = 49.9°$	$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 49.9°)}{9.8}$
$90.5 \approx 90.497$ ✓	استخدم حاسبة	$90.5 \approx 90.497$ ✓

تمرين موجه

4. **البيسبول** جد فترة زوايا الإطلاق المحتملة المطلوبة لتجاوز السور، إذا:

A. تزايدت السرعة الإبتدائية لتصل إلى 35 m/s.

B. ظلت السرعة الإبتدائية كما هي، ولكن المسافة نحو السور كانت 80 m.

نصيحة دراسية

الحلول الدقيقة مقابل الحلول التقريبية أثناء حل المعادلات المثلثية التي ليست في سياق من الحياة اليومية، اكتب إجاباتك باستخدام القيم الدقيقة بدلاً من التقريبات العشرية. فعلى سبيل المثال، الحلول العامة للمعادلة $\tan x = 2$ ينبغي التعبير عنها كما يلي $x = \tan^{-1} 2 + n\pi$ أو $x = \arctan 2 + n\pi$.

نصيحة دراسية

الزاوية المثالية بتجاهل مقاومة الريح والعوامل الأخرى، ستقطع كرة البيسبول أطول مسافة حين تُضرب بزاوية 45°. وهذا لأن $\sin 2(45) = 1$، والتي تزيد من مدى صيغة المسافة لأقصى حد في المثال.

2 استخدام المتطابقات المثلثية للحل
يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية مع الطرق الجبرية لحل المعادلات المثلثية.

مثال 5 الحل بإعادة الكتابة باستخدام دالة مثلثية واحدة

حُلّ المعادلة $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ بالفترة $[0, 2\pi)$.

$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ المعادلة الأصلية

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$ متطابقة فيثاغورس

$2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ اضرب

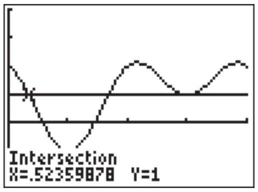
$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ بسّط

$-1(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$ حلل إلى العوامل

$2\sin x - 1 = 0 \quad = \quad \sin x + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -1$ حُل لإيجاد $\sin x$

$x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$ حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi)$



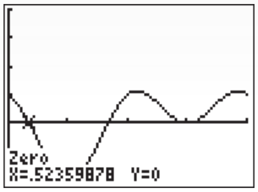
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

التحقق التمثيلات البيانية التي تخص $Y1 = 2\cos^2 x - \sin x$ و $Y2 = 1$ تتقاطع في $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح ✔

نصيحة دراسية

طريقة بديلة هناك طريقة بديلة للتحقق من المثال 5 وهي التمثيل البياني لما يلي $y = 2\cos^2 x - \sin x - 1$.

تتضمن أصفارًا $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

تمرين موجه

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

5A. $1 - \cos x = 2\sin^2 x$

5B. $\cot^2 x \csc^2 x + 2\csc^2 x - \cot^2 x = 2$

ويمكنك أحيانًا الحصول على معادلة في دالة مثلثية واحدة من خلال تربيع كل طرف. ولكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى الوصول لحلول غير مترابطة.

مثال 6 الحل باستخدام التربيع

حُلّ المعادلة $\csc x - \cot x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$\csc x - \cot x = 1$ المعادلة الأصلية

$\csc x = 1 + \cot x$ اجمع $\cot x$ على كل طرف

$(\csc x)^2 = (1 + \cot x)^2$ قم بتربيع كل طرف

$\csc^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$ اضرب

$1 + \cot^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$ متطابقة فيثاغورس

$0 = 2\cot x$ اطرح $1 + \cot^2 x$ من كل طرف

$0 = \cot x$ اقسم كل طرف على 2

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$ حُل لإيجاد x على $[0, 2\pi)$

التحقق

$\csc x - \cot x = 1$ المعادلة الأصلية $\qquad \csc x - \cot x = 1$

$\csc \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$ استبدل $\qquad \csc \frac{3\pi}{2} - \cot \frac{3\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$

$1 - 0 = 1$ ✔ بسّط $\qquad -1 - 0 \neq 1$ ✗

ولهذا، فالحل المتاح الوحيد هو $\frac{\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi)$.

تمرين موجه

6A. $\sec x + 1 = \tan x$

6B. $\cos x = \sin x - 1$

تمارين

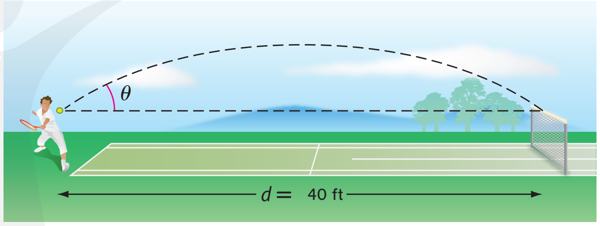
حُلّ كل معادلة لجميع قيم x. (المثالان 1 و2)

1. $5 \sin x + 2 = \sin x$
2. $5 = \sec^2 x + 3$
3. $2 = 4 \cos^2 x + 1$
4. $4 \tan x - 7 = 3 \tan x - 6$
5. $9 + \cot^2 x = 12$
6. $2 - 10 \sec x = 4 - 9 \sec x$
7. $3 \csc x = 2 \csc x + \sqrt{2}$
8. $11 = 3 \csc^2 x + 7$
9. $6 \tan^2 x - 2 = 4$
10. $9 + \sin^2 x = 10$
11. $7 \cot x - \sqrt{3} = 4 \cot x$
12. $7 \cos x = 5 \cos x + \sqrt{3}$

حُـــلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة: $[0, 2\pi]$. (مثال 3)

13. $\sin^4 x + 2 \sin^2 x - 3 = 0$
14. $-2 \sin x = -\sin x \cos x$
15. $4 \cot x = \cot x \sin^2 x$
16. $\csc^2 x - \csc x + 9 = 11$
17. $\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 1$
18. $2 \sin^2 x = \sin x + 1$

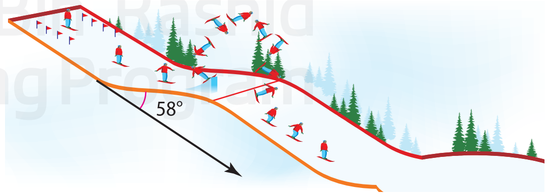
19. **التنس** كرة تنس تنطلق من سطح المضرب وتتجه نحو شبكة على بعد 40 ft وارتفاع الشبكة هو نفس الارتفاع الإبتدائي لكرة التنس. (مثال 4)



a. فإذا ضُربت الكرة بسرعة 50 ft/s. وبتجاهل مقاومة الهواء.
فاستخدم $d = \frac{1}{32} v_0{}^2 \sin 2\theta$ لإيجاد فترة الزوايا المحتملة التي تحتاجها الكرة لعبور الشبكة.

b. جد θ إذا ظلت السرعة الإبتدائية كما هي ولكن المسافة نحو الشبكة كانت 50ft.

20. **التزلج على الجليد** في المنافسة الأولمبية لرياضة التزلج الهوائي على الجليد، يُسرع المتزلجون نزولاً على منحدر يُطلقهم في الهواء، كما هو موضح. وأقصى ارتفاع يمكن للمتزلجين تحقيقه مُمثل فيما يلي $h_{peak} = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث يكون g هو تسارع الجاذبية و تساوي 9.8 أمتار بالثانية المربعة. (مثال 4)



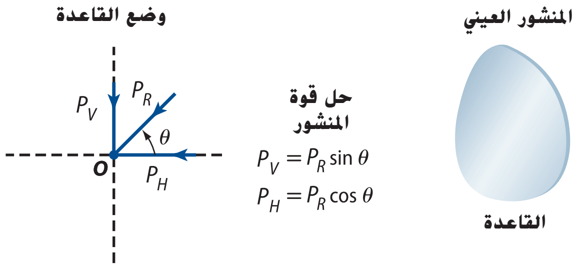
a. إذا حقق متزلج ارتفاع 5 m أعلى نهاية المنحدر. فماذا كانت سرعته الإبتدائية؟

b. استخدم إجابتك من الجزء a لتحديد الزمن الذي يستغرقه المتزلج ليصل لأقصى ارتفاع إذا كانت $t_{peak} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$.

حُلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi]$. (المثالان 5 و6)

21. $1 = \cot^2 x + \csc x$
22. $\sec x = \tan x + 1$
23. $\tan^2 x = 1 - \sec x$
24. $\csc x + \cot x = 1$
25. $2 - 2 \cos^2 x = \sin x + 1$
26. $\cos x - 4 = \sin x - 4$
27. $3 \sin x = 3 - 3 \cos x$
28. $\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x = 9$
29. $\sec^2 x - 1 + \tan x - \sqrt{3} \tan x = \sqrt{3}$
30. $\sec^2 x \tan^2 x + 3 \sec^2 x - 2 \tan^2 x = 3$

31. **فحص البصر** يضم أخصائيو فحص البصر أحيانًا منشورين منحرفين أو مائلين لتصحيح الرؤية. القوة الانكسارية الناتجة P_R عن ضم منشورين منحرفين يمكن حسابها عن طريق تحليل كل منشور إلى مكوناته الأفقية والرأسية، P_H وP_V.



باستخدام المعادلات أعلاه، حدد قيم θ التي يكون فيها كلّ من P_V وP_H متساويين.

حُـــلّ كل من المعادلات الآتية $[0, 2\pi]$.

32. $\frac{\tan^2 x}{\sec x} + \cos x = 2$
33. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = -4$
34. $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x} + \frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cos x$
35. $\cot x \cos x + 1 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{\sin x}{\tan^2 x}$

الحاسبة البيانية **حُل كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi]$ عن طريق التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزء من مائة.**

36. $3 \cos 2x = e^x + 1$
37. $\sin \pi x + \cos \pi x = 3x$
38. $x^2 = 2 \cos x + x$
39. $x \log x + 5x \cos x = -2$

40. **الأرصاد الجوية** متوسط درجة الحرارة اليومية لإحدى المدن بدرجات الفهرنهايت يمكن تمثيله بما يلي $t = 8.05 \cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 66.95$. حيث تكون x دالة في الزمن، وتمثل 1 = x يوم 15 يناير، وتمثل 2 = x يوم 15 فبراير وهكذا.

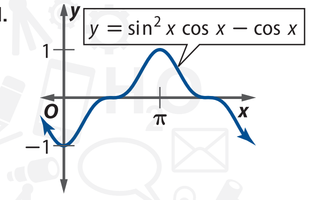
a. استخدم حاسبة بيانية لتقدير درجة الحرارة يوم 31 يناير.

b. قرّب عدد الشهور التي يكون فيها متوسط درجة الحرارة أكبر من 70 درجة على مدار الشهر.

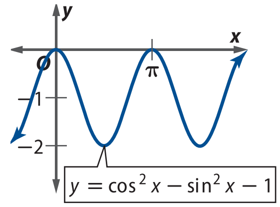
c. قدّر أعلى درجة حرارة في العام والشهر الذين تحدث فيهما.

جد التقاطع مع المحاور الأفقية x لكل تمثيل بياني بالفترة $[0, 2\pi]$.

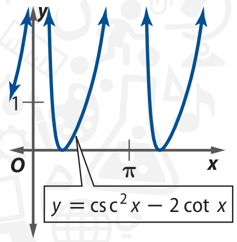
41.



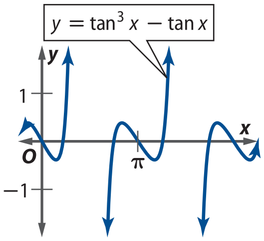
42.



43.



44.



حُلّ كل من المعادلات التالية في الفترة $[0, 4\pi]$.

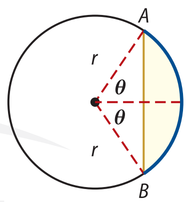
45. $4 \tan x = 2 \sec^2 x$

46. $2 \sin^2 x + 1 = -3 \sin x$

47. $\csc x \cot^2 x = \csc x$

48. $\sec x + 5 = 2 \sec x + 3$

49. **الهندسة** فكّر في الدائرة أدناه.



a. طول s للقوس AB يتمثل في $s = r(2\theta)$ حيث يكون $0 \le \theta \le \pi$. حين يكون 18 = s و $AB = 14$. فنصف القطر هو $r = \frac{7}{\sin \theta}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس 2θ بالراديان.

b. مساحة المنطقة المظللة تتمثل في $A = \frac{r^2(\theta - \sin \theta)}{2}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس θ بالراديان إذا كان نصف القطر هو 5 in والمساحة هي $36\ in^2$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

حُلّ كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi)$.

50. $1 > 2 \sin x$

51. $0 < 2 \cos x - \sqrt{2}$

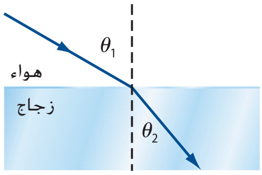
52. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

53. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \le \tan x \cot x$

54. $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\sqrt{2} \sin x - 1 < 0$

56. **انكسار الضوء** حين ينتقل الضوء من وسط شفاف لوسطٍ آخر شفاف فإنه ينحني أو ينكسر، كما هو موضح.



