الوحدة

4 الدوال المثلثية

السابق

لقد درست الدوال الأسية واللوغاريتمية، وهما نوعان من الدوال المتسامية.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- استخدام النسب المثلثية لحل المثلثات قائمة الزاوية.
- إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية.
- تمثيل الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية بيانيًا

لماذا؟ ▲

تحديد المواقع عبر الأقمار الصناعية يعمل نظام الملاحة عبر الأقمار الصناعية من خلال استقبال إشارات من الأقمار الصناعية الموجودة في المدار، وتحديد المسافة لكل من الأقمار الصناعية. ومن ثمّ استخدام حساب المثلثات لتحديد الموقع على سطح الأرض. تُستخدَم هذه التقنيات أيضًا في أثناء تحديد مواقع السيارات والطائرات، والسفن والمركبات الفضائية.

القراءة المسبقة استخدم إستراتيجية القراءة المسبقة للمراجعة لتوقع هدفين أو ثلاثة من أهداف الوحدة 4.

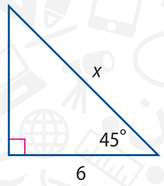
الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه

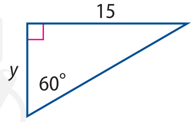
تحقق سريع

جد القيمة المجهولة في كل شكل مما يلي.
(المهارات المطلوبة)

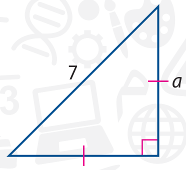
1.



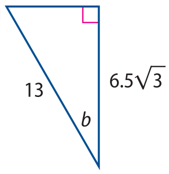
2.



3.



4.



حدد ما إذا كان كل مما يلي يمكن أن يمثل قياس زوايا المثلث الثلاث. اكتب نعم أو لا. (المهارات المطلوبة)

5. 4, 8, 12

6. 12, 15, 18

.7 **الجبر** طول ضلع زاوية المثلث x, x + 17, 25. إذا كان طول الضلع الأطول 25. فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟ (المهارات المطلوبة)

جد للمعادلة أي خط تقارب رأسي أو أفقي. (الدرس 3-5)

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$

9. $h(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x + 5}$

10. $f(x) = \dfrac{x(x - 1)^2}{(x - 2)(x + 4)}$

11. $g(x) = \dfrac{x + 5}{(x - 3)(x - 5)}$

12. $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5}$

13. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 12}{2x - 3}$

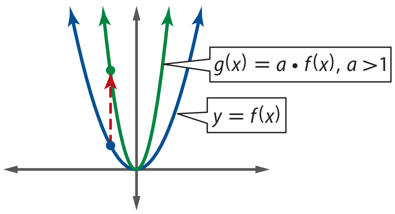
المفردات الجديدة

الدوال المثلثية	trignometric functions
جيب الزاوية	sine
جيب التمام	cosine
ظل الزاوية	tangent
قاطع التمام	cosecant
القاطع	secant
ظل التمام	cotangent
دالة المقلوب	reciprocal function
معكوس الجيب	inverse sine
معكوس جيب التمام	inverse cosine
معكوس ظل الزاوية	inverse tangent
راديان	radian
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	coterminal angles
زاوية المرجع	reference angle
دائرة الوحدة	unit circle
دالة دائرية	circular function
دورة	period
منحنى الجيب	sinusoid
السعة	amplitude
التكرار	frequency
إزاحة الطور	phase shift
قانون الجيوب	Law of Sines
قانون جيوب التمام	Law of Cosines

مراجعة المفردات

الانعكاس (reflection) صورة طبق الأصل من التمثيل البياني لدالة بالنسبة لأحد الخطوط المحددة

تغيير الأبعاد (التمدّد) (dilation) تحوُّل غير مُتصلِّب له تأثير ضغط (تصغير) أو توسيع (تكبير) التمثيل البياني لإحدى الدوال أفقيًّا أو رأسيًّا



Vertical dilation

4-1 حساب المثلّثات قائمة الزوايا

..السابق

- تم إيجاد قيمة النسب.

..الحالي

1 إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة للمثلثات القائمة الزاوية.

2 حل المثلثات القائمة الزاوية.

..لماذا؟

- تعد البالونات الكبيرة المملوءة بغاز الهليوم إحدى تقاليد العديد من العروض التي تجري في الأعياد. حيث يستخدم المتطوعون خيوطاً طويلة متصلة بالبالون لتوجيه البالون على طول مسار العرض.

لنفترض أن اثنين من هذه الخيوط متصلان بأحد البالونات من عقدة واحدة، وأن المتطوعين اللذين يمسكان هذه الوصلات يقفان بحيث تكون نهايات الخيوط واقعة على المستوى الرأسي نفسه. إذا كنت تعرف قياس الزاوية التي يصنعها كل خيط مع الأرض والمسافة بين المتطوعين، يمكنك استخدام حساب المثلث القائم الزاوية لإيجاد ارتفاع البالون عن الأرض.

المفردات الجديدة

النسب المثلثية
trigonometric ratios

دوال حساب المثلثات
trigonometric functions

جيب الزاوية sine

جيب التمام cosine

ظل الزاوية
tangent

قاطع التمام cosecant

القاطع secant

ظل التمام cotangent

نسبة المقلوب
reciprocal function

نسبة مثلثية عكسية
inverse trigonometric function

معكوس الجيب
inverse sine

معكوس جيب التمام
inverse cosine

معكوس ظل الزاوية
inverse tangent

زاوية الارتفاع
angle of elevation

زاوية الانخفاض
angle of depression

حل مثلث قائم الزاوية
solve a right triangle

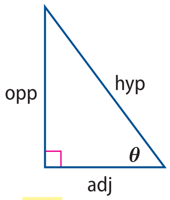
1 قيم النسب المثلثية

تشير كلمة *حساب المثلثات إلى قياس المثلث*. وسوف تدرس في هذه الوحدة حساب المثلثات من حيث أنها علاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات ومن حيث أنها مجموعة من النسب المحددة في نظام الأعداد الحقيقي. وسوف تدرس في هذا الدرس *حساب المثلثات قائمة الزاوية*

باستخدام قياسي الضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية وزاوية المرجع θ. يمكننا تشكيل **النسب المثلثية** التي تحدد ستّ **نسب مثلثية**.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية

افترض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم والاختصارات opp, adj, hyp تشير إلى طول الضلع المقابل لـ θ، وطول الضلع المجاور لـ θ، وطول الوتر، على الترتيب.



وبالتالي تكون النسب المثلثية الست لـ θ محددة على النحو الآتي:

sine $(\theta) = \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

cosecant $(\theta) = \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$

cosine $(\theta) = \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

secant $(\theta) = \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$

tangent $(\theta) = \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

cotangent $(\theta) = \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

يطلق على نسب **cosecant**، ونسب **secant**، ونسب **cotangent** **مقلوب النسب المثلثية** وذلك لأن النسب الخاصة بها تكون مقلوبًا لنسب **sine** و **cosine** و **tangent** على الترتيب. ولذلك، تعد العبارات التالية صحيحة.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

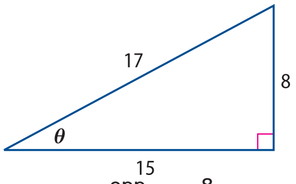
من تعاريف نسبة **sine** ونسب **cosine** ونسبة **tangent** ونسبة **cotangent**. يمكنك أيضًا اشتقاق العلاقات الآتية:

ستثبت هذه العلاقات في التمرين 83

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

المثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية

جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ.



طول الضلع المقابل لــ θ هو 8، وطول الضلع المجاور لــ θ هو 15. وطول الوتر 17.

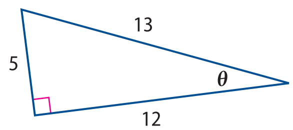
$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{8}{17}$ opp = 8 و hyp = 17 $\csc\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{17}{8}$

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{15}{17}$ adj = 15 و hyp = 17 $\sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{17}{15}$

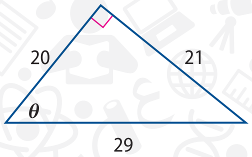
$\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{8}{15}$ jda = 5 و ppo = 8 $\cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{15}{8}$

تمرين موجّه

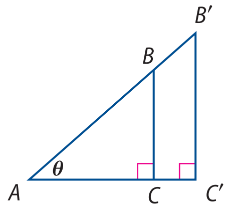
1A.



1B.



ضع في الحسبان أن قيمة $\sin\theta$ تساوي:



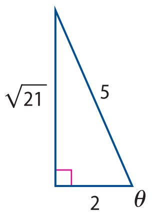
باستخدام $\triangle ABC$: $\sin\theta = \frac{BC}{AB}$ باستخدام $\triangle AB'C'$: $\sin\theta = \frac{B'C'}{AB'}$

لاحظ أن المثلثين متشابهان لأنهما مثلثان قائما الزاوية ويشتركان في زاوية واحدة، θ.
ولأن المثلثين متشابهان، فإن نسب الأضلاع المتناظرة متساوية. لذا فإنّ $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$.

ومن ثم تكون $\sin\theta$ لها القيمة نفسها بغض النظر عن المثلث المستخدم. تعد قيم النسب ثابتة لقياس زاوية معينة. إذ إنها لا تعتمد على قياسات المثلث قائم الزاوية.

المثال 2 استخدام قيمة نسبة مثلثية ما لإيجاد قيم النسب المثلثية الأخرى

إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{5}$، فجد قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة θ.



ابدأ برسم المثلث القائم الزاوية وتسمية الزاوية الحادة θ.

لأن $\cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{2}{5}$، سمّ الضلع المجاور 2 والوتر 5.

من خلال نظرية فيثاغورس، يكون طول الضلع المقابل لــ θ هو $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ $\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ $\sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{5}{2}$

$\csc\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$ $\cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

تمرين موجّه

2. إذا كان $sin\,\theta = \frac{1}{2}$، فجد قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة θ.

نصيحة دراسية

تذكّر النسب المثلثية

طريقة التذكّر
SOH-CAH-TOA هي الأكثر استخدامًا لتذكّر نسب **sine**، **cosine** و **tangent**.

$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$

$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$

انتبه!

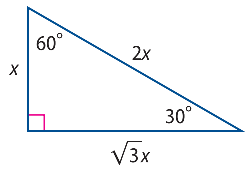
مفهوم خاطئ شائع
في المثال 2. قد تكون تسمية الضلع المجاور للمثلث 4 والوتر 10. وذلك لأن $\cos\theta = \frac{2}{5}$ تعطي نسبة الضلع المجاور والوتر، ولا تعطي قياسات محددة.

سيطلب منك على نحو متكرر إيجاد النسب المثلثية لقياسات زاوية حادة محددة. ويبيّن لك الجدول التالي قيم النسب المثلثية الست لمقاييس ثلاث زوايا شائعة: 30°، 45°، 60°. ولتتذكّر هذه القيم، يمكنك استخدام خواصّ المثلثات 30°–60°–90° و 45°–45°–90°.

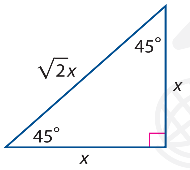
المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثلّث 30°-60°-90°



مثلّث 45°-45°-90°



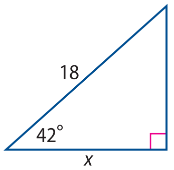
سوف تثبت بعض هذه القيم في التمرينات 57-62.

2 حل المثلثات قائمة الزاوية

يمكن استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات زوايا المثلثات القائمة المجهولة.

المثال 3 إيجاد طول الضلع المجهول

جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



ما دم قد حصلت على قياس زاوية حادة وطول وتر المثلث، استخدم نسبة **cosine** لإيجاد طول الضلع المجاور للزاوية المعطاة.

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ نسبة cosine

$\cos 42° = \frac{x}{18}$ $\theta = 42°$, adj $= x$, hyp $= 18$

$18 \cos 42° = x$ بضرب كل طرف في 18.

$13.4 \approx x$ استخدم حاسبة.

لذا فإن قيمة x تبلغ نحو 13.4

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك عن طريق تعويض $x = 13.4$ في $\cos 42° = \frac{x}{18}$.

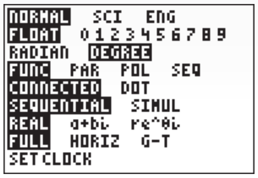
$\cos 42° = \frac{x}{18}$

$\cos 42° = \frac{13.4}{18}$ $x = 13.4$

$0.74 = 0.74$ ✔ بسّط.

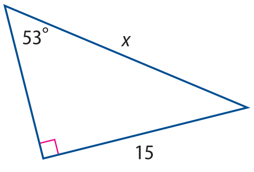
نصيحة تقنية

منوال الدرجة لتتمكن من إيجاد قيمة النسبة المثلثية لزاوية مقاسة بالدرجات، عليك أولاً إعداد الحاسبة على *منوال الدرجة* باختيار DEGREE في خاصية MODE من الحاسبة البيانية.

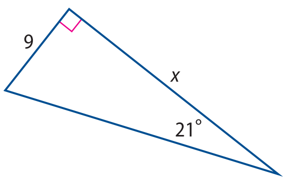


تمرين موجّه

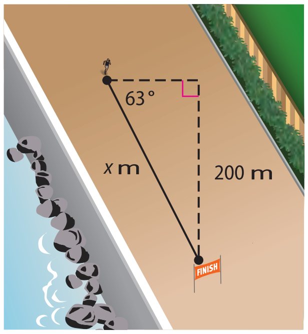
3A.



3B.



🌐 مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع المجهول



الألعاب الرياضية الثلاثية يعدو متسابق في الألعاب الثلاثية ضمن المسار المبين. حدد المسافة التي يجب أن يقطعها العدّاء ليصل إلى خط النهاية بالأقدام.

لديك قياس زاوية حادة وطول الضلع المقابل. يمكنك إذًا استخدام نسبة **sine** لإيجاد الوتر.

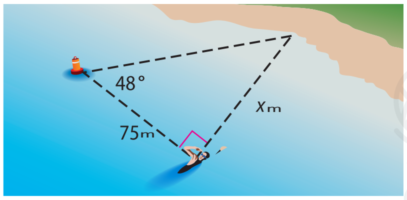
$\sin\theta = \dfrac{opp}{hyp}$ نسبة sine

$\sin 63° = \dfrac{200}{x}$ $\theta = 63°,\ opp = 200,\ hyp = x$

$x \sin 63° = 200$ بضرب كل طرف في x.

$x = \dfrac{200}{\sin 63°}$ أو حوالي 224.47   بقسمة كل طرف على $\sin 63°$.

إذًا، يجب أن يعدو المتسابق حوالي 224.5 m لينهي الثلاثي.



تمرين موجه

4. الألعاب الرياضية الثلاثية افترض أن متسابقًا في الجزء الخاص بالسباحة من السباق عليه أن يسبح خلال المسار المُبيَّن. جد المسافة التي يجب أن يسبحها المتسابق ليصل إلى الشاطئ.

الربط بالحياة اليومية

يقام سباق الرجل الحديدي الرياضي الثلاثي في هاواي، ويتكون من ثلاثة أحداث ثابتة، تتضمن سباحة 3.9 km، وركوب دراجات 180 km، وسباق عدو 42.2 km.

المصدر: مؤسسة الألعاب الرياضية الثلاثية العالمية

عندما تكون القيمة المثلثية لزاوية حادة معروفة، فإن **النسب المثلثية العكسية** المماثلة يمكن أن تستخدم لإيجاد قياس الزاوية.

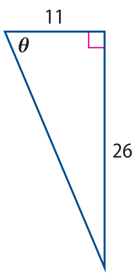
المفهوم الأساسي النسب المثلثية العكسية

معكوس sine	إذا كانت θ زاوية حادة و $\sin\theta$ هو x. فإن **معكوس sine** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $x = \sin\theta$، فإن $\theta = \sin^{-1} x$.
معكوس cosine	إذا كانت θ زاوية حادة $\cos\theta$ هو x. فإن **معكوس cosine** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $x = \cos\theta$، فإن $\theta = \cos^{-1} x$.
معكوس tangent	إذا كانت θ زاوية حادة وظل $\tan\theta$ هو x. فإن **معكوس tangent** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $x = \tan\theta$، فإن $\theta = \tan^{-1} x$.

قراءة في الرياضيات

النسب المثلثية العكسية التعبير $\sin^{-1} x$ تتم قراءته كمعكوس $\sin x$. احرص ألا تخلط هذا الرمز بالرمز الخاص بالأسس السالبة: $\sin^{-1} x \neq \dfrac{1}{\sin x}$. بدلاً من ذلك، هذا الرمز يشبه الرمز الخاص بمعكوس الدالة $f^{-1}(x)$.

المثال 5 إيجاد قياس الزاوية المجهولة



استخدم النسب المثلثية لإيجاد قياس θ. قرِّب إلى أقرب درجة إن تطلب الأمر.

بما أن قياسات الأضلاع المقابلة والمجاورة لـ θ معطاة. استخدم نسبة tan.

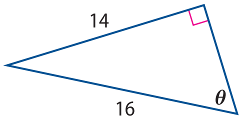
$\tan\theta = \dfrac{opp}{adj}$ نسبة tan

$\tan\theta = \dfrac{26}{11}$ $opp = 26,\ adj = 11$

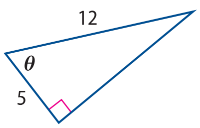
$\theta = \tan^{-1}\dfrac{26}{11}$ أو حوالي 67°   تعريف معكوس tan

تمرين موجّه

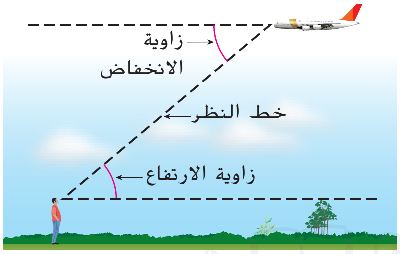
5A.



5B.



تستخدم بعض تطبيقات حساب المثلثات زاوية ارتفاع أو انخفاض. إن **زاوية الارتفاع** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أعلى منه. إن **زاوية الانخفاض** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى منه.

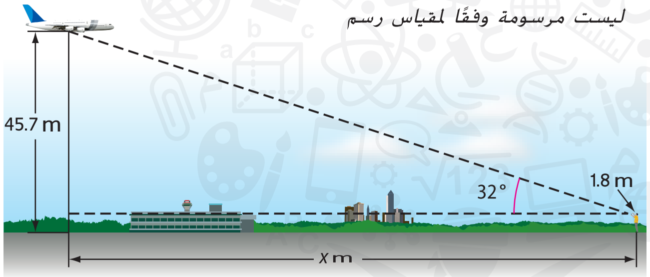


في الشكل، تتطابق زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان بين خطين متوازيين.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زاوية الارتفاع

طائرات **عامل من الطاقم الأرضي يبلغ طوله 1.8 m يوجّه طائرة على مدرج المطار. إذا نظر العامل إلى الطائرة بزاوية ارتفاع قدرها 32°، فما المسافة الأفقية بين العامل والطائرة؟**

ليست مرسومة وفقًا لمقياس رسم



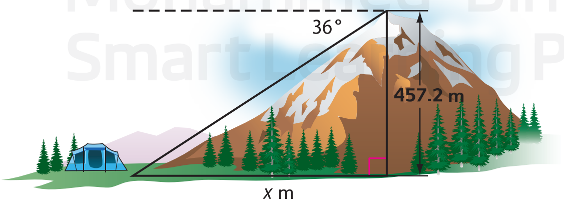
لأن العامل يبلغ من الطول 1.8 m، فالمسافة الرأسية بين العامل والطائرة 45.7-1.8، أو 43.9 متر. نظرًا لأن قياس الزاوية والضلع المقابل لها معلومان في المسألة، فيمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد x.

$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$	نسبة tan
$\tan 32° = \frac{43.9}{x}$	$\theta = 32°$, $opp = 43.9$, $adj = x$
$x \tan 32° = 43.9$	بضرب كل طرف في x.
$x = \frac{43.9}{\tan 32°}$	بقسمة كل من الطرفين على $\tan 32°$.
$x \approx 70.2$	باستخدام حاسبة.

إذًا، فالمسافة الأفقية بين العامل والطائرة تبلغ تقريبًا 70.2 m.

تمرين موجّه

6. **التخييم** تسلقت مجموعة من المتسلقين قمة جبل تبلغ **457.2 m** خلال رحلتهم. عندما ينظر المتسلقون للأسفل بزاوية انخفاض قدرها **36°**، يمكنهم رؤية مخيمهم عن بعد. ما المسافة بين المخيم والمجموعة مُقرّبًا الناتج لأقرب متر؟



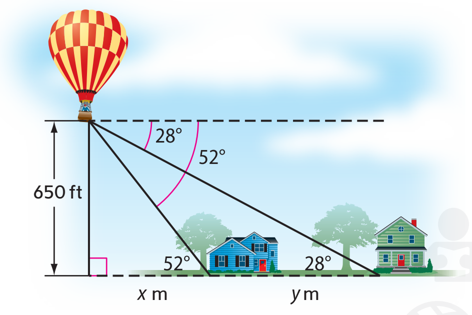
مهن من الحياة اليومية

طاقم المطار الأرضي يشغل أفراد طاقم المطار الأرضي مركبات خدمة التعلية، ويتولون أمر الحمولات/الأمتعة وإرشاد أو سحب الطائرة. يجب أن يكون أفراد الطاقم حاصلين على شهادة الثانوية ورخصة قيادة سارية وسجل قيادة جيد.

يمكن استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لمعرفة المسافات بين موقعين، كما يمكن تعيين ارتفاع موضع ما إذا توفرت زاويتان معطاتان من موضعي مراقبة مختلفين.

مثال 7 من الحياة اليومية استخدام زاويتي الارتفاع أو الانخفاض

ركوب المنطاد منطاد هواء ساخن يتحرك فوق حي بزاوية انخفاض قدرها °28 بالنسبة لمنزل و °52 بالنسبة لمنزل آخر في آخر الشارع. إذا كان ارتفاع المنطاد هو 650 ft، فاستنتج المسافة بين المنزلين.



ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة. لأن زاوية الارتفاع من المنزل للمنطاد تتطابق مع زاوية الانخفاض من المنطاد للمنزل. يمكنك تسمية زوايا الارتفاع كما هو مبين. سَمِّ المسافة الأفقية من المنطاد للمنزل الأول x والمسافة بين المنزلين y.

من المثلث الأصغر القائم الزاوية، يمكنك استخدام نسبة tan لإيجاد x.

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ نسبة tan

$$\tan 52° = \frac{650}{x}$$ $\theta = 52°, \text{opp} = 650, \text{adj} = x$

$$x \tan 52° = 650$$ مع ضرب كل طرف في x.

$$x = \frac{650}{\tan 52°}$$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 52°$.

من المثلث الأكبر يمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد y.

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ نسبة tan

$$\tan 28° = \frac{650}{x+y}$$ $\theta = 28°x + y, \text{opp} = 650, \text{adj} = x + y$

$$(x + y)\tan 28° = 650$$ مع ضرب كل طرف في $x + y$.

$$x + y = \frac{650}{\tan 28°}$$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 28°$.

$$\frac{650}{\tan 52°} + y = \frac{650}{\tan 28°}$$ استبدل $x = \frac{650}{\tan 52°}$.

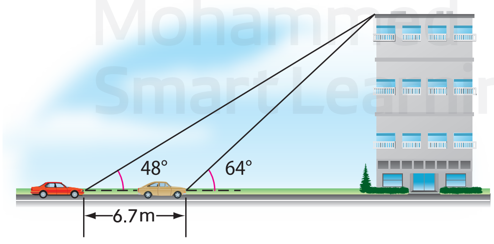
$$y = \frac{650}{\tan 28°} - \frac{650}{\tan 52°}$$ اطرح $\frac{650}{\tan 52°}$ من كل طرف.

$$y \approx 714.6$$ استخدام الحاسبة.

ومن ثم، فالمنزلان بينهما مسافة قدرها تقريبًا 714.6 ft.

تمرين موجّه

7. **مبان** زاوية الارتفاع من السيارة لأعلى شقة بالمبنى هي °48. إذا كانت زاوية الارتفاع من سيارة أخرى أمام السيارة الأولى مباشرة بمسافة 6.7 m هي °64، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



نصيحة دراسية

قياس غير مباشر عندما نحسب المسافة بين موضعين مستخدمين زوايا الانخفاض، من المهم أن نتذكر أن الموضع يجب أن يقع على المستوى الأفقي نفسه.

نصيحة تقنية

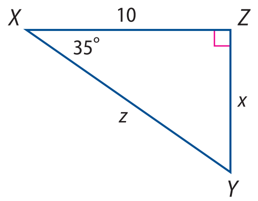
استخدام الأقواس في أثناء إيجاد قيمة تعبير مثلثي باستخدام الحاسبة البيانية، انتبه إلى غلق الأقواس. بينما تقوم الحاسبة بإعادة القيمة نفسها للتعبيرين tan(26 و tan(26)، فإنها لا تفعل الشيء نفسه مع التعبيرين tan(26 + 50 و tan(26) + 50 .

يمكن استخدام النسب المثلثية ومعكوساتها من أجل **حل مثلث قائم الزاوية**، ما يعني إيجاد قياسات جميع أضلاع وزوايا المثلث.

المثال 8 حل مثلث قائم الزاوية

حُـلّ كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a.



جد x و z باستخدام النسب مثلثية.

$\tan 35° = \frac{x}{10}$	بالتعويض.
$10 \tan 35° = x$	باستخدام الحاسبة.
$7.0 \approx x$	بالضرب.

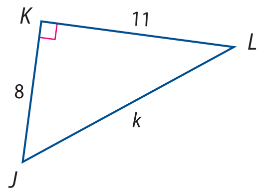
$\cos 35° = \frac{10}{z}$	بالتعويض.
$z \cos 35° = 10$	بالضرب.
$z = \frac{10}{\cos 35°}$	بالقسمة.
$z \approx 12.2$	باستخدام الحاسبة.

بما أن مقياس الزاويتين معطى، فإن Y يمكن إيجادها بطرح X من 90°.

$Y = 90° + 35°$	زوايا X و Y متتامتان.
$Y = 55°$	بالطرح.

لذا فإن $x \approx 7.0$ ،$Y = 55°$ و $z \approx 12.2$.

b.



لأن طول الضلعين معطى، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لتجد أنّ $k = \sqrt{185}$ أو حوالي 13.6. ويمكنك إيجاد J باستخدام أي من النسب المثلثية.

$\tan J = \frac{11}{8}$	بالتعويض.
$J = \tan^{-1}\frac{11}{8}$	تعريف معكوس tan
$J \approx 53.97°$	استخدام الحاسبة.

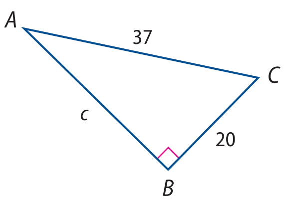
بما أن J معروفة الآن، يمكنك إيجاد L بطرح J من 90°.

$53.97° + L \approx 90°$	زاويتا J و L متتامتان.
$L \approx 36.03°$	بالطرح.

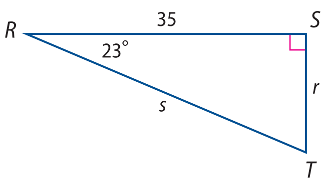
لذا فإن: $L \approx 36°$ ،$J \approx 54°$ و $k \approx 13.6$.

تمرين موجّه

8A.



8B.



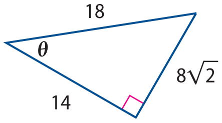
قراءة في الرياضيات

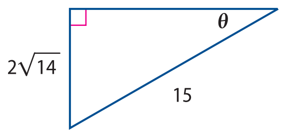
تسمية المثلثات

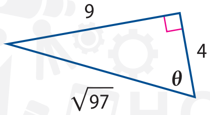
خلال هذه الوحدة، ستُستخدَم الحروف الكبيرة للتعبير عن كل من رأس مثلث أو قياس الزاوية عند هذا الرأس. ستُستخدَم الحروف نفسها في الحالة الصغيرة للتعبير عن كل من الضلع المقابل للزاوية ولطول هذا الضلع.

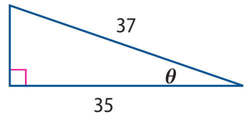
تمارين

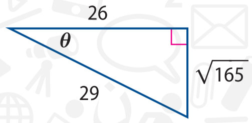
جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (المثال 1)

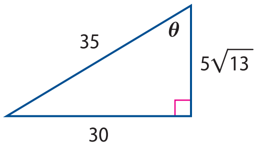
1.


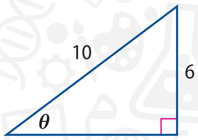
2.


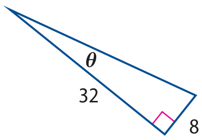
3.


4.


5.


6.


7.


8.


استخدم قيمة النسبة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد القيم الدقيقة لقيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ. (المثال 2)

9. $\sin\theta = \frac{4}{5}$

10. $\cos\theta = \frac{6}{7}$

11. $\tan\theta = 3$

12. $\sec\theta = 8$

13. $\cos\theta = \frac{5}{9}$

14. $\tan\theta = \frac{1}{4}$

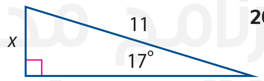
15. $\cot\theta = 5$

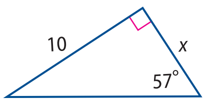
16. $\csc\theta = 6$

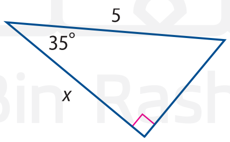
17. $\sec\theta = \frac{9}{2}$

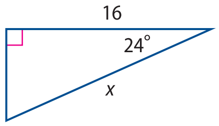
18. $\sin\theta = \frac{8}{13}$

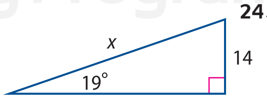
جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (المثال 3)

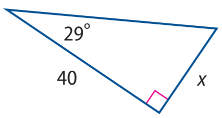
19.


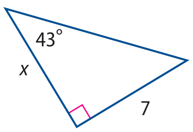
20.


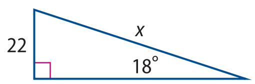
21.


22.


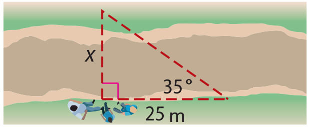
23.


24.


25.


26.


27 **تسلق الجبال** يجب أن يحدد فريق من المتسلقين عرض الوادي لتجهيز الأدوات اللازمة لعبوره. إذا سار المتسلقون 25 m خلال الوادي من نقطة عبورهم، ونظروا إلى نقطة العبور من الجهة البعيدة للوادي بزاوية قدرها °35. فكم يكون عرض الوادي؟ (المثال 4)



28. **التزلج** بنى أحمد منحدرًا للتزلج بارتفاع 1 m ومنحدرًا بزاوية °18. (المثال 4)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

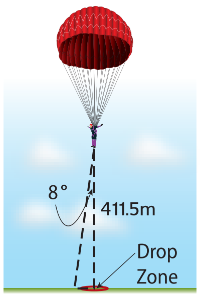
b. حدد طول المنحدر.

29. **المنعطف** يتحول المرور من نقطة A على شارع النصر يسارًا 0.8 mi على شارع الاتحاد، ثم يمينًا على شارع حصة، الذي يتقاطع مع شارع النصر بزاوية °32. (المثال 4)

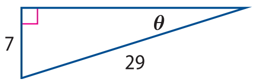
a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

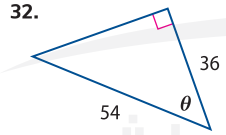
b. حدد المسافة التقريبية من النقطة A الى نقطة الإلتقاء .

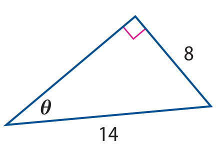
30. **الإسقاط** يواجه مِظلي ريحًا أقوى من المتوقع في أثناء سقوطه من ارتفاع 411.5 مترا، مما يتسبب في انحرافه بزاوية قدرها °8. كم يبعد المِظلي عن منطقة الإنزال عند هبوطه؟ (المثال 4)

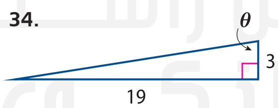


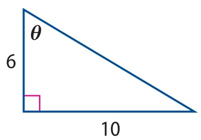
جد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا تتطلب الأمر. (المثال 5)

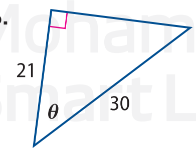
31.


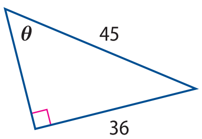
32.


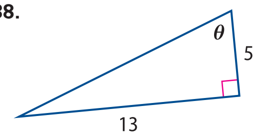
33.


34.


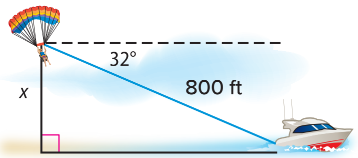
35.


36.


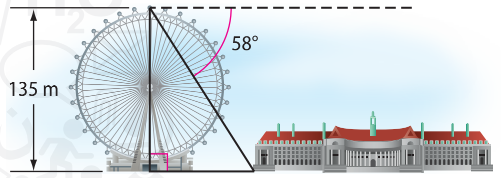
37.


38.


39. التزلّج الهوائي قررت إيمان أن تجرب التزلج الهوائي. فتم ربطها بمظلة يجرها يخت. يربط مظلتها بالقارب حبل طوله 800 m. يتخذ أسفلها زاوية انخفاض قدرها 32°. فكم كان ارتفاع إيمان فوق المياه؟ (مثال 6)



40. عجلة المشاهدة عين لندن عبارة عن عجلة مشاهدة طولها 135 m. إذا نظر أحد المسافرين من أعلى العجلة إلى حوض أسماك لندن بزاوية انخفاض قدرها 58°. فما المسافة بين حوض أسماك لندن وعين لندن؟ (المثال 6)



41. قطار الملاهي على قطار ملاهي، يصعد المسار الذي يبلغ 114.3 ft بزاوية ارتفاع قدرها 55° للقمة قبل أول وأعلى هبوط. (مثال 6)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

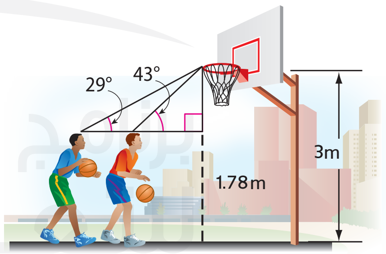
b. حدد طول قطار الملاهي.

42. مصعد التزلج تقوم إحدى الشركات بتركيب مصعد جديد للتزلج على ارتفاع 225 m أعلى جبل، ليصعد إليه بزاوية ارتفاع قدرها 48°. (المثال 6)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. حدد طول الجبل الذي يتطلبه المصعد ليمتد من القاعدة لقمة الجبل.

43. كرة السلة يبلغ طول كل من أحمد وعلي 1.78 m. ينظر أحمد إلى مرمى كرة سلة ترتفع 3 m بزاوية ارتفاع قدرها 29°. وينظر علي إلى المرمى بزاوية ارتفاع قدرها 43°. إذا كان علي يقف مباشرة أمام أحمد، فكم يبعد كلاهما عن الآخر؟ (مثال 7)



44. باريس ينظر سائح في درجة المشاهدة الأولى من برج إيفل إلى متحف أورسيه بزاوية انخفاض قدرها 1.4°. ينظر سائح في درجة المشاهدة الثالثة، فوق الأول مباشرة بمقدار 219 m، إلى متحف دورساي بزاوية انخفاض قدرها 6.8°. (المثال 7)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

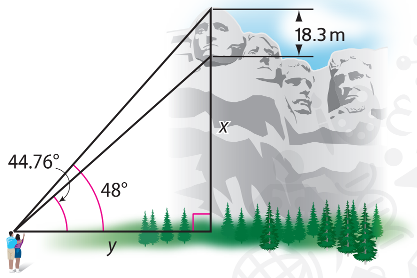
1b. حدد المسافة بين برج إيفل ومتحف أورسيه.

45. المنارة تم رصد سفينتين من أعلى منارة طولها 47.5 قدماً. تقع السفينة الأولى في زاوية انخفاض قدرها 27°، والسفينة الثانية خلفها مباشرة في زاوية انخفاض قدرها 7°. (المثال 7)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

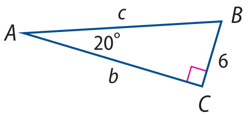
b. حدد المسافة بين السفينتين.