يوصف انكسار الضوء بما يلي $n_2 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2$، حيث يكون n_1 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يدخله الضوء، ويكون n_2 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يخرج منه الضوء، ويكون θ_1 هو زاوية السقوط، ويكون θ_2 هو زاوية الانكسار.

a. جد θ_2 لكل مادة موضحة إذا كانت زاوية السقوط هي 40° ومعامل انكسار الهواء هو 1.00.

b. إذا تضاعفت زاوية السقوط لتصل إلى 80°، فهل ستكون زوايا الانكسار الناتجة أكبر بمرتين من تلك الزوايا الموجودة في الجزء a؟

المادة	معامل الانكسار
الزجاج	1.52
الجليد	1.31
البلاستيك	1.50
المياه	1.33

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **تحليل الخطأ** يحاول عامر وطارق حل ما يلي $\tan^2 x - \tan x + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan x$. يظن عامر أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$ و $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ و $x = \frac{4\pi}{3} + n\pi$. ويظن طارق أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. هل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

تحدٍّ حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

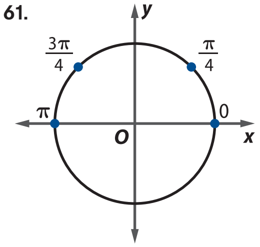
58. $16 \sin^5 x + 2 \sin x = 12 \sin^3 x$

59. $4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3$

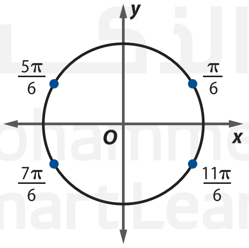
60. **التبرير** هل الحلان $\csc x = \sqrt{2}$ و $\cot^2 x + 1 = 2$ متساويان؟ إذا كانا كذلك، فتحقق من صحة إجابتك جبريًا. وإذا لم تكونا متساويتين، فاشرح استنتاجك.

مسألة ذات إجابة مفتوحة اكتب معادلة مثلثية بها كل حل من الحلول التالية.

61.



62.



63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق في الأساليب التي تُستخدم أثناء حل المعادلات والتحقق من صحة المتطابقات.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة.

64. $\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta-1}$

65. $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

66. $\dfrac{1}{\sec^2\theta}+\dfrac{1}{\csc^2\theta}=1$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

67. $\tan\theta$, $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta>0$

68. $\csc\theta$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\csc\theta<0$

69. $\sec\theta$, $\tan\theta=-1$, $\sin\theta<0$

70. **تعداد الأحياء** يمكن تمثيل تعداد نوع معين من الغزلان بالدالة $p=30000+20000\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$. حيث p هو التعداد و t هو الزمن بالأعوام.

a. ما سعة الدالة؟ ما الذي تمثله؟

b. ما دورة الدالة؟ ما الذي تمثله؟

c. مثّل الدالة بيانيًا.

بفرض أن $f(x)=2x^2-5x+3$ و $g(x)=6x+4$، جد كلاً مما يلي.

71. $(f-g)(x)$

72. $(f\times g)(x)$

73. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

74. **الأعمال التجارية** ينبغي على صاحب شركة صغيرة توظيف عمال موسميين حسب تزايد حاجته للعمال. توضح القائمة التالية عدد الموظفين الذين يتم توظيفهم شهريًا لمدة 5 شهور.

فإذا كان متوسط هذه البيانات هو 9. فما الانحراف المعياري للتعداد لهذه البيانات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

الشهر	عدد الموظفين الإضافيين
أغسطس	5
سبتمبر	14
أكتوبر	6
نوفمبر	8
ديسمبر	12

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** بالنسبة لكل القيم الموجبة لـ m وn. إذا كان
$\dfrac{3x}{m-nx}=2$, then $x=$

A $\dfrac{2m-2n}{3}$

B $\dfrac{3+2n}{2m}$

C $\dfrac{2m-3}{2n}$

D $\dfrac{2m}{3+2n}$

E $\dfrac{3}{2m-2n}$

76. إذا كانت $\cos x=-0.45$. فما هي $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$؟

F -0.55

G -0.45

H 0.45

J 0.55

77. أيّ مما يلي ليس حلًا لما يلي: $\sin\theta+\cos\theta\tan^2\theta=0$؟

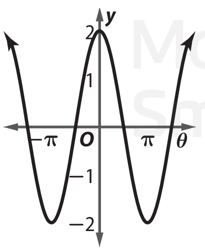
A $\dfrac{3\pi}{4}$

B $\dfrac{7\pi}{4}$

C 2π

D $\dfrac{5\pi}{2}$

78. **مراجعة** فيما يلي التمثيل البياني الذي يخص $y=2\cos\theta$.
أيّ مما يلي هو حل لـ $2\cos\theta=1$؟



F $\dfrac{8\pi}{3}$

G $\dfrac{10\pi}{3}$

H $\dfrac{13\pi}{3}$

J $\dfrac{15\pi}{3}$

5-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المتباينات المثلّثية

التركيز

- استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية.

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية. مثّل كل متباينة بيانيًا. ثم حدّد موقع نقاط نهاية كل تقاطع على التمثيل البياني لإيجاد الفواصل التي تكون المتباينة فيها صحيحة.

نشاط 1 تمثيل متباينة مثلّثية بيانيًا

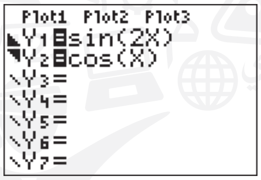
مثّل بيانيًا وجد حل $\sin 2x \geq \cos x$.

الخطوة 1 استبدل كل طرف من هذه المتباينة بالمتغير y لصياغة المتباينات الجديدة.

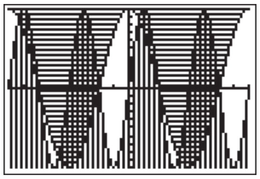
$Y_2 \geq \cos x$ و $\sin 2x \geq Y_1$

الخطوة 2 مثّل كل متباينة بيانيًا. واجعل لكل متباينة رمزًا بالانتقال إلى يسار علامة التساوي واختيار ENTER إلى أن تومض المثلّثات المظلّلة. يمثّل المثلّث العلوي أكبر من، ويمثّل المثلّث السفلي أقل من (الشكل 4.3.1). في القائمة MODE اختر RADIAN.

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة. استخدم مجال ومدى كل دالة مثلّثية كدليل (الشكل 4.3.2).



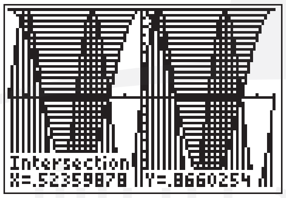
الشكل 4.3.1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الشكل 4.3.2

الخطوة 4 تشير المنطقة المظلّلة بلون داكن لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم CALC: intersect لتحديد مواقع هذه التقاطعات. حرّك المؤشر فوق التقاطع واختر ENTER ثلاث مرات.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الخطوة 5 يحدث التقاطع الأول عندما تكون $y = 0.866$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$. وبما أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$، يكون التقاطع عند $x = \frac{\pi}{6}$. ويكون التقاطع التالي عند $x = \frac{\pi}{2}$. إذًا، إحدى فترات الحل هي $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. والفترة الأخرى هي $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$. هناك عدد لا نهائي من الفترات، وإذًا تكون حلول كل قيم x هي $\left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ و $\left[\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

تمارين

مثّل كل متباينة بيانيًا وجد حلًا لها.

إجابات الوحدة 5

1. $\sin 3x < 2\cos x$
2. $3\cos x \geq 0.5\sin 2x$
3. $\sec x < 2\cos x$
4. $\csc 2x > \sin 8x$
5. $2\tan 2x < 3\sin 2x$
6. $\tan x \geq \cos x$

5 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 5-1 إلى 5-3

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (الدرس 5-1)

.1 $\sin\theta$ و $\cos\theta$, $\cot\theta = 4$, $\cos\theta > 0$

.2 $\sec\theta$ و $\sin\theta$, $\tan\theta = -\frac{2}{3}$, $\csc\theta > 0$

.3 $\tan\theta$ و $\csc\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{4}$, $\sin\theta > 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 5-1)

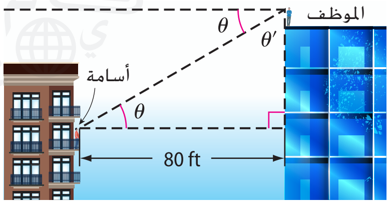
5. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$

4. $\frac{\sin(-x)}{\tan(-x)}$

7. $\frac{\sin x}{1 + \sec x}$

6. $\frac{\sin(90° - x)}{\cot^2(90° - x) + 1}$

.8 **زاوية الانخفاض** يستطيع أسامة أن يرى من نافذة شقّته قمة مبنى البنك في الجهة المقابلة من الشارع من زاوية ارتفاع θ. كما هو موضّح أدناه. (الدرس 5-1)



.a إذا نظر موظّف بالبنك من أعلى المبنى إلى الأسفل ناحية شقّة أسامة. فما المتطابقة التي يمكن استخدامها لاستنتاج أن $\sin\theta = \cos\theta'$؟

.b إذا نظر أسامة إلى الأسفل ناحية إحدى النوافذ السفلية للبنك من زاوية انخفاض 35°. فكم سيكون بُعد نافذة البنك أسفل شقّته؟

9 **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية لا يساوي $\csc\theta$؟ (الدرس 5-1)

A $\sec(90° - \theta)$

B $\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

C $\frac{1}{\sin\theta}$

D $\frac{1}{\sin(90° - \theta)}$

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 5-2)

10. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta = 0$

12. $\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} = \csc\theta$

13. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

14. $\frac{\csc\theta}{\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{\cos\theta} = \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\csc\theta}{1 - \sin\theta}$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية في الفترة $[0, 2\pi]$. (الدرس 5-3)

16. $4\sec\theta + 2\sqrt{3} = \sec\theta$

17. $2\tan\theta + 4 = \tan\theta + 5$

18. $4\cos^2\theta + 2 = 3$

19. $\cos\theta - 1 = \sin\theta$

.20 **الاختيار من متعدد** أي من الآتي يُمثل مجموعة حل $\cos\theta\tan\theta - \sin^2\theta = 0$؟ (الدرس 5-3)

F $\frac{\pi}{2}n$، حيث n عددًا صحيحًا

G $\frac{\pi}{2} + n\pi$، حيث n عددًا صحيحًا

H $\pi + 2n\pi$، حيث n عددًا صحيحًا

j $n\pi$ حيث n عددًا صحيحًا

حُلّ كل معادلة لجميع قيم θ. (الدرس 5-3)

21. $3\sin^2\theta + 6 = 2\sin^2\theta + 7$

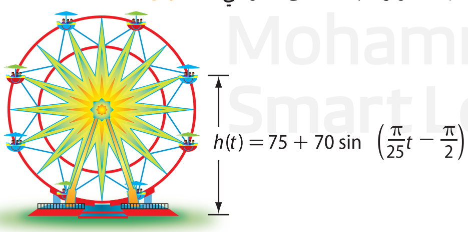
22. $\sin\theta + \cos\theta = 0$

23. $\sec\theta + \tan\theta = 0$

24. $3 - 3\cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta$

.25 **حركة المقذوف** إن المسافة d بالقدم التي تقطعها كرة تمّ ركلها بتسارع $32\ ft/s^2$ موضحة من خلال d $= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم و θ هي الزاوية التي تم إطلاق الجسم منها. إذا تمّ ركل الكرة بسرعة ابتدائية تبلغ 82 قدمًا في الثانية، وقطعت 185 ft. فجد الزاوية (الزوايا) الممكنة التي تم إطلاق الكرة منها. (الدرس 5-3)

.26 **العجلة الدوارة** فيما يلي أدناه موضح ارتفاع h بالقدم لراكب على عجلة دوارة بعد t من الثواني. (الدرس 5-3)



.a إذا كانت العجلة الدوارة تبدأ عند $t = 0$. فكم سيكون الارتفاع الإبتدائي للراكب؟

.b متى سيصل الراكب أول مرة للحد الأقصى للارتفاع عند 145 ft؟

متطابقات المجموع والفرق

·:السابق	·:الحالي	·:لماذا؟
وَجَدتَ قِيم الدوال المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.	1 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية. 2 استخدام متطابقات المجموع والفرق لحل المعادلات المثلثية.	عندما تكون الصورة على شاشة التليفزيون مشوّشة، أو عندما لا يعمل توليف محطة إذاعية على نحو صحيح، تكون المشكلة غالبًا بسبب *التداخل في الإشارات*. ويحدث هذا التداخل عندما تمر الموجات في الفراغ ذاته في نفس الوقت. يمكنك استخدام المتطابقات المثلّثية لتحديد نوع التداخل الذي يحدث.

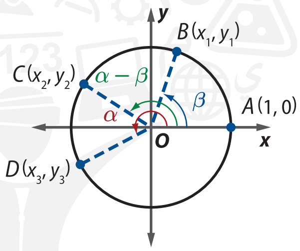
المفردات الجديدة

متطابقة اختزال
reduction identity

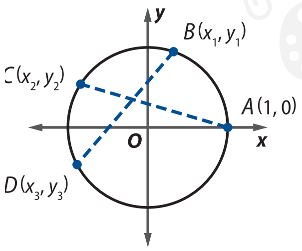
1 إيجاد قيمة الدوال المثلّثية

لقد استخدمتَ متطابقات أساسية تشتمل على متغير واحد فقط. لكن في هذا الدرس، سنستخدم متطابقات تشتمل على متغيرين. إحدى هذه المتطابقات *متطابقة الفرق* لـ *cosine*.

حدّد مواقع للنقاط A و B و C و D على دائرة الوحدة. واجعل α و β زوايا في الفترة $[0, 2\pi)$، و$\alpha > \beta$ كما هو موضّح في الشكل 4.4.1. لأن كل نقطة لها موقع على دائرة الوحدة، فإن $x_1^2 + y_1^2 = 1$ و $x_2^2 + y_2^2 = 1$ و $x_3^2 + y_3^2 = 1$.
لاحظ أيضًا أن قياس $\text{arc } CD = \alpha - (\alpha - \beta)$ أو β وقياس $\text{arc } AB = \beta$.



الشكل 4.4.1



الشكل 4.4.2

بما أن arcs AB و CD لهما نفس القياس، إذًا يكون الوتران AC و BD الموضحان في الشكل 4.4.2 متطابقين.

$AC = BD$	الوتران AC و BD متطابقان.
$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2$	قم بتربيع كل ذات حدّين.
$(x_2^2 + y_2^2) - 2x_2 + 1 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_3^2 + y_3^2) - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	جمّع الحدود التربيعية المتشابهة.
$1 - 2x_2 + 1 = 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	التعويض
$2 - 2x_2 = 2 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اجمع.
$-2x_2 = -2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اطرح 2 من كل طرف.
$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$	اقسم كل طرف على -2.

في الشكل 4.4.1، لاحظ أنه وفقًا لتعريفات دائرة الوحدة لـ sin and cos، فإن $x_1 = \cos \beta$ و $x_2 = \cos(\alpha - \beta)$ و $x_3 = \cos \alpha$ و $y_1 = \sin \beta$ و $y_3 = \sin \alpha$. وعند التعويض، فإن $x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$ تصبح
متطابقة الفرق لـ cos $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

يمكننا الآن الحصول على متطابقة المجموع لـ cosine.

$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$	$\cos(-\beta) = \cos(\beta)$, $\sin \beta = -\sin(-\beta)$
$\cos[\alpha + \theta] = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$	اجعل $(-\beta) = \theta$

يمكن استخدام متطابقتي cosine هاتين لإثبات كل من متطابقات المجموع والفرق الأخرى المدرجة أدناه.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

متطابقات الفرق

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

سوف تُثبت متطابقات المجموع والفرق لـ sin ولـ tan في التمارين 57-60.

من خلال كتابة قياسات الزاوية بصيغة مجاميع أو فروق قياسات خاصة للزاوية، يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق هذه لإيجاد قيم دقيقة للدوال المثلّثية للزوايا الأقل شيوعًا.

مثال 1 إيجاد قيمة تعبير مثلّثي

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\sin 15°$

اكتب 15° بصيغة مجموع أو فرق قياسات زاوية تعرفُ قيمة جيوبها.

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ — $45° - 30° = 15°$

$= \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°$ — متطابقة الفرق لـ sin

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ — جد ناتج الضرب.

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ — جمّع الكسور.

b. $\tan \dfrac{7\pi}{12}$

$\tan\dfrac{7\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ — $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}(1)}$ — $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ و $\tan\frac{\pi}{4}=1$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ — بسّط

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ — طبّق إنطاق المقام (تخليصه من الجذر التربيعي).

$= \dfrac{\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}$ — جد ناتج الضرب.

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$ — بسّط

تمرين موجه

1A. $\cos 15°$

1B. $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

نصيحة دراسية

تحقّق من إجابتك يمكنك التحقّق من إجاباتك عن طريق استخدام الحاسبة البيانية. في المثال 1a، إن $\sin 15° \approx 0.259$ و $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0.259$. تأكّد من أن الحاسبة في الإعداد الصحيح.

غالبًا ما تُستخدم متطابقات المجموع والفرق لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متطابقة المجموع أو الفرق

الكهرباء **يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة بعينها بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 3\ (\sin 165)t$، حيث 165 هي قياس الدرجة.**

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين.

$i = 3\ (\sin 165)t$ — المعادلة الأصلية

$= 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — $120 + 45 = 165$

b. استخدم متطابقة المجموع لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

$i = 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — معادلة أعيدت كتابتها

$= 3 \sin (120 + 45)$ — $t = 1$

$= 3[(\sin 120)(\cos 45) + (\cos 120)(\sin 45)]$ — متطابقة المجموع لـ sin

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض.

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — جد ناتج الضرب.

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

التيار الدقيق بعد ثانية واحدة هو $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بوحدات الأمبير.

تمرين موجه

2. الكهرباء يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة أخرى بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 2\ (\sin 285)t$. حيث 285 هي قياس الدرجة.

A. أعد كتابة القاعدة بدلالة فرق قياسات زاويتين.

B. استخدم متطابقة الفرق لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

مهن من الحياة اليومية

فني التوصيلات السلكية فنيو التوصيلات السلكية هم المسئولون عن إنشاء مرافق نقل وتوزيع القدرة الكهربائية وصيانتها. ويطلق هذا المصطلح أيضًا على الفنيين الذين يقومون بتثبيت الهواتف وأجهزة التليفزيون الكبلي وخطوط الألياف الضوئية وصيانتها.

إذا كان التعبير المثلّثي له صيغة متطابقة المجموع أو الفرق، تستطيع حينها استخدام المتطابقة لإيجاد قيمة دقيقة أو لتحويل تعبير إلى أبسط صورة عن طريق إعادة كتابة التعبير بصفته دالة لزاوية واحدة.

مثال 3 إعادة الكتابة في صيغة تعبير مثلّثي واحد

a. جد القيمة الدقيقة لـ $\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°}$.

$\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°} = \tan (32° + 13°)$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \tan 45° = 1$ — بسّط

b. حوّل لأبسط صورة: $\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x$.

$\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x = -(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)$ — خاصيتا التوزيع والتبديل

$= -\cos (x + 3x) = -\cos 4x$ — متطابقة المجموع لـ tan

تمرين موجه

3A. جد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{7\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24}$

3B. حوّل لأبسط صورة: $\frac{\tan 6x - \tan 7x}{1 + \tan 6x \tan 7x}$.

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة تعابير مثلّثية بصفتها تعابير جبرية.

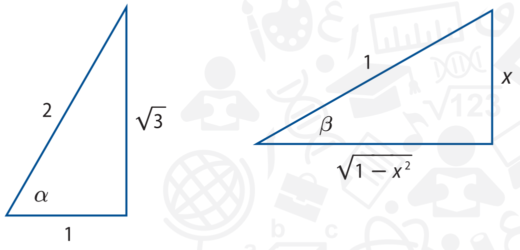
مثال 4 الكتابة بصيغة تعبير جبري

اكتب $\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x)$ بصيغة تعبير جبري لـ x بحيث لا يشتمل على دوال مثلّثية.

عند تطبيق متطابقة المجموع لـ sin ، نجد أن

$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$.

إذا فرضنا أن $\alpha = \arctan\sqrt{3}$ و $\beta = \arcsin x$. إذًا تكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ارسم مثلّثًا قائم الزاوية بزاوية حادة α وآخر بزاوية حادة β. قم بتسمية الأضلاع على أن يكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ثم استخدم مبرهنة فيثاغورس للتعبير عن طول كل ضلع ثالث.



باستخدام هذين المثلثين، نجد أن $\sin(\arctan\sqrt{3}) = \sin\alpha$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\cos(\arctan\sqrt{3}) = \cos\alpha$ أو $\frac{1}{2}$ أو $\cos(\arcsin x) = \cos\beta$ or $\sqrt{1-x^2}$ و $\sin(\arcsin x) = \sin\beta$ أو x.

الآن قم بالتعويض وحوّل لأبسط صورة.

$$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x + \sqrt{3-3x^2}}{2}$$

تمرين موجه

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري.

4A. $\cos(\arcsin 2x + \arccos x)$

4B. $\sin\left(\arctan x - \arccos\frac{1}{2}\right)$

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات الأخرى.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة

اثبت صحة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$ متطابقة الفرق لـ sin

$= 1(\cos x) - 0(\sin x)$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \cos x$ ✓ جد ناتج الضرب.

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق.

5A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

5B. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

قراءة في الرياضيات

الدوال المثلثية و تمامها(co)
متساوية القيمة كلمة "co" هنا تعني "تمام". ولذا تعدّ دوال sine and cosine, tan and cotan, secant and cosecant أزواج دوال متساوية القيمة لزوايا متتامة.

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعابير المثلّثية التي تكون إحدى الزوايا بها مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ بمقياس الزاوية النصف قطرية (راديان). تسمى المتطابقة الناتجة **متطابقة اختزال** لأنها تختزل صعوبة التعبير.

مثال 6 إثبات صحة متطابقات الاختزال

اثبت صحة كل متطابقة اختزال.

a. $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{3\pi}{2}$ — قانون المجموع لـ sin

$= \sin\theta(0) + \cos\theta(-1)$ — $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ و $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$= -\cos\theta$ ✓ — بسّط

b. $\tan(x - 180°) = \tan x$

$\tan(x - 180)° = \frac{\tan x - \tan 180°}{1 + \tan x \tan 180°}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x(0)}$ — $\tan 180° = 0$

$= \tan x$ ✓ — بسّط

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة.

6A. $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

2 حل المعادلات المثلّثية

يمكنك حل المعادلات المثلّثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق ونفس الطرق التي استخدمتها في الدرس 3-4.

مثال 7 حل معادلة مثلّثية

حُـــلّ المعادلة $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ **في الفترة** $[0, 2\pi)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ — المعادلة الأصلية

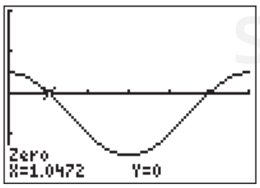
$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$ — متطابقات المجموع و الفرق لـ cos

$\frac{1}{2}(\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) + \frac{1}{2}(\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) = \frac{1}{2}$ — عوّض.

$\cos x = \frac{1}{2}$ — بسّط

في الفترة $[0, 2\pi)$، $\cos x = \frac{1}{2}$ حيث $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

التحقّق التمثيل البياني لـ $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi)$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{3}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

تلميح تقني
نافذة العرض عند التحقّق من إجابتك على الحاسبة البيانية تذكّر أن الفترة الواحدة لـ $y = \sin x$ أو $y = \cos x$ تكون 2π والسعة تكون 1. وهذا سيساعدك على تحديد نافذة العرض.

تمرين موجه

7. حُـــلّ المعادلة $\cos(x + \pi) - \sin(x - \pi) = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

تمارين

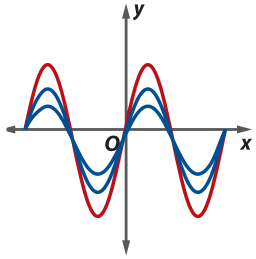
جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي. (مثال 1)

1. $\cos 75°$
2. $\sin(-210°)$
3. $\sin \frac{11\pi}{12}$
4. $\cos \frac{17\pi}{12}$
5. $\tan \frac{23\pi}{12}$
6. $\tan \frac{\pi}{12}$

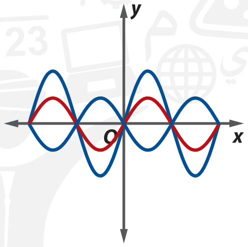
7. الجهد الكهربائي يتضمن تحليل الجهد الكهربائي في مجفّف الشعر حدودًا بصيغة $\sin(nwt - 90°)$، حيث تكون n عددًا صحيحًا موجبًا و w تردد الجهد و t الزمن. استخدم متطابقة لتحويل هذا التعبير لأبسط صورة. (مثال 2)

8. **البَثّ** عندما يكون مجموع سعات موجتين أكبر من مجموع سعات الموجات المتراكبة، ينتج عن ذلك *تداخل ملائم*. وعندما تتجمّع الموجات المتراكبة لتكون لها سعة أصغر، يحدث *تداخل مشوّش*.

تداخل ملائم



تداخل مشوّش



افترض أن هناك إشارتين ممثّل لهما بـ $y = 10\sin(2t + 30°)$ و $y = 10\sin(2t + 210°)$. (مثال 2)

a. جد مجموع الدالتين.