46. جبل راشمور طول وجوه الرؤساء على جبل راشمور يبلغ 18.3 متراً. يرى الزائر قمة رأس جورج واشنطن بزاوية ارتفاع قدرها 48° ويرى ذقنه بزاوية ارتفاع قدرها 44.76°. جد ارتفاع جبل راشمور. (المثال 7)

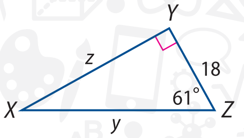


حُـلّ كل مثلث. حوّل أطوال الأضلاع لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة. (المثال 8)

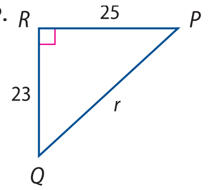
47.



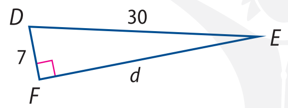
48.



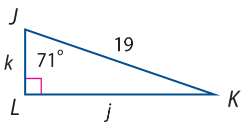
49.



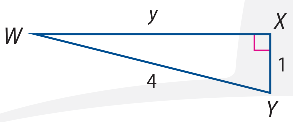
50.



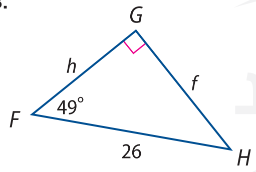
51.



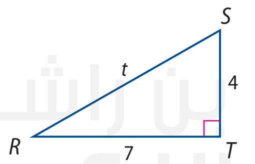
52.



53.



54.



55. بيسبول يقع ارتكاز أحمد في اللعبة 19.8 m خلف أرضية الملعب. خط رؤيته 3 m فوق الملعب.

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. ما زاوية الانخفاض بالنسبة لأرضية الملعب؟

56. التنزه تقف رنا على بعد 2 km من مركز قاعدة بايكس بيك وتنظر إلى قمة الجبل، الذي يبلغ ارتفاعه 1.4 km.

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. بأي زاوية ارتفاع تنظر رنا إلى قمة الجبل؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير، بدون استخدام الحاسبة.

57. $\sin 60°$ **58.** $\cot 30°$ **59.** $\sec 30°$

60. $\cos 45°$ **61.** $\tan 60°$ **62.** $\csc 45°$

بدون استخدام الحاسبة جد مقياس الزاوية الحادة θ في مثلث قائم الزاوية بحيث يناسب كل معادلة.

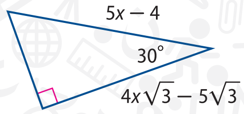
63. $\tan \theta = 1$ **64.** $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

65. $\cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **66.** $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

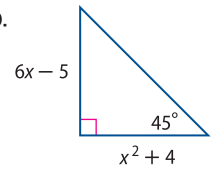
67. $\csc \theta = 2$ **68.** $\sec \theta = 2$

بدون استخدام الحاسبة، حدد قيمة x.

69.



70.

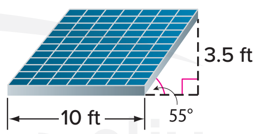


.71 الغوص رأى أحد الغواصين في عمق 6.1 متراً تحت سطح الماء حطام سفينة بزاوية انخفاض قدرها 70°. بعد الانخفاض إلى نقطة 13.7 متراً فوق قاع المحيط، يرى الغواص حطام السفينة بزاوية انخفاض قدرها 57°. ارسم مخططًا يبين الوضع، وحدد عمق حطام السفينة.

جد قيمة $\cos \theta$ إذا كانت θ هي قياس أصغر زاوية في كل نوع من أنواع المثلث قائم الزاوية.

72. 3-4-5 **73.** 5-12-13

.74 الطاقة الشمسية جد مساحة سطح اللوحة الشمسية المبينة أمامك كاملاً.



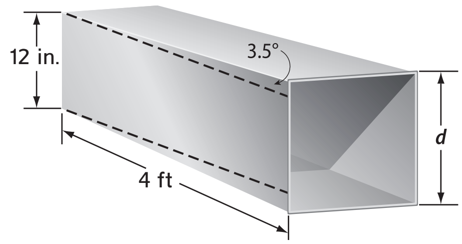
بدون استخدام الحاسبة، أدخل الرمز المناسب >، <، = لإكمال كل معادلة.

75. $\sin 45°$ ● $\cot 60°$ **76.** $\tan 60°$ ● $\cot 30°$

77. $\cos 30°$ ● $\csc 45°$ **78.** $\cos 30°$ ● $\sin 60°$

79. $\sec 45°$ ● $\csc 60°$ **80.** $\tan 45°$ ● $\sec 30°$

.81 الهندسة حدد عمق الأسطوانة في النهاية العريضة d لأنبوب الهواء المبين أمامك إذا كان يضيق تدريجيًّا بزاوية 3.5°.



.82 التمثيلات المتعددة في هذه المسألة ستستكشف النسب المثلثية للزوايا الحادة وعلاقتها بالنقاط على المستوى الإحداثي.

a. بيانيًّا افترض أن $P(x, y)$ هي نقطة في الربع الأول. ارسم خطًا بيانيًّا من خلال النقطة P ونقطة الأصل. كوّن مثلثًا قائم الزاوية من خلال توصيل النقاط P، $(x, 0)$، ونقطة الأصل. ضع اسمًا لأطوال أضلاع المثلث القائمة بالرموز x أو y. ضع اسمًا لطول الوتر مثل r والزاوية التي يكوّنها الخط مع المحور x θ.

b. بالتحليل عبّر عن قيمة r بالرموز x و y.

c. بالتحليل عبّر عن $\sin \theta$، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ بلغة x, y، و/أو r.

d. لفظيًّا تحت أي شرط يمكن التعبير عن إحداثيات النقطة P بالنسب المثلثية $(\cos \theta, \sin \theta)$؟

e. بالتحليل أي نسبة مثلثية تتضمن θ تناظر ميل الخط؟

f. بالتحليل جد تعبيرًا لميل الخط العمودي على الخط الواقع في الجزء a بدلالة θ.

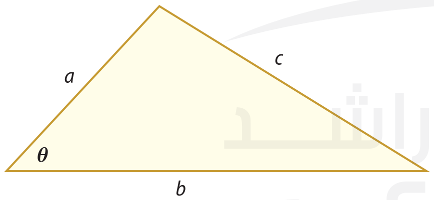
مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.83 الإثبات أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة بمثلث قائم فإن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

.84 تحليل الخطأ يعرف خالد ومحمد قيمة $\sin \theta = a$ وقد طلب منهما إيجاد قيمة $\csc \theta$. يقول خالد إن هذا غير ممكن. لكن محمد يخالفه الرأي. فهل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

.85 الكتابة في الرياضيات اشرح سبب كون الدوال المثلثية الست دوالّ متسامية.

.86 التحدي اكتب تعبيرًا بالرموز θ عن محيط المثلث مختلف الأضلاع المبين. اشرح.



.88 الإثبات أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم. فإن $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$.

الاستنتاج إذا كانت A و B زاويتان حادتان لمثلث قائم $m\angle A < m\angle B$ معلومتان، فحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا.

88. $\sin A < \sin B$

89. $\cos A < \cos B$

90. $\tan A < \tan B$

.91 الكتابة في الرياضيات لاحظ على الحاسبة البيانية أنه لا يوجد مفتاح لإيجاد القاطع Sec, Csc, Cot لقياس زاوية ما. وضّح لماذا تعتقد أن الأمر كذلك.

العام	CPI
1955	26.8
1965	31.5
1975	53.8
1985	107.6
1995	152.4
2005	195.3

92. الاقتصاد مؤشر أسعار المستهلك (CPI) يقيس التضخم. وهو مبني على متوسط أسعار السلع والخدمات في الولايات المتحدة. بالمتوسط السنوي للأعوام 1982-1984 المنظمة في مؤشّر من 100. يبين الجدول بعض قيم (CPI) السنوية المتوسطة من 1955 إلى 2005. جد النموذج الأسي المتعلق بهذه البيانات (السنة، CPI) عن طريق تحويل البيانات لصورة خطية. افرض أن $x = 0$ تمثل 1955. ثم استخدم النموذج لتتنبأ بقيمة CPI في 2025.

جد حل كل من المعادلات الآتية: قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

93. $e^{5x} = 24$

94. $2e^{x-7} - 6 = 0$

ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نسبة وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب وسلوك النهاية، وفترات تزايد أو تناقص النسبة.

95. $f(x) = -3^{x-2}$

96. $f(x) = 2^{3x-4} + 1$

97. $f(x) = -4^{-x+6}$

جد حل كل من المعادلات الآتية:

98. $\dfrac{x^2 - 16}{(x+4)(2x-1)} = \dfrac{4}{x+4} - \dfrac{1}{2x-1}$

99. $\dfrac{x^2 - 7}{(x+1)(x-5)} = \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{3}{x-5}$

100. $\dfrac{2x^2 + 3}{3x^2 + 5x + 2} = \dfrac{5}{3x+2} - \dfrac{1}{x+1}$

101. الصحف موضح أدناه تداول آلاف صفحات الجرائد الوطنية تداول.

العام	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
التداول (بالآلاف)	904.3	814.7	773.9	725.5	716.2	699.1	673.0

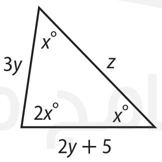
a. افترض أن x تساوي عدد السنوات بعد 2001. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. حدد نسبة قوة لتمثيل للبيانات.

c. استخدم النسبة لتتنبأ بتداول الصحف في **2015**.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

102. SAT/ACT في الشكل، ما قيمة z؟



A 15

B $15\sqrt{2}$

C $15\sqrt{3}$

D $30\sqrt{2}$

E $30\sqrt{3}$

103. مراجعة يستخدم محمد سلمًا للوصول إلى نافذة أعلى من الأرض بمقدار 3 متر. إذا كان السلم يبعد 0.9 m عن الجدار، فكم ينبغي أن يكون طول السلم؟

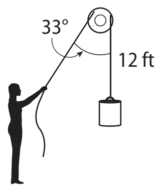
F 2.86 m

G 3.2 m

H 3.4 m

J 3.7 m

104. يمسك شخص بطرف حبل يمر حول بكرة وبالطرف الآخر يتعلق ثقل. افترض أن الثقل على ارتفاع يد الشخص. ما المسافة بين يد الشخص والثقل؟



A 7.8 ft

B 10.5 ft

C 12.9 ft

D 14.3 ft

105. مراجعة طائرة ورقية تحلق بزاوية 45°. طول خيط الطائرة الورقية يبلغ 120 ft. ما ارتفاع الطائرة الورقية من النقطة التي يُمسك الحبل عندها؟

F 60 ft

G $60\sqrt{2}$ ft

H $60\sqrt{3}$ ft

J 120 ft

الدرس 4-2 الدرجات والراديان

:: السابق

- لقد استخدمت قياسات الزوايا الحادة في المثلثات المعطاة درجاتها.

:: الحالي

1. تحويل قياسات الزوايا من الدرجات إلى الراديان والعكس بالعكس والتطبيق في إيجاد طول القوس.
2. استخدام قياسات الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.

:: لماذا؟

- في الدرس 4-1، قمت بالعمل فقط على الزوايا الحادة. لكن يمكن أن تكون للزوايا أي قياس من عدد حقيقي. على سبيل المثال، في التزلج، 540 هي حيلة جوية يقوم المتزلج فيها بالدوران مع لوح التزلج بزاوية $540°$، أو دورة كاملة ونصف، في الهواء.

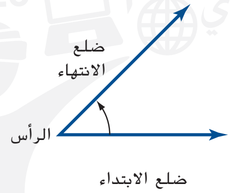
المفردات الجديدة

- رأس vertex
- ضلع الابتداء initial side
- ضلع الانتهاء terminal side
- الوضع القياسي standard position
- راديان radian
- زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء coterminal angles
- سرعة خطية linear speed
- سرعة الزاوية angular speed
- القطاع sector

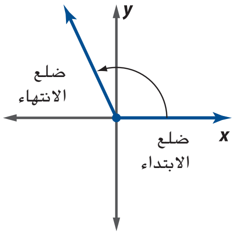
1 الزوايا وقياساتها

من الهندسة، ربما تتذكر أن الزاوية كانت تُعرّف بشعاعين غير متداخلين يشتركان في نقطة تعرف بـــ **الرأس**. يمكن أن نفكر في الزاوية أيضًا باعتبارها تكونت من حركة دوران الشعاع حول نقطة الرأس. من وجهة النظر الديناميكية هذه، يكوّن موقع بداية الشعاع **ضلع الابتداء** للزاوية، بينما يكوّن موقع الشعاع بعد الدوران **ضلع الانتهاء** للزاوية. في المستوى الإحداثي، الزاوية التي يقع رأسها عند نقطة الأصل وضلع الابتداء على المحور الأفقي x يقال إنها في **وضع قياسي**.

زاوية

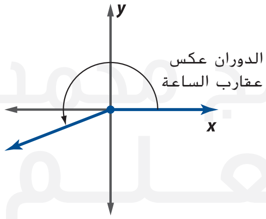


زاوية في الوضع القياسي

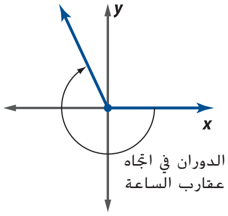


يبين قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري للتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية. تنشأ *الزاوية الموجبة* عن الدوران عكس عقارب الساعة وتنشأ الزاوية السالبة عن الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

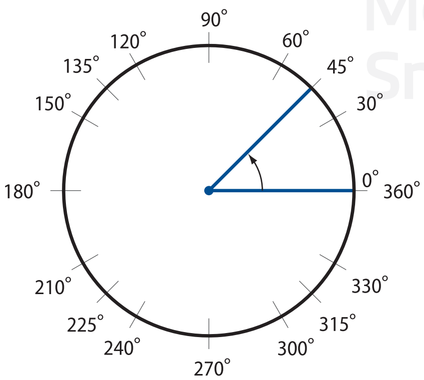
زاوية موجبة



زاوية سلبية



أكثر وحدات قياس الزاوية شيوعًا هي *الدرجة* (°)، التي تساوي $\frac{1}{360}$ دورة كاملة (عكس عقارب الساعة) حول الرأس. من الرسم التخطيطي الموضّح، يمكنك أن ترى أن $360°$ تمثل 1 دورة كاملة، $180°$ تمثل $\frac{1}{2}$ دورة، $90°$ تمثل $\frac{1}{4}$ دورة، وهكذا، كما هو موضّح على محيط الدائرة.



يمكن أيضًا التعبير عن قياس الدرجة باستخدام صيغة الدرجة العشرية أو الدرجة والدقيقة والثانية (DMS) حيث تنقسم فيها كل درجة إلى 60 دقيقة (′) وكل دقيقة تقسم إلى 60 ثانية (″).

> **نصيحة دراسية**
> **القاعدة 60** يرجع مفهوم قياس الدرجة إلى البابليين القدماء، الذين قاموا بحسابات فلكية مبكرة باستخدام نظامهم الرقمي، والذي بُني على نظام ستيني(60) بدلاً من النظام العشري (10) الذي نستخدمه اليوم.

مثال 1 التحويل بين صيغة DMS والدرجة العشرية

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

a. $56.735°$

أولًا، حوّل $0.735°$ إلى دقائق وثوان.

$$56.735° = 56° + 0.735°\left(\frac{60'}{1°}\right) \quad 1° = 60'$$
$$= 56° + 44.1' \quad \text{بسّط}$$

ثم، حوّل $0.1'$ إلى ثوانٍ

$$56.735° = 56° + 44' + 0.1'\left(\frac{60''}{1'}\right) \quad 1' = 60''$$
$$= 56° + 44' + 6'' \quad \text{بسّط}$$

إذًا، $56.735°$ يمكن كتابتها في صورة $56°\ 44'\ 6''$.

b. $32°\ 5'\ 28''$

كل دقيقة عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدرجة وكل ثانية عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدقيقة. إذًا كل ثانية تمثل $\frac{1}{3600}$ من الدرجة.

$$32°\ 5'\ 28'' = 32° + 5'\left(\frac{1°}{60'}\right) + 28''\left(\frac{1°}{3600''}\right) \quad 1' = \frac{1}{60}(1°) \text{ و } 1'' = \frac{1}{3600}(1°)$$
$$\approx 32° + 0.083 + 0.008 \quad \text{بسّط}$$
$$\approx 32.091° \quad \text{اجمع}$$

إذًا، $32°\ 5'\ 28''$ يمكن أن تكتب $32.091°$ تقريبًا.

> **تلميح تقني**
> **صيغة DMS** يمكنك استخدام بعض الحاسبات لتحويل قيم الدرجة العشرية إلى درجات ودقائق وثوانٍ باستخدام دالة DMS أسفل قائمة Angle.

تمرين موجّه

1A. $213.875°$

1B. $89°\ 56'\ 7''$

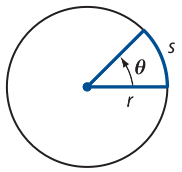
قياس الزوايا بالدرجات يكون ملائمًا عندما تطبق حساب المثلثات لتحل العديد من المسائل من الحياة اليومية، مثل تلك الخاصة بالمسح والملاحة. ولغيرها من التطبيقات على الدوال المثلثية، يتسبب استخدام زاوية مقاسة بالدرجات في مشكلة كبيرة. لا توجد للدرجة علاقة بأي قياس خطي؛ أي أن درجات بوصية أو $\frac{\text{بوصة}}{\text{درجة}}$ ليس لها معنى. قياس الزوايا بواسطة **الراديان** يوفر حلاً لهذه المشكلة.

المفهوم الأساسي قياس الراديان

الشرح القياس θ بقياس الراديان للزاوية المركزية للدائرة يساوي نسبة طول القوس المحصور s لنصف القطر r للدائرة.

الرموز $\theta = \frac{s}{r}$، حيث إن θ قيست بالراديان.

مثال يساوي قياس الزاوية المركزية 1 راديان إذا تقاطعت مع قوس بطول نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1\ rad$ عندما تكون $s = r$.

لاحظ أنه طالما كان طول القوس s ونصف القطر r معروف قياسهما باستخدام الوحدات الخطية نفسها، فالنسبة $\frac{s}{r}$ كمية لابعدية. لهذا السبب فإن كلمة *راديان* أو اختصارها *rad* تحذف غالبًا عند كتابة قياس الراديان لزاوية.

تمثل الزاوية المركزية دورة كاملة واحدة عكس عقارب الساعة حول الرأس بما يتماثل مع طول القوس المساوي لمحيط الدائرة، $2\pi r$. لهذا، يمكنك الحصول على قياسات راديان الآتية:

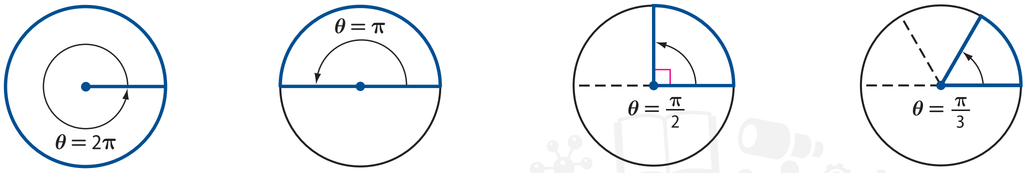
> **نصيحة دراسية**
> **العلاقة بين الدرجة و الراديان** من المسألة الكلامية المعروضة، يمكنك أن تتبين أن $1° \approx 0.017$ rad و 1 rad $\approx 57.296°$.

$\frac{1}{6}$ دوران $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

$\frac{1}{4}$ دوران $= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ rad

$\frac{1}{2}$ دوران $= \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$ rad

1 دوران $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad



بما أن 2π راديان و$360°$ كلاهما يماثل دورة واحدة كاملة، يمكنك كتابة $360° = 2\pi$ راديان أو $180° = \pi$ راديان. تقود المعادلة الأخيرة إلى التعابير المكافئة الآتية:

1 راديان $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ و $1° = \frac{\pi}{180}$ راديان

باستخدام هذه العبارات، يمكننا الحصول على قواعد التحويل التالية:

> **قراءة في الرياضيات**
> **قياس الزاوية** إذا لم يتم تحديد وحدة قياس الزاوية، يتم استخدام قياس الراديان. إذا استُخدِم قياس الدرجة، فلا بد من استخدام رمز الدرجة (°).

المفهوم الأساسي قواعد التحويل بين قياس الدرجة والراديان

1. للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

2. للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

مثال 2 التحويل بين قياسي الدرجة والراديان

حول كل قياس من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π وبالعكس.

a. $120°$

$120° = 120°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

$= \frac{2\pi}{3}$ راديان $= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

b. $-45°$

$-45° = -45°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

$= -\frac{\pi}{4}$ راديان $= -\frac{\pi}{4}$ بسّط

c. $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

$= \frac{5\pi}{6}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = 150°$ بسّط

d. $-\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

$= -\frac{3\pi}{2}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = -270°$ بسّط

تمرين موجّه

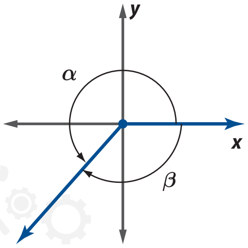
2A. $210°$ **2B.** $-60°$ **2C.** $\frac{4\pi}{3}$ **2D.** $-\frac{\pi}{6}$

قراءة في الرياضيات

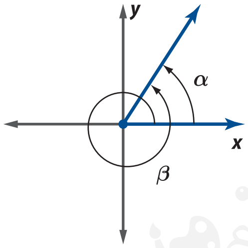
تسمية الزوايا في علم حساب المثلثات، عادة ما تسمى الزوايا بحروف يونانية، مثل α (ألفا)، β (بيتا)، و θ (ثيتا).

بتعريف الزوايا من حيث الدوران حول الرأس، يصبح بإمكان زاويتين أن يكون لهما نفس ضلعي الابتداء والانتهاء ولكن تختلف قياساتهم. تلك الزوايا تدعى **الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء**. في الأشكال بالأسفل، الزاويتان α و β مشتركتان في ضلع الانتهاء

زوايا موجبة وسلبية مشتركة في ضلع الانتهاء



زوايا موجبة مشتركة في ضلع الانتهاء



الزاويتان الموجبتان المشتركتان في ضلع الانتهاء الموضحتان تختلفان في استدارة كاملة واحدة. أي زاوية تحتوي على عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء التي يمكن إيجادها بجمع أو طرح المضاعفات الصحيحة العدد لـ $360°$ أو 2π راديان.

المفهوم الأساسي الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

الدرجات	الراديان
إذا كان α هو قياس الزاوية بالدرجات، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 360n°$، حيث n هو عدد صحيح. تشترك في ضلع الانتهاء مع α.	إذا كانت α هي قياس الزاوية بالراديان، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 2n\pi$، حيث n هو عدد صحيح. تشترك في ضلع الانتهاء مع α.

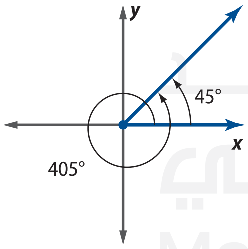
مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع رسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

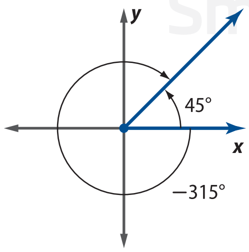
a. $45°$

كل الزوايا ذات القياس $45° + 360n°$ مشتركتان في ضلع الانتهاء مع زاوية ذات قياس $45°$. افترض أن $n = 1$ ،-1.

$$45° + 360(1)° = 45° + 360° = 405°$$



$$45° + 360(-1)° = 45° - 360° = -315°$$

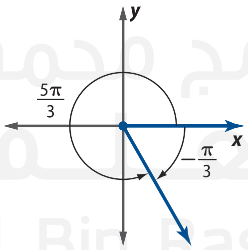


b. $-\frac{\pi}{3}$

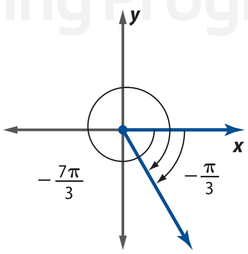
كل الزوايا ذات القياس $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

افترض أن $n = 1$ ،-1.

$$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$



$$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$$



تمرين موجّه

3A. $-30°$

3B. $\frac{3\pi}{4}$

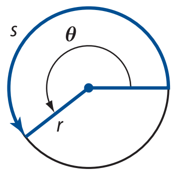
2 تطبيقات باستخدام قياس الزاوية حل $\theta = \frac{s}{r}$ لطول القوس s يعطينا صيغة معادلة لإيجاد طول قوس في دائرة.

المفهوم الأساسي طول القوس

إذا كانت θ هي الزاوية المركزية في دائرة نصف قطرها r إذًا فطول القوس المحصور s يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$s = r\theta$$

حيث إن θ قياسها بالراديان.

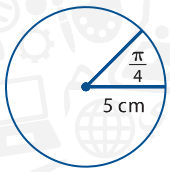


عند قياس θ بالدرجات، يمكنك أيضًا استخدام المعادلة $s = \frac{\pi r\theta}{180}$ والتي تحتوي بالفعل على تحويل الدرجة–الراديان.

مثال 4 إيجاد طول القوس

جد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{4}, r = 5$ cm



$s = r\theta$ طول القوس

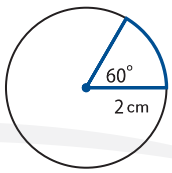
$= 5\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = 5$

$= \frac{5\pi}{4}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{5\pi}{4}$ أو حوالي 3.9 سنتيمتر.

b. $60°, r = 2$ cm

الطريقة 1 حوّل °60 إلى قياس الراديان. ثم استخدم $s = r\theta$ لإيجاد طول القوس.



$60° = 60°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

$= \frac{\pi}{3}$ بسّط

باستخدام التعويض $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$s = r\theta$ طول القوس

$= 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

الطريقة 2 استخدم $s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ لإيجاد طول القوس.

$s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ طول القوس

$= \frac{\pi(2)(60°)}{180°}$ $\theta = 60°$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{2\pi}{3}$ أو حوالي 2.1 cm.

تمرين موجّه

4A. $\frac{2\pi}{3}, r = 2$ m

4B. $135°, r = 0.5$ m

نصيحة دراسية

استخدام الراديان

لاحظ في المثال 4a أنه عندما تكون $r = 5$ سنتيمترات وراديان $\theta = \frac{\pi}{4}$، $s = \frac{5\pi}{4}$ سنتيمتر –وليس سنتيمتر– راديان. هذا لأن الراديان نسبة لابُعدِيَّة.

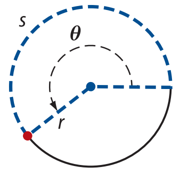
يمكن استخدام قاعدة طول القوس لتحليل حركة دائرية. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى **السرعة الخطية**. معدل دوران الجسم حول نقطة ثابتة يسمى **السرعة الزاويّة**. السرعة الخطية تقاس بوحدات كالأميال لكل ساعة، بينما تقاس السرعة الزاوية بوحدات كالدورات لكل دقيقة.

المفهوم الأساسي السرعة الخطية والسرعة الزاويّة

لنفترض أن جسمًا تحرك بسرعة ثابتة على ممر دائري نصف قطره r.

إذا كانت s هي طول القوس الذي يقطعه الجسم في حركته خلال الزمن t.
إذًا فسرعة الجسم *الخطية* v يتم إيجادها بالمعادلة $v = \frac{s}{t}$.

إذا كانت θ هي سرعة الدوران (بالراديان) التي يتحرك الجسم فيها خلال الزمن t.
فإن *السرعة الزاوية* ω للجسم يتم إيجادها بالمعادلة $\omega = \frac{\theta}{t}$.

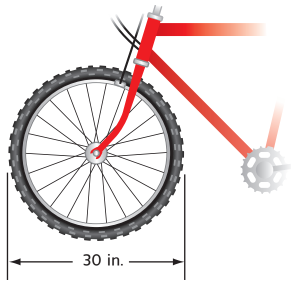


قراءة في الرياضيات

أوميجا الحرف اليوناني الصغير أوميجا ω يستخدم عادة للدلالة على السرعة الزاوية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد السرعة الزاوية والخطية

ركوب الدراجة يقود الساعي دراجة كما هو مبين.



a. خلال عملية توصيل واحدة، تدور الإطارات بمعدل 140 دورة في الدقيقة. جد السرعة الزاوية للإطارات في الدقيقة بقياس راديان.

بما أن قياس كل دورة 2π راديان، فإن 140 دورة تماثل زاوية الدوران θ هي $140 \times 2\pi$ أو 280π راديان.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \text{سرعة زاوية}$$

$$= \frac{280\pi\ \text{راديان}}{1\ \text{دقيقة}} \qquad \theta = 280\pi\ \text{راديان}\ \text{و}\ t = 1\ \text{دقيقة}$$

ومن ثم، تكون السرعة الزاوية للإطار 280π أو حوالي 879.6 راديان لكل دقيقة.

b. في جزء من الطريق خلال مهمة التوصيل التالية، يدور الإطار بمعدل ثابت بمقدار 2.5 دورة لكل ثانية. جد السرعة الخطية للإطار بمعدل ميل لكل ساعة.

يماثل الدوران 2.5 دورة زاوية دوران θ لـــ $2.5 \times 2\pi$ أو 5π.

$$v = \frac{s}{t} \qquad \text{سرعة خطية}$$

$$= \frac{r\theta}{t} \qquad s = r\theta$$

$$= \frac{15(5\pi)\ \text{بوصة}}{1\ \text{ثانية}} = \frac{75\pi\ \text{بوصة}}{1\ \text{ثانية}} \qquad r = 38.1\ \text{بوصة،}\ \theta = 5\pi\ \text{راديان، و}\ t = 1\ \text{ثانية}$$

استخدم التحليل البعُدي لتحويل هذه السرعة من بوصة لكل ثانية إلى ميل لكل ساعة.

$$\frac{75\pi\ \cancel{\text{بوصة}}}{1\ \cancel{\text{ثانية}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{ثانية}}}{1\ \cancel{\text{دقيقة}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{دقيقة}}}{1\ \text{ساعة}} \times \frac{1\ \cancel{\text{قدم}}}{12\ \cancel{\text{بوصة}}} \times \frac{1\ \text{ميل}}{5280\ \cancel{\text{قدم}}} \approx \frac{13.4\ \text{ميل}}{\text{ساعة}}$$

ومن ثم، فالسرعة الخطية للإطار حوالي 13.4 mi/h.

الربط بالحياة اليومية

في بعض مدن الولايات المتحدة، يمكن للساعي أن يقود بمعدل 48 إلى 56 كيلومتر في اليوم، بينما يقوم بتوصيل 30 إلى 45 طردًا.

المصدر: جمعية سعاة الدراجات بنيويورك

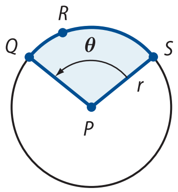
تمرين موجّه

الوسائط لاحظ جهاز DVD المبين.

5A. جد السرعة الزاوية لجهاز DVD بالراديان لكل ثانية إذا كان القرص يدور بمعدل 3.5 دورة في الثانية.

5B. إذا كان مشغل DVD قد سخن بشدة وبدأ دوران القرص يبطئ بمعدل 3 دورة في الثانية، فجد السرعة الخطية للقرص بالمتر لكل دقيقة.

تذكر من مادة الهندسة أن **قطاع** الدائرة هو منطقة محاطة بالزاوية المركزية وقوسها المحصور. على سبيل المثال، المنطقة المظللة في الشكل هي قطاع الدائرة P. ونسبة مساحة القطاع إلى مساحة الدائرة بالكامل يساوي نسبة طول القوس المقابل إلى محيط الدائرة. افترض أن A تمثل مساحة القطاع.



$\dfrac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \dfrac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ $\qquad \dfrac{A}{\pi r^2} = \dfrac{\text{طول } \widehat{QRS}}{2\pi r}$

طول $\widehat{QRS}$ هو $r\theta$. $\qquad \dfrac{A}{\pi r^2} = \dfrac{r\theta}{2\pi r}$

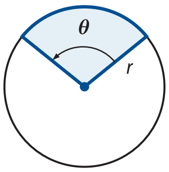
حل A. $\qquad A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

المفهوم الأساسي مساحة القطاع

المساحة A من قطاع دائري لها نصف قطر r وزاوية مركزية θ

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

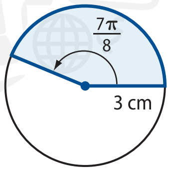
حيث إن θ قياسها بالراديان.



المثال 6 إيجاد مساحة القطاع الدائري

a. جِد مساحة قطاع الدائرة.

قياس الزاوية المركزية للقطاع θ هو $\frac{7\pi}{8}$، ونصف قطره 3 سم.

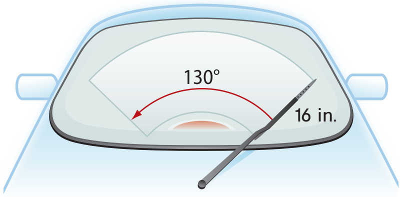


مساحة القطاع $\qquad A = \frac{1}{2}r^2\theta$

$\theta = \frac{7\pi}{8}$ و $r = 3$ $\qquad = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{63\pi}{16}$

ومن ثم، مساحة القطاع $\frac{63\pi}{16}$ أو حوالي 12.4 سنتيمتر مربع.

b. الماسحات جد المساحة التقريبية التي مسحتها شفرة المسّاحة المبينة، إذا كان طول مسّاحة الزجاج الأمامي كله 26 بوصة.



المساحة الممسوحة بشفرة المسّاحة هي الفرق بين مساحات القطاعات ونصف قطر 26 بوصة و 16 − 26 أو 10 بوصة.

حوّل قياس الزاوية المركزية إلى الراديان.

$$130^\circ = 130^\circ\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180^\circ}\right) = \frac{13\pi}{18}$$

ثم استخدم نصف قطر كل قطاع لإيجاد المساحة الممسوحة. افترض أن A_1 = مساحة القطاع بنصف قطر 26 in. وافترض أن A_2 = مساحة القطاع بنصف قطر 10 in.

المساحة الممسوحة $\qquad A = A_1 - A_2$

مساحة القطاع $\qquad = \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$

بسّط. $\qquad = \frac{2197\pi}{9} - \frac{325\pi}{9}$

بسّط. $\qquad = 208\pi = 653.5$ تقريبًا

ومن ثم، فالمنطقة الممسوحة حوالي 653.5 in^2.

الربط بالحياة اليومية

تبلغ زاوية المسح القياسية لمسّاحة الزجاج الأمامي في السيارة حوالي 67°. وبشكل عام، فإن طول شفرات مسّاحات الزجاج الأمامي يتراوح بين 30 cm إلى 76 cm.

المصدر: مجلة Car and Driver

تمرين موجّه

جد مساحة القطاع الدائري بواسطة الزاوية المركزية المعطاة θ ونصف القطر r.