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تجتمع الإشارتان الممثّل لهما بالمعادلتين؟

9. **الطقس** يمكن تمثيل درجات الحرارة المرتفعة شهريًا في دبي بالصيغة $f(x) = 31.65\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث x تمثّل الشهور والتي يكون فيها يناير = 1، وفبراير = 2، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة المنخفضة شهريًا في دبي بالصيغة $g(x) = 31.65\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$. (مثال 2)

a. اكتب دالة جديدة $h(x)$ عن طريق جمع الدالتين وقسمة الناتج على 2.

b. ما الذي تمثّله الدالة التي كتبتها في الجزء a؟

10. **التكنولوجيا** تَستخدم أجهزة مساعدة المكفوفين على الحركة نفسَ فكرة السونار بالنسبة للخفّاش؛ وذلك لتمكين ذوي الإعاقة البصرية من اكتشاف الأشياء حولهم. ويمكن تمثيل الموجة الصوتية التي تنبعث من الجهاز لمريض بعينه بالصيغة $b = 30(\sin 195°)t$، حيث t تمثّل الوقت بالثواني و b تمثّل ضغط الهواء بالباسكال. (مثال 2)

a. أعد كتابة القانون بدلالة فرق قياسات زاويتين.

b. ما قياس الضغط بعد ثانية واحدة؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير. (مثال 3)

11. $\frac{\tan 43° - \tan 13°}{1 + \tan 43° \tan 13°}$

12. $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$

13. $\sin 15°\cos 75° + \cos 15°\sin 75°$

14. $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}$

15. $\cos 40°\cos 20° - \sin 40°\sin 20°$

16. $\frac{\tan 48° + \tan 12°}{1 - \tan 48° \tan 12°}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 3)

17. $\frac{\tan 2\theta - \tan\theta}{1 + \tan 2\theta\tan\theta}$

18. $\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$

19. $\sin 3y\cos y + \cos 3y\sin y$

20. $\cos 2x\sin x - \sin 2x\cos x$

21. $\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x$

22. $\frac{\tan 5\theta + \tan\theta}{\tan 5\theta\tan\theta - 1}$

23. **العلوم** تحتوي الدائرة الكهربائية على مكثّف ومستحث ومقاوم. يتم تحديد هبوط الجهد الكهربائي في المستحث بالصيغة $V_L = IwL\cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$، حيث I هو التيار الذروي، و w هو التردد، و L هو المحاثة، و t هو الوقت. استخدم متطابقة المجموع لـ cos للتعبير عن V_L بصيغة دالة $\sin wt$. (مثال 3)

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري. (مثال 4)

24. $\sin(\arcsin x + \arccos x)$

25. $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} 2x)$

26. $\cos\left(\sin^{-1} x - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

27. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \tan^{-1} x\right)$

28. $\cos\left(\arctan\sqrt{3} - \arccos x\right)$

29. $\tan(\cos^{-1} x + \tan^{-1} x)$

30. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} - \cos^{-1} x\right)$

31. $\tan\left(\sin^{-1} x + \frac{\pi}{4}\right)$

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق واحدة أو أكثر. (مثال 5)

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$

34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

اثبت صحة كل متطابقة اختزال. (مثال 6)

35. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

36. $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$

37. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

38. $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

39. $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 7)

40. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

41. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi + x) = 1$

42. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

43. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$

44. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2$

45. $\tan(\pi + x) + \tan(\pi + x) = 2$

اثبت صحة كل متطابقة.

46. $\tan x - \tan y = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$

47. $\cot\alpha - \tan\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

48. $\dfrac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \dfrac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

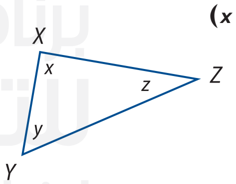
49. $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

الحاسبة البيانية مثّل كل دالة بيانيًا، وخمّن بناءً على التمثيل البياني. اثبت صحة فرضيتك جبريًا.

50. $y = \frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

51. $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

الإثبات اعتبر أن $\triangle XYZ$. اثبت كل متطابقة.
(تلميح: $x + y + z = \pi$)



52. $\cos(x + y) = -\cos z$

53. $\sin z = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

54. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x\tan y\tan z$

55. **حساب التفاضل والتكامل** يعبّر عن ناتج قسمة الفرق بواسطة $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

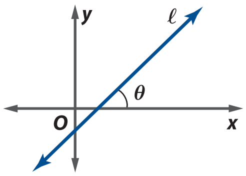
a. افترض أن $f(x) = \sin x$. اكتب تعبيرًا لناتج قسمة الفرق واكتب صيغة موسعة منه.

b. اجعل إجابتك من الجزء a مساويةً لـ y. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل دالة القيم التالية لـ h بيانيًا: 2 و 1 و 0.1 و 0.01.

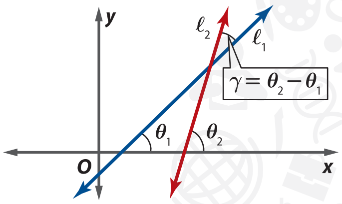
c. ما الدالة التي يشابهها التمثيل البياني في الجزء b حيث h تقترب من الصفر؟

56. **زاوية الميل** إن زاوية الميل θ للمستقيم هي الزاوية التي تتكون بين المحور الأفقي x الموجب والمستقيم، حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

a. اثبت أن الميل m للمستقيم ℓ الموضّح جهة اليسار تحدّده الصيغة $m = \tan\theta$.



b. افترض أن المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 أدناه بميل m_1 و m_2 على التوالي. اشتق قاعدة للزاوية γ التي يكوّنها المستقيمان.



c. استخدم القاعدة التي توصلتَ إليها في الجزء b لإيجاد الزاوية التي يكوّنها $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y = x$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

57. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

58. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

59. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

60. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

61. **التبرير** استخدم متطابقة المجموع لـ sin من أجل اشتقاق متطابقة لـ $\sin(x + y + z)$ بدلالة sin and cos.

تحدٍّ إذا كانت $x = -\frac{2}{3}$ وكانت $\cos y = \frac{1}{3}$، فجد كلاً مما يلي إذا كان x في الربع الرابع و y في الربع الأول.

62. $\cos(x + y)$ 63. $\sin(x - y)$ 64. $\tan(x + y)$

65. **التبرير** فكّر في $\sin 3x\cos 2x = \cos 3x\sin 2x$.

a. جد حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$ جبريًا.

b. دعّم إجابتك بالتمثيل البياني.

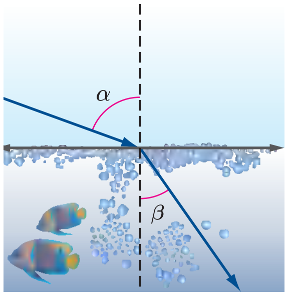
الإثبات اثبت كلًّا من متطابقات ناتج قسمة الفرق.

66. $\dfrac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \sin x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\dfrac{\sin h}{h}$

67. $\dfrac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\dfrac{\sin h}{h}$

68. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لــ tan لحل أي من قواعد الانخفاض لــ tan؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة



69. **الفيزياء** وفقًا لقانون سنيل (Snell)، ترتبط زاوية دخول الضوء إلى المياه α بزاوية انتقال الضوء في المياه β بالعلاقة $\sin \alpha = 1.33 \sin \beta$. بأي زاوية تدخل حزمة ضوء إلى المياه إذا كانت تنتقل عبر المياه بزاوية 23°؟

اثبت صحة كل متطابقة.

70. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \sec \theta$

71. $\dfrac{\sec \theta}{\sin \theta} - \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \cot \theta$

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

72. $\sin^{-1}(-1)$

73. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

74. $\tan\left(\arcsin \dfrac{3}{5}\right)$

75. **المال** افترض أنك أودعت مبلغًا أساسيًا يقدّر بـ P من الدراهم في حساب بنكي يدفع نسبة مرابحة مركّبة. إذا كانت نسبة المرابحة السنوية r (التي يعبّر عنها في صورة عدد عشري) ويُقدِّم البنك مدفوعات الفائدة لعدد n مرات كل عام، فإن مبلغ المال A الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام تحدّده الصيغة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. إذا كان المبلغ الأساسي ونسبة المرابحة وعدد مدفوعات الفائدة معلومة، فما نوع الدالة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؟ اشرح استنتاجك.

b. اكتب معادلة مبينًا مبلغ المال الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام إذا أودعت AED 1000 في حساب يدفع 4% نسبة مرابحة سنوية مركبة كل ثلاثة أشهر (أربع مرات في العام).

c. جد رصيد الحساب بعد 20 عامًا.

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها أصفارًا، إن وجدت.

76. $p(x) = x^4 + x^3 - 11x - 5x + 30$

77. $d(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1$

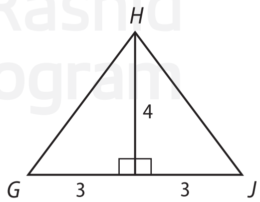
78. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

79. **SAT/ACT** توجد 16 كرة خضراء، وكرتان حمراوان و 6 كرات صفراء في وعاء. كم عدد الكرات الصفراء التي تحتاج إلى إضافتها في الوعاء لمضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 12 **E** 16

80. **مراجعة** انظر الشكل الموضح أدناه. أي معادلة يمكن استخدامها لإيجاد $m\angle G$؟



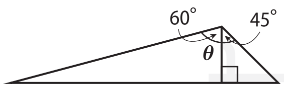
F $\sin G = \frac{3}{4}$

G $\cos G = \frac{3}{4}$

H $\cot G = \frac{3}{4}$

I $\tan G = \frac{3}{4}$

81. جد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$.



A $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

B $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

C $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

D $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$

82. مراجعة أي مما يلي يساوي $\dfrac{\cos \theta (\cot^2 \theta + 1)}{\csc \theta}$؟

F $\tan \theta$

G $\cot \theta$

H $\sec \theta$

J $\csc \theta$

5-4 مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقة الاختزال

التركيز

- استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لمتطابقات الانخفاض.

تتضمن متطابقة انخفاض أخرى مجموع أو فرق قياسات إحدى الزوايا وزاوية ربعية. ويمكن توضيح ذلك بمقارنة التمثيل البياني للدوال الموجودة في دائرة الوحدة بتقنية التمثيل البياني.

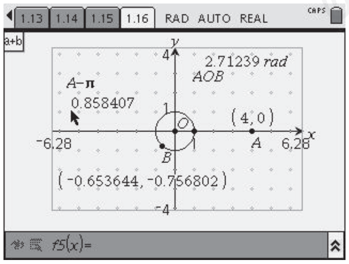
نشاط 1 استخدام دائرة الوحدة

استخدم دائرة الوحدة لتوضيح متطابقة الاختزال بيانيًا.

الخطوة 1 أضف صفحة Graphs (التمثيلات البيانية). اختر Zoom-Trig من القائمة Window. ثم اختر Show Grid (عرض شبكي) من القائمة View (عرض). من القائمة File (ملف) ضمن Tools (أدوات). اختر Document Settings (إعدادات الملفات). ثم اضبط Display Digits (عرض رقمي) على Float 2 (غير مقيد 2). وفي النهاية تأكد من أن قياس الزاوية بالراديان.

الخطوة 2 اختر Points & Lines (نقاط وخطوط) ثم Point (نقطة) من القائمة. حدد النقطة عند (1, 0). بعد ذلك، اختر Shapes (أشكال). ومن ثم Circle (دائرة) من القائمة. لرسم دائرة متمركزة عند نقطة الأصل من خلال (1, 0). انقر على الشاشة وحدد نقطة المركز عند نقطة الأصل. حرّك المؤشر بعيدًا عن المركز. وستظهر الدائرة. توقف عندما تحصل على نصف قطر بمقدار 1 ووقوع (1, 0) في الدائرة.

الخطوة 3 حدد نقطة تجاه يمين الدائرة على المحور الأفقي x ثم قم بتسميتها بالحرف A. اختر Actions (إجراءات)، ثم Coordinatesand Equations (إحداثيات ومعادلات). من القائمة وبعد ذلك انقر مرتين على النقطة لعرض إحداثياتها. من القائمة Construction (إنشاء). اختر Measurement transfer (تحويل القياس). اختر الإحداثي x لـــ A والدائرة والنقطة عند (1, 0). قم بتسمية النقطة المنشأة على الدائرة بالحرف B ثم اعرض إحداثياتها.

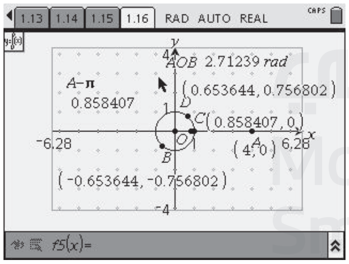


الخطوة 4 مع اعتبار أن O تمثل نقطة الأصل، قم باحتساب وكتابة قياس $\angle AOB$. اختر Text (نص) من القائمة Actions لكتابة التعبير $a - \pi$.
ثم اختر Calculate (احسب) من القائمة Actions لاحتساب فرق الإحداثي x لكل من A وπ.

موقع A	$m\angle AOB$ (بالراديان)
(4, 0)	2.7124
(3, 0)	3.0708
(2, 0)	2.5708
(5, 0)	2.2123
(−2, 0)	0.5708

الخطوة 5 حرّك A بمحاذاة المحور الأفقي x. ولاحظ تأثير قياس $\angle AOB$.