6A. $\theta = \frac{3\pi}{4}, r = 1.5$ ft

6B. $\theta = 50^\circ, r = 6$ m

تمارين

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة. (المثال 1)

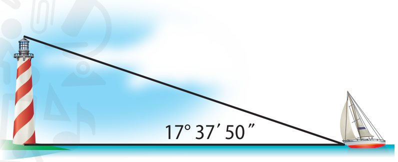
1. $11.773°$ **2.** $58.244°$

3. $141.549°$ **4.** $273.396°$

5. $87°\ 53'\ 10''$ **6.** $126°\ 6'\ 34''$

7. $45°\ 21'\ 25''$ **8.** $301°\ 42'\ 8''$

.9 **الملاحة** يستخدم عاشق للإبحار آلة السدس، وهي آلة يمكنها قياس الزاوية بين جسمين بدقة تصل إلى أقرب 10 ثوان. لقياس الزاوية بين مركب الصيد خاصته والفنار. فإذا كانت قراءته ″50 ′37 °17، فما القياس بصيغة الدرجة العشرية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة. (المثال 1)



اكتب كل قياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π وكل قياس راديان بالدرجات. (المثال 2)

10. $30°$ **11.** $225°$

12. $-165°$ **13.** $-45°$

14. $\frac{2\pi}{3}$ **15.** $\frac{5\pi}{2}$

16. $-\frac{\pi}{4}$ **17.** $-\frac{7\pi}{6}$

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة. (المثال 3)

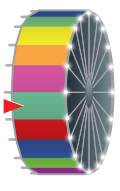
18. $120°$ **19.** $-75°$

20. $225°$ **21.** $-150°$

22. $\frac{\pi}{3}$ **23.** $-\frac{3\pi}{4}$

24. $-\frac{\pi}{12}$ **25.** $\frac{3\pi}{2}$

.26 **برنامج اللعب** تدير خديجة عجلة في برنامج اللعب. توجد 20 قيمة في فراغات متساوية الحجم على محيط العجلة. القيمة التي تحتاج إليها خديجة لتفوز تقع على بعد فراغين أعلى الفراغ الذي تبدأ عنده دورتها، ويجب أن تقوم العجلة بدورة كاملة واحدة على الأقل ليتم احتسابها. صِف الدورة التي ستكفل لخديجة نتيجة الفوز بالدرجات. (المثال 3)



جد طول القوس المحصور بقياس الزاوية المركزية المعطاة في دائرة وبنصف القطر المعطى. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 4)

27. $\frac{\pi}{6}, r = 2.5$ m **28.** $\frac{2\pi}{3}, r = 3$ cm

29. $\frac{5\pi}{12}, r = 4$m **30.** $105°, r = 18.2$ cm

31. $45°, r = 5$ Km **32.** $150°, r = 79$ mm

.33 **حديقة الملاهي** تدور لعبة دوامة الخيل في حديقة ملاهي °3024 في الجولة. (المثال 4)

.a كم سيدور راكب يجلس على بعد 4 m من مركز اللعبة في خلال الجولة؟

.b كم سيدور راكب آخر جالس على بعد 5.5 m من مركز العجلة أكثر من الراكب الأول في الجزء a خلال الجولة؟

جد عدد اللفات في كل دورة لكل دقيقة بمعلومية سرعة الزاوية وجد نصف القطر بمعلومية السرعة الخطية ومعدل الدوران. (المثال 5)

34. $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s **35.** $\omega = 135\pi$ rad/h

36. $\omega = 104\pi$ rad/min **37.** $v = 82.3$ m/s, 131 rev/min

38. $v = 144.2$m/min, 10.9 rev/min

39. $v = 553$cm /h, 0.09 rev/min

.40 **التصنيع** تصنع شركة العديد من المناشير الدائرية. حيث أقطار النصول وسرعات المحرك موضحة بالأسفل. (المثال 5)

قطر النصل cm.)	سرعة الموتور (rps)
3	2800
5	5500
$5\frac{1}{2}$	4500
$6\frac{1}{8}$	5500
$7\frac{1}{4}$	5000

.a جد سرعة الزاوية والسرعة الخطية للنصول في كل منشار. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

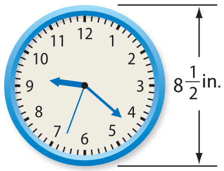
.b ما معدل السرعة الخطية للمنشار ذي النصل البالغ $6\frac{1}{8}$ cm عن المنشار ذي النصل البالغ 3 cm؟

.41 **سيارات** على امتداد الطريق السريع، تدور إطارات إحدى المركبات بمدى 646 و840 دورة في الدقيقة. قطر كل إطار 66 cm. (المثال 5)

.a جد مدى قيم السرعات الزاوية للإطارات بالراديان لكل دقيقة.

.b جد مدى قيم السرعات الخطية للإطارات بالكيلومتر لكل ساعة.

42. **الوقت** محيط قطر ساعة حائط يساوي $8\frac{1}{2}$ in . طول عقرب الساعات يساوي 2.4 in، بينما طول عقرب الدقائق يساوي 3.2 in. وطول عقرب الثواني يساوي 3.4 in. (المثال 5)

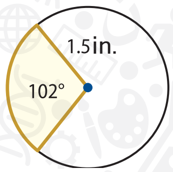


a. جد سرعة الزاوية بالراديان في الساعة والسرعة الخطية بالسنتيمتر في الساعة لكل عقرب.

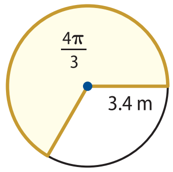
b. إذا كانت السرعة الخطية لعقرب الثواني تساوي 20 in في الدقيقة، فهل تعمل الساعة بسرعة أم ببطء؟ كم من الزمن سيزيد أو ينقص في اليوم؟

هندسة جد مساحة كل قطاع. (مثال 6)

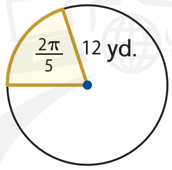
43.



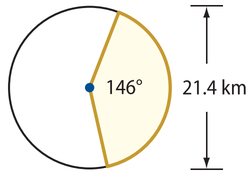
44.



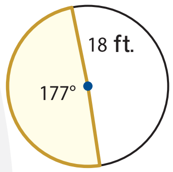
45.



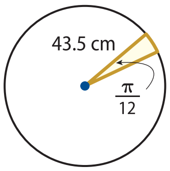
46.



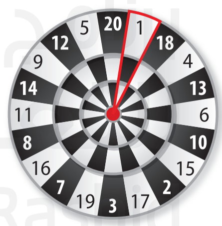
47.



48.



49. **ألعاب** لوحة الأسهم المبينة مقسمة إلى عشرين قطاعًا متساويًا. إذا كان قطر اللوحة 18 in، فما المساحة التي يغطيها كل قطاع على اللوحة؟ (المثال 6)



50. **رعاية الحديقة** تروي مرشة مساحة تشكّل ثلث دائرة. إذا كان التيار المتدفق من المرش يصل إلى 6 ft، فما مساحة العشب التي يرويها المرش؟ (المثال 6)

مساحة قطاع دائري وقياس زاوية مركزها معطيان. جد نصف قطر الدائرة.

51. $A = 29 \text{ ft}^2, \theta = 68°$

52. $A = 808 \text{ cm}^2, \theta = 210°$

53. $A = 377 \text{ in}^2, \theta = \frac{5\pi}{3}$

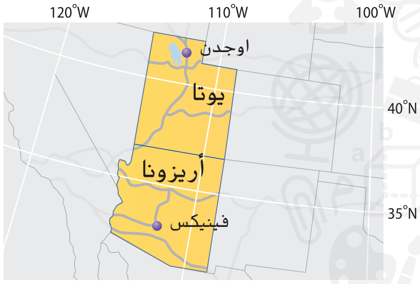
54. $A = 75 \text{ m}^2, \theta = \frac{3\pi}{4}$

55. صِف قياس الراديان بين 0 و 2π لزاوية θ تقع في وضع قياسي ويقع ضلعها الطرفي في:

a. الربع I
b. الربع II
c. الربع III
d. الربع IV

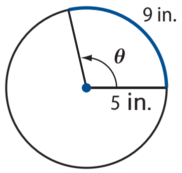
56. عندما يكون ضلع الانتهاء لزاوية تتخذ الوضع القياسي واقعًا على أحد المحاور الإحداثية، فإن الزاوية تسمى *زاوية ربعية*. قدّم قياسات الراديان لأربع زوايا ربعية.

57. **الجغرافيا**
تقع فينيكس وأريزونا واوجدن ويوتا جغرافيًّا على خط الطول نفسه، وهو ما يعني أن اوجدن تقع مباشرة شمال فينيكس. خط طول فينيكس هو 33° 26′ N، وخط طول اوجدن هو 41° 12′ N. إذا كان نصف قطر الأرض تقريبًا 6378 mi، فكم تبعد المدينتين عن بعضهما؟

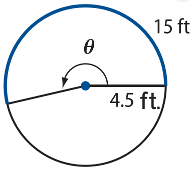


جد قياس زاوية θ بالراديان والدرجات.

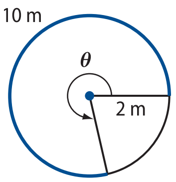
58.



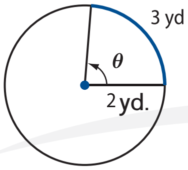
59.



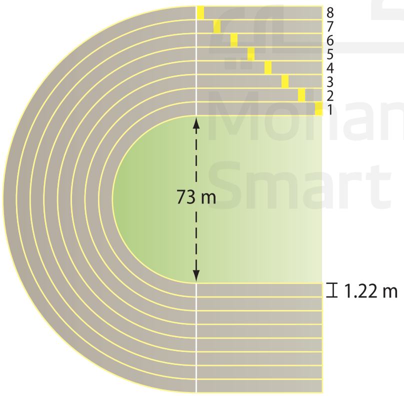
60.



61.



62. **طريق منحنى** طريق قياسي له 8 حارات هو طريق دائري كما هو موضح.



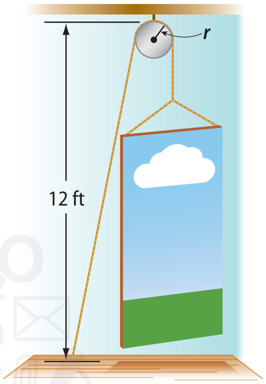
a. ما طول الحافة الخارجية للحارة 4 في المنحنى؟

b. كم يكون فرق الطول بين الحافة الداخلية للحارة 7 والحافة الداخلية للحارة 3 في المنحنى؟

.63 دراما بكرة قطرها r تستخدم في رفع جزء من ديكور المسرح في أثناء الاستراحة. ارتفاع البكرة 12 ft.

a. إذا كان نصف قطر البكرة 6 in وتدور °180. فكم سيكون ارتفاع الجسم؟

b. إذا كان نصف قطر البكرة 4 in وتدور °900. فكم سيكون ارتفاع الجسم؟



.64 الهندسة تُستخدم بكرة كالتي في التمرين 63 في رفع صندوق في مستودع. حدد أي السيناريوهات التالية يمكن أن يستخدم في رفع الصندوق لمسافة 4.6 m أسرع. اشرح كيف توصلت لاستنتاجك.

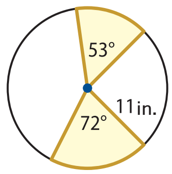
I. نصف قطر البكرة 12.7 m يدور 65 دورة في الدقيقة.

II. نصف قطر البكرة 11.4 cm يدور 70 دورة في الدقيقة.

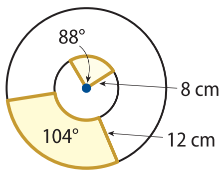
III. نصف قطر البكرة 15.3 cm يدور 60 دورة في الدقيقة.

الهندسة الرياضية جد مساحة كل منطقة مظللة.

65.



66.



.67 سيارات عداد السرعة المبين يقيس سرعة سيارة بالميل في الساعة.

a. إذا كانت الزاوية بين 25 mi/h و 60 mi/h هي°81.1. فنحو كم ميلًا في الساعة تمثله كل درجة؟

b. إذا كانت زاوية عداد السرعة تتغير بمقدار °95. فكم زادت سرعة السيارة؟

جد المتممة والمكملة لكل زاوية إذا أمكن. إذا لم يمكن، فاشرح استنتاجك.

68. $\frac{2\pi}{5}$ **69.** $\frac{5\pi}{6}$ **70.** $\frac{3\pi}{8}$ **71.** $-\frac{\pi}{3}$

.72 التزلج يقوم فصل يدرس الفيزياء بتجربة لاختبار ثلاثة أحجام مختلفة من العجلات على لوحة تزلج بسرعة زاوية ثابتة.

a. اكتب معادلة السرعة الخطية للوح التزلج بما يتضمن نصف القطر والسرعة الزاوية. اشرح استنتاجك.

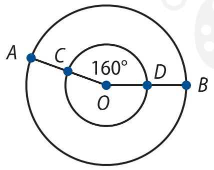
b. باستخدام المعادلة التي كتبتها في الجزء a، توقع السرعة الخطية بالمتر في الثانية للوح التزلج بسرعة زاوية قدرها 3 دورات في الثانية لكل قطر من أقطار العجلات 52, 56, 60 mm.

c. بناءً على نتائجك في الجزء b. كيف تظن أن حجم العجلة يؤثر على السرعة الخطية؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.73 تحليل الأخطاء قيل لرنا وخديجة أن محيط القطاع في دائرة يساوي 10 أضعاف طول نصف قطرها. تظن رنا أن قياس قطاع الزاوية المركزية بالراديان هو 8 راديان. تظن خديجة أنه لا توجد معلومات كافية لحل المسألة. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

.74 تحدٍ الدائرتان المبينتان متحدتي المركز. إذا كان طول القوس من A إلى B قياسه 8π in و $DB = 2$ in. فجد طول القوس من C إلى D بدلالة π.



الاستنتاج صف كيف يمكن للسرعة الخطية أن تتغير بالنسبة لكل معامل مما يلي. اشرح.

.75 نقص نصف القطر

.76 نقص وحدة الزمن

.77 زيادة السرعة الزاوية

.78 البرهان إذا كانت $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$. فأثبت أن $\theta_1 = \theta_2$.

.79 التبرير أي أثر تسببه مضاعفة نصف قطر الدائرة على القياسات الآتية؟ اشرح استنتاجك.

a. محيط قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

b. مساحة قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

.80 الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين قياس الدرجة والراديان. ثم ابتكر رسمًا تخطيطيًا. وضّح الرسم التخطيطي باستخدام قياس الدرجات داخل الدائرة وقياس الراديان خارجها.

مراجعة شاملة

استخدم قيمة النسبة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد قيم النسب الخمس المثلثية المتبقية لـ θ.

81. $\sin\theta = \frac{8}{15}$

82. $\sec\theta = \frac{4\sqrt{7}}{10}$

83. $\cot\theta = \frac{17}{19}$

84. **المعاملات البنكية** ربح الحساب الذي فتحته جدة وفاء في 1955 الفائدة المركبة بشكل مستمر. يوضح الجدول أرصدة الحساب من 1955 إلى 1959.

	التاريخ	الرصيد
1	1 يناير 1955	AED 2137.52
2	1 يناير 1956	AED 2251.61
3	1 يناير 1957	AED 2371.79
4	1 يناير 1985	AED 2498.39
5	1 يناير 1959	AED 2631.74

a. استخدم خط الانحدار لإيجاد الدالة التي تمثل المبلغ الموجود في الحساب. استخدم عدد الأعوام بعد 1 يناير 1955 كمتغير مستقل.

b. اكتب المعادلة من الجزء a بدلالة قاعدة e.

c. ما معدل الفائدة المتوقع في الحساب لو لم توجد أي ودائع أو سحوبات خلال الفترة المذكورة في السؤال؟

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 2 و ln 5.

85. $\ln\frac{25}{16}$

86. $\ln 250$

87. $\ln\frac{10}{25}$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

88. $f(x) = x^4 - x^3 - 12x - 144$

89. $g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

90. $g(x) = 6x^4 + 35x^3 - x^2 - 7x - 1$

صِف السلوك الطرفي لكل دالة.

91. $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x - 1$

92. $g(x) = -x^6 + x^4 - 5x^2 + 4$

93. $h(x) = -\frac{1}{x^3} + 2$

اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة ورمز الفترة، إن أمكن.

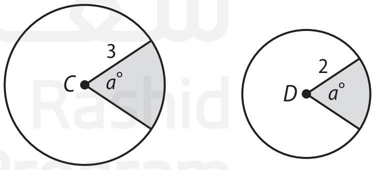
94. $n > -7$

95. $-4 \leq x < 10$

96. $y < 1$ or $y \geq 11$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

97. SAT/ACT في الشكل، C و D مركزي الدائرتين لهما نصف القطر 3 و 2 على التوالي. إذا كانت للمنطقة المظللة الأكبر مساحة 9، فما مساحة المنطقة المظللة الأصغر؟



ملاحظة: الشكل ليس مرسومًا لأخذ قياساته.

A 3
B 4
C 5
D 7
E 8

98. مراجعة إذا كانت $\cot\theta = 1$، فجد $\tan\theta =$

F -1
G 0
H 1
J 3

99. مراجعة إذا كانت $\sec\theta = \frac{25}{7}$ و θ حادة. فإن $\sin\theta =$

A $\frac{7}{25}$

B $\frac{24}{25}$

C $-\frac{24}{25}$

D $\frac{25}{7}$

100. أي من قياسات الراديان التالية يساوي 56°؟

F $\frac{\pi}{15}$

G $\frac{7\pi}{45}$

H $\frac{14\pi}{45}$

J $\frac{\pi}{3}$

4-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة

السابق
- تجد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة باستخدام النسب في المثلثات القائمة الزاوية.

الحالي
1. إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية.
2. إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

لماذا؟
- ضغط الدم 120 على 80. يتم قياسه بملّيمترات من الزئبق. يعني أن ضغط دم الشخص يتذبذب أو يدور بين 20 ملّيمتر فوق وتحت ضغط 100 ملّيمتر من الزئبق؛ لوقت محدد t بالثواني. تستغرق الدائرة الكاملة لهذا التذبذب حوالي ثانية واحدة.

إذا كان ضغط الدم عندما كان الزمن $t = 0.25$ ثانية هو 120 ملّيمترًا من الزئبق، ثم عندما كان الزمن $t = 1.25$ ثانية كان الضغط أيضا 120 ملّيمترًا من الزئبق.

المفردات الجديدة
- quadrantal angle زاوية ربعية
- reference angle زاوية مرجع
- unit circle دائرة الوحدة
- circular function دالة دائرية
- periodic function دالة دورية
- period دورة

1 النسب المثلثية لأي زاوية

في الدرس 4-1، كانت تعريفات النسب المثلثية الست مقيدة بالزوايا الحادة الموجبة. في هذا الدرس، تتسع هذه التعريفات لتشمل أي زاوية.

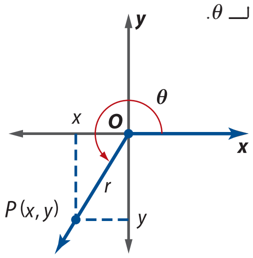
المفهوم الأساسي النسب المثلثية لأي زاوية

افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء لـ θ.
افترض أن r يمثل البعد غير الصفري عن P بالنسبة لنقطة الأصل.
هذا معناه. افترض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. من ثم تكون النسب المثلثية لـ θ كالتالي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$

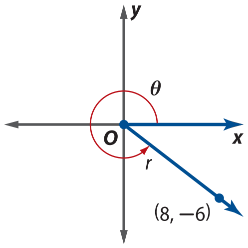
$\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$

$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



مثال 1 إيجاد قيمة المعادلات المثلثية بنقطة معطاة

افترض أن $(8, -6)$ هي نقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ.



استخدم قيم x و y لإيجاد r.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$ $x = 8$ و $y = -6$

$= \sqrt{100} = 10$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = 8$. $y = -6$. و $r = 10$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$

$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$

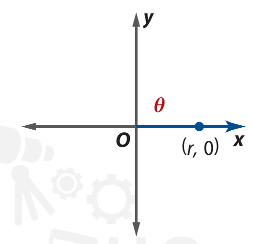
تمرين موجّه

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ.

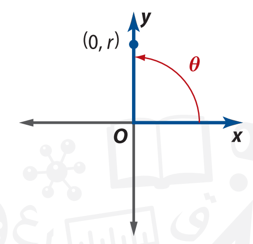
1A. $(4, 3)$ **1B.** $(-2, -1)$

في المثال 1، وجدت قيم النسب المثلثية θ للزاوية دون معرفة قياس θ. سنناقش حاليًّا طرق إيجاد قيم هذه النسبة عندما تكون θ وحدها معروفة. لاحظ النسب المثلثية للزوايا الربعية. عندما يكون ضلع الإنتهاء لزاوية θ تتَّخِذ الوضع القياسي واقعًا على أحد محاور الإحداثي، فإن الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.

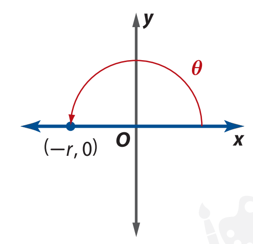
المفهوم الأساسي الزوايا الربعية المشتركة



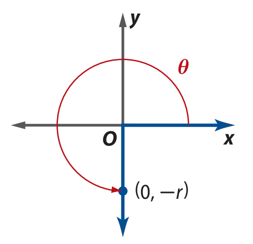
$\theta = 0° = 0$ راديان



$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ راديان



$\theta = 180° = \pi$ راديان



$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان

نصيحة دراسية

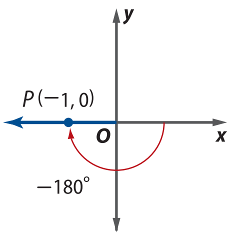
الزوايا الربعية يوجد عدد لا نهائي من الزوايا الربعية التي تشترك في ضلع الانتهاء مع الزوايا الربعية المبينة على اليسار. قياس زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

يمكنك الوصول لقيم النسب المثلثية للزوايا الربعية عن طريق اختيار نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية. وإيجاد قيمة النسبة عند هذه النقطة. يمكنك اختيار أي نقطة. رغم ذلك، من أجل التحويل لأبسط صورة، اختر النقطة التي يكون r فيها يساوي 1.

مثال 2 إيجاد قيمة النسب المثلثية للزوايا الربعية

جد قيمة كل نسبة مثلثية، إذا كانت معرّفة.إذا لم تكن معرّفة فاكتب غير معرّفة.

a. $\sin(-180°)$

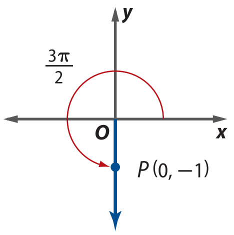


ضلع الإنتهاء للزاوية **−180°** في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي السالب x. اختر نقطة P على ضلع الإنتهاء للزاوية. النقطة المناسبة هي **(−1, 0)** لأن $r = 1$.

$\sin(-180°) = \frac{y}{r}$ نسبة الـ Sine

$= \frac{0}{1} = 0$ $y = 0$ و $r = 1$

b. $\tan \frac{3\pi}{2}$

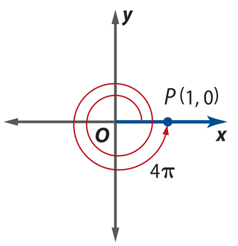


ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ في الوضع القياسي يقع على المحور الرأسي السالب y. اختر نقطة $P(0, -1)$ على ضلع الإنتهاء للزاوية لأن $r = 1$.

$\tan \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x}$ نسبة الـ tan

$= \frac{-1}{0} =$ غير معرفة $y = -1$ و $x = 0$

c. $\sec 4\pi$



ضلع الإنتهاء للزاوية 4π في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي الموجب x. النقطة $(1, 0)$ مناسبة لأن $r = 1$.

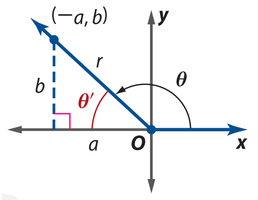
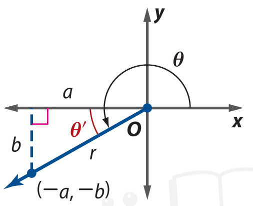
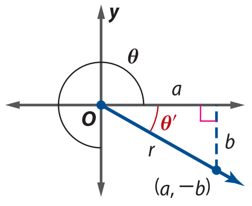
$\sec 4\pi = \frac{r}{x}$ نسبة الـ Sec

$= \frac{1}{1} = 1$ $r = 1$ و $x = 1$

تمرين موجّه

2A. $\cos 270°$ **2B.** $\csc \frac{\pi}{2}$ **2C.** $\cot(-90°)$

لإيجاد قيم النسب المثلثية لزوايا غير حادة أو ربعية، لاحظ الحالات الثلاث التالية، التي بها a و b أعداد حقيقية موجبة. قارن قيم: sin و Cosine و tan للزوايا θ و θ' .

الربع II	الربع III	الربع IV
		
$\sin\theta = \frac{b}{r}$, $\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$, $\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$, $\sin\theta' = \frac{b}{r}$
$\cos\theta = -\frac{a}{r}$, $\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$, $\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\cos\theta' = \frac{a}{r}$
$\tan\theta = -\frac{b}{a}$, $\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = -\frac{b}{a}$, $\tan\theta' = \frac{b}{a}$

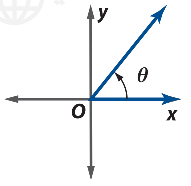
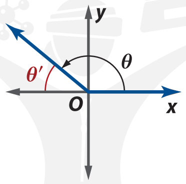
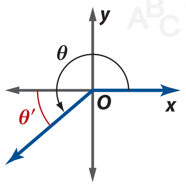
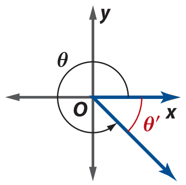
نصيحة دراسية

زوايا المرجع لاحظ أنه في بعض الحالات، القيم الثلاث المثلثية للزوايا θ و θ' (اقرأ *عوامل ثيتا الأولية*) تكون متطابقة. في حالات أخرى، تختلف في الإشارة فقط.

هذه الزاوية θ'. تسمى **زاوية المرجع**. يمكن استخدامها لإيجاد القيم المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي قواعد زاوية المرجع

إذا كانت θ هي زاوية في الوضع القياسي، وزاوية المرجع لها θ' هي زاوية حادة شكّلها ضلع الإنتهاء لــ θ والمحور الأفقي x. زاوية المرجع θ' لأي زاوية θ, $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. يتم تعريفها كما يلي:

الربع 1	الربع II	الربع III	الربع IV
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

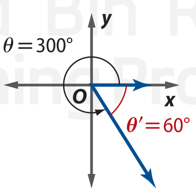
لإيجاد زاوية المرجع للزوايا خارج الفترة $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. جد أولاً زاوية متناظرة مشتركة في ضلع الانتهاء داخل هذه الفترة.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

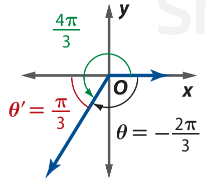
a. **300°**

ضلع الإنتهاء للزاوية 300° يقع في الربع IV. ومن ثم، فزاوية المرجع $\theta' = 360° - 300°$ أو 60°.



b. $-\frac{2\pi}{3}$

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هي $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$. ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ يقع في الربع III. ومن ثم، فزاوية مرجعه هي $\frac{4\pi}{3} - \pi$ أو $\frac{\pi}{3}$.



تمرين موجّه

3A. $\frac{5\pi}{4}$ **3B.** $-240°$ **3C.** $390°$

بما أن القيم المثلثية لزاوية تتساوى مع زاوية المرجع لها أو تختلف عنها فقط في الإشارة، يمكنك استخدام الخطوات

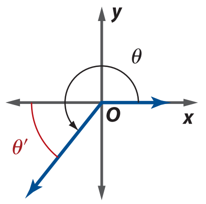
التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية

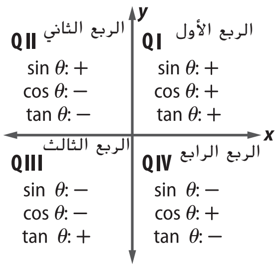
الخطوة 1 جد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 جد قيمة النسبة المثلثية لــ θ'.

الخطوة 3 استخدم الربع حيث يقع ضلع الإنتهاء لــ θ في تحديد إشارة قيمة النسبة المثلثية θ.



يمكنك تحديد الإشارات الخاصة بالنسب المثلثية في كل ربع باستخدام تعريفات النسبة المقدَّمة في صفحة 242.
على سبيل المثال، بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ، فمن ثم تكون $\sin\theta$ سالبة عندما تكون $y < 0$. والتي تقع في الربعين III و IV. باستخدام هذا المنطق نفسه، يمكنك التأكد من كل إشارة من إشارات $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$ المبينتين في الرسم التخطيطي. لاحظ أن هذه القيم تعتمد فقط على x و y لأن r دائمًا سالب.



بما أنك تعرف قيم النسب المثلثية الدقيقة للزوايا 30° و 45° و 60°. فبإمكانك إيجاد قيم النسب المثلثية الدقيقة *لكل* الزوايا والتي تمثل لها هذه الزوايا زوايا مرجعية. تتضمن هذه القائمة القيم الخاصة بــ θ بكل من الدرجات الراديان.

θ	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

تذكر القيم المثلثية لتذكر القيم الدقيقة لــ Sine بالنسبة للزوايا 0° و 30° و 45° و 60° و 90°. لاحظ النمط التالي.

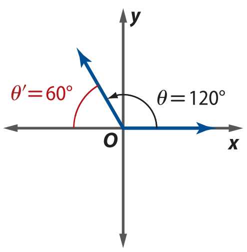
$$\sin 0° = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$
$$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 90° = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

يوجد نمط مشابه لنسبة لــ Cosine. ما عدا القيم التي لها ترتيب عكسي.

مثال 4 استخدام زوايا المرجع لإيجاد القيم المثلثية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\cos 120°$

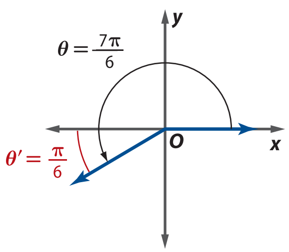


بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع II.
زاوية المرجع θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$.

$\cos 120° = -\cos 60°$ في الربع II. $\cos\theta$ سالبة

$= -\frac{1}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

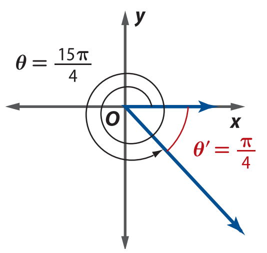
b. $\tan \frac{7\pi}{6}$



بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع III.
فزاوية المرجع θ' هي $\frac{7\pi}{6} - \pi$ أو $\frac{\pi}{6}$.

$\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6}$ في الربع III. $\tan\theta$ موجبة

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



c. $\csc \frac{15\pi}{4}$

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء لـ θ هي $\frac{15\pi}{4} - 2\pi$ أو $\frac{7\pi}{4}$، والتي تقع في الربع IV. إذًا، فزاوية المرجع θ' هي $2\pi - \frac{7\pi}{4}$ أو $\frac{\pi}{4}$. لأن الزاوية sine و Sec عبارة عن نسب مقلوبة و $\sin \theta$ سالبة تقع في الربع IV. فهذا يجعل $\csc \theta$ سالبة أيضًا في الربع IV.

$\csc \frac{15\pi}{4} = -\csc \frac{\pi}{4}$ — في الربع IV. $\csc \theta$ سالبة.

$= -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}$ — $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad -\sqrt{2}$ — $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

$\csc \frac{15\pi}{4} \approx -1.414$ ✓

$-\sqrt{2} \approx -1.414$ ✓

تمرين موجّه

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

4A. $\tan \frac{5\pi}{3}$ **4B.** $\sin \frac{5\pi}{6}$ **4C.** $\sec(-135°)$

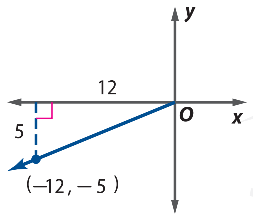
إذا كانت قيمة واحدة أو أكثر من النسب المثلثية معروفة وكذلك الربع الذي يقع ضلع الإنتهاء لـ θ فيه معروفًا، فقيم النسبة المتبقية يمكن اكتشافها.

مثال 5 استخدام قيمة نسبة مثلثية واحدة لإيجاد قيم النسب الأخرى

افترض أن $\tan \theta = \frac{5}{12}$، حيث $\sin \theta < 0$. جد القيم الدقيقة للخمسة نسب المثلثية المتبقية للزاوية θ.

لإيجاد قيم النسب الأخرى، يجب أن تجد الإحداثيات لنقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ. أنت تعلم أن $\tan \theta$ موجبة. وأن $\sin \theta$ سالبة. إذًا θ يجب أن تقع في الربع III. هذا يعني أن كلاً من x و y سالبتان.

لأن $\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{12}$. استخدم النقطة $(-12, -5)$ لإيجاد r.



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}$ — $x = -12$ و $y = -5$

$= \sqrt{169} = 13$ — بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = -12$، $y = -5$، و $r = 13$ لكتابة النسب المثلثية الخمس المتبقية.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5}$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$

تمرين موجّه

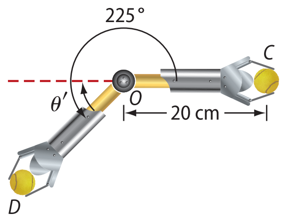
جد قيم النسب الخمسة المثلثية المتبقية للزاوية θ.

5A. $\sec \theta = \sqrt{3}, \tan \theta < 0$ **5B.** $\sin \theta = \frac{5}{7}, \cot \theta > 0$

انتبه!
إنطاق المقام تأكد من إنطاق المقام، في حالة الضرورة.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد الإحداثيات بمعرفة نصف القطر وزاوية

تطبيقات الإنسان الآلي كجزء من فئة من مدى الحركة في مسابقة المدرسة الثانوية حول تطبيقات الإنسان الآلي، برمج أحد الطلاب ذراعًا آليًّا بطول 20 cm ليلتقط شيئًا عند نقطة C ويدور بزاوية °225 بالضبط ليضع الشيء في حاوية عند النقطة D. جد وضع الشيء عند النقطة D، بالنسبة للنقطة المحورية O.



مع وجود النقطة المحورية في نقطة الأصل والزاوية التي يدور بها الذراع في وضع قياسي، تتخذ النقطة C الإحداثيات (0 ,20). زاوية المرجع θ' لـ °225 هي °180 − °225 أو °45.

لنفترض أن لوضع النقطة D الإحداثيات (x, y). تعريفات النسبة sine و cosine يمكن استخدامها لإيجاد قيم x و y. r هي 20 cm، هو طول الذراع الآلي. بما أن D تقع في الربع III، فإن النسبة sine و cosine للزاوية °225 سالبين.

نسبة الـ Sine	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	نسبة الـ Cosine	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\sin 225° = \frac{y}{20}$	$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\cos 225° = \frac{x}{20}$
$\sin 225° = -\sin 45°$	$-\sin 45° = \frac{y}{20}$	$\cos 225° = -\cos 45°$	$-\cos 45° = \frac{x}{20}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{20}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{20}$
حل y.	$-10\sqrt{2} = y$	حل x.	$-10\sqrt{2} = x$

الإحداثيات الدقيقة لـ D هي $(-10\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$. بما أن $10\sqrt{2}$ حوالي 14.14. فالشيء على بعد حوالي 14.14 cm على يسار النقطة المحورية وحوالي 14.14 cm أسفل النقطة المحورية.

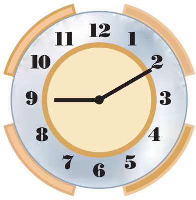
الربط بالحياة اليومية

الروبوكاب (RoboCup) هي إحدى البطولات العالمية التي تتنافس فيها الفرق في سلسلة من مباريات الكرة. بناء على حجم وذكاء آلاتهم. هدف المشروع هو تحسين الذكاء الصناعي وأبحاث تطبيقات الإنسان الآلي.

المصدر: RoboCup

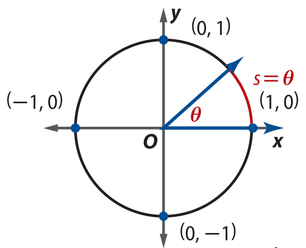
تمرين موجّه

6. **آلية الساعة** عقرب الدقائق بطول 3 in يشير إلى الساعة إلا 45 دقيقة. ما الوضع الجديد لطرف عقرب الدقائق بالنسبة للنقطة المحورية عندما تمر 10 دقائق على الساعة التالية؟



2 النسب المثلثية على دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها 1 متمركز على نقطة الأصل. لاحظ أنه على دائرة وحدة، مقياس راديان لزاوية مركزية $\theta = \frac{s}{1}$ أو s. إذًا فطول قوس تقطعه θ يتطابق تمامًا مع مقياس راديان للزاوية. هذا يتيح طريقة لتخطيط مدخل قيمته عدد حقيقي لنسبة مثلثية إلى مخرج قيمته عدد حقيقي.

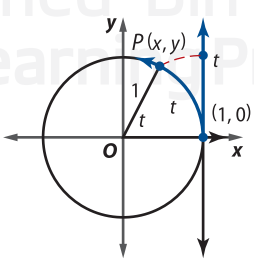


فكّر في خط الأعداد الحقيقية الذي يمس أفقيًّا دائرة الوحدة عند (0 ,1) كما هو موضح بالأسفل. إذا كان هذا الخط ملتفًّا حول الدائرة في كلا الاتجاهين: الموجب (عكس عقارب الساعة) أو السالب (مع عقارب الساعة). فإن كل نقطة t على الخط ستكون مرتبطة بنقطة فريدة $P(x, y)$ على الدائرة. لأن $r = 1$، يمكننا تعريف النسب المثلثية للزاوية t بمجرد معرفة x و y.

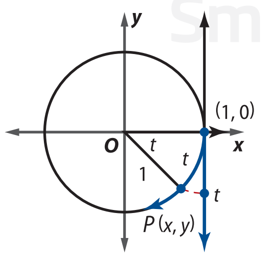
نصيحة دراسية

نسبة الالتفاف ارتباط نقطة على خط الأعداد بنقطة على الدائرة يسمى *نسبة الالتفاف*, $w(t)$. على سبيل المثال. إذا كانت $w(t)$ تربط نقطة t على خط الأعداد بنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة. فبالتالي $w(\pi) = (-1, 0)$ و $w(2\pi) = (1, 0)$.

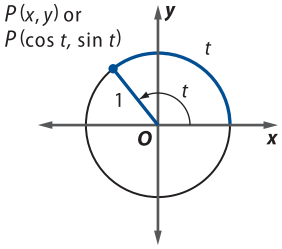
القيم الموجبة لـ t



القيم السالبة لـ t



المفهوم الأساسي النسب المثلثية على دائرة الوحدة



افترض أن t هي أي عدد حقيقي على خط الأعداد وافترض أن $P(x, y)$ هي النقطة على t عندما يلتف خط الأعداد على دائرة الوحدة. من ثم، تكون النسب المثلثية لـــ t كالتالي:

$\sin t = y$ $\quad$ $\cos t = x$ $\quad$ $\tan t = \frac{y}{x},\ x \neq 0$

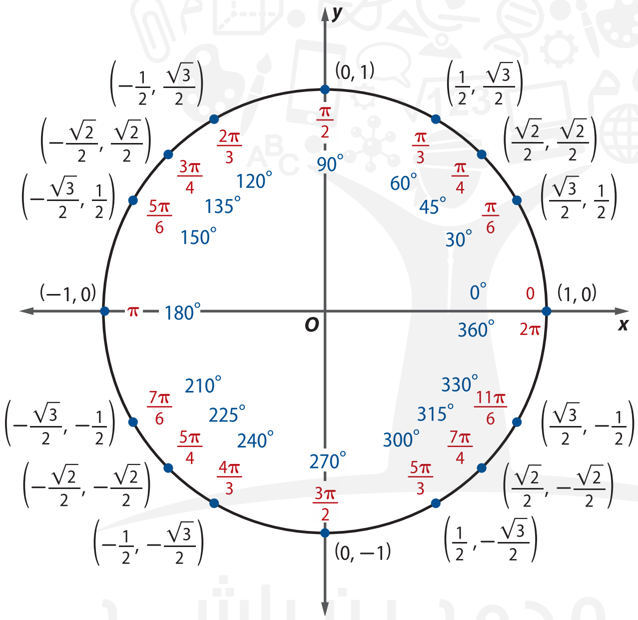
$\csc t = \frac{1}{y},\ y \neq 0$ $\quad$ $\sec t = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ $\quad$ $\cot t = \frac{x}{y},\ y \neq 0$

وهكذا، فإحداثيات P تطابق الزاوية t ويمكن كتابتها هكذا $P(\cos t, \sin t)$.

لاحظ أن قيمة المدخل في كل من التعريفات السابقة يمكن أن تعد مقياسًا للزاوية أو عددًا حقيقيًّا t. عندما يتم تعريفها كنسب نظام الأعداد الحقيقية باستخدام دائرة الوحدة، تسمى النسب المثلثية غالبًا **النسب الدائرية**.

باستخدام زوايا المرجع أو الزوايا الربعية، ينبغي أن تكون الآن قادرًا على إيجاد قيم المعادلة المثلثية لكل مضاعفات الأعداد الصحيحة لـــ $30°$، أو $\frac{\pi}{6}$ راديان، و $45°$، أو $\frac{\pi}{4}$ راديان. تلتف هذه القيم الخاصة على 16 نقطة خاصة على دائرة الوحدة. كما هو موضح فيما يلي:

دائرة وحدة عليها 16 نقطة



باستخدام الإحداثيات (x, y) مع دائرة الوحدة ذات 16 نقطة والتعريفات في مربع المفاهيم الأساسية أعلى الصفحة. يمكنك إيجاد القيم الخاصة بالنسب المثلثية لقياسات الزاوية المشتركة. من المفيد تذكر هذه القيم الدقيقة للنسبة حتى تتمكن من أداء الحسابات التي تتضمنهم سريعًا.

نصيحة دراسية

دائرة الوحدة ذات 16 نقطة أنت بالفعل تتذكر هذه القيم في الربع الأول. القيم المتبقية يمكن تحديدها باستخدام المحورين الأفقي x والرأسي y. وتناظر نقطة الأصل لدائرة الوحدة مع إشارات x و y في كل ربع.

مثال 7 إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

a. $\sin \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\sin t = y$ $\quad$ تعريف $\sin t$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندما $t = \frac{\pi}{3}$.

b. cos 135°

$135°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\cos t = x$ — تعريف $\cos t$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ عندما $t = 135°$

c. tan 270°

$270°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = (0, -1)$ على دائرة الوحدة.

$\tan t = \frac{y}{x}$ — تعريف $\tan t$

$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ — $t = 270°$ عندما $x = 0$ و $y = -1$

وهكذا تكون $\tan 270°$ غير مُعرَّفة.

d. $\csc \frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\csc t = \frac{1}{y}$ — تعريف $\csc t$

$\csc \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$ — $t = \frac{11\pi}{6}$ عندما $y = -\frac{1}{2}$

$= -2$ — بسّط

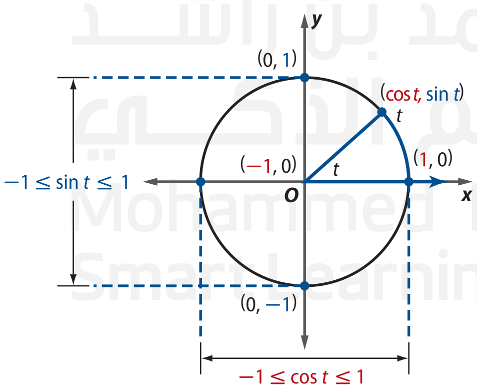
تمرين موجّه

7A. $\cos \frac{\pi}{4}$ **7B.** $\sin 120°$ **7C.** $\cot 210°$ **7D.** $\sec \frac{7\pi}{4}$

نصيحة دراسية

الراديان مقابل الدرجة بينما يمكننا أيضًا مناقشة إحدى الالتفافات وهي تتطابق مع زاوية قياسها $360°$. فإن هذا القياس لا علاقة له بمسافة. على دائرة الوحدة، تتطابق إحدى الالتفافات مع قياس الزاوية 2π والمسافة 2π حول الدائرة.

كما هو معرّف من خلال التفاف خط الأعداد حول دائرة الوحدة، فإن مجال نسب الـ Sine, Cosine هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها $(-\infty, \infty)$. مع أن خط الأعداد يمتد لا نهائيًا في كلا الاتجاهين، فيمكن أن يلتف عدة مرات حول دائرة الوحدة، مرتبطًا بأكثر من قيمة t للنقطة نفسها $P(x, y)$ مع كل التفاف، موجبًا كان أو سالبًا.



لأن $\cos t = x, \sin t = y$. والتفافًا واحدًا يناظر مسافة 2π.

$\sin(t + 2n\pi) = \sin t$ و $\cos(t + 2n\pi) = \cos t$.

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t.

نصيحة دراسية

النسب الدورية النسب الدائرية الثلاث الأخرى دورية أيضًا. ستتم مناقشة فترات هذه النسب في الدرس 5-4.

ولذلك، تقع قيم نسبة **sin** و **cos** بالفترة $[-1, 1]$ وتتكرر لكل عدد صحيح من مضاعفات 2π على خط الأعداد. النسب التي لها قيم تتكرر على فترات منتظمة تسمى **نسب دورية**.

المفهوم الأساسي الدوال الدورية

تكون الدالة $y = f(t)$ دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب c بحيث $f(t + c) = f(t)$ لكل قيم t في مجال f.

العدد الأصغر c الذي تكون f بالدالة له دورية يسمى **دورة الدالة f**.

نسب **sin** و **cos** دورية، حيث تكرر القيم بعد 2π، ومن ثم فترة هذه النسب هي 2π. يمكن توضيح أن قيم نسبة **tan** تتكرر بعد مسافة π على خط الأعداد. ومن ثم فنسبة **tan** لها دورة طولها π و

$$\tan t = \tan (t + n\pi)$$

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t. ما لم تكن كل من $\tan t$ و$\tan (t + n\pi)$ غير معرفتين. بإمكانك استخدام الطبيعة الدورية لنسب **sin** و **con** و **tan** لإيجاد قيمة تلك النسب.

مثال 8 استخدام الطبيعة الدورية للنسب الدائرية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\cos \frac{11\pi}{4}$

$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)$ أعد كتابة $\frac{11\pi}{4}$ كمجموع لعدد و 2π.

$= \cos \frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ مرتبطة بالنقطة $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ نفسها على دائرة الوحدة.

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $t = \frac{3\pi}{4}$ عند $\cos t = x$ و $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 2(-1)\pi\right)$ أعد كتابة $-\frac{2\pi}{3}$ كمجموع عدد ومضاعف العدد الصحيح 2π.

$= \sin \frac{4\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3} - 2(-1)\pi$ يرتبط بالنقطة $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ نفسها على دائرة الوحدة

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $t = \frac{4\pi}{3}$ عند $\sin t = y$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\tan \frac{19\pi}{6}$

$\tan \frac{19\pi}{6} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + 3\pi\right)$ أعد كتابة $\frac{19\pi}{6}$ كمجموع عدد ومضاعف عدد صحيح π.

$= \tan \frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} + 3\pi$ مرتبط بالنقطة نفسها على دائرة الوحدة بقيم ظل الزاوية نفسها.

$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $t = \frac{\pi}{6}$ عند $\tan t = \frac{y}{x}$ و $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$

تمرين موجّه

8A. $\sin \frac{13\pi}{4}$ **8B.** $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ **8C.** $\tan \frac{15\pi}{6}$

تذكر من الدرس 2-1 أن دالة f تكون *زوجية* إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$ وفردية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. بإمكانك استخدام دائرة الوحدة لتتحقق من كون دالة **cos** زوجية وأن دالة **sin** و **tan** فردية. بمعنى.

$$\cos (-t) = \cos t \qquad \sin (-t) = -\sin t \qquad \tan (-t) = -\tan t$$

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (المثال 1)

1. $(3, 4)$
2. $(-6, 6)$
3. $(-4, -3)$
4. $(2, 0)$
5. $(1, -8)$
6. $(5, -3)$
7. $(-8, 15)$
8. $(-1, -2)$

جد قيمة كل نسبة مثلثية، إذا كانت مُعرَّفة. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة. (المثال 2)

9. $\sin \frac{\pi}{2}$
10. $\tan 2\pi$
11. $\cot(-180°)$
12. $\csc 270°$
13. $\cos(-270°)$
14. $\sec 180°$
15. $\tan \pi$
16. $\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع. (المثال 3)

17. $135°$
18. $210°$
19. $\frac{7\pi}{12}$
20. $\frac{11\pi}{3}$
21. $-405°$
22. $-75°$
23. $\frac{5\pi}{6}$
24. $\frac{13\pi}{6}$

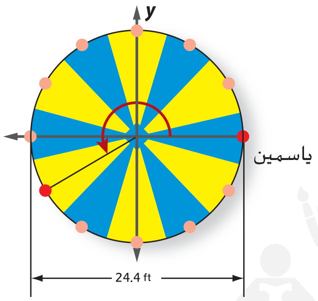
جد قيمة كل تعبير مما يلي. (المثال 4)

25. $\cos \frac{4\pi}{3}$
26. $\tan \frac{7\pi}{6}$
27. $\sin \frac{3\pi}{4}$
28. $\cot(-45°)$
29. $\csc 390°$
30. $\sec(-150°)$
31. $\tan \frac{11\pi}{6}$
32. $\sin 300°$

جد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ. (المثال 5)

33. $\tan\theta = 2$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$
34. $\csc\theta = 2$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$
35. $\sin\theta = -\frac{1}{5}$، حيث $\cos\theta > 0$
36. $\cos\theta = -\frac{12}{13}$، حيث $\sin\theta < 0$
37. $\sec\theta = \sqrt{3}$، حيث $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta > 0$
38. $\cot\theta = 1$، حيث $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta < 0$
39. $\tan\theta = -1$، حيث $\sin\theta < 0$
40. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، حيث $\sin\theta > 0$

41. **لعبة دوامة الخيل** ركبت ياسمين لعبة دوامة الخيل في الكرنفال. قطر اللعبة 80 قدم. جد مكان مقعدها من مركز اللعبة بعدما دارت $210°$. (المثال 6)

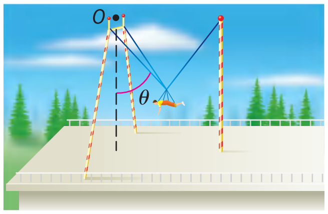


42. **أنبوب القطعة المعدنية** سقطت القطعة المعدنية في أنبوب؛ حيث أخذت تدور في دوائر أصغر حجمًا حتى سقطت في قاع الصندوق. قطر الدائرة الأولى التي صنعتها القطعة المعدنية 24 سنتيمترًا. قبل دورانها مسافة دائرة كاملة، تدور القطعة $150°$ وتسقط. ما هو المكان الجديد للقطعة المعدنية بالدالة بالنسبة الى الأنبوب؟ (المثال 6)

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إن لم تكن معرّفة، اكتب غير معرّفة. (المثالان 7 و 8)

43. $\sec 120°$
44. $\sin 315°$
45. $\cos \frac{11\pi}{3}$
46. $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$
47. $\csc 390°$
48. $\cot 510°$
49. $\csc 5400°$
50. $\sec \frac{3\pi}{2}$
51. $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
52. $\csc \frac{17\pi}{6}$
53. $\tan \frac{5\pi}{3}$
54. $\sec \frac{7\pi}{6}$
55. $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
56. $\cos \frac{7\pi}{4}$
57. $\tan \frac{14\pi}{3}$
58. $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

59. **قطارات الملاهي** يركب مازن وأيوب قطار حديقة الملاهي. بعد الأرجحات الأولى العديدة، كانت الزاوية التي صنعها القطار مع الزاوية الرأسية تمثلها $\theta = 22 \cos \pi t$. حيث θ مقدرة بالراديان و t مقدرة بالثواني. حدد مقياس الزاوية مُقدّرًا بالراديان بالدالة لـ $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$، و 2.5. (المثال 8)



أكمل كل تعبير مثلثي مما يلي.

60. $\cos 60^\circ = \sin$ ___

61. $\tan \frac{\pi}{4} = \sin$ ___

62. $\sin \frac{2\pi}{3} = \cos$ ___

63. $\cos \frac{7\pi}{6} = \sin$ ___

64. $\sin(-45^\circ) = \cos$ ___

65. $\cos \frac{5\pi}{3} = \sin$ ___

.66 **المثلجات** تقدر المبيعات الشهرية لمحل أحمد للمثلجات بآلاف الدراهم، ويمكن تمثيلها بالآتي: $y = 71.3 + 59.6 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$؛ حيث $t = 1$ تمثل يناير، $t = 2$ تمثل فبراير، وهكذا.

a. **قدّر مبيعات يناير ومارس ويوليو وأكتوبر.**

b. **اشرح لماذا يمكن تمثيل مبيعات محل المثلجات من خلال نسبة مثلثية.**

استخدم القيم المقدمة لإيجاد حل النسب المثلثية.

67. $\cos(-\theta) = \frac{8}{11}$; $\cos \theta = ?$; $\sec \theta = ?$

68. $\sin(-\theta) = \frac{5}{9}$; $\sin \theta = ?$; $\csc \theta = ?$

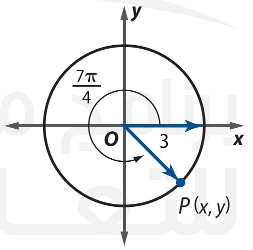
69. $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cos \theta = ?$; $\cos(-\theta) = ?$

70. $\csc \theta = \frac{19}{17}$; $\sin \theta = ?$; $\sin(-\theta) = ?$

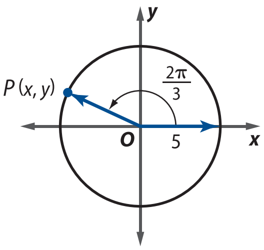
.71 **التمثيلات البيانية** بافتراض أن ضلع الانتهاء لزاوية θ في وضع قياسي يقع في المكان نفسه للتمثيل البياني لــ $y = 2x$ في الربع III. جد قيم النسب الست المثلثية لــ θ.

جد إحداثيات P لكل دائرة باستخدام نصف القطر المعطى وقياس الزاوية.

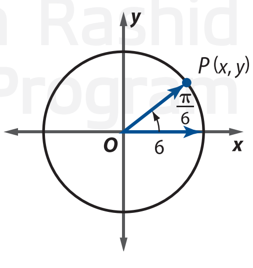
72.



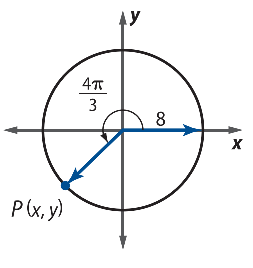
73.



74.



75.



.76 **مقارنة** بافتراض أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ_1 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(-8, 7)$، وضلع الإنتهاء للزاوية الثانية θ_2 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(-7, 8)$. قارن قيمة sin في كل من θ_1 و θ_2.

.77 **المد والجزر** عمق المد والجزر y مقدرًا بالمتر على الشاطئ يختلف باختلاف نسبة Sine x الساعة في اليوم. في يوم معين، كانت الدالة $y = 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$؛ حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ يتطابق مع 12:00 منتصف الليل، 12:00 ,... ,2:00 A.M. ,1:00 A.M. منتصف الليل في الليلة التالية.

a. **ما أقصى عمق، أو ارتفاع للمد والجزر، في ذلك اليوم؟**

b. **في أي وقت (أوقات) حدث ارتفاع المد والجزر؟**

.78 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الفترة المتعلقة بنسبة الـــ sine.

a. **الجدولي** انسخ وأكمل جدولاً مشابهًا للموجود أمامك. واجعله يتضمن قياسات الزوايا 16 كلها في دائرة الوحدة.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	2π
$\sin \theta$						
$\sin 2\theta$						
$\sin 4\theta$						

b. **اللفظي** بعد أي قيم لـــ θ تقوم $\sin \theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta$ بتكرار قيم مداها؟ بكلمات أخرى، ما الفترات لهذه النسب؟

c. **اللفظي** خمّن كيف تأثرت الفترة $y = \sin n\theta$ بقيم مختلفة لـــ n.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.79 **تحدي** صِف في كل عبارة مما يلي n.

a. $\cos\left(n \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$

b. $\csc\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$ غير معرّفة

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.**

.80 إذا كانت $\cos \theta = 0.8$ و $\cos(-\theta) = 0.4$ $\sec \theta -$

.81 بما أن $\tan(-t) = -\tan t$. يكون tan الزاوية السالبة عدد سالب.

.82 **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يمكن تمثيل عدد الحضور في متنزه على مدار العام بواسطة نسبة دورية. أي المشكلات أو الأحداث يمكن أن تقع على مدار الزمن لتغير هذا التمثيل الزمني؟

التبرير **استخدم دائرة الوحدة للتحقق من كل علاقة.**

83. $\sin(-t) = -\sin t$

84. $\cos(-t) = \cos t$

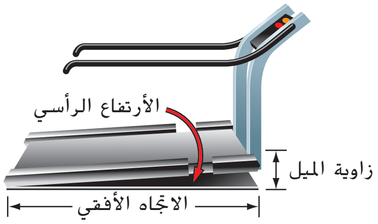
85. $\tan(-t) = -\tan t$

.86 **الكتابة في الرياضيات** خمّن دورة نسب secant و cosecant و cotangent. اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

اكتب قياس كل درجة عشرية في صيغة وحدات الدرجات والدقائق والثواني (DMS) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

87. $168.35°$ **88.** $27.465°$ **89.** $14° 5' 20''$ **90.** $173° 24' 35''$



.91 **التمرين** تدريب مبرمج مسبقًا على جهاز الركض يتكون من فترات للركض، بمختلف المعدلات وزوايا الميل. 1% من الميل يعني وحدة ارتفاع رأسي واحدة لكل 100 وحدة من الاتجاه الأفقي.

a. في أي زاوية، بالنسبة للاتجاه الأفقي، يقع قاع جهاز الركض عندما يتم ضبطه بميل 10%؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. إذا كان طول قاع جهاز الركض 40in ، فما الارتفاع الرأسي عندما يتم ضبطه بميل 8% بوصة؟

جد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

92. $\log_8 64$ **93.** $\log_{125} 5$ **94.** $\log_2 32$ **95.** $\log_4 128$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

97. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$

98. $h(x) = x^4 - x^2 + x - 1$

99. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

100. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x - 3$

101. $g(x) = 4x^3 + x^2 + 8x + 2$

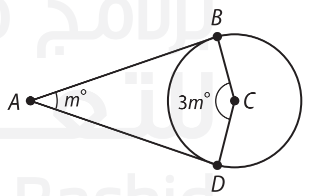
.102 **الملاحة** يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) الأقمار الصناعية ليتيح للمستخدم تحديد موقعه على الأرض. يعتمد النظام على إشارات الأقمار الصناعية التي تنعكس من وإلى جهاز الإرسال المحمول. الوقت الذي تستغرقه الإشارة في الانعكاس يُستخدم في تحديد مكان جهاز الإرسال. موجات الراديو تسافر خلال الهواء بسرعة 299,792,458 m/s. والدالة $d(t) = 299{,}792{,}458t$ تربط الزمن t مقدرًا بالثواني بالمسافة المقطوعة $d(t)$ مقدرة بالمتر.

a. جد المسافة التي ستسافرها موجة الراديو في 0.05, 0.2, 1.4,5.9 ثانية.

b. إذا تم استقبال إشارة من القمر الصناعي الخاص بنظام تحديد المواقع العالمي على جهاز إرسال في 0.08 ثانية، فكم يبعد هذا القمر الصناعي عن جهاز الإرسال؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.103 SAT/ACT في الشكل، $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ كل منهما مماس للدائرة C. ما قيمة m؟



.104 لنفترض أن θ زاوية في وضع قياسي مع $\sin \theta > 0$. في أي ربع (أرباع) يمكن أن يقع ضلع الإنتهاء للزاوية θ؟

A I فقط

B I و II

C I و III

D I و IV

.105 **مراجعة** جد السرعة الزاوية مقدرة بالراديان لكل ثانية لنقطة على إطار دراجة إذا أتمت دورتين في 3 ثوانٍ.

F $\frac{\pi}{3}$

G $\frac{\pi}{2}$

H $\frac{2\pi}{3}$

J $\frac{4\pi}{3}$

.106 **مراجعة** أي الزوايا لها tan و Cosine سالبين؟

A $110°$

B $180°$

C $210°$

D $340°$

مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل دالة الـ sine بيانيًّا باستخدام المعادلات الوسيطية

التركيز

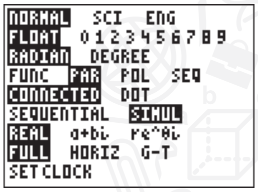
- استخدام الحاسبة البيانية والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة الـ sine ومعكوسها بيانيًّا.

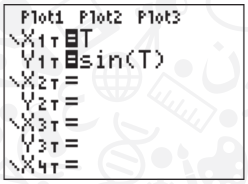
باستخدام نظام الأعداد الحقيقية، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية على المستوى الإحداثي، وتطبيق التحليل البياني نفسه الذي قمت به للدوال في درس سابق. ستُستخدَم المعادلات الوسيطية في تمثيل دالة الـ sine.

النشاط 1 تمثيل المعادلة الوسيطية بيانيًّا $y = \sin x$

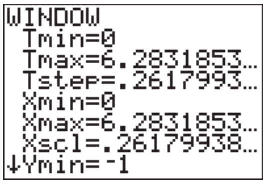
مثِّل بيانيًّا $x = t$، $y = \sin t$.

الخطوة 1 تعيين المنوال. من القائمة MODE، اختر RADIAN، PAR، و SIMUL. يتيح هذا تمثيل المعادلات بيانيًّا على الفور. بعد ذلك، قم بإدخال المعادلات الوسيطية. في صيغة وسيطية، X,T,θ,n سيتم استخدام t بدلًا من x.



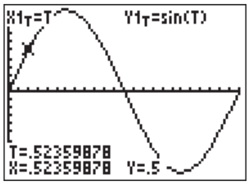


الخطوة 2 قم بإعداد قيم t و x للمدى من 0 إلى 2π. قم بإعداد مقياس Tstep و x على $\frac{\pi}{12}$. قم بإعداد y على $[-1, 1]$ scl: 0.1. تقوم الحاسبة تلقائيًّا بالتحويل إلى صيغة عشرية.



الخطوة 3 تمثيل المعادلة بيانيًّا. تتبَّع الدالة لتحديد النقاط على التمثيل البياني. اختر TRACE واستخدم السهم الأيمن للتحرك على المنحنى.

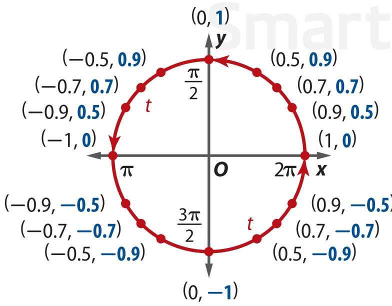
سجِّل القيم المتناظرة لكل من x و y.

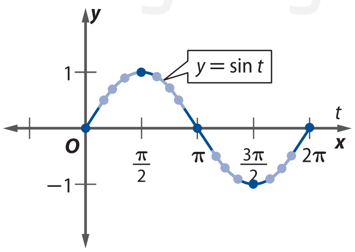


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1
t: $[0, 2\pi]$; $t$step $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 4 يوضح الجدول قياس الزوايا من 0° إلى 180°، أو من 0 إلى π. والقيم المتناظرة لـ $\sin t$ على دائرة الوحدة. الأشكال التالية تمثل العلاقة بين التمثيل البياني ودائرة الوحدة.

الدرجات	180	150	135	120	90	60	45	30	0
الراديانات	3.14	2.618	2.356	2.094	1.571	1.05	0.79	0.52	0
$y = \sin t$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0





نصيحة دراسية

المعادلات العشرية فيما يلي المعادلات العشرية لقيم مثلثية مشتركة.

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

تمارين

مثِّل كل دالة على $[0, 2\pi]$.

1. $x = t,\ y = \cos t$
2. $x = t,\ y = \sin 2t$
3. $x = t,\ y = 3\cos t$
4. $x = t,\ y = 4\sin t$
5. $x = t,\ y = \cos(t + \pi)$
6. $x = t,\ y = 2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

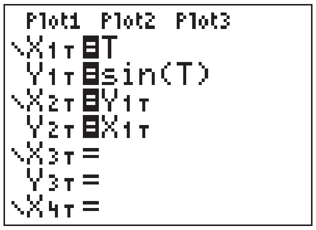
بالتعريف يكون $\sin t$ هو الإحداثي y للنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة؛ حيث يلتف العدد الحقيقي t حول خط الأعداد. كما هو مبين في الرسم التخطيطي بالصفحة السابقة، فإن التمثيل البياني لـ $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y في النقطة التي تحددها t وهي تتحرك عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.

التمثيل البياني لدالة الـ sine يسمى منحنى الـ *sine*. تعلمت من الدرس 3-4 أن دالة الـ sine هي دالة زمنية لها دورة 2π. هذا معناه أن منحنى الـ sine الممثل بيانيًا من 0 إلى 2π سيُكرَّر كل مسافة قدرها 2π في أي من الاتجاهين، الموجب والسالب. يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل معكوس دالة الـ sine بيانيًا.

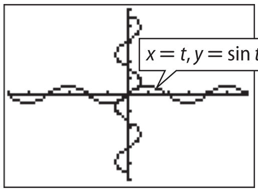
النشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا

مثِّل بيانيًّا $x = t$، $\sin t$ y ومعكوسها. ثم حدِّد المجال الذي يجعل $y = \sin t$ بدالة واحد إلى واحد.

الخطوة 1 يتم إيجاد المعكوسات بتبديل x و y. قم بإدخال المعادلات المعطاة كالتالي: X_{1T} و Y_{1T}. لتمثيل المعكوس بيانيًّا، قم بإعداد $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$. وهذه توجد في $\boxed{\text{VARS}}$ القائمة. اختر Y-VARS، المعادلة الوسيطية، Y_{1T}. كرِّر بالدالة لـ X_{1T}.



الخطوة 2 تمثيل المعادلة بيانيًّا. عدِّل النافذة حتى يتضح كل من الرسمين البيانيين، كما هو موضح. ربما تحتاج إلى تعيين بقيمة صغرى حتى تحصل على منحنى بياني متجانس.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-10, 10]$ scl: 2

t: $[-3\pi, 3\pi]$; tstep $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 3 بسبب أن منحنى الـ sine دوري. هناك عدد لانهائي من المجالات سيجتاز بسببها المنحى اختبار الخط الأفقي، بدالة واحد إلى واحد. أحد هذه المجالات مثلاً $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

نصيحة دراسية

Tstep إذا اتضح أن التمثيل البياني منكسر، يمكنك تغيير قيمة Tstep إلى قيمة صغرى حتى تحصل على منحنى متجانس.

تمارين

مثِّل كل دالة ومعكوسها. ثم حدِّد مجالاً تكون نسبته إلى كل دالة واحدًا إلى واحد.

7. $x = t,\ y = \cos 2t$
8. $x = t,\ y = -\sin t$
9. $x = t,\ y = 2\cos t$
10. $x = t + \frac{\pi}{4},\ y = \sin t$
11. $x = t,\ y = 2\cos(t - \pi)$
12. $x = t - \frac{\pi}{6},\ y = \sin t$

الدرس 4-4 تمثيل دوال sine و cosine الزاوية بيانيًا

::السابق	::الحالي	::لماذا
• لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية للدوال.	1 تمثيل التحويلات لدوال الجيب sine وجيب التمام cosine بيانيًا 2 استخدام الدوال الجيبية لحل المسائل.	• عندما تدور العجلة الدوارة، يختلف الارتفاع الذي كنت عليه فوق سطح الأرض بشكل دوري تمامًا مثل دالة دورية. يمكنك تمثيل هذا السلوك باستخدام *دالة* sine.

المفردات الجديدة

منحنى الجيب **sinusoid**
سعة **amplitude**
تكرار **frequency**
إزاحة الطور **phase shift**
إزاحة رأسية **vertical shift**
خط متوسط **midline**

1 تحويلات دوال cosine ، sine

كما هو مبين في المثال 4-4. التمثيل البياني $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y للنقطة المحددة بواسطة t وهي تتحرك حول دائرة الوحدة. وبالمثل. التمثيل البياني لــ $y = \cos t$ يتبع الإحداثي x لهذه النقطة. التمثيلات البيانية لهذه الوظائف دورية،وتتكرر بعد فترة من 2π. وفيما يلي تلخيص خصائص دوال الــ sine و cosine.

المفهوم الأساسي خواص دوال الــ sine, cosine

دالة الــ sine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

التقاطع مع المحور الرأسي y: 0

التقاطع مع المحور الأفقي x: $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

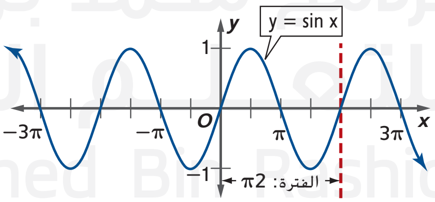
التناظر الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى عظمى عند 1 $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

صغرى عند -1 $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1



دالة الــ cosine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

التقاطع مع المحور الرأسي y: 1

التقاطع مع المحور الأفقي x: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

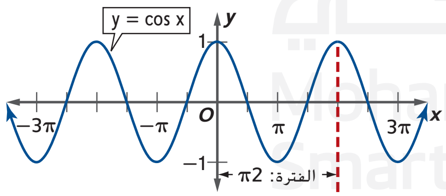
التناظر المحور y (دالة زوجية)

القيم القصوى عظمى عند 1 $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

صغرى عند -1 $x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1

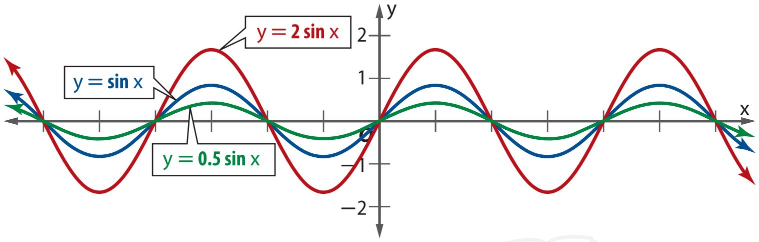


يمثل كل جزء من التمثيل البياني على $[0, 2\pi]$ فترة واحدة أو دائرة من الدالة. لاحظ أن التمثيل البياني لــ **cosine** هو ترجمة أفقية للتمثيل البياني للــ **sine**. أي تحويل في دالة **sine** اسمه **sinusoid**. الشكل العام لهذه الدوال هو:

$$y = a \sin (bx + c) + d \quad \text{و} \quad y = a \cos (bx + c) + d$$

حيث a, b, c, d هي ثوابت، ولا تساوي a و b القيمة 0.

لاحظ أن العامل الثابت a في: $y = a\cos x$ و $y = a\sin x$ يوسع التمثيلات البيانية لـــ $y = \cos x$ و $y = \sin x$ رأسيًّا إذا $|a| > 1$ ويضغطها رأسيًّا إذا $|a| < 1$.



التوسعات الرأسية تؤثر في *سعة* الدوال الجيبية(sinusoid)

نصيحة دراسية

التوسع والتقاطع مع المحور الأفقي x لاحظ أن تغيير الأبعاد (التمدّد) للدالة الجيبية لا يؤثر على مكان قطع المنحنى للمحور الأفقي x عند التقاطع مع المحور الأفقي x

المفهوم الأساسي تكرار دوال الـــ sine , cosine

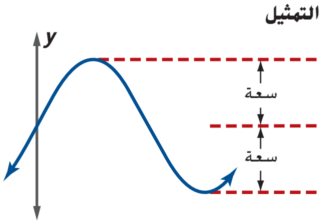
الشرح

سعة الدالة الجيبية (sinusoid) هي نصف المسافة بين القيم العظمى والصغرى من الدالة، أو نصف ارتفاع التموج.

الرموز

عندما يكون $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$، تكون السعة $= |a|$.

التمثيل



لتمثيل دالة جيبية (sinusoid) بيانيًا صيغتها $y = a\cos x$ أو $y = a\sin x$. حدد موقع التقاطع مع المحور الأفقي x لــ sin الزاوية الرئيسية أو دالة الـــ cos. ثم استخدم السعة $|a|$ لتحديد نقاط الحد الأقصى ونقاط الحد الأدنى الجديدة. ثم ارسم موجة الــ sin من خلال هذه النقاط.

المثال 1 تغيير الأبعاد (التمدّد) الرأسي بمقياس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

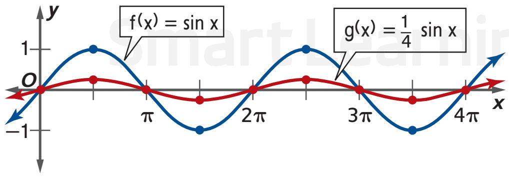
صف كيف أن التمثيلات البيانية لـــ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \frac{1}{4}\sin x$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتي كلتا الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا. سعة $g(x)$ هي $\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

ضع جدولاً لإدراج إحداثيات تقاطعات x والقيم القصوى لـــ $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. ثم استخدم سعة $g(x)$ للعثور على نقاط مماثلة في تمثيلها البياني.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$f(x) = \sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$(2\pi, 0)$
$g(x) = \frac{1}{4}\sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{4}\right)$	$(2\pi, 0)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقتَرَح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



نصيحة دراسية

الراديان مقابل الدرجات

يمكن إعادة قياس المحور x من حيث الدرجات و إنتاج تمثيل بياني سيني يشبه تلك المنتجة باستخدام مقياس راديان و مع ذلك، في حساب التفاضل والتكامل، سوف تواجه قواعد تعتمد على قياس راديان. لذلك، في هذا الكتاب، فإننا سوف نوفر تمثيلًا بيانيًّا لجميع الدوال المثلثية بمقياس راديان .

تمرين موجّه

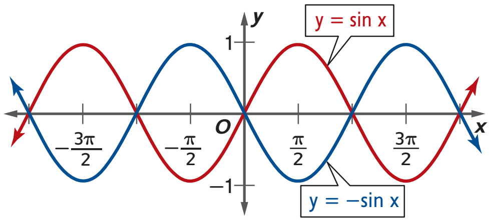
صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـــ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

1A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \frac{1}{3}\cos x$

1B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5\sin x$

1C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = 2\cos x$

إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني الخاص بدالة الــsine منعكس بالنسبة للمحور x.



المثال 2 انعكاس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

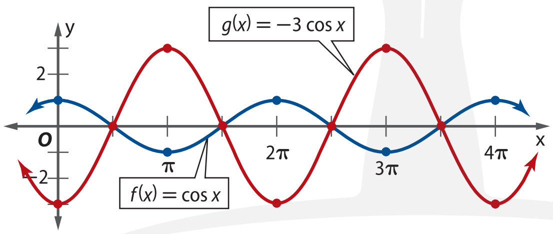
صف كيف أن التمثيلات البيانية لــ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = -3 \cos x$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، و ارسم فترتي الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لــ $f(x)$ الممدّد رأسيًا و من ثم منعكس بالنسبة للمحور x. تكون سعة $g(x)$ $|-3|$ أو 3.