الخطوة 6 من القائمة Construction. اختر Measurement transfer. اختر المحور الأفقي x وقيمة $a - \pi$.
قم بتسمية النقطة بالحرف C ثم اعرض إحداثياتها.
باستخدام Measurement transfer مجددًا. اختر الإحداثي x للنقطة C والدائرة والنقطة عند (1, 0).
قم بتسمية النقطة بالحرف D ثم اعرض إحداثياتها.



> **نصيحة دراسية**
> **قياس الزاوية** لا تساعد تقنية التمثيل البياني إلا في قياس الزوايا بين 0 و π.

تحليل النتائج

1A. في الخطوة 5. ما وجه ارتباط موقع A وقياس $\angle AOB$؟

1B. بمراعاة مواقع النقطتين B و D. ما متطابقة أو متطابقات الإختزال الصحيحة المقترحة من خلال هذه العلاقة؟

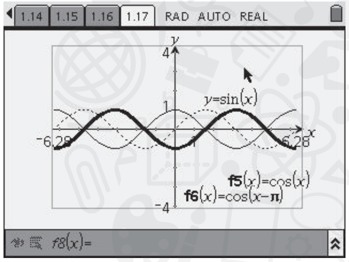
1C. **التخمين** في حالة تغيير التعبير $a - \pi$ إلى $a + \pi$. فما متطابقات الإختزال التي تعتقد بأنها ستكون النتيجة؟

نشاط 2 استخدام التمثيلات البيانية

استخدم تمثيلات بيانية لتحديد الدوال المثلثية المتساوية.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) جديدة. اختر Zoom-Trig من القائمة Window.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \cos(x - \pi)$ و $f(x) = \sin x$. باستخدام خاصية Attributes (سمات) من القائمة Actions (إجراءات)، مع ضبط سمك الخط $f(x) = \cos(x - \pi)$ إلى متوسط ونمط الخط $f(x) = \sin x$ إلى مُنقّط.



الخطوة 3 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد (التمدّد) لتحويل $f(x) = \sin x$ بحيث تتطابق التمثيلات البيانية مع $f(x) = \cos x$. اختر التمثيل البياني ثم اسحبه على $f(x) = \cos x$. وأثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

الخطوة 4 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد (التمدّد) لتحويل $f(x) = \cos(x - \pi)$ وبالتالي تتطابق التمثيلات البيانية مع التمثيلين البيانيين الآخرين. مجددًا، أثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

تحليل النتائج

.2A اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \sin x$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

.2B اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \cos(x - \pi)$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

.2C **التخمين** ما الذي يقترحه انعكاس التمثيل البياني لغرض تطوير متطابقة؟ إزاحة؟

تمارين

استخدم دائرة الوحدة لكتابة متطابقة تنتمي إلى التعابير المعطاة. تحقق من صحة متطابقتك بالتمثيل البياني.

1. $\cos(90° - x), \sin x$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \sin x$

اكتب الدالة المثلثية التي تكمل كل متطابقة.

3. $\cos x =$ ________ $\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

4. $\cot x =$ ________ $(x + 90°)$

5. $\sec x =$ ________ $(x - 180°)$

6. $\csc x =$ ________ $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

استخدم التحويلات لإيجاد قيمة a لكل تعبير مما يلي.

7. $\sin ax = 2 \sin x \cos x$

8. $\cos 4ax = \cos^2 x - \sin^2 x$

9. $a \sin^2 x = 1 - \cos 2x$

10. $1 + \cos 6ax = 2 \cos^2 x$

5-5 متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع

:: السابق

لقد قمتَ بإثبات واستخدام متطابقات المجموع والفرق.

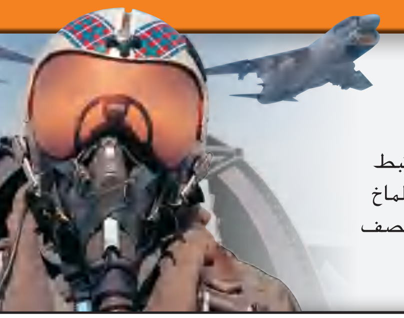
:: الحالي

1 استخدام متطابقات ضعف الزاوية واختصار الأس و نصف الزاوية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

:: لماذا؟

يمكن وصف سرعة طيران إحدى الطائرات بواسطة عدد *الماخ*؛ وهو نسبة سرعة الطائرة إلى سرعة الصوت. ويؤدي تجاوز سرعة الصوت إلى إحداث موجة صادمة مخروطية الشكل خلف الطائرة. وترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس هذا المخروط بعدد الماخ ويصف الحرف M سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\frac{1}{M} = \frac{\theta}{2}$.



1 استخدام متطابقات ضعف الزاوية

بافتراض أن α وβ كليهما مساوٍ لــ θ في كل متطابقات مجموع الزوايا التي تعلمتَها في الدرس السابق، يمكنك اشتقاق متطابقات ضعف الزاوية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ | $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ | $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

الإثبات متطابقة ضعف الزاوية لــ sine

$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$ — $2\theta = \theta + \theta$

$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$ — $\alpha = \beta = \theta$ متطابقة المجموع لــ sine

$= 2\sin\theta\cos\theta$ — بسّط

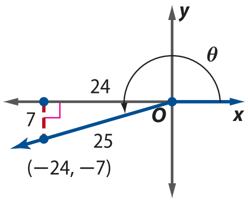
ستثبتُ متطابقات ضعف الزاوية لــ cos ولــ tan في التمارين 65-63.

مثال 1 إيجاد قيمة التعابير التي تتضمن أضعاف الزوايا

إذا كان $\sin\theta = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فجد $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فإن نقطة واحدة على ضلع الإنتهاء لــ θ سيكون لها الإحداثي y=-7 ومسافة 25 وحدة من الأصل، كما هو موضح. الإحداثي x لهذه النقطة هو $-\sqrt{25^2 - 7^2}$ أو 24−. باستخدام هذه النقطة، سنجد أن

$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{24}{25}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$



استخدم هذه القيم ومتطابقات ضعف الزاوية لــ sin و لــ cos لإيجاد sin 2θ و cos 2θ. ثم جد tan 2θ باستخدام أي من متطابقة ضعف الزاوية لــ tan أو تعريف الــ tan.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{336}{625}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(-\frac{24}{25}\right)^2 - 1 = \frac{527}{625}$$

الطريقة 1 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$= \frac{2\left(\frac{7}{24}\right)}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{336}{527}$$

الطريقة 2 $\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$$= \frac{\frac{336}{625}}{\frac{527}{625}} = \frac{336}{527}$$

تمرين موجه

1. إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$ في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ فجد sin 2θ وcos 2θ وtan 2θ.

مثال 2 حل معادلة باستخدام متطابقة أضعاف الزوايا

حُــلّ المعادلة: $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

استخدم متطابقة ضعف الزاوية لـــ sin لإعادة كتابة المعادلة بصفتها دالة لزاوية فردية.

المعادلة الأصلية	$\sin 2\theta - \sin\theta = 0$
متطابقة ضعف الزاوية sin	$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$
العامل.	$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$
خاصية ناتج الضرب الصفري	$2\cos\theta - 1 = 0$ أو $\sin\theta = 0$
	$\cos\theta = 0.5$ ، $\theta = 0$ أو π
	$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ أو $\theta = 0, \pi$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

تمرين موجه

حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

2A. $\cos 2\alpha = -\sin^2\alpha$

2B. $\tan 2\beta = 2\tan\beta$

> **نصيحة دراسية**
>
> **أكثر من متطابقة واحدة** لاحظ وجود ثلاث متطابقات مرتبطة مع $\cos 2\theta$. بينما توجد متطابقات أخرى يمكن أن تكون مرتبطة أيضًا مع $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$. وتلك المرتبطة مع $\cos 2\theta$ يجب حفظها نظرًا لاستخدامها بمعدل أكثر شيوعًا.

يمكن استخدام متطابقات ضعف الزاوية لاشتقاق متطابقات اختصار الأس أدناه. تساهم هذه المتطابقات في تيسير تنفيذ عمليات للدوال مرتبطة بحساب التفاضل والتكامل مثل $y = \cos^2 x$ بدرجة أكبر.

المفهوم الأساسي متطابقات اختصار الأس

$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ $\quad$ $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ $\quad$ $\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

الإثبات متطابقة اختصار الأس لــ sine

$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2\theta)}{2}$	متطابقة ضعف الزاوية Cosine لــ cos
$= \frac{2\sin^2\theta}{2}$	اطرح.
$= \sin^2\theta$	بسّط

ستُثبت صحة متطابقات الاختصار الأسي لــ cos و لــ tan في التمرينين 82 و83.

مثال 3 استخدام متطابقة لاختصار الأس

أعد كتابة $\sin^4 x$ في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1.

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$	$(\sin^2 x)^2 = \sin^4 x$
$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$	متطابقة الاختصار الأسي sin
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$	جد ناتج الضرب.
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4}$	متطابقة اختصار أس cos
$= \frac{2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x}{8}$	مقام مشترك
$= \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$	عامل.

تمرين موجه

أعد كتابة كل تعبير بشرط عدم زيادة قيمة الأس عن 1.

3A. $\cos^4 x$

3B. $\sin^3\theta$

الربط بتاريخ الرياضيات

فرانسوا فييت

(1540–1603)

وُلد في قرية تقع في غرب فرنسا، وقد تم استدعاؤه في باريس لفك شفرة رسائل للملك هنري الثالث. ونظرًا لمهارته الفائقة في استخدام المعادلات، استخدم متطابقات وضعف الزاوية لــ sin and cos لاستخلاص متطابقات الزاوية الثلاثية والرباعية والخماسية.

مثال 4 حل معادلة باستخدام متطابقة اختصار أسي

حُـــلّ المعادلة: $\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$.

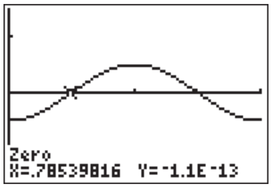
جد الحل جبريًا

$\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$	المعادلة الأصلية
$\frac{1+\cos 2x}{2} - \cos 2x = \frac{1}{2}$	متطابقة اختصار أس cos
$1 + \cos 2x - 2\cos 2x = 1$	اضرب كل طرف في 2.
$\cos 2x - 2\cos 2x = 0$	اطرح 1 من كل طرف.
$-\cos 2x = 0$	اطرح الحدود المتشابهة.
$\cos 2x = 0$	اضرب كل طرف في −1.
$2x = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$	حلول ضعف الزاوية في $[0, 2\pi]$
$x = \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$	اقسم كل طرف على 2.

يتضمن التمثيل البياني لـــ $y = \cos 2x$ دورة π. لذا فالحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ أو $\frac{3\pi}{4} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـــ $y = \cos^2 x - \cos 2x - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ في الفترة $[0, \pi]$. ✓



$[0, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

تمرين موجه حُـــلّ كل معادلة.

4A. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{2}$

4B. $\sin^2 3\beta = \sin^2 \beta$

باستبدال θ بـــ $\frac{\theta}{2}$ في كل متطابقة من متطابقات اختصار الأس. يمكنك اشتقاق كل متطابقة نصف الزاوية مما يلي. تُحدَّد علامة كل متطابقة تتضمن الرمز ± بالتحقق من الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء $\frac{\theta}{2}$.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

انتبه!

تحديد العلامات لتحديد الإشارة المناسبة عند استخدام متطابقة نصف زاوية، تحقق من الربع الذي يقع فيه $\frac{\theta}{2}$ ، *وليس الربع الذي يقع فيه θ.*

الإثبات متطابقة نصف الزاوية لـــ cosine

$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{2}}$	أعد كتابة θ بصيغة $\frac{\theta}{2} \times 2$.
$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$	عوّض $x = \frac{\theta}{2}$.
$= \pm\sqrt{\cos^2 x}$	متطابقة اختصار أس cosine
$= \cos x$	بسّط
$= \cos \frac{\theta}{2}$	عوّض.

ستُثبت متطابقات نصف الزاوية لـــ cos والـــ tan في التمارين 66-68.

مثال 5 إيجاد قيمة تعبير يتضمن نصف الزاوية

جد قيمة $\cos 112.5°$.

لاحظ أن $112.5°$ تساوي نصف $225°$. لذا، استخدم متطابقة نصف الزاوية لــ cosine. مع ملاحظة أنه بوقوع $112°.5$ في الربع الثاني، فإن cosine سيكون سالبًا.

$\cos 112.5° = \cos \frac{225°}{2}$ — $112.5° = \frac{225°}{2}$

$= -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية cosine (زاوية الربع الثاني)

$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ — اطرح ثم اقسم.

$= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ أو $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية

التحقق استخدم الآلة الحاسبة لدعم إثبات أن $\cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos 112.5° \approx -0.3826834324$ و $\cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx -0.3826834324$ ✔

تمرين موجه

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

5A. $\sin 75°$

5B. $\tan \frac{7\pi}{12}$

نصيحة دراسية

متطابقات نصف زاوية الــ tan

عند إيجاد قيمة دالة tan لقيم نصف الزاوية، من الأسهل عادة استخدام نموذج متطابقة نصف زاوية tan

نظرًا لأن $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ المقام يتضمن حدًا واحدًا فقط.