ضع جدولاً لإدراج إحداثيات أهم نقاط $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. استخدم سعة $g(x)$ لإيجاد نقاط متماثلة في التمثيل البياني لــ $y = 3 \cos x$. ثم اعكس هذه النقاط بالنسبة للمحور x لتجد النقاط المماثلة في التمثيل البياني لــ $g(x)$.

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$y = 3 \cos x$	$(0, 3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 3)$
$g(x) = -3 \cos x$	$(0, -3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, 3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, -3)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقترح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



تمرين موجّه

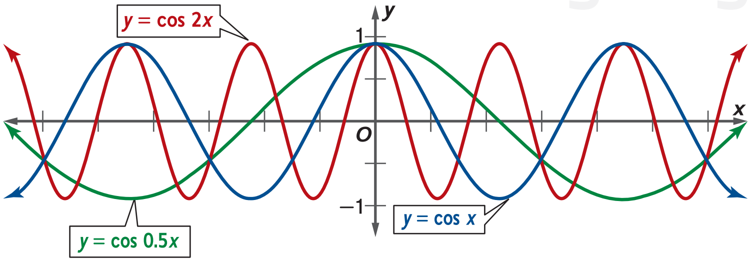
صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بــ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتي الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

2A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\frac{1}{5} \cos x$

2B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = -4 \sin x$

انتبه!
السعة لاحظ ان المثال 2 لا يذكر أن سعة $g(x) = -3 \cos x$ تكون -3. السعة هي ارتفاع وليست اتجاهية

في الدرس 5-1. أنه إذا كان $g(x) = f(bx)$ فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لــ $f(x)$ المضغوط أفقيًا إذا كان $|b| > 1$ والمتسع أفقيًا إذا كان $|b| < 1$. التوسعات الأفقية تؤثر على دورة الدالة الجيبية بطول دائرة واحدة كاملة.

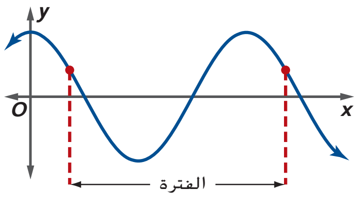


المفهوم الأساسي دورة دوال الـ sine, cosine

الشرح

دورة الدالية الجيبية هي المسافة بين أي مجموعتين من نقاط التكرار على التمثيل البياني للدالة

التمثيل



الرموز

إذا كان $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$.
فإن الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$.

انتبه!

تحديد الدورة عند تحديد دورة الدالة الزمنية من تمثيلها البياني تذكر أن الدورة هي أصغر مسافة تحتوي على كافة قيم الدالة.

لعمل تمثيل بياني لدالة الـsin للنموذج $y = \cos bx$ أو $y = \sin bx$، جد دورة الدالة ومن ثم أضف $\frac{\text{الدورة}}{4}$ من نقطة النهاية اليسرى للفترة مع هذا الطول. ثم استخدم هذه القيم كقيم للمحور x الخاصة بالنقاط الرئيسية على التمثيل البياني.

مثال 3: تمثيل التوسع الأفقي للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \cos \frac{x}{3}$ مترابطة. ثم جد الفترة لـ $g(x)$، وارسم فترتي الدالتين على نفس المحاور الإحداثية.

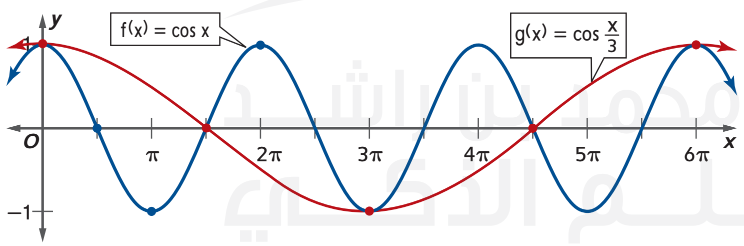
لأن $\cos \frac{1}{3}x = \cos \frac{x}{3}$. فإن التمثيل البياني لـ g(x) هو التمثيل البياني لـ f(x) المتسع أفقيًا. وتكون دورة g(x)

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

لأن دورة g(x) تكون 6π. لإيجاد النقاط المناظرة على التمثيل البياني لـ g(x)، غيّر إحداثيات x لهذه النقاط على f(x) كي تتراوح بين 0 و 6π لتزداد بزيادات من $\frac{6\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{2}$.

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$g(x) = \cos \frac{x}{3}$	$(0, 1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(3\pi, -1)$	$\left(\frac{9\pi}{2}, 0\right)$	$(6\pi, 1)$

رسم منحنى من خلال النقاط المشار إليها لكل دالة، وتابع الأنماط لإتمام دورة كاملة واحدة لكل منها.



تمرين موجّه

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد دورة $g(x)$، وارسم على الأقل دورة واحدة لكل دالة على المحاور الإحداثية نفسها.

3A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos \frac{x}{2}$

3B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin 3x$

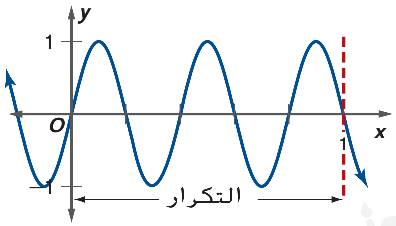
3C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos \frac{1}{4} x$

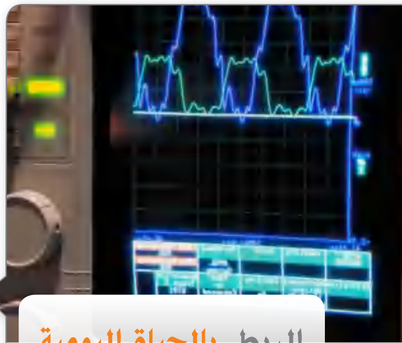
المفهوم الأساسي تكرار دوال الـــ sine ,cosine

الشرح **تكرار** الدالة الجيبية هو عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة طولها وحدة واحدة. التكرار هو مقلوب الدورة.

الرموز عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$.
التكرار $= \frac{|b|}{2\pi} = \frac{1}{\text{الدورة}}$

التمثيل





لأن تكرار الدالة الجيبية مقلوب تلك الدورة، ويترتب على ذلك أن دورة الدالة مقلوب تكرارها.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التكرار لكتابة الدالة الجيبية.

الموسيقى الملاحظات الموسيقية مصنفة وفقًا للتكرار. وضمن المقياس المخفف ذاته، يمثل الوسط C التردّد التكراري 262 هيرتز. استخدم هذه المعلومات والمعلومات التي في اليمين لكتابة معادلة دالة الـــ sine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C وذات سعة 0.2.

الشكل العام للمعادلة سوف يكون $y = a \sin bt$، حيث t يكون الزمن بالثواني. لأن السعة تكون $|a| = 0.2$. هذا يعني أن $a = \pm 0.2$.

الدورة هي مقلوب التكرار أو $\frac{1}{262}$. استخدم هذه القيمة لتجد b.

الدورة $= \frac{2\pi}{\|b\|}$	صيغة الدورة
$\frac{2\pi}{\|b\|} = \frac{1}{262}$	الدورة $= \frac{1}{262}$
$\|b\| = 2\pi(262)$ أو 524π	حل لإيجاد $\|b\|$.
$b = \pm 524\pi$	تحل من أجل b.

عن طريق الاختيار العشوائي للقيم الإيجابية من b و a، إحدى دوال الـــsine التي تمثّل السلوك الأولي تكون $y = 0.2 \sin 524\pi t$.

الربط بالحياة اليومية

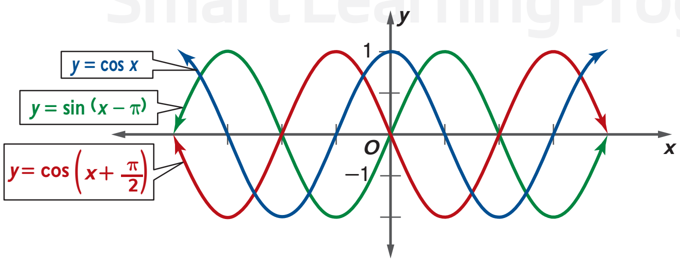
في الفيزياء، التكرار يتم قياسه بالهيرتز أو التذبذبات في الثانية الواحدة . على سبيل المثال، عدد موجات الصوت التي تتخطى النقطة A في الثانية الواحدة يمكن أن تكون تردد الموجة.

المصدر: *عالم العلوم*

تمرين موجّه

4. **الموسيقى** في نفس المقياس، مفتاح C الذي فوق مفتاح الوسط C له تردّد تكراري 524 هيرتز. اكتب معادلة لدالة الـــsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بمفتاح C هذا الذي له سعة 0.2.

أحد أطوار منحنى الـــsine هو موقع الموجة ذات الصلة . وينتج عن الإزاحة الأفقية للدالة الجيبية *إزاحة الطور* تذكّر من الدرس 1-5 أن التمثيل البياني لـــ $y = f(x - c)$ هو التمثيل البياني لـــ $y = f(x)$ مُنزاحاً أو محوّلاً بمقدار |c| من الوحدات يساراً إذا كان $c > 0$ و بمقدار |c| الوحدات يمينًا إذا كان $c < 0$.



المفهوم الأساسي إزاحة الطور (الأفقية) لدوال الــ sine , cosine

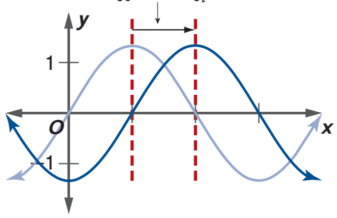
الشرح

إزاحة الطور دالة الــsin هو الاختلاف بين الوضع الأفقي للدالة وذلك الخاص بأي دالة sin مشابهة.

الرموز

عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$،
فإن إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$.

النموذج



سوف تقوم بالتحقق من صيغة إزاحة الطور في التمرين 44.

نصيحة دراسية

صيغة بديلة الصيغ العامة لدوال sine يمكن التعبير عنها كالآتي $y = a \sin b(x - h) + k$ و $y = a \cos b(x - h) + k$.
في هذه الصيغ، كل دالة sine لها إزاحة طور لــ h وإزاحة رأسية لــ k بالمقارنة مع التمثيلات البيانية $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$.

لتمثيل إزاحة طور الدالة الجيبية (sinusoid) بيانيًا بالصيغة $y = a \cos (bx + c) + d$ أو $y = a \sin (bx + c) + d$ أولاً قم بتحديد نقاط نهاية الفترة الزمنية الذي يتوافق مع دورة واحدة للتمثيل البياني من خلال إضافة $-\frac{c}{b}$ إلى كل نقطة النهاية على الفترة الزمنية $[0, 2\pi]$ من دالة أم.

مثال 5 تمثيل الإزاحة الأفقية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا.

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لــ $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. ثم مثِّل دورتين للدالة بيانيًا

في هذه الدالة، $a = 1$ و $b = 3$ و $c = -\frac{\pi}{2}$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$

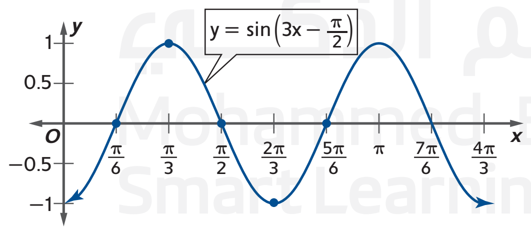
التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|3|}{2\pi}$ أو $\frac{3}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|3|}$ أو $\frac{\pi}{6}$

لتمثيل $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًا، ضع في الاعتبار التمثيل البياني $y = \sin 3x$. فترة هذه الدالة هي $\frac{2\pi}{3}$. رتّب جدولاً للنقاط الرئيسية لــ $y = \sin 3x$ على الفترة $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. لحساب إزاحة طور بقيمة $\frac{\pi}{6}$، أضف $\frac{\pi}{6}$ إلى قيم x لكل من النقاط الرئيسية للتمثيل البياني لــ $y = \sin 3x$.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$y = \sin 3x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$
$y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

ارسم التمثيل البياني $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ من خلال هذه النقاط لمتابعة النمط وإكمال الدورتين.



تمرين موجّه

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة.

5A. $y = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

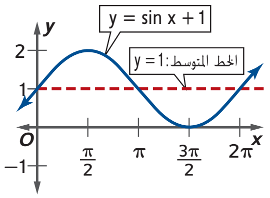
5B. $y = 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

نصيحة دراسية

تدوين $\sin(x+d) \neq \sin x + d$ التعبير الأول يوضح إزاحة طور، والتعبير الثاني يعبر عن إزاحة رأسية .

الطريقة الأخيرة لتحويل التمثيل البياني للدالة الجيبية (sinusoid) من خلال الإزاحة الرأسية أو **التحول الرأسي**. نتعلم من الدرس 1-5 أن التمثيل البياني $y = f(x) + d$ هو التمثيل البياني لـــ $y = f(x)$ منزاحاً أو محولاً بمقدار $|d|$ وحدات أعلى إذا كان $d > 0$ و بمقدار $|d|$ وحدات أدنى إذا كان $d < 0$. التحول الرأسي هو متوسط الحد الأقصى والأدنى من الدالة .

الدالتان الرئيستان $y = \cos x$ و $y = \sin x$ تقعان حول المحور x. بعد الإزاحة الرأسية، يصبح محور أفقي جديد بـــ **الخط المتوسط** الخط المرجعي أو نقطة التوازن التي يتمحور حولها التمثيل البياني. على سبيل المثال، الخط الأوسط لـــ $y = \sin x + 1$ هو $y = 1$. كما هو موضح.



بشكل عام، يكون الخط الأوسط للتمثيلات البيانية $y = a\cos(bx + c) + d$ and $y = a\sin(bx + c) + d$ هو $y = d$.

مثال 6 تمثيل الإزاحة الرأسية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لـــ $y = \sin(x + 2\pi) - 1$. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة

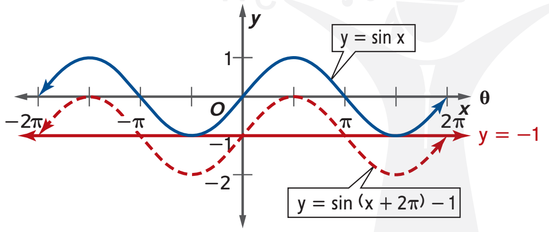
في هذه الدالة $a = 1, b = 1, c = 2\pi, d = -1$.

السعة: $|a| = |1| = 1$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{2\pi}{|1|} = -2\pi$ الإزاحة الرأسية: d أو -1 الخط المتوسط: $y = d$ أو $y = -1$

أولاً.مثِّل بيانيًا الخط المتوسط $y = -1$. ثم مثّل بيانيًا $y = \sin x$ المحولة 2π وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأسفل 1 .

لاحظ أن هذا التحول مساوٍ لترجمة وحدة 1 لأسفل لأن تحول المرحلة كان نقطة واحدة إلى اليسار.



تمرين موجّه

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

6A. $y = 2\cos x + 1$

6B. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 3$

نصيحة تقنية

خاصية Zoom Trig عند تمثيل الدالة المثلثية بيانيًا باستخدام التمثيلات البيانية الخاصة بك، كن متأكدًا من أنك في وضع الراديان واستخدم خيار ZTrig أسفل خاصية التكبير لتغيير نافذة العرض الخاصة بك من النافذة القياسية إلى واحدة أكثر تناسبًا : $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\pi/2$ في $[-4, 4]$ scl: 1

خصائص تحولات الدوال الأم $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ملخصة أدناه.

ملخص المفهوم التمثيلات البيانية للدوال الجيبية

وللتمثيلات البيانية الخاصة بـــ $y = a\cos(bx + c) + d$ و $y = a\sin(bx + c) + d$. حيث: $a \neq 0$ and $b \neq 0$. السمات الآتية:

السعة: $|a|$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ التكرار: $\frac{1}{\text{الفترة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$

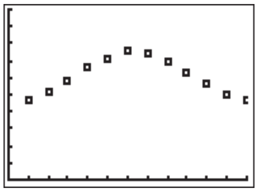
إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|}$ الإزاحة الرأسية: d الخط المتوسط: $y = d$

2 تطبيقات الدوال الجيبية

العديد من مواقف الحياة اليومية التي لها سلوك دوري بمرور الزمن يمكن تمثيلها من خلال التحولات $y = \cos x$ أو $y = \sin x$.

مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام الدوال الجيبية (sinusoid)

الأرصاد الجوية **استخدم المعلومات الموجودة على اليمين لكتابة دالة جيبية تمثل عدد ساعات النهار في مدينة نيويورك كدالة زمن x بحيث $x = 1$ تمثل 15 يناير، و $x = 2$ تمثل 15 فبراير وهكذا. ثم استخدم تمثيلك لتقدير عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر في نيويورك.**



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الخطوة 1 ارسم مخطط انتشار من البيانات واختر نموذجًا.

التمثيل البياني يظهر على شكل موجي لذا يمكنك أن تستخدم دالة جيبية من الشكل $y = a\sin(bx + c) + d$ أو $y = a\cos(bx + c) + d$. وسوف نختار استخدام $y = a\cos(bx + c) + d$ لتمثيل البيانات.

الخطوة 2 جد القيمة العظمى M والقيم الصغرى لـــ m للبيانات، واستخدم تلك القيم لإيجاد a, b, c, d

القيمتان العظمى والصغرى لساعات النهار هما 15.7 و 9.27 . والسعة a هي نصف المسافة بين القيم العظمى.

$$a = \frac{1}{2}(M - m) = \frac{1}{2}(15.07 - 9.27) = 2.9$$

الإزاحة الرأسية d هي متوسط القيم العظمى والصغرى من البيانات.

$$d = \frac{1}{2}(M + m) = \frac{1}{2}(15.07 + 9.27) = 12.17$$

يكمل منحنى الــsine نصف الدورة التي يستغرقها للانتقال من قيمته العظمى إلى الصغرى لقيمتها. ويتم تكرار الفترة الواحدة مرتين في هذه الحالة.

الفترة $= 2(x_{max} - x_{min}) = 2(12 - 6)$ أو 12 شهر 21 أو 51 ديسمبر $= x_{max}$

شهر 6 أو 15 يناير $= x_{min}$

لأن الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|b|}$، يمكن أن تكتب $|b| = \frac{2\pi}{\text{الدورة}}$. لذلك فإن $|b| = \frac{2\pi}{12}, = \frac{\pi}{6}$

القيمة العظمى للبيانات تحدث عندما يكون $x = 6$. حيث إن $y = \cos x$ تبلغ القيمة العظمى لها لأول مرة عندما يكون $x = 0$. يجب أن نطبق إزاحة طور بقيمة $6 - 0$ أو 6 وحدات. استخدم هذه القيمة لتجد c.

صيغة إزاحة الطور $\qquad$ إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$

إزاحة الطور $= 6$ و $|b| = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $6 = -\frac{c}{\frac{\pi}{6}}$

حل لـــ c. $\qquad$ $c = -\pi$

الخطوة 3 اكتب الدالة باستخدام قيم a, b, c, d. استخدم $b = \frac{\pi}{6}$

$y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 12.17$ هو نموذج واحد لساعات النهار.

الربط بالحياةاليومية

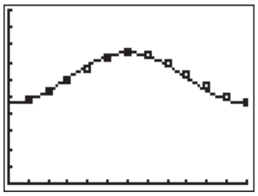
الجدول يوضح عدد ساعات النهار في الخامس عشر من كل شهر في مدينة نيويورك .

الشهر	ساعات النهار
يناير	9.58
فبراير	10.67
مارس	11.9
أبريل	13.3
مايو	14.43
يونيو	15.07
يوليو	14.8
أغسطس	13.8
سبتمبر	12.48
أكتوبر	11.15
نوفمبر	9.9
ديسمبر	9.27

المصدر: *مرصد البحرية الأمريكية*

مثِّل بيانيًا الدالة ومخططًا مبعثرًا في نافذة المعاينة نفسها. كما هو الحال في الشكل 3.4.1. لإيجاد عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر، قيّم النموذج إذا علمت أن $x = 9.5$.

$y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}(9.5) - \pi\right) + 12.17$ أو 11.42 ساعة نهار تقريبًا



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الشكل 3.4.1

تمرين موجّه

الأرصاد الجوية متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
درجة الحرارة (°)	41	44	47	50	56	61	65	66	61	54	46	42

7A. اكتب دالة تمثل درجات الحرارة الشهرية، باستخدام $x = 1$ لتمثل شهر يناير.

7B. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟

تمارين

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم جد سعة $g(x)$ و ارسم دورتين لكلتا الدالتين على نفس محاور الإحداثيات. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$
2. $f(x) = \cos x$, $g(x) = -\frac{1}{3} \cos x$
3. $f(x) = \cos x$, $g(x) = 6 \cos x$
4. $f(x) = \sin x$, $g(x) = -8 \sin x$

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم جد دورة $g(x)$، و ارسم دورة واحدة على الأقل لكلا الدالتين في نفس محور الإحداثيات. (مثال 3)

5. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 4x$
6. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$
7. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos \frac{1}{5} x$
8. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin \frac{1}{4} x$

9 **الأصوات** يشمل نوع الكونتر التو الرنان أعمق أصوات الغناء النسائية. حيث يمكن لبعض النساء من صاحبات الكونتر التو الغناء بطبقة متدنية مثل E وهي أقل من الطبقة C الوسطى(E3)، إذ يبلغ تردده 165 هرتز. اكتب معادلة لدالة الـsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2 .(مثال 4)

اكتب معادلة لدالة الـ sin التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2 . (مثال 4)

10. $f = 440, a = 0.3$
11. $f = 932, a = 0.25$
12. $f = 1245, a = 0.12$
13. $f = 623, a = 0.2$

حدد السعة، الدورة، التكرار، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة (المثالان 5 و 6)

14. $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
15. $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$
16. $y = 0.25 \cos x + 3$
17. $y = \sin 3x - 2$
18. $y = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 1$
19. $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 4$

20. **الإجازات** متوسط عدد الحجوزات R لدى منتجع في بداية كل شهر موضحة (المثال 7)

الشهر	R	الشهر	R
يناير	200	مايو	121
فبراير	173	يونيو	175
مارس	113	يوليو	198
أبريل	87	أغسطس	168

a. اكتب معادلة دالة جيبية توضح متوسط عدد الحجوزات باستخدام x = 1 لتمثيل شهر يناير .

b. وفقًا لنموذجك، كم يبلغ تقريبًا عدد الحجوزات التي يمكن أن يحققها المنتجع في نوفمبر؟

21. **المد والجزر** يوفّر الجدول المبين أدناه بيانات المد العالي والمنخفض في خليج معين خلال يومٍ واحد في شهر يونيو. (المثال 7)

المد والجزر	الارتفاع (ft)	الزمن
ارتفاع المد والجزر الأول	12.95	4:25 صباحًا
انخفاض المد والجزر الأول	2.02	10:55 صباحًا

a. حدد السعة، الدورة، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح ذروة المد والجزر. افرض أن x توضح عدد الساعات التي يحدث فيها المد العالي أو المنخفض بعد منتصف الليل.

b. اكتب دالة جيبية لتكون نموذجًا للبيانات.

c. وفقًا لنموذجك، ماذا كان أعلى معدل للمد في 8:45 مساءً في تلك الليلة؟

22. **الأرصاد الجوية** متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه. (المثال 7)

الشهر	درجة الحرارة (°F)	الشهر	درجة الحرارة (°F)
يناير	29	يوليو	74
فبراير	30	أغسطس	72
مارس	39	سبتمبر	65
أبريل	48	أكتوبر	55
مايو	58	نوفمبر	45
يونيو	68	ديسمبر	34

a. حدد السعة والدورة وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح درجات الحرارة الشهرية باستخدام x = 1 لتمثيل شهر يناير.

b. اكتب معادلة دالة جيبية تمثّل درجات الحرارة الشهرية.

c. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟

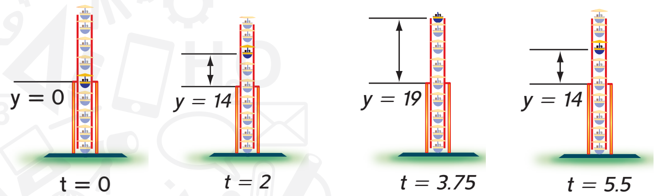
حاسبة التمثيل البياني جد قيم x في الفترة $-\pi < x < \pi$ التي تجعل كل معادلة أو تفاوت صحيحًا. (*تلميح:*استخدام دالة التقاطع.)

23. $-\sin x = \cos x$
24. $\sin x - \cos x = 1$
25. $\sin x + \cos x = 0$
26. $\cos x \leq \sin x$
27. $\sin x \cos x > 1$
28. $\sin x \cos x \leq 0$

29. **الأحصنة الخشبية الدوارة** يتحرك حصان خشبي على دائرة صعودًا وهبوطًا كلما دارت. وعندما تنتهي فترة ركوب الدوارة، عادة ما يتوقف الحصان في وضع رأسي يختلف تمامًا على النقطة التي بدأ عندها الوضع y للحصان بعد t ثانية يمكن تمثيله بـ $y = 1.5 \sin(2t + c)$، حيث لا بد من تغيير إزاحة الطور c باستمرار للتعويض عن أوضاع بدء الحركة المختلفة. إذا بلغ الحصان في جولة واحدة أقصى ارتفاع بعد $\frac{7\pi}{12}$ ثانية. جد المعادلة التي تمثل مكان الحصان.

30. حدائق الملاهي المكان y لعربة الركاب بالنسبة لمركز العجلة الدوارة مقدرًا بالقدم على مدار t ثانية موضح أمامك.

مشهد جانبي لعجلة دوارة عبر الفترة الزمنية [0, 5.5]



a. جد الزمن t الذي تستغرقه العربة للعودة إلى $y = 0$ خلال دورتها المبدئية.

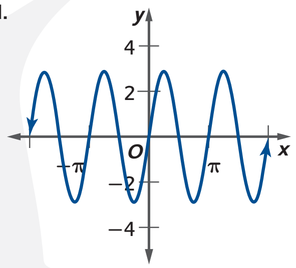
b. جد الفترة للعجلة الدوارة.

c. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل مكان عربة الركاب خلال فترة واحدة.

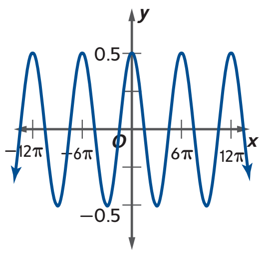
d. اكتب دالة جيبية تمثل مكان عربة الركاب بحيث تكون دالة زمنية t.

اكتب معادلة تماثل كل تمثيل بياني.

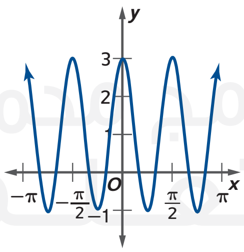
31.



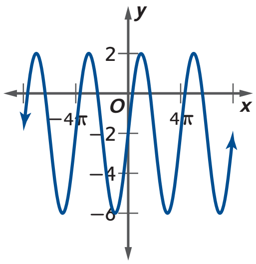
32.



33.



34.



اكتب دالة جيبية باستخدام الفترة المعطاة والسعة التي تمر خلال النقطة المعطاة.

35. الدورة: π؛ السعة: 5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$

36. الدورة: 4π؛ السعة: 2؛ النقطة: $(\pi, 2)$

37. الدورة: $\frac{\pi}{2}$ ، السعة: 1.5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$

38. الدورة: 3π؛ السعة: 0.5؛ النقطة: $\left(\pi, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

39. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف التغير في تمثيل دالة جيبية بيانيًا للصيغة $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود.

a. بيانيًا استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ و $y = 2x, y = -2x.$ على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة $[-20, 20]$.

b. كلاميًا صف سلوك التمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ للرسوم البيانية لـ $y = -2x$ و $y = 2x$.

c. بيانيًا استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيلات البيانية لـ $y = x^2 \sin x$ و $y = x^2, y = -x^2.$ على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة $[-20, 20]$.

d. كلاميًا صف سلوك التمثيل البياني لـ $y = x^2 \sin x$ للرسوم البيانية $y = -x^2$ و $y = x^2$.

e. طريقة التحليل خمّن سلوك التمثيل البياني للدوال الجيبية ذات الصيغ $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود لها الصيغة $y = f(x)$.

استخدام مهارات التفكير العليا

40. التحدي بدون التمثيل البياني، جد الإحداثيات النقطة العظمى الأولى على يمين المحور الرأسي y لـ $y = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

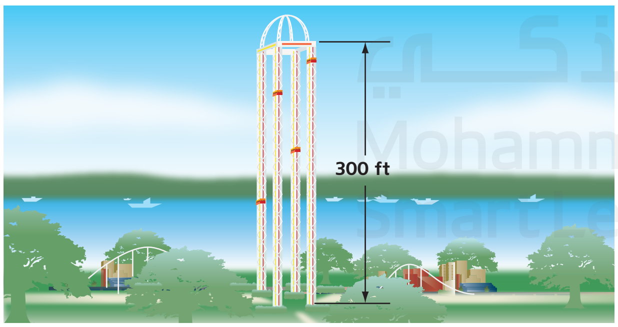
41. أي دالة جيبية من الصيغة $y = a \sin (bx + c) + d$ يمكن كتابتها أيضًا كدالة cos من الصيغة $y = a \cos (bx + c) + d$.

42. دورة $f(x) = \cos 8x$ تساوي أربع أمثال دورة $g(x) = \cos 2x$.

43. التحدي كم عدد أصفار $y = \cos 1500x$ على الفترة $0 \le x \le 2\pi$ ؟

44. الإثبات أثبت قاعدة تحويل المرحلة.

45. الكتابة في الرياضيات جولة برج الطاقة في ساندوسكي، أوهايو، مبينة أمامك. إلى جوار كل برج خيط من الأضواء يبعث نبضات ضوء متواصلة لأعلى ولأسفل كل برج بمعدل ثابت. اشرح لماذا لا يمكن لمسافة d التي تبعث الضوء بعيدًا عن الأرض على مدار زمن t أن تمثلها دالة جيبية.



مراجعة شاملة

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ.

46. $(-4, 4)$ **47.** $(8, -2)$ **48.** $(-5, -9)$ **49.** $(4, 5)$

حول كل قياس بالدرجات الى الراديان كمضاعف لــ π وبالعكس.

50. $25°$ **51.** $-420°$ **52.** $-\frac{\pi}{4}$ **53.** $\frac{8\pi}{3}$

54. **العلوم** الكربون المشع عبارة عن طريقة لتقدير عمر المواد العضوية عن طريق حساب كمية الكربون 14 الموجود في المادة. عمر المادة يمكن حسابه باستخدام $A = t \cdot \frac{\ln R}{-0.693}$، حيث A هو عمر المادة بالأعوام، t هو العمر النصفي للكربون 14 أو 5700 عامًا، و R هو نسبة كمية الكربون 14 في العينة إلى كميتها الكربون 14 في الأنسجة الحية.

a. تحتوي عينة من المواد العضوية على 0.000076 جرام من الكربون 14. تحتوي عينة حية من المواد نفسها على 0.00038 جرام. كم عمر هذه العينة تقريبًا؟

b. عينة بعينها عمرها 20,000 عامًا على الأقل. ما النسبة المئوية القصوى المتبقية من الكربون 14 في العينة؟

عيّن العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

55. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

56. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

57. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2$

58. $f(x) = x^4 - 1$

حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية. إذا كانت كذلك، فجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

59. $f(x) = -x - 2$ **60.** $f(x) = \frac{1}{x+4}$ **61.** $f(x) = (x-3)^2 - 7$ **62.** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

63. **SAT/ACT** إذا كانت $x + y = 90°$ و x و y كلتاهما زاويتين غير سالبتين. وهو ما يساوي $\frac{\cos x}{\sin y}$؟

A 0

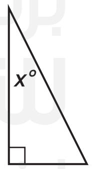
B $\frac{1}{2}$

C 1

D 1.5

E لا يمكن التحديد بالمعطيات المتوفرة.

64. **مراجعة** إذا كانت $\tan x = \frac{10}{24}$ في الشكل التالي، فما $\sin x$ و $\cos x$؟



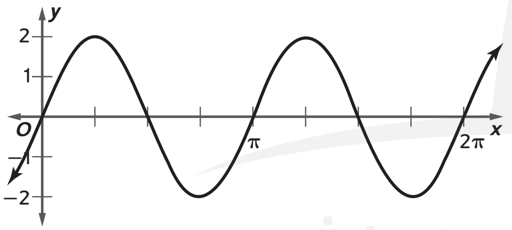
F $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$

G $\sin x = \frac{10}{26}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$

H $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$

J $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$

65. حدد المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني.



A $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

B $y = \frac{1}{4} \sin 2x$

C $y = 2 \sin 2x$

D $y = 4 \sin \frac{1}{2} x$

66. **مراجعة** إذا كانت $\cos \theta = \frac{8}{17}$ وضلع الإنتهاء للزاوية يقع في الربع IV. ما القيمة الدقيقة لــ $\sin \theta$؟

F $-\frac{15}{8}$

G $-\frac{17}{15}$

H $-\frac{15}{17}$

J $-\frac{8}{15}$

مختبر تقنية التمثيل البياني

مجموع منحنيات sine والفرق بينها

التركيز

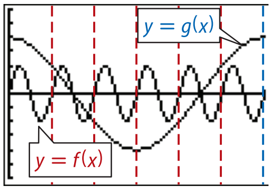
- تمثيل فترات مجموع والفرق بين منحنيات الـ sine بيانيًا، وفحصها.

كثيرًا ما يكون التمثيل البياني لمجموع وفروق اثنين من منحنيات لـ sin فترات مختلفة عن التمثيلات البيانية للدوال الأصلية.

النشاط 1 مجموع منحنيات لـ sine

حدد الفترة المشتركة التي يكمل فيها كل من $f(x) = 2 \sin 3x$ و $g(x) = 4 \cos \frac{x}{2}$ عددًا كليًا من الدورات. ومثّل بيانيًا $h(x) = f(x) + g(x)$، ثم حدد دورة الدالة.

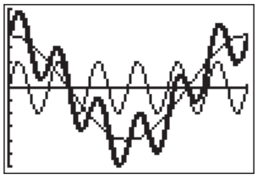
الخطوة 1 أدخل $f(x)$ لـ Y1 و$g(x)$ لـ Y2. ثم اضبط النافذة إلى أن يكمل كل تمثيل بياني دورة مكتملة أو أكثر في الفترة نفسها. وتكون $[0, 4\pi]$ إحدى الفترات التي يحدث فيها ذلك. في هذه الفترة، تُكمل $g(x)$ دورة كاملة، وتُكمل $f(x)$ ست دورات كاملة.



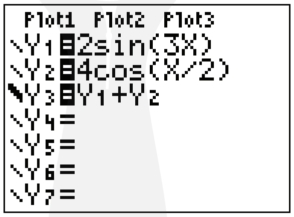
$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1

الخطوة 2 لتمثيل $h(x)$ بيانيًّا مثل Y3. أسفل القائمة VARS، اختر Y-VARS. الدالة. ثم لإدخال Y1. ثم اضغط $\boxed{+}$ واختر Y-VARS. الدالة. و Y2 لإدخال Y2.

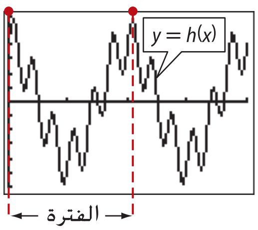
الخطوة 3 مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و$g(x)$ و $h(x)$ **على الشاشة** نفسها. ولتمييز التمثيل البياني لـ $h(x)$، مرِّر إلى يسار علامة يساوي بجانب Y. ثم اضغط على ENTER. ثم مثِّل الدوال بيانيًا باستخدام النافذة نفسها كما في الأعلى.



$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1



الخطوة 4 عن طريق ضبط شكل المحور الأفقي x من $[0, 4\pi]$ إلى $[0, 8\pi]$ لمراقبة نمط؛ الكامل $h(x)$ حيث يمكننا رؤية أن دورة مجموع المحورين الجيبين هي 4π.



$[0, 8\pi]$ scl: 2π by $[-6, 6]$ scl: 1

نصيحة تقنية

إخفاء التمثيلات البيانية مرر حتى علامة يساوي، ثم اضغط على enter لإخفاء التمثيل البياني.

تمارين

حدد فترة مشتركة يُكمل فيها كل من $f(x)$ و $g(x)$ عددًا مكتملاً من الدورات. ومثِّل بيانيًّا $a(x) = f(x) + g(x)$ و $b(x) = f(x) - g(x)$. ثم حدد دورة الدالة.