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد حل للمعادلات. ويمكن استخدام متطابقات نصف الزاوية أيضًا لإيجاد حل للمعادلات.

مثال 6 حل معادلة باستخدام متطابقة نصف الزاوية

حُـــلّ المعادلة $\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2 x = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2$ — متطابقة نصف الزاوية cosine

$\sin^2 x = 2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$ — بسّط

$\sin^2 x = 1 + \cos x$ — جد ناتج الضرب.

$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$ — متطابقة فيثاغورس

$-\cos^2 x - \cos x = 0$ — اطرح 1 من كل طرف.

$\cos x(-\cos x - 1) = 0$ — حلل إلى العوامل.

$\cos x = 0$ أو $-\cos x - 1 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ أو $\cos x = -1$؛ لذا . $x = \pi$. — حلول لــ $[0, 2\pi)$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

تمرين موجه

حُـــلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

6A. $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1 + \sin x$

6B. $8\tan \frac{x}{2} + 8\cos x \tan \frac{x}{2} = 1$

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع

لاستخدام دوال مثل $y = \cos 5x \sin 3x$ في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى تطبيق إحدى المتطابقات التالية لتحويل ناتج الضرب إلى مجموع.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

الإثبات متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع لـ $\sin \alpha \cos \beta$

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$	الطرف الأكثر تعقيدًا في المتطابقة
$= \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$	متطابقات المجموع والفروق
$= \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \beta)$	اجمع الحدود المتشابهة.
$= \sin \alpha \cos \beta$	جد ناتج الضرب.

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل ناتج الضرب لمجموع في التمارين 84-86.

نصيحة دراسية

الإثباتات تذكّر العمل على حل الطرف الأكثر تعقيدًا أولاً عند إثبات هذه المتطابقات.

مثال 7 استخدام متطابقة لكتابة ناتج الضرب في صيغة مجموع أو فرق

أعد كتابة $\cos 5x \sin 3x$ في صيغة مجموع أو فرق.

$\cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x)]$	متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع
$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$	بسّط
$= \frac{1}{2} \sin 8x - \frac{1}{2} \sin 2x$	خاصية التوزيع

تمرين موجه أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق.

7A. $\sin 4\theta \cos \theta$

7B. $\sin 7x \sin 6x$

تتوافق متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع هذه مع متطابقات تحويل المجموع لناتج الضرب.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل المجموع لناتج ضرب

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

الإثبات متطابقة تحويل المجموع لناتج ضرب لـ $\sin \alpha + \sin \beta$

$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	
$= 2 \sin x \cos y$	استخدم التعويض في $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ و $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$
$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right\}$	متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع
$= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	استخدم التعويض وبسّط.
$= \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\beta}{2}\right)$	اجمع الكسور.
$= \sin \alpha + \sin \beta$	بسّط

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل المجموع لناتج الضرب في التمارين 87-89.

مثال 8 استخدام متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى المجموع أو المجموع إلى ناتج الضرب

جد قيمة $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}$.

$\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$ بسّط.

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}$ بسّط

تمرين موجه

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

8A. $3\cos 37.5°\cos 187.5°$

8B. $\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$

ويمكنك أيضًا استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لإيجاد الحل لبعض المعادلات المثلثية.

مثال 9 حل المعادلة باستخدام متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

حُـــلّ المعادلة: $\cos 4x+\cos 2x=0$.

جد الحل جبريًا

$\cos 4x+\cos 2x=0$ المعادلة الأصلية

$2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)=0$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب لـ cosine

$(2\cos 3x)(\cos x)=0$ بسّط

اجعل كل عامل يساوي صفرًا مع إيجاد حلول في الفترة $[0, 2\pi]$.

مجموعة العامل الثاني تساوي 0 $\cos x=0$

حلول في $[0, 2\pi]$ $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

مجموعة العامل الأول تساوي 0 $2\cos 3x=0$

اقسم كل طرف على 2. $\cos 3x=0$

حلول أضعاف الزاوية *في $[0, 2\pi]$ $3x=\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

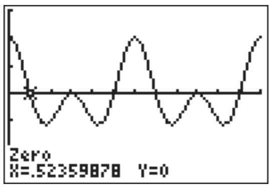
اقسم كل حل على 3. $x=\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{2}$

الفترة الخاصة بـ $y=\cos 3x$ هي $\frac{2\pi}{3}$. إذًا الحلول هي

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}n$ أو $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـ $y=\cos 4x+\cos 2x$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، و $\frac{11\pi}{6}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{6}$ by $[-3, 3]$ scl: 1

> **انتبه**
> **فترات الدوال المثلثية لزوايا متعددة** تذكّر ما تعلمته من الدروس السابقة أن فترات $y=\sin kx$ و $y=\cos kx$ هي $\frac{2\pi}{k}$. وليس 2π.

تمرين موجه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

9A. $\sin x+\sin 5x=0$

9B. $\cos 3x-\cos 5x=0$

تمارين

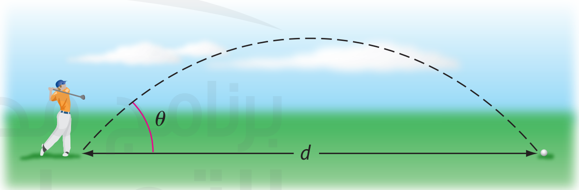
جد قيمة $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحتين. (مثال 1)

1. $\cos \theta = \frac{3}{5}, (270°, 360°)$
2. $\tan \theta = \frac{8}{15}, (180°, 270°)$
3. $\cos \theta = -\frac{9}{41}, (90°, 180°)$
4. $\sin \theta = -\frac{7}{12}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
5. $\tan \theta = -\frac{1}{2}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
6. $\tan \theta = \sqrt{3}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
7. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
8. $\cos \theta = -\frac{5}{13}, \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (مثال 2)

9. $\sin 2\theta = \cos \theta$
10. $\cos 2\theta = \cos \theta$
11. $\cos 2\theta - \sin \theta = 0$
12. $\tan 2\theta - \tan 2\theta \tan^2 \theta = 2$
13. $\sin 2\theta \csc \theta = 1$
14. $\cos 2\theta + 4 \cos \theta = -3$

15. **رياضة الجولف** تم ضرب كرة جولف بسرعة ابتدائية تبلغ 88 m/s. ويتم قياس مسافة تحرك الكرة بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، حيث يمثل v_0 المسافة الابتدائية، بينما يمثل θ الزاوية التي يحدثها مسار الكرة في الملعب، و 9.8 هي التسارع بالمتر في الثانية المربعة. (مثال 2)



a. إذا تحركت الكرة مسافة 242 m. فما مقدار θ بالنسبة لأقرب زاوية؟
b. استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإعادة كتابة المعادلة لـ d.

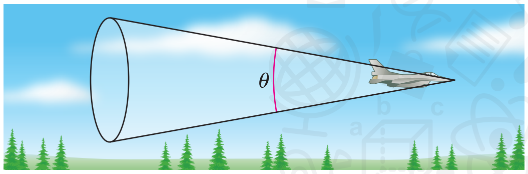
أعد كتابة كل تعبير في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1. (مثال 3)

16. $\cos^3 \theta$
17. $\tan^3 \theta$
18. $\sec^4 \theta$
19. $\cot^3 \theta$
20. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$
21. $\sin^2 \theta \cos^3 \theta$
22. $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$
23. $\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta}$

حُلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 4)

24. $1 - \sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{1}{2}$
25. $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta = 0$
26. $\sin^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta$
27. $\cos^2 \theta - \sin \theta = 1$

28. **عدد الماخ** ترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس الموجة الصادمة مخروطية الشكل، التي أحدثتها إحدى الطائرات مخترقة الحاجز الصوتي، بعدد الماخ M والذي يصف سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$. (مثال 5)



a. عبّر عن عدد الماخ للطائرة استنادًا إلى cosine.
b. استخدم التعبير الموجود في الجزء a لإيجاد عدد الماخ لطائرة ما إذا كان $\cos \theta = \frac{4}{5}$.

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

29. $\sin 67.5°$
30. $\cos \frac{\pi}{12}$
31. $\tan 157.5°$
32. $\sin \frac{11\pi}{12}$

حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (مثال 6)

33. $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta = 1$
34. $\tan \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2}$
35. $2 \sin \frac{\theta}{2} = \sin \theta$
36. $1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$

أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق. (مثال 7)

37. $\cos 3\theta \cos \theta$
38. $\cos 12x \sin 5x$
39. $\sin 3x \cos 2x$
40. $\sin 8\theta \sin \theta$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. (مثال 8)

41. $2 \sin 135° \sin 75°$
42. $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$
43. $\frac{2}{3} \sin 172.5° \sin 127.5°$
44. $\sin 142.5° \cos 352.5°$
45. $\sin 75° + \sin 195°$
46. $2 \cos 105° + 2 \cos 195°$
47. $3 \sin \frac{17\pi}{12} - 3 \sin \frac{\pi}{12}$
48. $\cos \frac{13\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$

حُلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 9)

49. $\cos \theta - \cos 3\theta = 0$
50. $2 \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta = 0$
51. $\sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$
52. $\sin 2\theta - \sin \theta = 0$
53. $3 \cos 6\theta - 3 \cos 4\theta = 0$
54. $4 \sin \theta + 4 \sin 3\theta = 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

55. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 6x}{2}}$

56. $\sqrt{\dfrac{1-\cos 16\theta}{2}}$

اكتب كل تعبير في صيغة مجموع أو فرق.

57. $\cos(a+b)\cos(a-b)$

58. $\sin(\theta-\pi)\sin(\theta+\pi)$

59. $\sin(b+\theta)\cos(b+\pi)$

60. $\cos(a-b)\sin(b-a)$

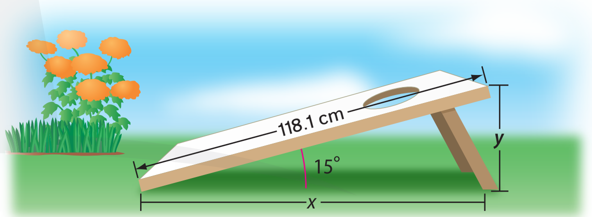
.61 خرائط الإسقاط المركاتوري هو إسقاط مسطح للكرة الأرضية تزداد فيه المسافة بين خطوط العرض مع بُعدها عن خط الاستواء.

تتضمن عملية احتساب نقطة ما على الإسقاط المركاتوري التعبير $\tan\left(45°+\dfrac{\ell}{2}\right)$، حيث يمثل ℓ خط عرض النقطة.

.a اكتب التعبير بدلالة $\sin \ell$ و $\cos \ell$.

.b جد قيمة هذا التعبير إذا كان $\ell = 60°$.

.62 لعبة التصويب BEAN BAG TOSS قام علي بإعداد هيكل للعبة التصويب كما هو موضح في الصورة أدناه.



.a كم سيبلغ المقدار الدقيق لبُعد الحافة الخلفية للوحة عن الأرضية؟

.b كم سيستغرق الإعداد بالضبط؟

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

63. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

64. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

65. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

66. $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

67. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

68. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

اثبت صحة كل متطابقة باستخدام متطابقات الاختصار الأسي ثم تأكد مجددًا باستخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع.

69. $2\cos^2 5\theta - 1 = \cos 10\theta$

70. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$

أعد كتابة كل تعبير بدلالة cosine لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من **1**.

71. $\sin^6\theta$

72. $\sin^8\theta$

73. $\cos^7\theta$

74. $\sin^4\theta\cos^4\theta$

.75 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستعمل على استكشاف كيفية استخدام التمثيلات البيانية للدالات لإيجاد المتطابقات.

.a التمثيل البياني استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x) = 4\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

.b التحليل اكتب كدالة $h(x)$ sin تعبّر عن التمثيل البياني لــ $f(x)$. ثم اثبت صحة $f(x) = h(x)$ جبريًا.

.c التمثيل البياني استخدم حاسبة بيانية لتمثيل $g(x) = \cos^2\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

.d التحليل اكتب كدالة $k(x)$ cos تعبّر عن التمثيل البياني لــ $g(x)$. ثم اثبت صحة $g(x) = k(x)$ جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.76 **تحدٍّ** اثبت صحة المتطابقة التالية.

$$\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta = \sin\theta$$

التبرير فكّر في وجود زاوية داخل دائرة الوحدة. حدد أي ربع ستقع فيه ضعف الزاوية ونصف الزاوية إذا كان ضلع الإنتهاء للزاوية في كل ربع.

77. I

78. II

79. III

تحدٍّ اثبت صحة كل متطابقة.

80. $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

81. $\cos 4\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

82. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

83. $\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

84. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

85. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

86. $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

87. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

88. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

89. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

.90 **الكتابة في الرياضيات** صِف الخطوات التي قد تستخدمها لإيجاد القيمة الدقيقة لــ $\cos 8\theta$ إذا كان $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

مراجعة شاملة

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي.