1. $f(x) = 4 \sin 2x$
   $g(x) = -2 \cos 3x$

2. $f(x) = \sin 8x$
   $g(x) = \cos 6x$

3. $f(x) = 3 \sin (x - \pi)$
   $g(x) = -2 \cos 2x$

4. $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$
   $g(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5. $f(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$
   $g(x) = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

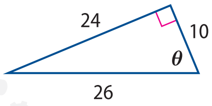
6. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x$
   $g(x) = 3 \cos 2x$

7. **التخمين:** اشرح كيف يمكن استخدام دورات منحنيي الـ sin , cos لإيجاد دورة مجموع أو فرق هذه المنحنيات.

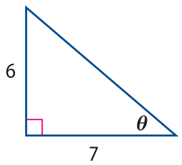
4 اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 4-1 إلى 4-4

جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ. (الدرس 4-1)

1.

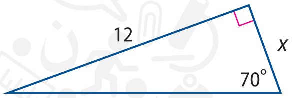


2.

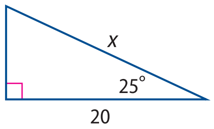


جد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر. (الدرس 1-3)

3.



4.



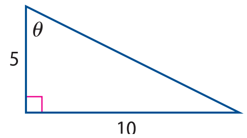
.5 **الظلال** شجرة صنوبر تلقي بظلها على مسافة 7.9 ft عند تعامد الشمس بزاوية °80 أعلى الأفق. (الدرس 4-1)

a. جد ارتفاع الشجرة.

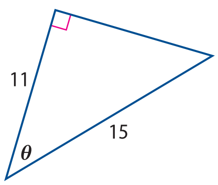
b. وبعدها في اليوم نفسه، شخص طوله 6 ft بلغ ظله 6.7 ft. ففي أي زاوية تكون الشمس عمودية على الأفق؟

جد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة، إن تطلب الأمر. (الدرس 4-1)

6.



7.

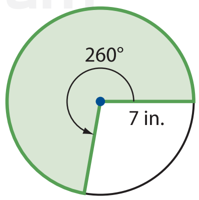


.8 اكتب $\frac{2\pi}{9}$ بالدرجات. (الدرس 4-2)

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء والزاوية المُعطاة. (الدرس 4-2)

9. $\frac{3\pi}{10}$ **10.** $-22°$

.11 **الاختيار من متعدد:** جد المساحة بالتقريب للمنطقة المظللة. (الدرس 2-3)



A $12.2\ in^2$

B $42.8\ in^2$

C $85.5\ in^2$

D $111.2\ in^2$

.12 **السفر** تتحرَّك سيارة بسرعة 55 ميلاً في الساعة على إطارات تقاس بــ 2.6 قدم في القطر. جد سرعة زاوية الإطارات بالتقريب بمقياس راديان في الدقيقة. (الدرس 4-2)

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع الخاصة بها. (الدرس 4-3)

13. $175°$ **14.** $\frac{21\pi}{13}$

جد قيمة كل تعبير. إن لم تكن محددة، فاكتب غير محددة. (الدرس 4-3)

15. $\cos 315°$ **16.** $\sec \frac{3\pi}{2}$

17. $\sin \frac{5\pi}{3}$ **18.** $\tan \frac{5\pi}{6}$

جد قيم النسب المثلثية الست لــ θ. (الدرس 4-3)

.19 $\cos \theta = -\frac{2}{5}$, حيث $\sin \theta < 0$ و $\tan \theta > 0$

.20 $\cot \theta = \frac{4}{3}$, حيث $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta > 0$

حدد السعة، والدورة، والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم دورتين كاملتين للدالة. (الدرس 4-4)

21. $y = -3 \sin \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ **22.** $y = 5 \cos 2x - 2$

.23 **الاختيار من متعدد:** أي هذه الدوال لها التمثيل البياني نفسه مثل $y = 3 \sin (x - \pi)$؟ (الدرس 4-4)

F $y = 3 \sin (x + \pi)$

H $y = -3 \sin (x - \pi)$

G $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

J $y = -3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

.24 **النابض:** يمكن تمثيل تحرك جسم متصل بنابض يتذبذب عبر موضعه الأصلي بــ $x(t) = A \cos \omega t$؛ حيث A هي الإزاحة الأولية من موضع السكون، و ω ثابت يعتمد على النابض وكتلة الجسم المتصل بالنابض، و t هو الزمن بالثواني. (الدرس 4-4)

a. مثِّل حركة الجسم المتصل بالنابض بيانيًا، مع إزاحة 4 سنتيمترات؛ حيث $\omega = 3$.

b. ما المدة التي يستغرقها الجسم للعودة إلى الموضع الأوَّلي للمرة الأولى؟

c. إذا كان الثابت ω يساوي $\sqrt{\frac{k}{m}}$؛ حيث k ثابت النابض، و m كتلة الجسم. كيف يمكن أن تؤثر زيادة كتلة الجسم في فترة ذبذبته؟ اشرح استنتاجك.

.25 **العوامة:** إذا كان ارتفاع جهاز الإرسال الملحق بالعوامة على مستوى سطح البحر بالأقدام يُمثَّل بواسطة $h = a \sin bt + \frac{11}{2}$. وفي المياه الهائجة، يتراوح الارتفاع بين 1 ft و 10 ft، مع 4 ثوانٍ بين كل دورة. جد قيم a و b.

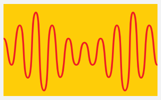
الدرس 4-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

السابق:
- تم تحليل التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

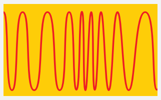
الحالي:
1. التمثيل البياني لدالة الـظل tan ومقلوب الدوال المثلثية.
2. تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيًا.

لماذا؟
- هناك نوعان من موجات الراديو، الأولى تُعرَف بالموجة معدلة السعة (AM)، والثانية تُعرَف بالموجّه معدلة التردد (FM). عندما يرسل الصوت باستخدام موجة راديو معدلة السعة (AM)، يطلق على سعة الموجة الجيبية موجة *حاملة*، وتتغير لإخراج الصوت. أما الموجة معدلة التردد (FM)، فينتج عنها تغير تردد الموجة الحاملة. ستعرف أكثر عن التمثيلات البيانية لتلك الموجات، التي تُعرَف باسم *موجات التضاؤل* في هذا الدرس.

AM signal



FM signal



المفردات الجديدة
دالة مثلثية متضائلة
damped trigonometric function

عامل التضاؤل
damping factor

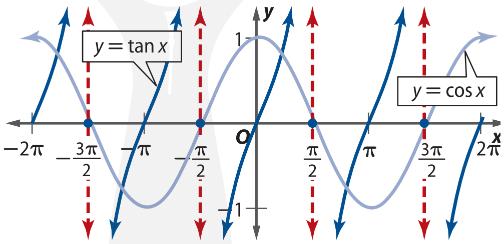
تذبذب متضائل
damped oscillation

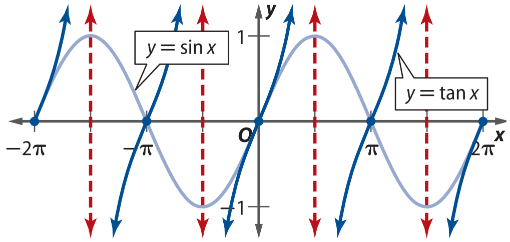
موجة متضائلة
damped wave

الحركة التوافقية المتضائلة
damped harmonic motion

1 دالة الـ tan ودوال المقلوب المثلثية
في الدرس 4-4، مثلتَ دوال الـ sine و cosine بيانيًّا على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام الأساليب نفسها في التمثيل البياني لدالة الـ tangent ودوال المقلوب المثلثية، وهي دالة cotangent و secant وcosecant.

بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، فإن دالة الـ tan تكون غير معرفة عندما تكون $\cos x = 0$. لذلك، فإن دالة tan الزاوية لها خط تقارب رأسي كلما كانت $\cos x = 0$. وبالمثل، فإن دوال tan الزاوية و sin الزاوية لها نقاط صفر عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـ π لأن $\tan x = 0$ عندما تكون $\sin x = 0$.

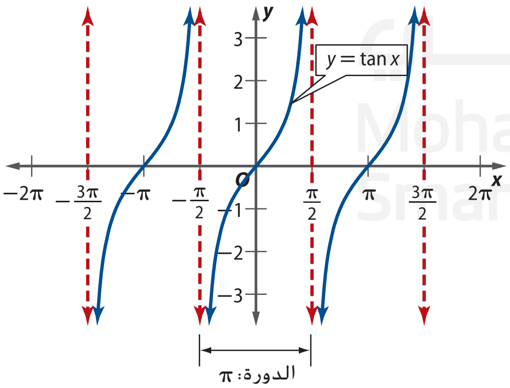




وفيما يلي ملخص خصائص دالة الـ tan.

المفهوم الأساسي خصائص دالة tan

المجال:	$x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
المدى:	$(-\infty, \infty)$
التقاطعات مع المحور الأفقي x:	$n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التقاطع مع المحور الرأسي y:	0
الاتصال:	انفصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
خطوط التقارب:	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التناظر	الأصل (دالة فردية)
قيم قصوى:	لا يوجد
السلوك الطرفي:	$\lim_{x \to -\infty} \tan x$ و $\lim_{x \to \infty} \tan x$ غير موجود. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



نصيحة دراسية

السعة لا تنطبق سعة الحد على دوال الـ tan ودوال cotan؛ لأن أقصى ارتفاعات لهذه الدوال ليست لها نهاية.

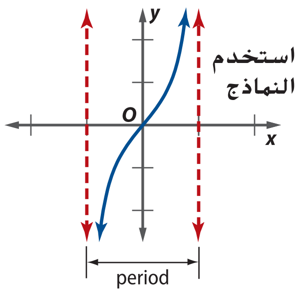
ويكون الشكل العام لدالة الـ tan، التي تشبه دوال الـ sin، هو $y = a \tan (bx + c) + d$، حيث a ينتج عنه امتداد أو ضغط رأسي b يؤثر في دورة الدالة، و c ينتج إزاحة طور، و d ينتج عنه إزاحة رأسية؛ ولا تكون قيمة a أو b تساوي 0.

المفهوم الأساسي دورة دالة الـ tan

الكلمات دورة دالة tan الزاوية هي المسافة بين أي خطي تقارب رأسيين متتاليين.

الرموز لإيجاد قيمة $y = a \tan(bx + c)$، حيث $b \neq 0$، الدورة $= \frac{\pi}{|b|}$.

استخدم النماذج



المقاربان الرأسيان المتتاليان للدالة $y = \tan x$ هما $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$. يمكنك إيجاد خطي تقارب رأسيين متتاليين لدالة tan الزاوية للشكل $y = a \tan (bx + c) + d$ عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{\pi}{2}$.

يمكنك تمثيل دالة الـ tan بيانيًا عن طريق تخطيط خطوط تقارب رأسية، على التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط بين خطوط تقارب والتقاطع مع المحور الأفقي x.

المثال 1 تغيير الأبعاد (التمدّد) الأفقي بمقياس التمثيل البياني لدالة الـ tan

حدد خطوط التقارب الرأسية للدالة، ثم مَثل بيانيًا $y = \tan 2x$.

التمثيل البياني لـ $y = \tan 2x$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ مضغوطًا أفقيًا. وتكون الدورة $\frac{\pi}{|2|}$ أو $\frac{\pi}{2}$.

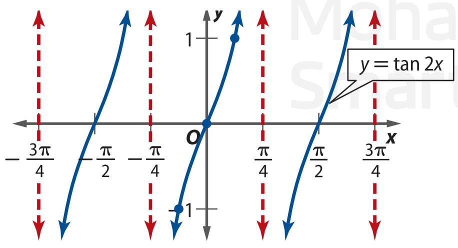
جد مقاربين رأسيين متتاليين.

$bx + c = \frac{\pi}{2}$	**معادلات مقارب tan**	$bx + c = -\frac{\pi}{2}$
$2x + 0 = \frac{\pi}{2}$	$b = 2, c = 0$	$2x + 0 = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{4}$	بسّط	$x = -\frac{\pi}{4}$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين خطي التقارب الرأسيين عند $x = -\frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{4}$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{4}$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دورة واحدة عن يسار الفترة $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ ودورة عن يمين الفترة $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.



تمرين موجّه

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة.

1A. $y = \tan 4x$

1B. $y = \tan \frac{x}{2}$

المثال 2 التمثيل البياني لانعكاس دالة الــ tan وانسحاباتها

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = -\tan\frac{x}{2}$

التمثيل البياني لــ $y = -\tan\frac{x}{2}$ هو التمثيل البياني لــ $y = \tan x$ ممتدة أفقيًّا، ثم منعكسة على المحور الأفقي x.
الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi$. جد مقاربين رأسيين متتاليين.

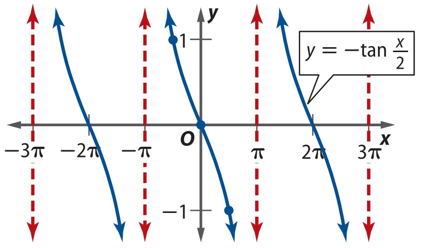
$$\frac{x}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2} \qquad b = \frac{1}{2}, c = 0 \qquad \frac{x}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \qquad \text{بسّط} \qquad x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين خطي التقارب عند $x = -\pi$ و $x = \pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, -1-\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = -\tan\frac{x}{2}$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرّر هذا الأمر لرسم دورة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



b. $y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

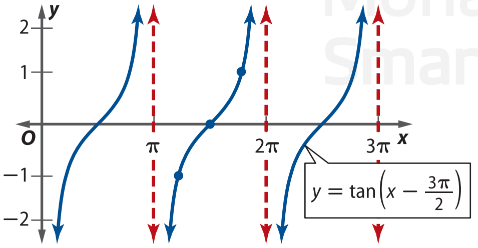
التمثيل البياني لــ$y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني $y = \tan x$ بإزاحة مقدارها$\frac{3\pi}{2}$ وحدات إلى اليمين.
الدورة هي $\frac{\pi}{|1|}$ أو π. جد خطّي تقارب رأسيين متتاليين.

$$x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad b = 1, c = -\frac{3\pi}{2} \qquad x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi \qquad \text{بسّط} \qquad x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\text{ pi}$$

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = \pi$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$	$x = 2\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة ثم ارسم دورة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



نصيحة دراسية

طريقة بديلة عند تمثيل الدالة فقط بيانيًّا بالإزاحة الأفقية c، يمكنك إيجاد النقاط الرئيسية عن طريق إضافة c لكل من *إحداثيات X للنقاط* الرئيسية للدالة الأم.

تمرين موجّه

2A. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

2B. $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

تكون دالة cotan هي مقلوب دالة الـــ tan. ويطلق عليها $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
وكما هو الحال في دالة الـــ tan. تكون أيضًا صيغة دورة دالة cotan $y = a\cot(bx + c) + d$ ويمكن إيجادها عن طريق حساب $\frac{\pi}{|b|}$. كما يمكن إيجاد خطّي تقارب رأسيين متتاليين عن طريق حل المعادلات $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$. وفيما يلي ملخص خصائص دالة cotan.

المفهوم الأساسي خصائص دالة الـــ Cotan

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

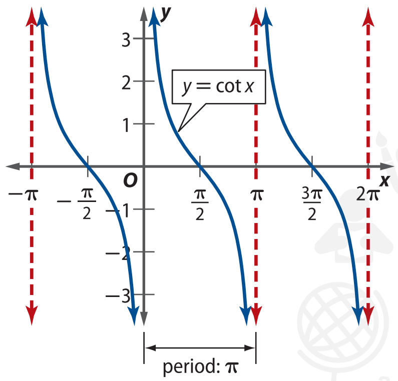
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: نقطة الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to-\infty} \cot x$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \cot x$ غير موجودة. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



يمكنك تمثيل دالة cotan بيانيًا بالأساليب التي استخدمتها في تمثيل دالة الـــtan.

المثال 3 تمثيل دالة الـــ cotan بيانيًّا

حدد خطي تقارب رأسيين، ثم مثل بيانيًّا الآتي $y = \cot \frac{x}{3}$.

التمثيل البياني لـــ $y = \cot \frac{x}{3}$ هو التمثيل البياني لـــ $y = \cot x$ متمددًا أفقيًا. الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}$ أو 3π. جد خطي تقارب رأسيين متتاليين عن طريق حل $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$.

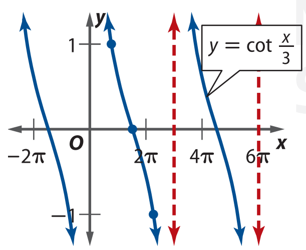
$\frac{x}{3} + 0 = 0$ $b = \frac{1}{3}, c = 0$ $\frac{x}{3} + 0 = \pi$

$x = 3(0)$ أو 0 بسّط $x = 3(\pi)$ أو 3π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به التقاطع مع المحور الأفقي x. الذي يقع بين خطي التقارب عند $x = 0$ و $x = 3\pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \cot x$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$	$x = \pi$
$y = \cot \frac{x}{3}$	$x = 0$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{9\pi}{4}, -1\right)$	$x = 3\pi$

ثم اتبع الإرشادات التي استخدمتها في رسم دالة الـــ tan. مع رسم منحنى من خلال النقاط الرئيسية المحددة التي تجدها. ثم ارسم دورة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجّه

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

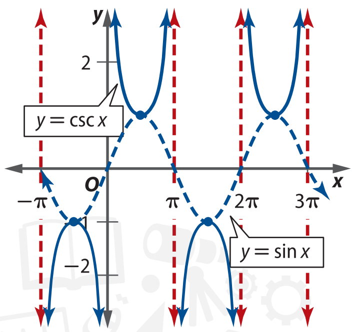
3A. $y = -\cot 3x$

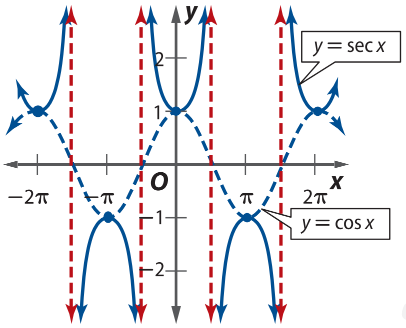
3B. $y = 3\cot \frac{x}{2}$

نصيحة تقنية

التمثيل البياني لدالة cotan عند استخدام الحاسبة البيانية لتمثيل دالة cotan بيانيًا. أدخل مقلوب الـــ tan. $y = \frac{1}{\tan x}$. الحاسبات البيانية قد تنتج خطوطًا متصلة عند حدوث الخطوط التقارب. وسيؤدي تعيين النمط على DOT إلى إخفاء الخط.

يطلق على مقلوب x $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ويطلق على مقلوب $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ .x كما هو موضح.





وتحتوي دالة csc على خطوط تقارب عندما تكون $\sin x = 0$. عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـــ π.
كذلك، تحتوي دالة sec على خطوط تقارب عندما تقع $\cos x = 0$. عند مضاعفات الأعداد الفردية لـــ$\frac{\pi}{2}$. لاحظ أيضًا أن التمثيل البياني لـــ $y = \csc x$ له قيمة صغرى نسبية لكل نقطة قيمة عظمى في منحنى sin. وقيمة عظمى نسبية لكل نقطة قيمة صغرى على منحنى sin. وينطبق الشيء نفسه على التمثيلات البيانية لـــ $y = \sec x$ و $y = \cos x$.

وفيما يلي ملخص خصائص دوال sec ودوال csc.

المفهوم الأساسي خصائص دوال secant و دوال cosecant

دالة cosecant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع

المحور الأفقي x: لا يوجد

التقاطع مع

المحور الرأسي y: لا يوجد

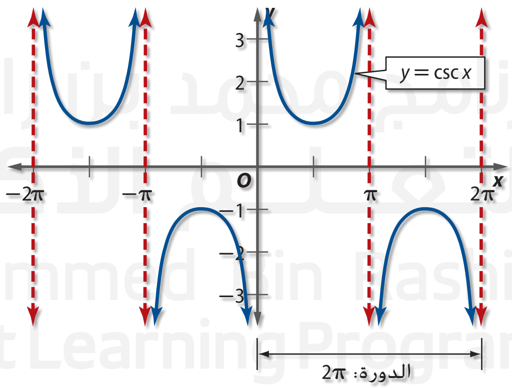
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: نقطة الأصل (دالة فردية)

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to-\infty} \csc x$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \csc x$ غير موجودتين.

تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



دالة secant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع

المحور الأفقي x: لا يوجد

التقاطع مع

المحور الرأسي y: 1

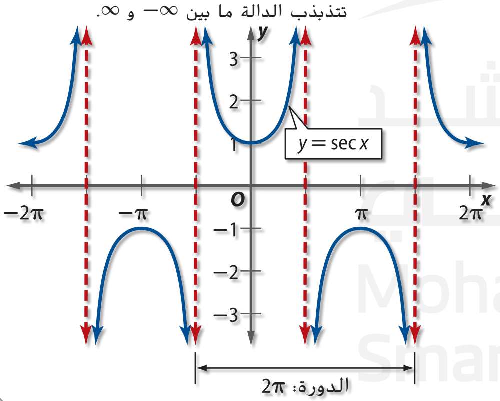
الاتصال: انقطاع الاتصال عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: محور رأسيy (الدالة الزوجية)

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sec x$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \sec x$ غير موجودتين.

تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



نصيحة تقنية

التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني لدوال csc ودوال sec على الحاسبة البيانية التمثيل البياني لدالة tan التمام. أدخل مقلوب دوال الـــ sin ودوال الـــ cosine.

ومثل دوال الـــ sin. يمكن إيجاد دورة دالة الـــ sec للشكل $y = a\sec(bx + c) + d$ أو دالة csc للشكل $y = a\csc(bx + c) + d$ عن طريق حساب $\frac{2\pi}{|b|}$. يمكن إيجاد خطي التقارب الرأسيين لدالة sec عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$ وإيجاد خطي تقارب رأسيين لدالة csc عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$.

لتمثيل دالة cosecant أو دالة secant بيانيًا، ضع خطوط التقارب للدالة، ثم جد الحد الأدنى النسبي المطابق والنقاط الدنيا.

المثال 4 تمثيل دوال الــ secant و الــ cosecant بيانيًا

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

التمثيل البياني لــ $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني لــ $y = \csc x$ بإزاحة الوحدات بمقدار $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π. ويوجد خطي التقارب الرأسيان عندما يكون $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$. لذا، فإن خطي التقارب هما $x + \frac{\pi}{2} = -\pi$ أو $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x + \frac{\pi}{2} = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{2}$.

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به القيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية، اللذان يقعان بين خطي التقارب عند $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

الدالة	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط تقارب رأسي
$y = \csc x$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دورة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 3.5.1.

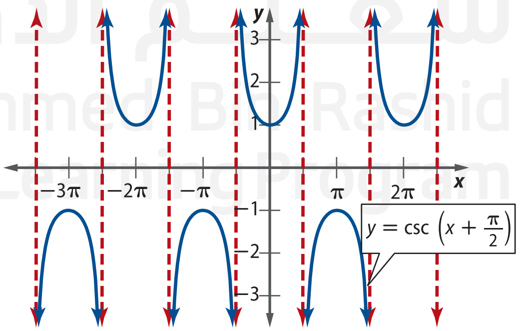
b. $y = \sec \frac{x}{4}$

التمثيل البياني لــ $y = \sec \frac{x}{4}$ هو التمثيل البياني لــ $y = \sec x$ ممتدًا أفقيًا. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}$ أو 8π. ويوجد المتقاربان الرأسيان عندما $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$. لذا، فإن خطي التقارب هما $\frac{x}{4} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ أو $x = -2\pi$ $\frac{x}{4} + 0 = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = 6\pi$.

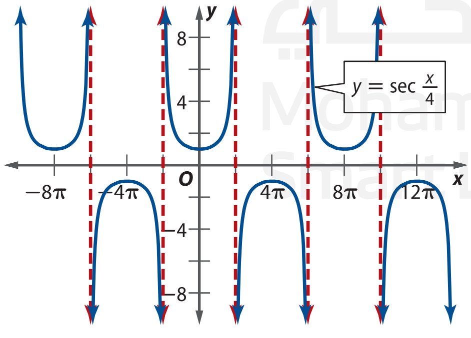
أنشئ جدولاً، وضع فيه النقاط الرئيسية الموجودة بين خطي التقارب عند $x = -2\pi$ و $x = 6\pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية الصغرى	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية العظمى	خط تقارب رأسي
$y = \sec x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$	$(\pi, -1)$	$x = \frac{3\pi}{2}$
$y = \sec \frac{x}{4}$	$x = -2\pi$	$(0, 1)$	$x = 2\pi$	$(4\pi, -1)$	$x = 6\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.2.



الشكل 3.5.1



الشكل 3.5.2

نصيحة دراسية

العثور على خطوط التقارب والنقاط الرئيسية يمكنك الاستعانة بالطبيعة الدورية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية في إيجاد خطوط التقارب والنقاط الرئيسية. في المثال 4a، لاحظ أن خط التقارب الرأسي $x = -\frac{\pi}{2}$ على مسافة واحدة من خطوط التقارب المحسوبة، $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

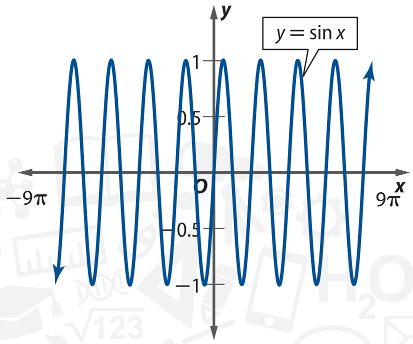
تمرين موجّه

4A. $y = \csc 2x$

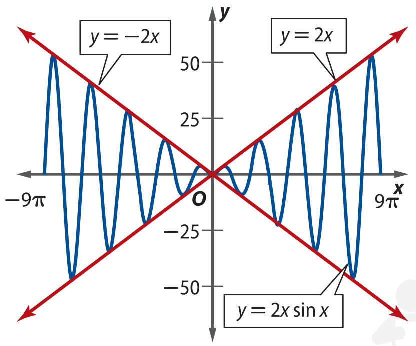
4B. $y = \sec(x + \pi)$

2 الدوال المثلثية المتضائلة

عندما تكون دالة الـ sin مضروبة بدالة أخرى $f(x)$، يكون التمثيل البياني للناتج مترددًا بين التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$ و $y = -f(x)$. عندما يقل هذا الناتج سعة موجة دالة الـ sin الأصلية، يطلق عليه **تذبذب متضائل**، وينتج عن الدالتين ما يُعرَف باسم **الدالة المثلثية المتضائلة**. يمكن رؤية هذا التغير في الذبذبات في الأشكال 3.5.3 و 3.5.4 للتمثيلات البياني للدالة $y = \sin x$ و $y = 2x \sin x$.



الشكل 3.5.3



الشكل 3.5.4

نصيحة دراسية

دوال التضاؤل الدوال المثلثية التي تتضاعف بالثوابت لا تتعرض للتضاؤل. ويؤثر الثابت في سعة الدالة.

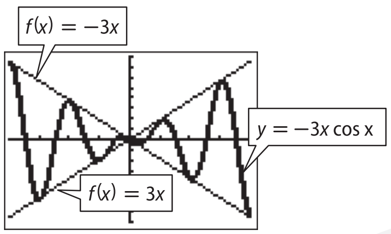
وتأخذ الدالة المثلثية المتضائلة الشكل $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، حيث $f(x)$ هو **عامل التضاؤل**.

ويحدث التذبذب المتضائل عندما يقترب x من $\pm\infty$ أو عندما يقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

المثال 5 رسم الدوال المثلثية المتضائلة

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. $y = -3x \cos x$

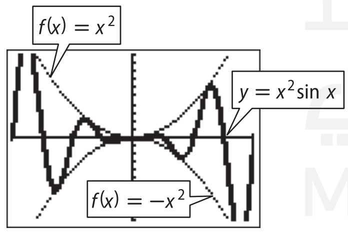


[−4π, 4π] scl: π by [−40, 40] scl: 5

دالة $y = -3x \cos x$ هي ناتج الدوال $y = -3x$ و $y = \cos x$. إذًا $f(x) = -3x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

b. $y = x^2 \sin x$

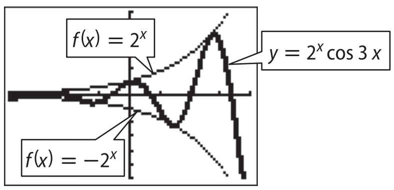


[−4π, 4π] scl: π by [−100, 100] scl: 10

الدالة $y = x^2 \sin x$ هي ناتج ضرب الدوال $y = x^2$ و $y = \sin x$. لذا، فإن عامل التضاؤل هو $f(x) = x^2$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

c. $y = 2^x \cos 3x$



[−π, π] scl: $\frac{\pi}{4}$ by [−6, 6] scl: 1

الدالة $y = 2^x \cos 3x$ هي ناتج ضرب الدالتين $y = \cos 3x$ و $y = 2^x$ لذا فإن $f(x) = 2^x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من $-\infty$.

تمرين موجّه

5A. $y = 5x \sin x$ **5B.** $y = \frac{1}{x} \cos x$ **5C.** $y = 3^x \sin x$

الربط بتاريخ الرياضيات

كاثلين سينج مورافيتس (1923–)

درست مورافيتس، كندية الأصل، تشتت الصوت والموجات المغناطيسية، ثم أثبت بعد ذلك النتائج المتعلقة بمعادلة الموجة غير الخطية.

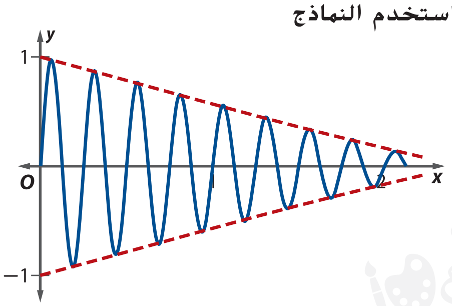
عندما تقل سعة حركة جسم مع الزمن نتيجة الاحتكاك، يطلق على تلك الحركة الحركة التوافقية التضاؤلية.

المفهوم الأساسي الحركة التوافقية التضاؤلية

الكلمات يكون الجسم في حالة **حركة توافقية تضاؤلية** عندما تحدد سعته بالدالة $a(t) = ke^{-ct}$.

الرموز بالنسبة لـ $y = ke^{-ct} \sin \omega t$ و $y = ke^{-ct} \cos \omega t$. حيث k هو الإزاحة، c ثابت التضاؤل $c > 0$، t هو الزمن، و ω هي الفترة.

استخدم النماذج



ويكون أكبر ثابت تضاؤل c أسرع كلما اقتربت السعة من الصفر. ويتوقف مقدار c على حجم الجسم والمواد التي يتألف منها.

مثال 6 من الحياة اليومية الحركة التوافقية المتضائلة

الموسيقى: أدى سحب وتر جيتار مسافة 0.8 cm أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 2.1، وتردد الملاحظة الناتجة 175 دورة في الثانية

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

ويحدث الحد الأقصى لإزاحة الوتر عندما يكون $t = 0$، لذا فإن الدالة $y = ke^{-ct}\cos \omega t$ يمكن أن تمثل حركة الوتر؛ لأن التمثيل البياني للدالة $y = \cos t$ يتقاطع مع المحور الرأسي y بدلاً من 0.

وتحدث الإزاحة القصوى عند سحب الوتر لمسافة 0.8 سنتيمتر. وتكون قيمة الإزاحة الكلية هي ناتج طرح الإزاحة القصوى من M الإزاحة الدنيا m. لذا فإن

$k = M - m = 0.8 - 0$ أو 0.8 cm.

ويمكنك استعمال قيمة التردد لإيجاد قيمة ω.

$$\frac{|\omega|}{2\pi} = 175 \qquad \text{التردد} = \frac{|\omega|}{2\pi}$$

$$|\omega| = 350\pi \qquad \text{وبضرب الطرفين في } 2\pi.$$

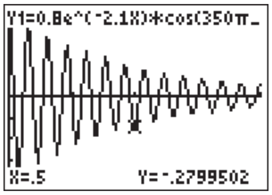
اكتب دالة مستعيناً بقيم k، ω، و c.

وتكون $y = 0.8e^{-2.1t}\cos 350\pi t$ هي إحدى النماذج التي تمثل حركة الوتر.

b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.28 \le y \le 0.28$.

باستخدام الحاسبة البيانية، حدد قيمة t عندما يكون التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t}\cos 350\pi t$ is يتذبذب بين $y = -0.28$ و $y = 0.28$.

ومن التمثيل البياني، ترى أن التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t}\cos 350\pi t$ يستغرق تقريبًا 0.5 ثانية ليتذبذب خلال الفترة $-0.28 \le y \le 0.28$.



[0, 1] scl: 0.5 by [−0.75, 0.75] scl: 0.25

الربط بالحياة اليومية

يمتد كل وتر في الجيتار إلى طول معين ونسبة شد معينة. وتلك العوامل، جنبًا إلى جنب مع وزن ونوع الخيط، تؤدي إلى حدوث اهتزاز مع تردد مميز أو نغمة تسمى بترددها الأساسي، وهي التي تُنتج النوتة الموسيقية التي نسمعها.

المصدر: كيف تجري الأمور

تمرين موجّه

6. **الموسيقى** بفرض وجود وتر جيتار آخر، تم سحبه لمسافة 0.5 سنتيمتر أعلى موضع سكونه بتردد 98 دورة في الثانية، وثابت تضاؤل 1.7.

A. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t.

B. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.15 \le y \le 0.15$.

تمارين

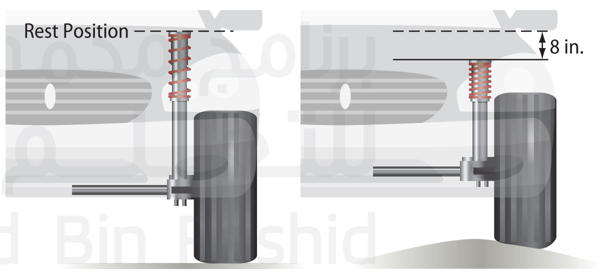
حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة. (الأمثلة 1-4)

1. $y = 2\tan x$
2. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. $y = -3\tan\frac{x}{3}$
5. $y = -\frac{1}{4}\cot x$
6. $y = -\tan 3x$
7. $y = -2\tan(6x - \pi)$
8. $y = \cot\frac{x}{2}$
9. $y = \frac{1}{5}\csc 2x$
10. $y = \csc\left(4x + \frac{7\pi}{6}\right)$
11. $y = \sec(x + \pi)$
12. $y = -2\csc 3x$
13. $y = 4\sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
14. $y = \sec\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$
15. $y = \frac{3}{2}\csc\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
16. $y = -\sec\frac{x}{8}$

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. (المثال 5)

17. $y = \frac{3}{5}x\sin x$
18. $y = 4x\cos x$
19. $y = 2x^2\cos x$
20. $y = \frac{x^3}{2}\sin x$
21. $y = \frac{1}{3}x\sin 2x$
22. $y = (x-2)^2\sin x$
23. $y = e^{0.5x}\cos x$
24. $y = 3^x\sin x$
25. $y = |x|\cos 3x$
26. $y = \ln x\cos x$

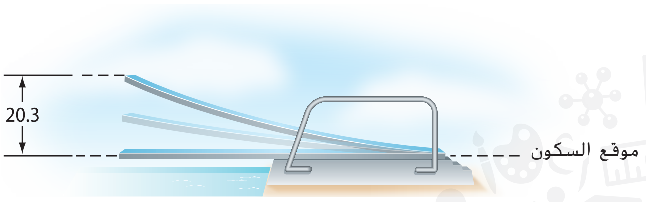
27. **الميكانيكا:** عند اصطدام السيارة المبينة أدناه بمضخة، يتم ضغط ممتص الصدمات حتى 8 بوصات، ثم تحريره ليبدأ في حركة توافقية تضاؤلية بتردد 2.5 دورة في الثانية. ويكون ثابت تضائل ممتص الصدمات هو 3. (المثال 6)



a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. افرض أن $t = 0$ لحظة تحرير ممتص الصدمات.

b. حدد الزمن t المستغرق في زيادة الاهتزاز ليصل إلى 4 in.

28. **الغوص:** ارتفعت حافة منصة الغطس 20.3 cm أعلى موقع سكونها بعد أن ترك الغواص المنصة. وبعد مرور ثانيتين، تحركت المنصة إلى الأعلى والأسفل 12 مرة. ويكون ثابت تضاؤل المنصة هو 0.901 (المثال 6)



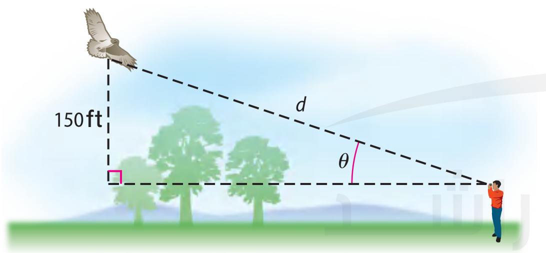
a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة منصة الغطس y إذا كانت دالة الزمن t.

b. حدد الزمن t الذي تستغرقه المنصة لتتضاءل إلى $-0.5 \le y \le 0.5$.