91. $\cos \frac{\pi}{12}$
92. $\cos \frac{19\pi}{12}$
93. $\sin \frac{5\pi}{6}$
94. $\sin \frac{13\pi}{12}$
95. $\cos \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
96. $\sin \left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

97. **زراعة الحدائق** تنتظر رنا اليوم الأول من فصل الربيع حيث ستكون ساعات النهار 14 ساعة من أجل بدء زراعة حديقة الزهور. يمكن تمثيل عدد ساعات النهار H في بلدتها بالصيغة $H = 11.45 + 6.5 \sin (0.0168d - 1.333)$. حيث يمثل d يوم من أيام العام، و$d = 1$ يمثل 1 يناير، و$d = 2$ يمثل 2 يناير وهكذا. في أي الأيام ستبدأ رنا في زراعة الحديقة؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة فاكتب *غير مُعرَّفة*.

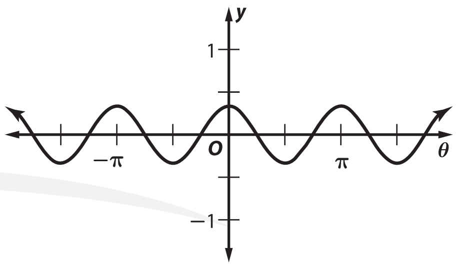
98. $\csc \left(-\frac{\pi}{3}\right)$
99. $\tan 210°$
100. $\sin \frac{19\pi}{4}$
101. $\cos (-3780°)$

مثِّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، و فترات تزايد أو تناقص الدالة.

102. $f(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{2}{3}}$
103. $f(x) = 4x^{\frac{5}{4}}$
104. $f(x) = -3x^{6}$
105. $f(x) = 4x^{5}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

106. **مراجعة** حدد المعادلة الخاصة بالتمثيل البياني.



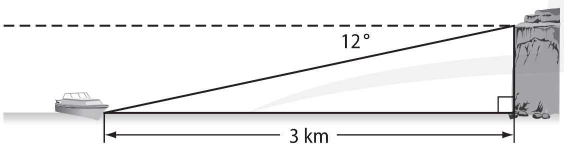
A $y = 3 \cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

107. **مراجعة** من نقطة مراقبة على كهف موجود أعلى البحيرة، تبلغ زاوية الانخفاض لقارب على المياه 12°. وعلمًا بأن القارب يبعُد عن الشاطئ بمقدار 3 km أدنى المنحدر الصخري مباشرة. فما ارتفاع المنحدر الصخري بدءًا من سطح المياه وانتهاءً بنقطة المراقبة؟



F $\frac{3}{\sin 12°}$

G $\frac{3}{\tan 12°}$

H $\frac{3}{\cos 12°}$

J $3 \tan 12°$

108. **إجابة حرة** استخدم التمثيل البياني للإجابة على كل مما يلي.

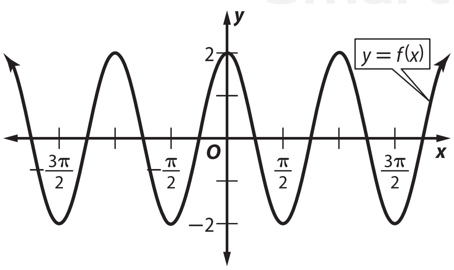
a. اكتب دالة بالصيغة $f(x) = a \cos (bx + c) + d$ تتوافق مع التمثيل البياني.

b. أعد كتابة $f(x)$ كدالة sin.

c. أعد كتابة $f(x)$ كدالة cos لزاوية فردية.

d. إيجاد جميع حلول $f(x) = 0$.

e. كيف ترتبط الحلول التي وجدتها في الجزء d بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$؟



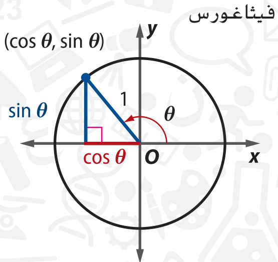
دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدرس 5-1)

- المتطابقات المثلثية هي متطابقات تتضمن دوال مثلثية ويمكن استخدامها لإيجاد قيم مثلثية.
- يمكن تحويل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة بكتابة التعبير بدلالة إحدى الدوال المثلثية أو بدلالة sine and cosine.
- أكثر متطابقة مثلثية شيوعًا هي متطابقة فيثاغورس $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.



إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الدرس 5-2)

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأسهل.
- استخدم المتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، أو إعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فروق، أو إيجاد ناتج ضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل مقام بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$ إلى حد فردي باستخدام متطابقة المُرافق وفيثاغورس الخاصة به.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير مشترك.

حل معادلات مثلثية (الدرس 5-3)

- تقنيات جبرية يمكن استخدامها لحل معادلات مثلثية تتضمن عزل التعبير المثلثي، والحصول على الجذر التربيعي لكلا الطرفين، والتحليل إلى العوامل.
- يمكن استخدام متطابقات مثلثية لحل معادلات مثلثية بواسطة كتابة المعادلة باستخدام دالة مثلثية فردية أو بواسطة تربيع كل طرف للحصول على المتطابقة.

متطابقات المجموع والفروق (الدرس 5-4)

- يمكن استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد القيمة الدقيقة للدوال المثلثية لزوايا غير معروفة.
- يمكن أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفروق لإعادة كتابة تعابير مثلّثية في صورة تعبير جبري.

متطابقات ضعف الزوايا ومتطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع (الدرس 5-5)

- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم التعابير التي لا يمكن إيجاد قيمتها بطريقة أخرى.

المفردات الأساسية

دالة الزوايا المتتامة (cofunction)
متطابقة الفرق (difference identity)
متطابقة ضعف الزاوية (double-angle identity)
متطابقة نصف الزاوية (half-angle identity)
متطابقة (identity)
متطابقة فردية-زوجية (odd-even identity)
متطابقة اختصار الأس (power-reducing identity)
متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع (product-to-sum identity)
متطابقة فيثاغورس (Pythagorean identity)
متطابقة ناتج القسمة (quotient identity)
متطابقة عكسية/معكوسة (reciprocal identity)
متطابقة اختزال (reduction identity)
متطابقة المجموع (sum identity)
متطابقة مثلثية (trigonometric identity)
إثبات صحة المتطابقة (verify an identity)

مراجعة المفردات

أكمل كل متطابقة بإكمال الفراغات. ثم قم بتسمية المتطابقة.

1. $\sec \theta =$ ________

2. ________ $= \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}$

3. ________ $+ 1 = \sec^2 \theta$

4. $\cos (90° - \theta) =$ ________

5. $\tan (-\theta) =$ ________

6. $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha$ ________ $+ \cos \alpha$ ________

7. ________ $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

8. ________ $= \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos \theta}{2}}$

9. $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} =$ ________

10. ________ $= \dfrac{1}{2}[\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$

دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

5-1 المتطابقات المثلثية

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

11. $\sec\theta$ and $\cos\theta$, $\tan\theta = 3$, $\cos\theta > 0$
12. $\cot\theta$ and $\sin\theta$; $\cos\theta = -\frac{1}{5}$; $\tan\theta < 0$
13. $\csc\theta$ and $\tan\theta$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\sin\theta < 0$
14. $\cot\theta$ and $\cos\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{7}$; $\csc\theta > 0$
15. $\sec\theta$ and $\sin\theta$; $\cot\theta = -2$, $\csc\theta < 0$
16. $\cos\theta$ and $\sin\theta$, $\cot\theta = \frac{3}{8}$, $\sec\theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

18. $\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x$

19. $\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos(-x)}$

20. $\dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 1}$

21. $\dfrac{1}{1 - \sin x}$

22. $\dfrac{\cos x}{1 + \sec x}$

مثال 1

إذا كانت $\sec\theta = -3$ و$\sin\theta > 0$، **فجد** $\sin\theta$.

بما أن $\sin\theta > 0$ و$\sec\theta < 0$، إذًا θ يجب أن تكون في الربع الثاني. لإيجاد $\sin\theta$، قم أولاً بإيجاد $\cos\theta$ باستخدام المتطابقة العكسية لــ $\sec\theta$ و$\cos\theta$.

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ متطابقة عكسية

$= -\dfrac{1}{3}$ $\sec\theta = -3$

يمكنك الآن استخدام متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\sin\theta$ و$\cos\theta$ لإيجاد $\sin\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \frac{1}{9} = 1$ جد ناتج الضرب.

$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$ اطرح.

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ بسّط

5-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

23. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2\csc\theta$

24. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\csc\theta} = 1$

25. $\dfrac{\cot\theta}{1+\csc\theta} + \dfrac{1+\csc\theta}{\cot\theta} = 2\sec\theta$

26. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

27. $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \csc\theta - 1$

28. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\csc\theta}{\cot\theta} = \sec\theta + \csc\theta$

29. $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{1+\tan\theta} = \csc\theta$

30. $\cot\theta\csc\theta + \sec\theta = \csc^2\theta\sec\theta$

31. $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$

32. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

مثال 2

اثبت صحة $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا. لذا عليك البدء بذلك التعبير.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{2}{\sin\theta} \\
&= 2\csc\theta
\end{aligned}$$

المراجعة التابعة للدرس

5-3 حل المعادلات المثلثية

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

33. $2\sin x = \sqrt{2}$

34. $4\cos^2 x = 3$

35. $\tan^2 x - 3 = 0$

36. $9 + \cot^2 x = 12$

37. $2\sin^2 x = \sin x$

38. $3\cos x + 3 = \sin^2 x$

حُــــلّ كل معادلة لجميع قيم x.

39. $\sin^2 x - \sin x = 0$

40. $\tan^2 x = \tan x$

41. $3\cos x = \cos x - 1$

42. $\sin^2 x = \sin x + 2$

43. $\sin^2 x = 1 - \cos x$

44. $\sin x = \cos x + 1$

مثال 3

حُــــلّ المعادلة $\sin\theta = 1 - \cos\theta$ لجميع قيم θ.

المعادلة الأصلية.	$\sin\theta = 1 - \cos\theta$
جد تربيع كل طرف.	$\sin^2\theta = (1 - \cos\theta)^2$
اكتب الصيغة الموسعة.	$\sin^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$
متطابقة فيثاغورس	$1 - \cos^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$
اطرح.	$0 = 2\cos^2\theta - 2\cos\theta$
حلل إلى العوامل.	$0 = 2\cos\theta(\cos\theta - 1)$

جد حل x في $[0, 2\pi]$.

$\cos\theta = 1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = \cos^{-1} 1$ $\theta = \cos^{-1} 0$

$\theta = 0$ $\theta = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

يوضح التحقق أن $\frac{3\pi}{2}$ هو حل غير مقبول. إذًا، فإن الحل هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $\theta = 0 + 2n\pi$.

5-4 متطابقات المجموع والفروق

جد قيمة كل تعبير مثلّثي مما يلي.

45. $\cos 15°$

46. $\sin 345°$

47. $\tan\frac{13\pi}{12}$

48. $\sin\frac{7\pi}{12}$

49. $\cos -\frac{11\pi}{12}$

50. $\tan\frac{5\pi}{12}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

51. $\dfrac{\tan\frac{\pi}{9} + \tan\frac{\pi}{9}}{1 - \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}}$

52. $\cos 24° \cos 36° - \sin 24° \sin 36°$

53. $\sin 95° \cos 50° - \cos 95° \sin 50°$

54. $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} + \sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

55. $\cos(\theta + 30°) - \sin(\theta + 60°) = -\sin\theta$

56. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$

57. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\theta$

58. $\tan\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1}$

مثال 4

جد قيمة $\tan\frac{23\pi}{12}$

$\frac{23\pi}{12} = \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$	$\tan\frac{23\pi}{12} = \tan\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$
متطابقة المجموع	$= \dfrac{\tan\frac{5\pi}{4} + \tan\frac{2\pi}{3}}{1 - \tan\frac{5\pi}{4}\tan\frac{2\pi}{3}}$
إيجاد قيمة tan	$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})}$
بسّط	$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$
طبّق عملية إنطاق المقام (تخليصه من الجذور).	$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$
اضرب.	$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 3}$
بسّط	$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$

المراجعة التابعة للدرس

5-5 متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع

جد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

59. $\cos \theta = \frac{1}{3}, (0°, 90°)$

60. $\tan \theta = 2, (180°, 270°)$

61. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

62. $\sec \theta = \frac{13}{5}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

63. $\sin 75°$

64. $\cos \frac{11\pi}{12}$

65. $\tan 67.5°$

66. $\cos \frac{3\pi}{8}$

67. $\sin \frac{15\pi}{8}$

68. $\tan \frac{13\pi}{12}$

مثال 5

جد قيم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ إذا كان θ في الربع الرابع و $\sin \theta = -\frac{24}{25}$.

يوجد θ في الربع الرابع. إذًا $\cos \theta = \frac{7}{25}$ و $\sin \theta = -\frac{24}{25}$.

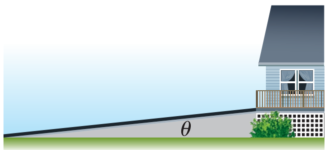
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)\frac{7}{25} = -\frac{336}{625}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$
$$= 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\frac{527}{625}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2\left(-\frac{24}{7}\right)}{1 - \left(-\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{48}{7}}{-\frac{527}{49}} = \frac{336}{527}$$

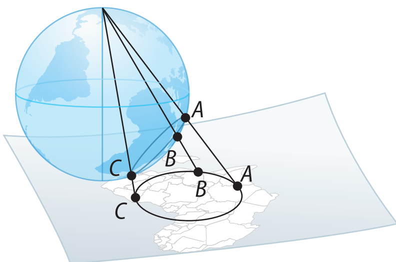
التطبيقات وحل المسائل

69. **الإنشاء** جد $\tan \theta$ التي يحدثها المنحدر مع سطح الأرض إذا كان $\sin \theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$ و $\cos \theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$. (الدرس 5-1)



70. **الإضاءة** يمكن حساب شدة الضوء المنبعث من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ ، حيث يكون I_0 شدة الضوء الداخل للنظام، بينما θ فتكون زاوية محور العدسة الثانية مع العدسة الأولى. اكتب معادلة لشدة الضوء مستخدمًا $\tan \theta$ فقط. (الدرس 5-1)

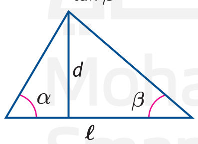
71. **الإسقاطات الخرائطية** يُستخدم الإسقاط المُجسّم من أجل إسقاط الخطوط المحيطة بشكل كروي ثلاثي الأبعاد على خريطة ثنائية الأبعاد. وترتبط النقاط الموجودة على الشكل الكروي بالنقاط الموجودة على الخريطة باستخدام الصيغة $r = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$. اثبت صحة $r = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$. (الدرس 5-2)



72. **حركة المقذوف** ستبقى كرة ما تُرمى بسرعة إبتدائية v_0 بزاوية θ وتتحرك بمسافة أفقية d في الهواء لمدة t ثانية، حيث $t = \frac{d}{v_0 \cos \theta}$. افترض أن الكرة رُميت بسرعة مبدئية تبلغ 50 ft/s وتحركت لمسافة 100 ft وبقيت في الهواء لمدة 4 ثوانٍ. جد الزاوية التي ستُرمى الكرة منها. (الدرس 5-3)

73. **الإذاعة** يحدث تداخل عندما تمر موجتان في الفراغ ذاته في نفس الوقت. ويكون هذا التداخل مشوّشًا، إذا كانت سعة مجموع الموجتين أقل من سعة الموجات الفردية. حدد ما إذا كان التداخل مشوشًا عند تمثيل الموجتين بواسطة الجمع بين $y = 20 \sin(3t + 45°)$ و $y = 20 \sin(3t + 225°)$. (الدرس 5-4)

74. **التثليث** *التثليث* هو عملية قياس مسافة ما d باستخدام الزاويتين α و β والمسافة ℓ باستخدام $\ell = \frac{d}{\tan \alpha} + \frac{d}{\tan \beta}$. (الدرس 5-5)



a. حل القاعدة لإيجاد d.

b. اثبت أن $d = \frac{\ell \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$.

c. اثبت أن $d = \frac{\ell \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

d. وضّح ما إذا كان $\alpha = \beta$، ثم $d = 0.5\ell \tan \alpha$.

تدريب على الاختبار

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

1. $\sin\theta$ and $\cos\theta$; $\csc\theta = -4$, $\cos\theta < 0$

2. $\csc\theta$ and $\sec\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{5}$; $\csc\theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3. $\dfrac{\sin(90° - x)}{\tan(90° - x)}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$

5. $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$

اثبت صحة كل متطابقة.

6. $\dfrac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} + \dfrac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = 1$

7. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$

8. $\dfrac{1}{1+\cos\theta} + \dfrac{1}{1-\cos\theta} = 2\csc^2\theta$

9. $-\sec^2\theta\sin^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

10. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

11. **اختيار من متعدد** أي التعابير غير صحيح؟

A $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

B $\tan(-\theta) = \dfrac{1}{\cot(-\theta)}$

C $\tan(-\theta) = \dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

D $\tan(-\theta) + 1 = \sec(-\theta)$

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

12. $\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

13. $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

حُلّ كل معادلة لجميع قيم θ.

14. $\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

15. $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$

16. $\dfrac{1}{\sec\theta - 1} - \dfrac{1}{\sec\theta + 1} = 2$

17. $\sec\theta - 2\tan\theta = 0$

18. **التيار الكهربائي** يتم احتساب التيار الكهربائي المنتج بواسطة مولّد التيار من خلال الصيغة $I = 40\sin 135\pi t$. حيث I هي قياس التيار بالأمبير، بينما t هو الوقت بالثانية. في أي وقت t سيبلغ التيار 20 أمبيرًا لأول مرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

جد قيمة كل تعبير مثلّثي مما يلي.

19. $\tan 165°$

20. $\cos -\frac{\pi}{12}$

21. $\sin 75°$

22. $\cos 465° - \cos 15°$

23. $6\sin 675° - 6\sin 45°$

24. **اختيار من متعدد** ما المتطابقة الصحيحة؟

F $\cos(\theta + \pi) = -\sin\pi$

G $\cos(\pi - \theta) = \cos\theta$

H $\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\theta$

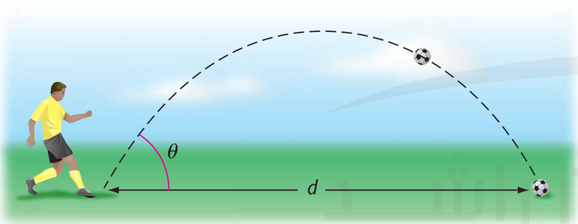
J $\sin(\pi + \theta) = \sin\theta$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$

26. $\dfrac{\tan 135° - \tan 15°}{1 + \tan 135°\tan 15°}$

27. **الفيزياء** رُكلت كرة قدم من مستوى أرضية الملعب بسرعة إبتدائية v بزاوية ارتفاع θ.



a. يمكن تحديد المسافة الأفقية d التي ستتحركها الكرة باستخدام $d = \dfrac{v^2\sin 2\theta}{g}$. حيث g هي التسارع بسبب الجاذبية. اثبت صحة أن هذا التعبير مماثل للصيغة $\frac{2}{g}v^2(\tan\theta - \tan\theta\sin^2\theta)$.

b. يمكن تحديد الحد الأقصى للارتفاع h الذي يمكن للعنصر بلوغه باستخدام الصيغة $h = \dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. جد نسبة الارتفاع القصوى المحققة إلى المسافة الأفقية المقطوعة.

جد قِيم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$ و $\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

28. $\tan\theta = -3, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

29. $\cos\theta = \frac{1}{5}$, $(0°, 90°)$

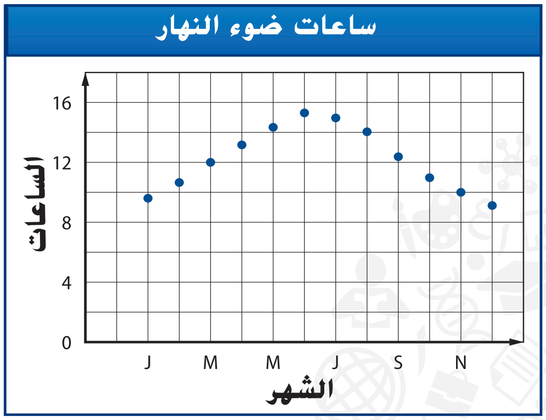
30. $\cos\theta = \frac{5}{9}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
معدلات التغير لــ sine و cosine الزاوية

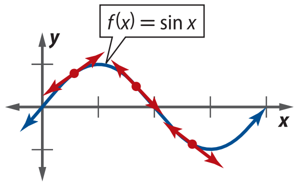
التركيز

- تقريب معدلات التغير لدوال sine و cosine الزاوية باستخدام ناتج قسمة الفرق.

لقد تعلمتَ أن العديد من المواقف في الحياة اليومية تتضمن سلوك متكررًا على مدار الوقت، وبالتالي يمكن تمثيلها بواسطة دوال منحنى الــ sine. ومن الممكن استخدام تحويلات الدوال الرئيسية sin x و cos x ونماذج مثلثية لتمثيل البيانات وتحليل الاتجاهات وتوقع القيم المستقبلية.



بينما يمكنك تمثيل مواقف من الحياة اليومية باستخدام تمثيلات بيانية لــ sine و cosine الزاوية. فيمكن استخدام حساب التفاضل لتحديد معدل تغير النموذج في أي نقطة زمنية. إن معرفتك بناتج قسمة الفرق، ومتطابقات المجموع لــ sine الزاوية و الــ cosine، وإيجاد قيمة الحدود يتيح لك الآن اكتشاف معدلات تغير هذه الدوال في أي نقطة زمنية.



نشاط 1 الحساب التقريبي لمعدل التغير

قرّب معدل تغير $f(x) = \sin x$ لعدة نقاط.

الخطوة 1 عوّض عن $\sin x$ = $f(x)$ في ناتج قسمة الفرق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow m = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$. افترض أن $h = 0.1$ و0.01 و0.001 و0.0001.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 عندما $x = 0$ و $x = \pi$.

تحليل النتائج

1. استخدم خطوط المماس والتمثيل البياني لــ $f(x) = \sin x$ لتوضيح القيم الموجودة في الخطوتين 2 و3.
2. ما الذي سيحدث لمعدل تغير $f(x)$ كلما زاد x؟

على عكس الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي $g(x) = e^x$ والمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية $h(x) = \ln x$، فإن تعبير تمثيل معدل تغير $f(x) = \sin x$ في أي نقطة سيكون غير واضح. ورغم ذلك، يمكننا تعويض $f(x)$ في ناتج قسمة الفرق ثم تحويل التعبير لأبسط صورة.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ناتج قسمة الفرق

$$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ $f(x) = \sin x$

$$= \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$ متطابقة مجموع الــ sine الزاوية

$$= \frac{(\sin x \cos h - \sin x) + \cos x \sin h}{h}$$ اجمع الحدود مع $\sin x$.

$$= \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$ حلل الى العوامل في $\sin x$ و $\cos x$

لدينا الآن تعبيران يتضمنان $\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$ و $\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)$, للحصول على تقريب دقيق لمعدل تغير $f(x)$ عند إحدى النقاط، سيلزم تقريب h من 0 قدر الإمكان. سابقًا، كان بمقدورنا التعويض عن $h = 0$ في تعبير لإيجاد القيمة الدقيقة لميل إحدى الدوال عند نقطة ما. ورغم ذلك، كلا التعابير الكسرية غير محددة عند $h = 0$.

	تعابير أصلية	
$\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$	تعابير أصلية	$\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)$
$= \cos x\left(\frac{\sin 0}{0}\right)$	$h = 0$	$= \sin x\left(\frac{\cos 0-1}{0}\right)$
غير محددة		غير محددة

يمكننا تقريب القيمة للتعبيرين بواسطة إيجاد حد كل منهما كلما اقترب h من 0 وذلك باستخدام أساليب تمت مناقشتها في إحدى الدروس السابقة.

نشاط 2 حساب معدل التغير

جد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \sin x$.

الخطوة 1 استخدم الحاسبة البيانية لتقدير $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$.

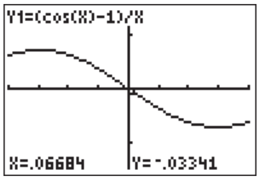
الخطوة 2 اثبت صحة القيمة الموجودة في الخطوة 1 باستخدام TABLE الخاصة بالآلة الحاسبة.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 لتقدير $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$.

الخطوة 4 عوّض عن القيم الموجودة في الخطوة 2 والخطوة 3 في معادلة الميل

$$m = \sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right).$$

الخطوة 5 حوّل التعبير الموجود في الخطوة 4 لأبسط صورة.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

X	Y1
-.0030	.00150
-.0020	1.0E-3
-.0010	5.0E-4
0.0000	ERROR
.00100	-5E-4
.00200	-1E-3
.00300	-.0015

X=-.001

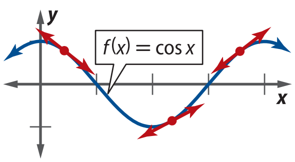
تحليل النتائج

3. جد معدل تغير $f(x) = \sin x$ عند $x = \frac{3\pi}{2}$ ، 2، و $\frac{5\pi}{2}$.

4. خمّن لماذا يلزم تمثيل معدلات التغير لجميع الدوال المثلثية بدوال مثلثية أخرى.

التمثيل والتطبيق

5. في هذه المسألة، ستجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \cos x$ عند أي نقطة x.



a. عوّض عن $f(x) = \cos x$ في ناتج قسمة الفرق.

b. حوّل التعبير من الجزء **a** لأبسط صورة.

c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حد تعبيري الكسور كلما اقترب h من 0.

d. عوّض عن القيم الموجودة في الجزء **c** داخل معادلة الميل الموجودة في الجزء **b**.

e. حوّل معادلة الميل في الجزء **d** لأبسط صورة.

f. جد معدل تغير $f(x) = \cos x$ عند $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، $\frac{3\pi}{2}$.