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة.

29. $y = \sec x + 3$
30. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \csc\frac{x}{3} - 2$
32. $y = \csc\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
33. $y = \cot(2x + \pi) - 3$
34. $y = \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

35. **التصوير:** التقط سعيد صورة لصقر كان يحلق على مسافة 150 ft فوقه. وفي النهاية، سيحلق الصقر مباشرة فوق سعيد. افرض أن d المسافة بين سعيد والصقر و θ تكون زاوية ارتفاع الصقر عن الكاميرا الخاصة بسعيد.



a. اكتب d كدالة لـ θ.

b. مثل الدالة بيانيًّا على الفترة. $0 < \theta < \pi$

c. بالتقريب، ما المسافة بين الصقر وسعيد عندما تكون زاوية الارتفاع °45؟

36. **المسافة:** يتسلق عنكبوت ببطء الجدار. وتقف هيام على بعد 6 ft من الجدار تشاهد العنكبوت. افرض أن d المسافة بين هيام والعنكبوت و θ تكون زاوية ارتفاع العنكبوت عن هيام.

a. اكتب d كدالة لـ θ.

b. مثل بيانيًّا الدالة في الفترة $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c. بالتقريب، ما المسافة بين العنكبوت وهيام عندما تكون زاوية الارتفاع °32؟

باستخدام الحاسبة البيانية: جد قيمة θ على فترة $-\pi < \theta < \pi$ التي تجعل كل معادلة صحيحة.

37. $\cot\theta = 2\sec\theta$

38. $\sin\theta = \cot\theta$

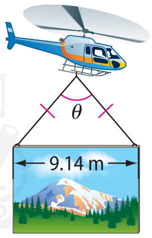
39. $4\cos\theta = \csc\theta$

40. $\tan\frac{\theta}{2} = \sin\theta$

41. $\csc\theta = \sec\theta$

42. $\tan\theta = \sec\frac{\theta}{2}$

52. **الشد:** قدمت طائرة هليكوبتر لوحة كبيرة للمدينة، سيتم عرضها في وسط المدينة. وكانت هذه اللوحة متصلة بالطائرة الهليكوبتر عن طريق حبلين كما هو موضح أدناه. وكان مقدار الشد T لكل حبل يساوي نصف قوة الهبوط $\sec\frac{\theta}{2}$.



a. قوة الهبوط بالنيوتن تساوي كتلة اللوحة بالجاذبية، وهي 9,8 N لكل كليو جرام. إذا كانت كتلة اللوحة 544 kg. فجد قيمة قوة الهبوط.

b. اكتب معادلة تمثل الشد T في كل حبل>.

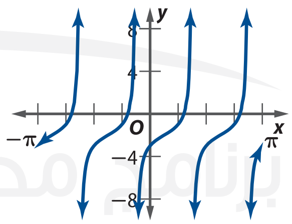
c. مثل بيانيًّا هذه المعادلة التي توجد في b في الفترة $[0, 180°]$.

d. وبفرض أن طول هذه اللوحة يساوي 9.14 m والزاوية المثالية للشد هي θ الزاوية اليمنى. حدد عدد الأحبال لنقل هذه اللوحة، بالإضافة إلى الشد المناسب لكل حبل.

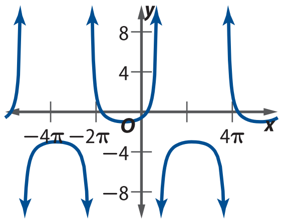
e. بفرض أن لديك 12.2 m من الأحبال لاستخدامها في نقل هذه اللوحة. جد قيمة θ وقيمة الشد المناسبة لكل حبل.

صِل كل دالة بتمثيلها البيانية.

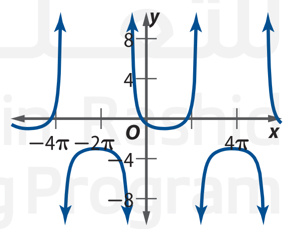
a.



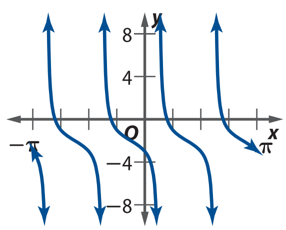
b.



c.



d.



44. $y = \csc\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

45. $y = \sec\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

46. $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

47. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

باستخدام حاسبة التمثيل البياني مثل بيانيًّا كل زوج من الدوال في الشاشة نفسها، وخمِّن هل هما متساويان لجميع الأعداد الحقيقية؟ ثم استخدم خصائص الدوال لإثبات كل تخمين.

48. $f(x) = \sec x \cos x;\ g(x) = 1$

49. $f(x) = \sec^2 x;\ g(x) = \tan^2 x + 1$

50. $f(x) = \cos x \csc x;\ g(x) = \cot x$

51. $f(x) = \dfrac{1}{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)};\ g(x) = \sin x$

مسائل مهارات التفكير العليا

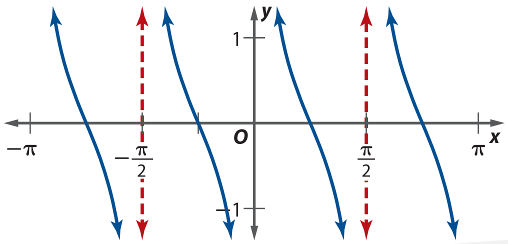
52. **الإثبات:** أثبت أن التقاطع مع المحور الراسي y في التمثيل البياني لدالة الشكل $y = ke^{-ct}\cos\omega t$ هو k.

التبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

53. إذا كان $b \neq 0$. إذا $y = a + b\sec x$ لها قيمة قصوى $\pm(a + b)$.

54. إذا كان $x = \theta$ خطا تقاربياً لـ $y = \csc x$. إذا $x = \theta$ أيضًا يعد خطًا تقاربيًا لـ $y = \cot x$.

55. **تحليل الخطأ:** درست هناء وهدى التمثيل البياني المعروض. واعتقدت هناء أن التمثيل البياني لـ $y = -\frac{1}{3}\tan 2x$، واعتقدت هدى أن التمثيل البياني $y = \frac{1}{3}\cot 2x$. فأي إجابة صحيحة؟ اشرح استنتاجك.



56. **التحدي** اكتب دالة cosecant ودالة cotan لهما التمثيل البياني نفسه $y = \sec x$ و $y = \tan x$ على التوالي. تحقق من صحة إجابتك بالتمثيل البياني.

57. **الكتابة في الرياضيات** دالة مثلثية متضائلة تتردد بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. اشرح سبب تذبذب الدالة المثلثية المتضائلة بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. ولماذا تتوقف سعة الدالة على عامل التضاؤل.

مراجعة شاملة

حدد السعة والفترة والتكرار والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم فترتين للدالة.

58. $y = 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 10$

59. $y = 2 \cos \left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - 6$

60. $y = \frac{1}{2} \cos (4x - \pi) + 1$

جد قيم الدوال المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

61. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos \theta > 0$

62. $\cos\theta = \frac{6\sqrt{37}}{37}, \sin \theta > 0$

63. $\tan \theta = \frac{24}{7}, \sin \theta > 0$

.64 مجتمع إحصائي بلغ عدد سكان المدينة منذ 10 سنين 45,600. ومنذ ذلك الوقت، ازدادت الإحصائيات بمعدل ثابت كل سنة. فإذا كانت الإحصائيات حاليًا 64,800، فجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة.

.65 الطب: عمر النصف للمادة المشعة هو الزمن الذي تستغرقه نصف ذرات المادة لتتفكك. واستخدم علماء الطب النووي نظير اليود 131-I بفترة عمر نصف 8 أيام للتحقق من وظيفة الغدة الدرقية للمريض. وبعد تناول عقار يحتوي على اليود و النظائر المجمعة في الغدة الدرقية للمريض وتثبيت كاميرا خاصة لرؤية وظيفتها. بفرض أن المريض تناول العقار الذي يحتوي على 9 مِكْرُوكُوري من 131-I. قرّب لأقرب ساعة المدة التي يستغرقها المكروكوري حتى يصل بمقدار 2.8 فقط في الغدة الدرقية للمريض؟

حل كل معادلة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطولة.

66. $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x - 1$

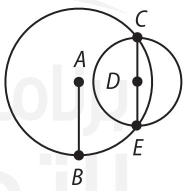
67. $x^3 + x^2 - 16x - 16;\ x + 4$

68. $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 1$

.69 التمرين: تنصح الجامعة الأمريكية للطب الرياضي بممارسة البالغين الأصحاء التمرينات على مستوى الهدف من 60٪ إلى 90٪ من المعدلات القصوى لضربات قلوبهم. ويمكنك تقدير أقصى معدل لضربات قلبك عن طريق طرح عمرك من 220. اكتب عبارة بها أكثر من متباينة لتمثل عمر a ومعدل ضربات القلب المستهدفة r.

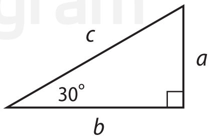
مراجعة مهارات للاختبارات المعيارية

.70 SAT/ACT في الشكل، A و D مركزي الدائرتين، ويتقاطعان في النقاط C و CE هو قطر الدائرة D. إذا كان $AB = CE = 10$، فماذا تكون AD؟



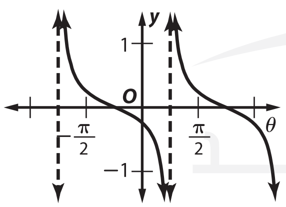
A 5 **B** $5\sqrt{2}$ **C** $5\sqrt{3}$ **D** $10\sqrt{2}$ **E** $10\sqrt{3}$

.71 مراجعة بالنظر إلى الشكل التالي. إذا كان $c = 14$، فجد قيمة b.



F $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **G** $14\sqrt{3}$ **H** 7 **J** $7\sqrt{3}$

.72 أي معادلة ممثلة بالتمثيل البياني؟



A $y = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

B $y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

C $y = \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

D $y = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

.73 مراجعة إذا كان $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ و $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، ثم $\theta = ?$

F $\frac{13\pi}{12}$ **G** $\frac{7\pi}{6}$ **H** $\frac{5\pi}{4}$ **J** $\frac{4\pi}{3}$

الدرس 4-6 الدوال المثلثية العكسية

السابق
- وجدت معكوسات العلاقات والدوال ومثّلتها بيانيًا.

الحالي
1. إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثّلها بيانيًا.
2. إيجاد تركيب الدوال المثلثية.

لماذا؟
- يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية في تمثيل زاوية الدوران المتغيرة الأفقية اللازمة لكاميرا تلفزيونية لمتابعة حركة سيارة سباق.

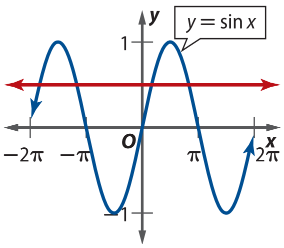
المفردات الجديدة

دالة قوس الجيب
arcsine function

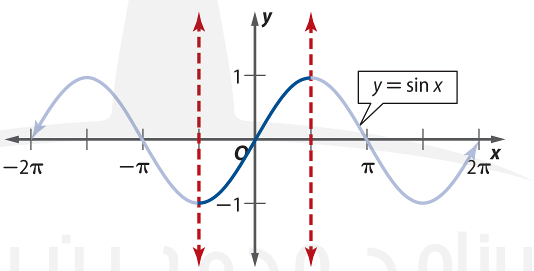
دالة قوس جيب التمام
arccosine function

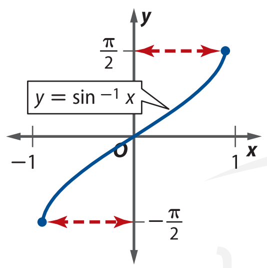
دالة قوس الظل
arctangent function

1 الدوال المثلثية العكسية تعلمت سابقًا أن كل دالة لها دالة عكسية فقط إذا كانت *واحدًا إلى واحد*. بمعنى أن كل قيمة y في الدالة يمكن أن ترتبط بقيمة x واحدة فقط. وبما أن دالة الـ sin لا تحقق اختبار الخط الأفقي، فهي ليست واحدًا إلى واحد.



ولكن إذا قيدنا مجال دالة الـ sin في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن الدالة المقيدة تكون واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة [1 ,1-] للدالة غير المقيدة. في هذا المجال المقيد، $y = \sin x$ لها دالة عكسية تسمى *دالة الـ* sin *العكسية* $y = \sin^{-1} x$. ويكون التمثيل البياني للدالة $y = \sin^{-1} x$ هو معكوس تمثيل الدالة الـ sin المقيدة على الخط $y = x$.





لاحظ أن مجال الدالة يكون $y = \sin^{-1} x$ هو [1 ,1-]. والمدى يكون $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ولأن الزوايا والأقواس الموجودة في دائرة الوحدة لها قياسات مكافئة بالراديان. فأحيانًا يشار إلى دالة الـ sin العكسية **بدالة قوس الجيب** $y = \arcsin x$.

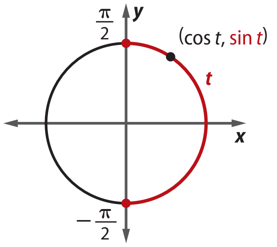
في الدرس 3-1. استخدمتَ العلاقة العكسية بين دالة الـ sin وبين دوال $\sin^{-1}$ لإيجاد قياس الزاوية الحادة. ومن التمثيل البياني بالأعلى. يمكنك أن ترى بشكل عام.

$y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$ إذا وفقط إذا كان $\sin y = x$. عندما يكون $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. **إذا وفقط إذا كان** تعني أنه شرط ضروري وكافٍ.

هذا يعني أن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$ يمكن تفسيره على أنه *الزاوية (أو القوس)* بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ مثلًا $\sin^{-1} 0.5$ هو الزاوية التي قيمة الـ sine لها يساوي 0.5.

تذكَّر أن $\sin t$ هي الإحداثي y لتلك النقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى دالة الـــ$\sin^{-1}$ مقيد بـــ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن قياسات الزاوية المحتملة لدالة الـــ$\sin^{-1}$ تقع في النصف الأيمن من دائرة الوحدة كما هو موضح.

قيم الجيب العكسية

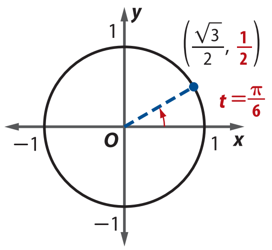


ويمكنك الاستعانة بدائرة الوحدة في إيجاد القيمة الدقيقة لبعض التعابير التي تتضمن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$.

مثال 1 إيجاد قيم دوال الـــ sin-1

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$



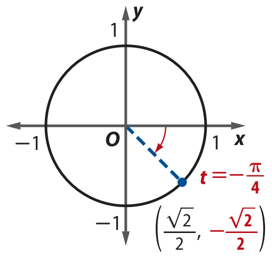
جد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{1}{2}$. عندما تكون $t = \frac{\pi}{6}$، $\sin t = \frac{1}{2}$.

من ثم تكون $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

التحقق إذا كان $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$، إذًا $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. ✔

b. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



جد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما يكون $t = -\frac{\pi}{4}$، $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم يكون $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$، إذًا $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✔

c. $\sin^{-1} 3$

نظرًا لأن مجال دالة $\sin^{-1}$ هو $[-1, 1]$ و $1 < 3$. فلا توجد sine زاوية بقيمة 3. ومن ثم، فإن قيمة $\sin^{-1} 3$ غير موجودة.

تمرين موجّه

1A. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **1B.** $\sin^{-1}(-2\pi)$ **1C.** $\arcsin(-1)$

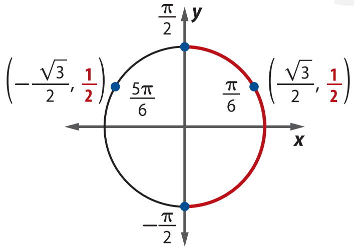
نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\sin^{-1}$ يمكنك أيضًا الاستعانة بحاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي قيمة sine لها $\frac{1}{2}$.

```
sin⁻¹(0.5)
          .5235987756
π/6
          .5235987756
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

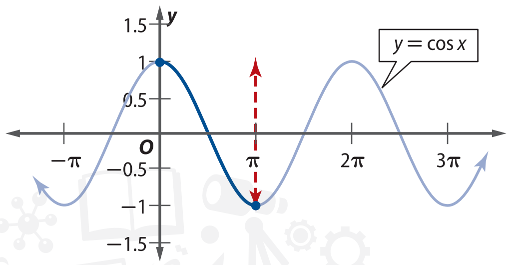
لاحظ أنه في المثال 1a بينما $\sin \frac{5\pi}{6}$ تساوي $\frac{1}{2}$، فإن $\frac{5\pi}{6}$ ليست في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. من ثم، فإن $\sin^{-1} \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$.



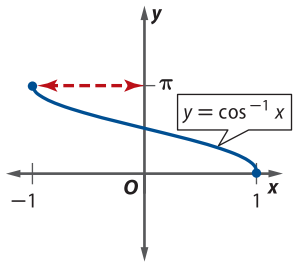
عندما يكون المجال مقيدًا على $[0, \pi]$، تكون دالة cosine واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة على $[-1, 1]$. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة cosine دالة معكوسة يطلق عليها $y = \cos^{-1} x$ و **دالة قوس جيب التمام** $y = \arccos x$. والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$ عبارة عن معكوس التمثيل البياني لدالة cosine المقيدة على الخط $y = x$.

> **نصيحة دراسية**
>
> **القيم الأساسية** أحيانًا يشار إلى الدوال المثلثية التي لها مجالات مقيدة بحروف إنجليزية كبيرة. على سبيل المثال، $y = \text{Sin } x$ تمثل الدالة $y = \sin x$. بحيث تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. وغالبًا ما يطلق على القيم في هذه المجالات المقيدة *القيم الأساسية*.

دالة جيب التمام المقيدة

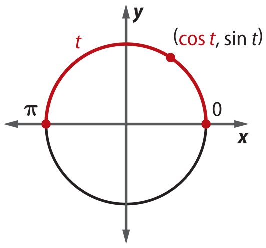


دالة جيب التمام العكسية



تذكر أن $\cos t$ هي الإحداثي x للنقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى $y = \cos^{-1} x$ مقيد بـ $[0, \pi]$، تقع قيم دالة $\cos^{-1}$ في النصف العلوي من دائرة الوحدة.

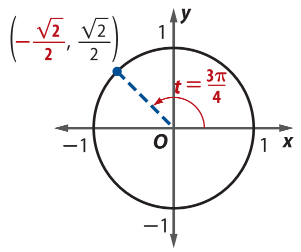
قيم جيب التمام العكسية



مثال 2 إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



جد نقطة على دائرة في الفترة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما تكون $t = \frac{3\pi}{4}$، $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

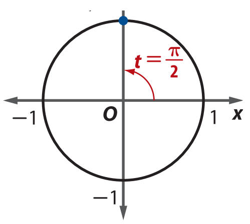
من ثم تكون $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$، إذًا $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✔

b. $\arccos(-2)$

بما أن مجال دالة arccos هو $[-1, 1]$ و $-2 < -1$. فلا توجد cosine زاوية بقيمة -2. لذا، فإن قيمة (-2) غير موجودة.

c. $\cos^{-1} 0$



جد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي 0. عندما تكون $t = \frac{\pi}{2}$، $\cos t = 0$.

من ثم يكون $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$.

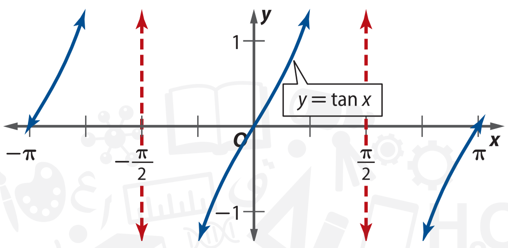
التحقق إذا كان $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، إذًا $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. ✔

تمرين موجّه

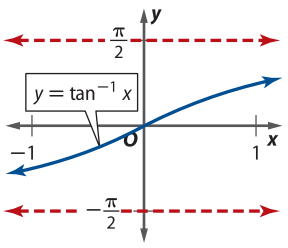
2A. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **2B.** $\arccos 2.5$ **2C.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

عندما تكون مقيدة بمجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، تكون دالة ظل الزاوية واحدًا إلى واحد. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة قوس الظل دالة عكسية تسمى *دالة معكوس ظل الزاوية* $y = \tan^{-1} x$ أو **دالة قوس الظل** $y = \arctan x$. التمثيل البياني $y = \tan^{-1} x$ يمكن إيجاده عن طريق انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية على الخط $y = x$. لاحظ أنه على عكس دوال sine و cosine، فإن مجال $\tan^{-1}$ الزاوية هو $(-\infty, \infty)$.

دالة ظل الزاوية المقيدة

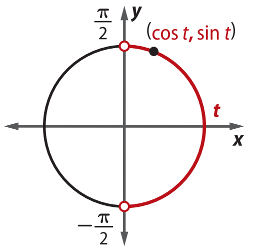


دالة معكوس ظل الزاوية



يمكنك أيضًا الاستعانة بدائرة الوحدة لإيجاد قيمة تعبير معكوس ظل الزاوية. وفي دائرة الوحدة، تكون $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ أو $\frac{y}{x}$. وستقع قيم $y = \tan^{-1} x$ في النصف الأيمن من دائرة الوحدة. ولا تشمل $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$؛ لأن دالة ظل الزاوية غير محددة على تلك النقاط.

قيم معكوس ظل الزاوية



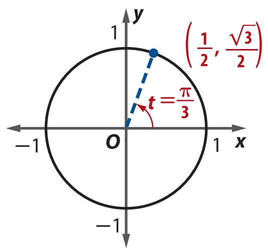
نصيحة دراسية

السلوك الطرفي لمعكوس ظل الزاوية لاحظ أنه عند انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية المقيدة على الخط $y = x$. تصير خطوط التقارب الرأسية $x = \pm\frac{\pi}{2}$ خطوط التقارب الأفقية $y = \pm\frac{\pi}{2}$ لدالة $\tan^{-1}$ الزاوية. من ثم تكون $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

مثال 3 إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

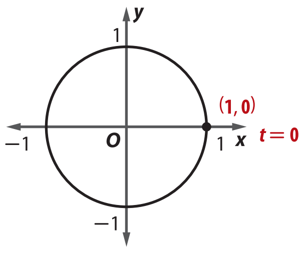
a. $\tan^{-1} \sqrt{3}$



جد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بحيث يكون $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$. عندما يكون $t = \frac{\pi}{3}$، $\tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ أو $\sqrt{3}$. من ثم تكون $\tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

التحقق إذا كان $\tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$، إذًا $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ✔

b. $\arctan 0$



جد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بحيث يكون $\frac{y}{x} = 0$. عندما تكون $t = 0$، $\tan t = \frac{0}{1}$ أو 0.

من ثم يكون $\arctan 0 = 0$.

التحقق إذا كان $\arctan 0 = 0$، إذًا $\tan 0 = 0$. ✔

تمرين موجّه

3A. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **3B.** $\tan^{-1}(-1)$

نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\tan^{-1}$ يمكنك أيضًا استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي ظل زاويتها $\sqrt{3}$.

```
tan-1(√(3))
        1.047197551
π/3
        1.047197551
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

في حين أن الدوال العكسية لـ Sec, Csc, Cot موجودة بالفعل، فإنها نادرة الاستخدام في العمليات الحسابية؛ لوجود دوال معكوسة لمقلوبها. علاوة على عدم وضوح كيفية تقرير حصر مجالات كل من Sec, Csc, Cot للحصول على Sec^{-1} الزاوية و Csc^{-1} و Cot^{-1}. ستكتشف هذه الدوال في التمرين 66.

وفيما يلي تلخيص الدوال المثلثية العكسية الأكثر شيوعًا.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

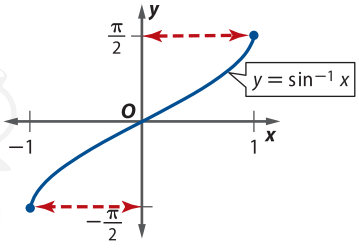
معكوس $\sin x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\sin x$.

الرموز $y = \sin^{-1} x$ إذا كان فقط $\sin y = x$.
بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



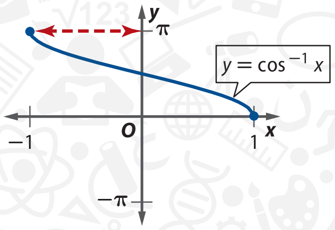
معكوس $\cos x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين 0 و π بقيمة $\cos x$.

الرموز $y = \cos^{-1} x$ إذا كان فقط $\cos y = x$.
بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $[0, \pi]$



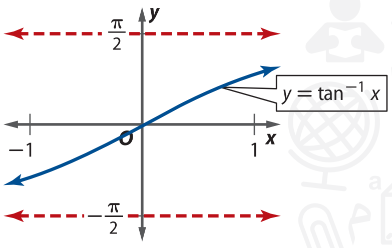
معكوس $\tan x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\tan x$.

الرموز $y = \tan^{-1} x$ إذا كان فقط $\tan y = x$.
بالنسبة لـ $-\infty < x < \infty$
و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



يمكنك تمثيل الدوال المثلثية العكسية الموجودة بالأعلى بيانيًا عن طريق إعادة كتابتها بالصيغة $\sin y = x$، $\cos y = x$، أو $\tan y = x$. وتعيين قيم y. ثم إنشاء جدول للقيم، ثم تحديد النقاط وتوصيلها بمنحنى منتظم.

مثال 4 رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

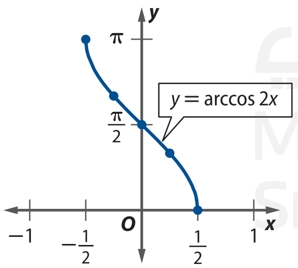
مثّل بيانيًّا $y = \arccos 2x$.

حسب التعريف، $y = \arccos 2x$ و $\cos y = 2x$ متساويين عند $0 \le y \le \pi$؛ لذا فالتمثيل البياني لكليهما واحد. أعد كتابة $\cos y = 2x$ حيث $x = \frac{1}{2}\cos y$ وعيّن قيم y في الفترة $[0, \pi]$ لإنشاء جدول القيم.

y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x = \frac{1}{2}\cos y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

انتبه!
تذكر أن $\pi = 3.14$ radians أو $180°$.

ثم حدد النقاط (x, y) وصِلها بمنحنى منتظم. لاحظ أن لهذا المنحنى نقاط نهاية عند $\left(-\frac{1}{2}, \pi\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. تشير إلى أن التمثيل البياني بأكمله $y = \arccos 2x$ موضَّح.



تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًّا.

4A. $y = \arcsin 3x$

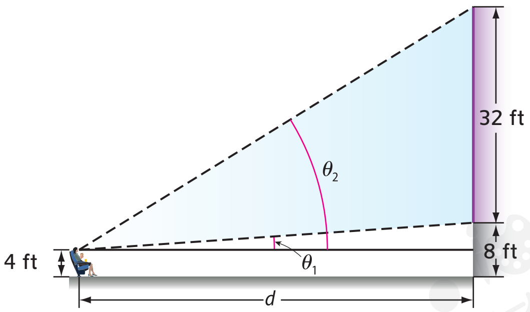
4B. $y = \tan^{-1} 2x$

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام الدالة المثلثية العكسية

الأفلام في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم؛ بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4ft فوق مستوى الأرض.

اصنع رسمًا تخطيطيًّا لإيجاد زاوية الرؤية. افترض أن θ_1 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أسفل الشاشة، ثم افترض أن θ_2 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أعلى الشاشة.



بذلك، تكون زاوية الرؤية هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$. يمكنك استخدام دالة ظل الزاوية لإيجاد قيمة θ_1 و θ_2. وبما أن مستوى عين المشاهد في أثناء جلوسه هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض، إذًا فالمسافة المقابلة لـ θ_1 هي 4 − 8 أقدام أو 4 أقدام.

$\tan \theta_1 = \frac{4}{d}$ adj = d و opp = 4

$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{4}{d}$ دالة الزاوية $\tan^{-1}$

المسافة المقابلة لـ θ_2 هي (32 + 8) - 4 ft = 36 ft.

$\tan \theta_2 = \frac{36}{d}$ adj = d و opp = 36

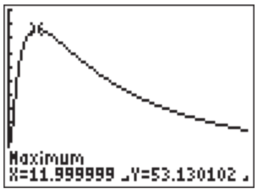
$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{36}{d}$ دالة الزاوية $\tan^{-1}$

لذا، يمكن تمثيل زاوية الرؤية بالدالة $\theta = \tan^{-1} \frac{36}{d} - \tan^{-1} \frac{4}{d}$.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

مسافة أقصى زاوية رؤية هي أقصى نقطة في التمثيل البياني. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد هذه النقطة.

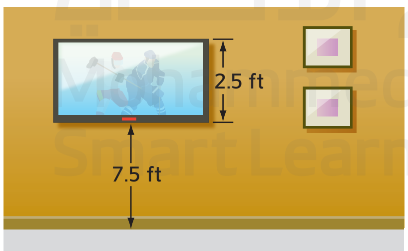
ومن خلال التمثيل البياني، ترى أن أقصى زاوية رؤية تحدث تقريبًا عند مسافة 12 قدمًا من الشاشة.



[0, 100] scl: 10 by [0, 60] scl: 5

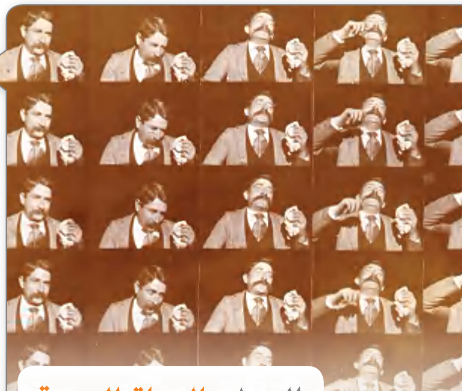
تمرين موجّه

5. التلفاز اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته، قرَّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.



A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3ft عن مستوى سطح الأرض.

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.



الربط بالحياة اليومية

في أواخر القرن 19، بدأ توماس إديسون في العمل على اختراع جهاز لتسجيل الصور المتحركة يسمى الكنيتوسكوب، صار فيما بعدُ عارض الأفلام. وكانت أول صورة متحركة محفوظة الحقوق فيلمًا لأحد موظفي إديسون وهو يعطس.

المصدر: *مكتبة الكونغرس*

2 تركيب الدوال المثلثية

تعلمت في الدرس 7-1 أنه إذا كانت x في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$، إذًا

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{و} \quad f^{-1}[f(x)] = x.$$

وبما أن مجالات الدوال المثلثية مقيدة للحصول على الدوال المثلثية العكسية، فإن الخواص لا تنطبق على قيم x.

علي سبيل المثال، عندما يكون $\sin x$ محددة لجميع قيم x. يكون مجال $\sin^{-1} x$ هو [-1, 1]. ومن ثم، $\sin(\sin^{-1} x) = x$ لا يكون صحيحًا إلا عندما يكون $-1 \le x \le 1$. وينطبق قيد مختلف على التركيب $\sin^{-1}(\sin x)$. نظرًا لأن $\sin x$ مقيد بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sin^{-1}(\sin x) = x$ يكون صحيحًا فقط عندما يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

وفيما يلي تلخيص لقيود هذا المجال.

المفهوم الأساسي مجال تركيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$	$f^{-1}[f(x)] = x$
إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.
إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.	إذا كان $0 \le x \le \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.
إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

مثال 6 استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

تطبق خواص الدوال المثلثية العكسية لأن $-\frac{1}{4}$ تقع في الفترة $[-1, 1]$.

ومن ثم، فإن $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4}$.

b. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

وبما أن $\tan x$ غير محددة عندما يكون $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجودة.

c. $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

لاحظ أن الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ لا تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ومع ذلك، $\frac{7\pi}{4}$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$ أو $-\frac{\pi}{4}$، والتي تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \qquad \text{بما أن } -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}\text{، فإن } \arcsin(\sin x) = x.$$

ومن ثم، فإن $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

انتبه!

التراكيب والمعكوسات عند حساب $f^{-1}[f(x)]$ بالدوال المثلثية، يبدو المجال $(-\infty, \infty)$. ومع ذلك، نظرًا إلى أن مدى الدوال العكسية مقيد، فأحيانًا يجب إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء.

تمرين موجّه

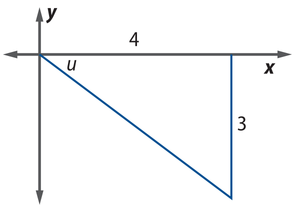
6A. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$ **6B.** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ **6C.** $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

يمكنك أيضًا إيجاد قيمة التركيب الذي يحتوي على دالتين مثلثتين معكوستين مختلفتين.

مثال 7 إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

جد قيمة $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

لتحويل التعبير إلى أبسط صورة، افترض أن $u = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$، ومن ثم تكون $\tan u = -\frac{3}{4}$.



وبما أن دالة ظل الزاوية سالبة في الربع الثاني و والرابع، ومجال دالة معكوس ظل الزاوية مقيد في الربع الأول والرابع، يجب أن تكون u في الربع الرابع.

باستخدام مبرهنة فيثاغورس، ستجد أن طول الوتر هو 5. والآن، عليك حل المسألة لإيجاد $\cos u$.

$$\cos u = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \quad \text{cosine دالة}$$

$$= \frac{4}{5} \quad \text{hyp} = 5 \text{ و } \text{adj} = 4$$

ومن ثم، فإن $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{5}$.

تمرين موجّه

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

7A. $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

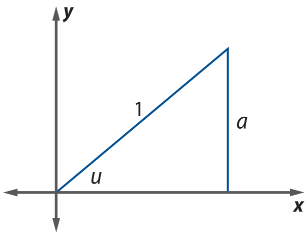
7B. $\sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

أحيانًا يقلّ التركيب الذي يحتوي على الدالتين المثلثين المختلفتين إلى تعبير جبري لا يحتوي على أي تعابير مثلثية.

مثال 8 إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لــ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

افترض أن $u = \arcsin a$، ومن ثم يكون $\sin u = a$.



ولأن مجال دالة arcsine مقيد بالربع الأول والرابع.
لا بد أن تقع u في الربع الأول أو الرابع. ويكون الحل مماثلاً في كل ربع؛ لذا سنحلل الربع الأول.

من نظرية فيثاغورس، تجد أن طول الضلع المجاور لــ u هو $\sqrt{1-a^2}$. والآن، عليك حل $\tan u$.

$$\tan u = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \quad \text{tan دالة}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2} \quad \text{adj} = \sqrt{1-a^2} \text{ و } \text{opp} = a$$

ومن ثم، فإن $\tan(\arcsin a) = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$.

تمرين موجّه

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لــ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

8A. $\sin(\arccos x)$

8B. $\cot[\sin^{-1} x]$

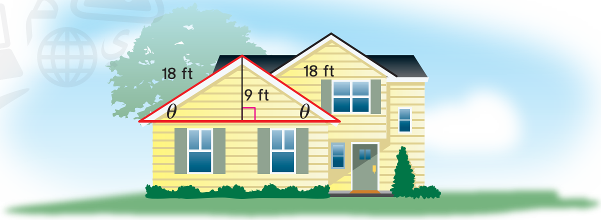
نصيحة دراسية
تحليل الدوال الجبرية يمكن عكس التقنية المستخدمة لتحويل التعابير المثلثية إلى تعابير جبرية. تحليل الدالة الجبرية كتركيب من دالتين مثلثتين هو تقنية تستخدم كثيرًا في حساب التفاضل والتكامل.

تمارين

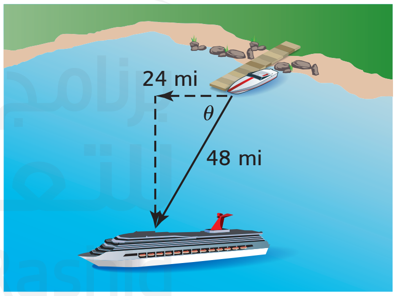
جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (الأمثلة 1-3)

1. $\sin^{-1} 0$
2. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$
5. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $\arccos 0$
7. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\arccos (-1)$
9. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. $\cos^{-1} \frac{1}{2}$
11. $\arctan 1$
12. $\arctan (-\sqrt{3})$
13. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$
14. $\tan^{-1} 0$

.15 **الهندسة المعمارية** داعم سطح على شكل مثلثين قائمين كما هو موضح أدناه. جد قيمة θ. (المثال 3)



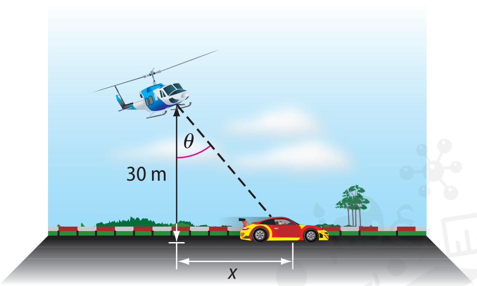
.16 **الإنقاذ** أبحرت سفينة سياحية غربًا بمقدار 24 ميلاً قبل الاتجاه نحو الجنوب. وعندما لم تستطع السفينة المتابعة، طلب طاقم السفينة المساعدة لاسلكيًا. ووجد قارب الإنقاذ أن أسرع طريق يبلغ طوله 48 ميلاً. جد الزاوية θ التي يجب أن يأخذها قارب الإنقاذ لمساعدة السفينة السياحية. (المثال 3)



مثّل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $y = \arcsin x$
18. $y = \sin^{-1} 2x$
19. $y = \sin^{-1} (x + 3)$
20. $y = \arcsin x - 3$
21. $y = \arccos x$
22. $y = \cos^{-1} 3x$
23. $y = \arctan x$
24. $y = \tan^{-1} 3x$
25. $y = \tan^{-1} (x + 1)$
26. $y = \arctan x - 1$

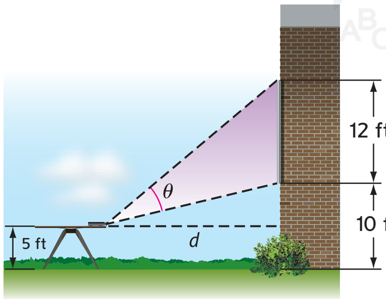
.27 **سباق السيارات** تُصوِّر كاميرا تليفزيونية سباق سيارات. وتدور الكاميرات مع حركة السيارات أمامها. وتبعد الكاميرا عن حلقة السباق مسافة 30 مترًا. جد قيمة θ و x كما هو موضح في الشكل. (المثال 5)



.a اكتب θ كدالة x.

.b جد θ عندما تكون $x = 6$ m و $x = 14$ m.

.28 **الرياضة** يريد سالم وراشد عرض لعبة كرة القدم للمحترفين بجانب مبنى سكنهما. فوضعا عارض الأفلام على طاولة يبلغ طولها 5ft. ثم ثبَّتا شاشة طولها 12ft ترتفع عن الأرض بمقدار 10ft. (المثال 5)



.a اكتب دالة تعبّر عن θ من حيث المسافة d.

.b استخدم حاسبة التمثيل البياني في تحديد مسافة أقصى زاوية عرض.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (المثالان 6 و7)

29. $\sin\left(\sin^{-1} \frac{3}{4}\right)$
30. $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$
31. $\cos\left(\cos^{-1} \frac{2}{9}\right)$
32. $\cos^{-1} (\cos \pi)$
33. $\tan\left(\tan^{-1} \frac{\pi}{4}\right)$
34. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{3}\right)$
35. $\cos (\tan^{-1} 1)$
36. $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$
37. $\sin\left(2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
38. $\sin (\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$
39. $\cos (\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$
40. $\cos\left(\cos^{-1} 0 + \sin^{-1} \frac{1}{2}\right)$

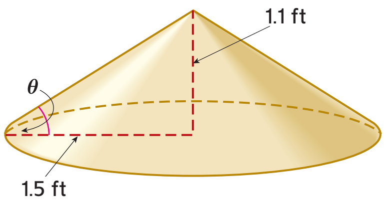
اكتب كل تعبير مثلثي في صورة تعبير جبري لـ x. (المثال 8)

41. $\tan(\arccos x)$
42. $\csc(\cos^{-1} x)$
43. $\sin(\cos^{-1} x)$
44. $\cos(\arcsin x)$
45. $\csc(\sin^{-1} x)$
46. $\sec(\arcsin x)$
47. $\cot(\arccos x)$
48. $\cot(\arcsin x)$

صف كيفية ربط التمثيلات $f(x)$ و $g(x)$ البيانية.

49. $f(x) = \sin^{-1} x$ و $g(x) = \sin^{-1}(x-1) - 2$
50. $f(x) = \arctan x$ و $g(x) = \arctan 0.5x - 3$
51. $f(x) = \cos^{-1} x$ و $g(x) = 3(\cos^{-1} x - 2)$
52. $f(x) = \arcsin x$ و $g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x+2)$
53. $f(x) = \arccos x$ و $g(x) = 5 + \arccos 2x$
54. $f(x) = \tan^{-1} x$ و $g(x) = \tan^{-1} 3x - 4$

55. **الرمال** عند تراكم الرمال، تشكلت زاوية بين الكومة والأرض، وبقيت ثابتة إلى حد ما. ويطلق على هذه الزاوية زاوية السكون. وبافتراض أن امرأة صنعت كومة من الرمال على الشاطئ يبلغ قطرها 3 أقدام وارتفاعها 1.1 قدم.



a. ما قيمة زاوية السكون؟

b. إذا ظلت زاوية السكون ثابتة، فكَم يبلغ القطر الذي تحتاج إليه الكومة لتصل إلى الارتفاع 4 أقدام؟

حدد المجال والمدى لكل دالة تركيب. ومن ثم، استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيلها بيانيًا.

56. $y = \cos(\tan^{-1} x)$
57. $y = \sin(\cos^{-1} x)$
58. $y = \arctan(\sin x)$
59. $y = \sin^{-1}(\cos x)$
60. $y = \cos(\arcsin x)$
61. $y = \tan(\arccos x)$

62. **المعكوسات** تمثل دالة Sec^{-1} بيانيًا بتقييد مجال دالة Sec التي تقع في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. وتمثل دالة Csc^{-1} عن طريق تحديد مجال دالة Csc للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ و $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. حدد المجال والمدى لكل دالة.

b. مثّل كل دالة بيانيًا.

c. اشرح لماذا يعد تقييد المجال لدوال Sec, Csc ضروريًا في التمثيل البياني للدوال العكسية.

اكتب كل تعبير جبري كدالة مثلثية للدالة المثلثية العكسية x.

63. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
64. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التمثيلات البيانية لتركيبات الدوال المثلثية.

a. **تحليليًا** افترض أن $f(x) = \sin x$ و $f^{-1}(x) = \arcsin x$. صف مجال ومدى $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$.

b. **بيانيًا** صمّم جدولاً من القيم العديدة لكل دالة تركيب في الفترة $[-2, 2]$. ثم استخدم الجدول لرسم التمثيلات البيانية لـ $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

c. **تحليليًا** افترض أن $g(x) = \cos x$ و $g^{-1}(x) = \arccos x$. صف مجال ومدى $g^{-1} \circ g$ و $g \circ g^{-1}$ وخمن كيف سيبدو شكل التمثيلات البيانية لـ $g^{-1} \circ g$ و $g \circ g^{-1}$. اشرح استنتاجك.

d. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية لـ $g^{-1} \circ g$ و $g \circ g^{-1}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

e. **كلاميًا** خمن شكل التمثيلات البيانية للتركيبين المحتملين لدوال ظل الزاوية وقوس ظل الزاوية. اشرح استنتاجك. ثم تحقق من تخمينك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الخطأ** يناقش أحمد وعلي الدوال المثلثية العكسية. بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ خمّن أحمد أن $\tan^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$. ولكن لم يوافقه علي الرأي. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.

67. **تحدٍ** استخدم التمثيلات البيانية لـ $y = \sin^{-1} x$ و $y = \cos^{-1} x$ لإيجاد قيمة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ في الفترة $[-1, 1]$. اشرح استنتاجك.

68. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، فإن $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}$. اشرح استنتاجك.

التبرير حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم لا فردية ولا زوجية. علل إجابتك.

69. $y = \sin^{-1} x$
70. $y = \cos^{-1} x$
71. $y = \tan^{-1} x$

72. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن لقيود دوال sine و cosine و tangent التحكم في المجال والمدى لدوالها العكسية.

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًّا.

73. $y = 3 \tan \theta$

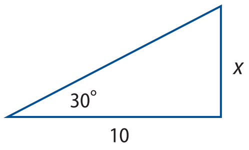
74. $y = \cot 5\theta$

75. $y = 3 \csc \frac{1}{2}\theta$

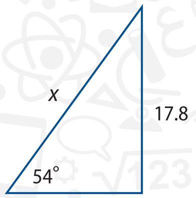
76. **الأمواج** تطفو ورقة على سطح الماء، وتتحرك صعودًا وهبوطًا. والمسافة بين أعلى النقاط وأدناها 4 سنتيمترات. وتتحرك من النقطة العُليا إلى النقطة الدنيا، ثم إلى النقطة العُليا من جديد كل 10 ثوانٍ. اكتب الدالة التي تمثل حركة الورقة من حيث نقطة التوازن.

جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

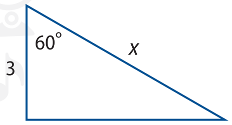
77.



78.



79.



لكل زوج من الدوال، جد $[f \circ g](x)$، $[g \circ f](x)$، و$[f \circ g](4)$.

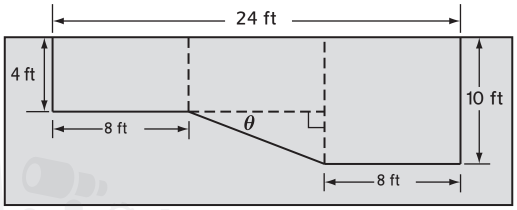
80. $f(x) = x^2 + 3x - 6$
$g(x) = 4x + 1$

81. $f(x) = 6 - 5x$
$g(x) = \frac{1}{x}$

82. $f(x) = \sqrt{x + 3}$
$g(x) = x^2 + 1$

83. **التعليم** أجاب طارق عن 11 سؤالاً من الاختبار اليومي القصير الذي يتكون من 20 سؤالاً بشكل صحيح. وقال له مدرب البيسبول الخاص به إنه يجب أن يرفع متوسط مستواه إلى 70% على الأقل إذا رغب في المشاركة في افتتاحية الموسم القادم. وتعهد طارق أن يدرس بجِدّ، وأن يجيب عن جميع أسئلة الاختبار اليومي القصير بشكل صحيح في المستقبل. فكَمْ سؤالًا يجب عليه إجابته بشكل صحيح ليرفع متوسط مستواه إلى 70%؟

84. **SAT/ACT** ما قيمة زاوية الانخفاض θ بين نهاية السطح ونهاية عمق حمام السباحة لأقرب درجة؟



رؤية جانبية لحمام السباحة

A $25°$ **B** $37°$ **C** $41°$ **D** $53°$ **E** $73°$

85. أي مما يلي يمثل القيمة الدقيقة $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

F $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

G $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

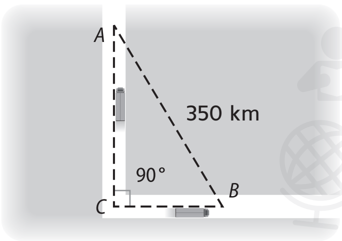
H $\frac{\sqrt{5}}{5}$

J $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

86. **مراجعة** يبلغ وتر المثلث القائم 67 cm. إذا كان قياس إحدى الزوايا °47. فما طول أقصر ضلع في المثلث؟

A 45.7 cm **B** 49.0 cm **C** 62.5 cm **D** 71.8 cm

87. **مراجعة** شاحنتان، A و B، بدأ سيرهما من التقاطع C لطريقين مستقيمين في الوقت نفسه. وكانت الشاحنة A تتحرك بضِعف سرعة الشاحنة B. وبعد 4 ساعات، كان بُعد إحدى الشاحنتين عن الأخرى 350 mi. جد تقريبًا سرعة الشاحنة B بالميل في كل ساعة.



F 39 **G** 44 **H** 51 **J** 78

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

حساب مثلثات المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 4-1)

$\sin \theta = \frac{opp}{hyp}$ $\cos \theta = \frac{adj}{hyp}$ $\tan \theta = \frac{opp}{adj}$

$\csc \theta = \frac{hyp}{opp}$ $\sec \theta = \frac{hyp}{adj}$ $\cot \theta = \frac{adj}{opp}$

الدرجات والراديان (الدرس 4-2)

- للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$
- للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$
- السرعة الخطية: $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس خلال الزمن t
- السرعة الزاويّة: $\omega = \frac{\theta}{t}$، حيث θ هي زاوية الدوران (بالراديان) المحركة خلال الزمن t

النسب المثلثيّة على دائرة الوحدة (الدرس 4-3)

- بالنسبة لزاوية θ المقيسة بالراديان، والتي بها (x, y) و $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- بالنسبة للزاوية t التي بها (x, y) على دائرة الوحدة $\cos \theta = x$ و $\sin \theta = y$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

تمثيل دوال الـ sine الزاوية والـ cosine بيانيًّا (الدرس 4-4)

- تُكتب دالة الـ sine كالتالي: $y = a \sin (bx + c) + d$ أو $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث السعة= $|a|$، والفترة = $\frac{2\pi}{|b|}$ والتردد = $\frac{|b|}{2\pi}$، وإزاحة الطور = $-\frac{c}{|b|}$، والإزاحة الرأسية = d.

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى (الدرس 4-5)

- تُكتب الدالة المثلثية المتضائلة كالتالي: $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، عندما تكون $f(x)$ هي العامل المتضائل.

الدوال المثلثية العكسيّة (الدرس 4-6)

- $y = \sin^{-1} x$ iff $x = \sin y$ لكل x في الفترة $[-1, 1]$ و y في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = \cos^{-1} x$ iff $x = \cos y$ لكل x في الفترة $[-1, 1]$ و y في الفترة $[0, \pi]$.
- $y = \tan^{-1} x$ iff $x = \tan y$ لكل x في الفترة $(-\infty, \infty)$ و y في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

المفردات الأساسية

- السعة
- زاوية الانخفاض
- زاوية الارتفاع
- السرعة الزاويّة
- دالة دائرية
- قاطع التمام Cosecant
- جيب التمام Cosine
- ظل التمام
- زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء
- الدالة المثلثية المتضائلة
- الموجة المتضائلة
- عامل التضاؤل
- التكرار
- ضلع الابتداء
- الدالة المثلثية العكسية
- السرعة الخطية
- خط الوسط
- المثلث المائل
- الفترة الزمنية
- دالة زمنية
- إزاحة الطور
- الزاوية الربعية
- الراديان
- دالة المقلوب
- الزاوية المرجعية
- القاطع
- القطاع
- جيب الزاوية Sine
- منحنى الـ Sine
- الوضع القياسي
- المماس
- ضلع الإنتهاء
- الدوال المثلثية
- الدوال المثلثية
- دائرة الوحدة
- إزاحة رأسية

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحت خط لصياغة عبارة صحيحة.

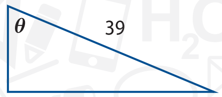
1. Sine الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الساق المقابل إلى الوتر.
2. نسبة الدالة الـ Sec هي المعكوس الضربي لنسبة الـ Sine.
3. زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى من هذا الخط.
4. قياس الراديان لزاوية يساوي نسبة طول قوسها المحصور إلى نصف القطر.
5. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى سرعته الخطية.
6. $0°$ و π و $-\frac{\pi}{2}$ هي أمثلة لزوايا المرجع.
7. دورة التمثيل البياني للدالة $y = 4 \sin 3x$ هي 4.
8. بالنسبة إلى $f(x) = \cos bx$ كلما ازداد b انخفض التكرار.
9. مدى دالة Sin^{-1} هو $[0, \pi]$.

المراجعة التابعة للدرس

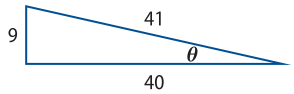
4-1 حساب مثلثات المثلثات قائمة الزوايا

جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

11.

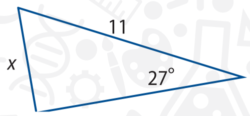


12.

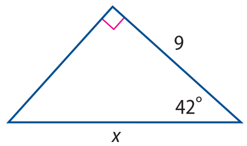


جد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

13.

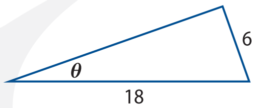


14.

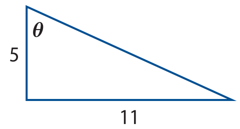


جد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

15.

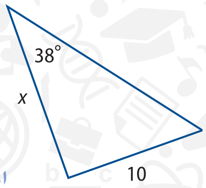


16.



مثال 1

جد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ دالة tan

$\tan 38° = \frac{10}{x}$ $\theta = 38°$, opp $= 10$, adj $= x$

$x \tan 38° = 10$ اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{10}{\tan 38°}$ اقسم كل طرف على $\tan 38°$.

$x \approx 12.8$ استخدم الحاسبة.

4-2 الدرجات والراديان

حول كل قياس درجات الى الراديان كمضاعف لـ π، و العكس.

17. $135°$ **18.** $450°$

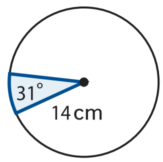
19. $\frac{7\pi}{4}$ **20.** $\frac{13\pi}{10}$

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

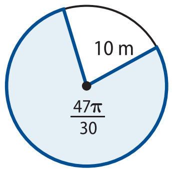
21. $342°$ **22.** $-\frac{\pi}{6}$

جد مساحة كل قطاع.

23.



24.



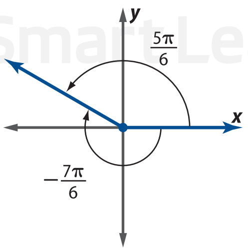
مثال 2

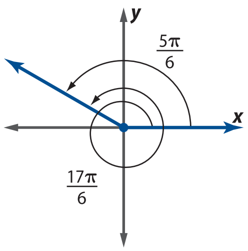
حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{5\pi}{12}$. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

قياسات جميع الزوايا $\frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية $\frac{5\pi}{12}$. افترض أن $n = 1, -1$.

$\frac{5\pi}{6} - 2\pi(-1) = -\frac{7\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{17\pi}{6}$





4-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

25. $240°$

26. $75°$

27. $-\frac{3\pi}{4}$

28. $\frac{11\pi}{18}$

جد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

29. $\cos\theta = \frac{2}{5}$؛ حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$

30. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$؛ حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$

31. $\sin\theta = -\frac{5}{13}$؛ حيث تكون $\cos\theta > 0$ و $\cot\theta < 0$

32. $\cot\theta = \frac{2}{3}$؛ حيث تكون $\sin\theta < 0$ و $\tan\theta > 0$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب *غير مُعرَّفة*.

33. $\sin 180°$

34. $\cot\frac{11\pi}{6}$

35. $\sec 450°$

36. $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

مثال 3

افترض أن $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، حيث تكون $\sin\theta < 0$. جد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

بما أن $\cos\theta$ موجبة و $\sin\theta$ سالبة، فإن θ تقع في الربع IV. وهذا يعني أن الإحداثي x لنقطة ما على ضلع الانتهاء لـ θ موجب، والإحداثي y سالب.

بما أن $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$، استخدم $x = 5$ و $r = 13$ لإيجاد y.

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{169 - 25} = 12$ $x = 5$ و $r = 13$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{12}{13}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{5}$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{5}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{12}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$

4-4 تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا

وضح كيفية ترابط التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ثم جد دورة وسِعة $g(x)$، وارسم دورة واحدة على الأقل لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

37. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5\sin x$

38. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos 2x$

39. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$

40. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\cos\frac{1}{3}x$

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا فترتين للدالة.

41. $y = 2\cos(x - \pi)$

42. $y = -\sin 2x + 1$

43. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

مثال 4

حدد السعة، والدورة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لـ $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4$. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

في هذه الدالة، $a = 4$ و $b = 1$ و $c = -\frac{\pi}{2}$ و $d = -4$.

السعة: $|a| = |4|$ أو 4

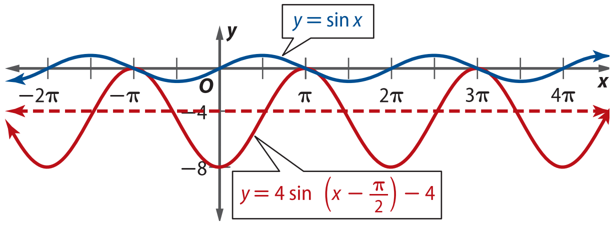
الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π

التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi}$ أو $\frac{1}{2\pi}$

الإزاحة الرأسية: d أو -4

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|1|}$ أو $\frac{\pi}{2}$

أولاً، مثّل خط الوسط $y = -4$ بيانيًا. ثم مثّل بيانيًا $y = 4\sin x$ مزاحة $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين. و 4 وحدات إلى الأسفل.



4-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل كل دالة بيانيًّا.

45. $y = 3 \tan x$

46. $y = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

47. $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

48. $y = -\cot (x - \pi)$

49. $y = 2 \sec \left(\frac{x}{2}\right)$

50. $y = -\csc (2x)$

51. $y = \sec (x - \pi)$

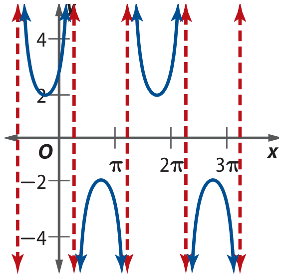
52. $y = \frac{2}{3} \csc \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 5

حَدد خطوط التقارب الرأسية، وارسم تمثيلاً بيانيًّا لـ $y = 2 \sec \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

لأن التمثيل البياني لـ $y = 2 \sec \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = 2 \sec x$ مزاحًا $\frac{\pi}{4}$ وحدات إلى اليسار، فإن خطوط التقارب الرأسية لفترة واحدة تقع في $-\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$.

مثِّل بيانيًّا دورتين على الفترة $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right]$



4-6 الدوال المثلثية العكسية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجِدت.

53. $\sin^{-1} (-1)$

54. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

56. $\arcsin 0$

57. $\arctan (-1)$

58. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

59. $\sin^{-1} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

60. $\cos^{-1} [\cos (-3\pi)]$

مثال 6

جد قيمة $-\sqrt{3}$.

جد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بظل يساوي $-\sqrt{3}$.

عندما تكون $t = -\frac{\pi}{3}$ ، $\tan t = -\sqrt{3}$.

وبذلك، $\arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

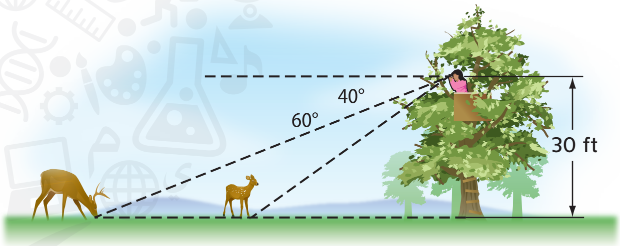
التطبيقات وحل المسائل

67. البناء تقوم شركة تعمير بتركيب منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع ثلاث أقدام على بسطة درج أحد المكاتب. بحيث تكون زاوية المنحدر °4. (الدرس 4-1)

a. ما طول المنحدر؟

b. ما ميل المنحدَر؟

68. الطبيعة ضمن مشروع تصوير فوتوغرافي، تقوم خديجة بتصوير غزال من موقع على شجرة. من موقع نظرها الذي يرتفع 30 ft عن الأرض، تلمح غزالين في خط مستقيم، كما هو موضح أدناه. كم يبعد الغزال الثاني عن الأول؟ (الدرس 4-1)

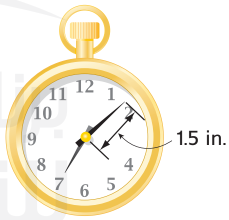


69. التزلّج الفني على الجليد تؤدي متزلّجة أوليمبية حركة معتادة بالقفز في الهواء لمدة 2.4 ثانية، بينما تدور 3 دورات كاملة. (الدرس 4-2)

a. جد السرعة الزاوية للمتزلّجة.

b. عبّر عن السرعة الزاويّة للمتزلّجة بالدرجات لكل دقيقة.

70. الساعات يبلغ طول عقرب دقائق ساعة جيب 1.5 in. ما المساحة التي يغطيها عقرب الدقائق خلال 40 دقيقة؟ (الدرس 4-2)



71. المعرض العالمي كان قطر أول ساقية دوارة 250 ft واستغرقت 10 دقائق لإتمام دورة واحدة كاملة حول محورها. (الدرس4-3)

a. كم عدد الدرجات التي تدورها عجلة فيريس خلال 100 ثانية؟

b. ما المسافة التي يتحرّكها شخص ما إن ركب عجلة فيريس لمدة 7 دقائق؟

c. كم يستغرق شخص ليتحرك 200 ft؟

72. تكييف الهواء تعمل وحدة تكييف الهواء وتتوقف للمحافظة على درجة الحرارة المرادة. في أحد أيام الصيف، يعمل مكيف الهواء في الساعة 8:30 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °80 فهرنهايت، ويتوقف تشغيله في الساعة 8:55 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °74. (الدرس 4-4)

a. جد السعة والفترة إذا كنت ستستخدم دالة مثلثية لتمثيل التغير في درجة الحرارة؛ مُفترضًا أن دورة درجة الحرارة ستستمر.

b. هل يصح تمثيل هذه الحالة باستخدام دالة مثلثية؟ اشرح استنتاجك.

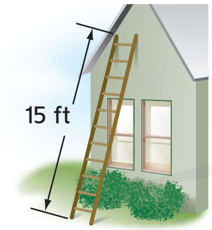
73. المد والجزر في خليج لويس، سُجِّل مقدار الجزر 2ft في 4:30 صباحًا، ومقدار المد بـ 5.5ft في 10:45 صباحًا. (الدرس 4-4)

a. جد فترة التمثيل المثلثي.

b. في أي وقت يحدث المد التالي؟

74. الموسيقى عندما يُسحب وتر الكمان، فإنه يتحرك بمقدار 1.5in. بينما يكون معامل التضاؤل الخاص به 1.9 يصدر نوتة بتردد 90 دورة في الثانية. حدد المدة الزمنية التي يستغرقها الوتر ليتضاءل بحيث تكون: $-0.1 \leq y \leq 0.1$. (الدرس 4-5)

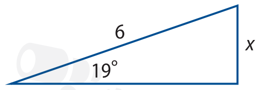
75. الطلاء يستخدم الدّهان سلمًا طوله 15ft ليطلي جانب أحد المنازل. وإذا أصبحت الزاوية بين السلم والأرض أقل من °65، فسينزلق السلم من تحته. ما أكبر مسافة يمكن أن يبتعد بها قاع السلم عن جانب المنزل ويظل الدّهان بها آمنًا؟ (الدرس 4-6)



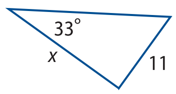
الوحدة 4 تدريب على الاختبار

جد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1.

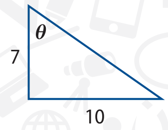


2.

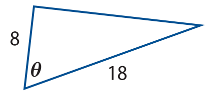


جد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

3.



4.



5. **الاختيار من متعدد** ما السرعة الخطية لنقطة تدور بسرعة زاوية 36 راديان لكل ثانية على بعد 12 سنتيمتر من مركز الدوران؟

A 420 cm/s

B 432 cm/s

C 439 cm/s

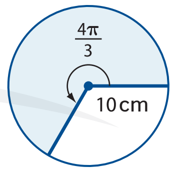
D 444 cm/s

اكتب كل مقياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π، وكل مقياس راديان بالدرجات.

6. $200°$

7. $-\frac{8\pi}{3}$

8. أوجِد مساحة القطاع المعروض من الدائرة.



ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

9. $165°$

10. $\frac{21\pi}{13}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

11. $\sec \frac{7\pi}{6}$

12. $\cos(-240°)$

13. **الاختيار من متعدد** تتحقق في زاوية θ المتباينات التالية: $\csc\theta < 0$، $\cot\theta > 0$ و $\sec\theta < 0$. في أي ربع تقع θ؟

F I

G II

H III

J IV

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًّا فترتين للدالة.

14. $y = 4\cos\frac{x}{2} - 5$

15. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

16. **المد والجزر** يبين الجدول الأوقات التقريبية التي حدث فيها المد والجزر في خليج سان أزاليا على مدار يومين.

المد والجزر	المد 1	الجزر 1	المد 2	الجزر 2
اليوم 1	2:35 صباحًا.	8:51 صباحًا.	3:04 مساءً.	9:19 مساءً.
اليوم 2	3:30 صباحًا.	9:48 صباحًا.	3:55 مساءً.	10:20 مساءً.

a. يمكن تمثيل المد والجزر بدالة مثلثية. ما الفترة الزمنية لهذه الدالة تقريبًا؟

b. الفرق في الارتفاع بين المد والجزر هو 7 أقدام. ما سعة هذه الدالة؟

c. اكتب دالة توضح المد والجزر حين تكون t مقيسة بالساعات. افترض أن هذه الدالة ليس لها إزاحة طور أو إزاحة رأسية.

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومثِّل كل دالة بيانيًا.

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

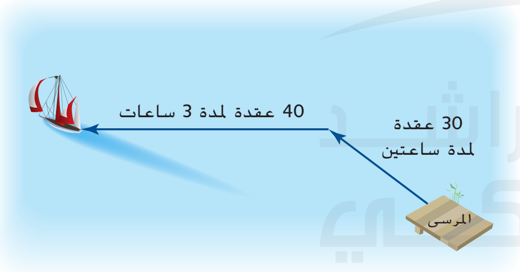
18. $y = \frac{1}{2}\sec 2x$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجِد.

19. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

20. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

21. **المِلاحة** يغادر قاربٌ الميناءَ ويتحرك 45° شمال الغرب بمتوسط 30 عقدة لمدة ساعتين. ثم يتحرك القارب غربًا مباشرةً بمتوسط 40 عقدة لمدة 3 ساعات.



a. كم عدد الأميال الملاحية التي يبعدها القارب عن المرسى بعد 5 ساعات؟

b. كم درجةً جنوب الشرق يقع عندها المرسى بالنسبة إلى الموضع الحالي للمركب؟

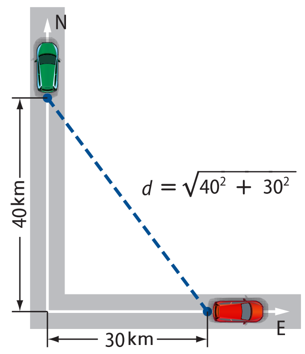
الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
المعدلات المرتبطة

التركيز

- تمثيل مسائل المعدلات المرتبطة وحلها.

إذا كان الهواء يُضخ في بالون بمعدل معلوم، فهل يمكننا إيجاد معدل تمدد حجم البالون؟ كيف يؤثر معدل إنفاق شركة ما لأموالها في الدعاية في معدل مبيعاتها؟ *المعدلات المترابطة* تظهر مشكلاتها عندما يمكن إيجاد معدل التغير لمتغير واحد من خلال *ربط* ذلك بمعدلات التغير للمتغيرات الأخرى.

لنفترض أن سيارتين تغادران نقطة ما في الوقت نفسه. إحداهما تبلغ سرعتها 40 km/h وتتجه نحو الشمال، بينما الأخرى تبلغ سرعتها 30 km/h وتتجه نحو الشرق. كم تبعد إحداهما عن الأخرى بعد ساعة واحدة؟ وبعد ساعتين؟ وبعد 3 ساعات؟ يمكننا استخدام القانون: $d = rt$ ومبرهنة فيثاغورس للوصول إلى هذه القيم.



في هذه الحالة، نعرف معدلات التغير لكل سيارة. ماذا لو أردنا معرفة معدل تغير المسافة بين السيارتين؟

نشاط 1 معدل التغير

سيارتان تغادران منزلاً في الوقت نفسه. تغادر إحداهما باتجاه الشمال بسرعة 35 km/h، بينما الأخرى تتجه إلى الشرق بسرعة 55 km/h. عيّن معدل تغير المسافة بين السيارتين تقريبًا.

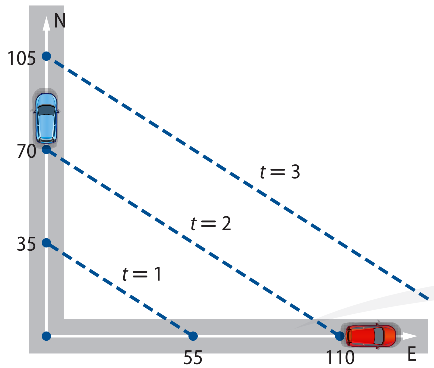
الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلات تمثل المسافة التي تسيرها كل سيارة منهما بعد عدد t من الساعات.

الخطوة 3 أوجد المسافة التي قطعتها كل سيارة بعد ساعة وساعتين و 3 ساعات و 4 ساعات.

الخطوة 4 استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين السيارتين عند كل نقطة في الوقت المحدد.

الخطوة 5 أوجد متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين لـــ $1 \le t \le 2$ و $2 \le t \le 3$ و $3 \le t \le 4$.



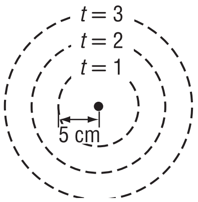
تحليل النتائج

1. ارسم مخطط تشتت يعرض المسافة الكلية بين السيارتين. افترض أن الزمن t هو المتغير المستقل، والمسافة الكلية d هي المتغير التابع. ارسم خطًّا بين النقاط.
2. أي نوع من الدوال يعبّر عنه التمثيل البياني؟ ما فرضيتك المبنية على القيم الموجودة في الخطوة 5؟
3. ماذا يحدث لمتوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين إذا أبطأت إحدى السيارتين سرعتها أو زادتها؟ اشرح استنتاجك.

معدل تغير المسافة بين السيارتين *يرتبط* بمعدلات السيارتين. في حساب التفاضل والتكامل، يمكن حل المسائل التي تتضمن المعدلات المترابطة باستخدام *الاشتقاق الضمني*. ومع ذلك، قبل أن يكون بإمكاننا استخدام تقنيات التفاضل المتقدمة، نحتاج إلى فهم كيفية ارتباط المعدلات بعضها ببعض. ولذلك، فإن أولى خطوات حل أي مسألة معدلات مترابطة يجب أن تكون تمثيل الحالة باستخدام رسم تصوري أو تمثيل بياني، وبكتابة المعادلات باستخدام المتغيرات والقيم ذات الصلة.

نشاط 2 تمثيل المعدلات المرتبطة

أُلقِي حجر في جسم مائي ساكن، فصنع تموجًا دائريًا يتّسع بمعدل 5 cm/s. أوجد مساحة الدائرة بعد ثلاث ثوانٍ إذا كان نصف قطر الدائرة يبلغ 5 cm عندما تكون $t = 1$.



الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلة لنصف قطر الدائرة r بعد عدد t من الثواني.

الخطوة 3 أوجد نصف القطر عندما تكون $t = 3$. ثم أوجد المساحة.

تحليل النتائج

4. أوجد معادلة للمساحة A في الدائرة بدلالة t.
5. أوجد مساحة الدائرة عندما $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ثانية.
6. اصنع تمثيلًا بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟

يمكنك استخدام ناتج قسمة الفرق لحساب معدل التغير في مساحة الدائرة عند نقطة زمنية محددة.

نشاط 3 تقريب المعدل المترابط

عيّن معدل تغير مساحة الدائرة في النشاط 2 على وجه التقريب.

الخطوة 1 استبدل تعبير مساحة الدائرة بناتج قسمة الفرق.

الخطوة 2 عيّن معدل تغير الدائرة بعد ثانيتين على وجه التقريب. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$.

الخطوة 3 كرر الخطوات 1, 2 عندما ثوانٍ $t = 3$. و ثوانٍ $t = 4$.

تحليل النتائج

7. إلى أي قيمة من قيم t يبدو اقتراب معدلات التغير؟
8. ماذا يحدث لمعدل تغير مساحة الدائرة مع زيادة نصف القطر؟ اشرح.
9. ما وجه اختلاف هذا المنهج عن المنهج الذي استخدمته في النشاط 1 لإيجاد معدل تغير المسافة بين السيارتين؟ اشرح لماذا كان هذا ضروريًا.

نصيحة دراسية

ناتج قسمة الفرق تذكّر أن ناتج قسمة الفرق لحساب ميل خط المماس بالتمثيل البياني الخاص بـ f(x) عند النقطة (x, f(x)) يكون $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

التمثيل والتطبيق

10. سلّم يبلغ طوله 4 m يستند إلى جدار، بحيث تكون قاعدته على بعد 1.5 m من قاعدة الجدار. إذا بدأ قاع السلم في الانزلاق بعيدًا عن الجدار بمعدل 0.6 m/s. فما سرعة انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار؟
   a. مثّل الحالة. افترض أن d هي المسافة من قمة السلم إلى الأرض. و m هو معدل انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار.
   b. اكتب تعبيرًا للمسافة من قاعدة السلم إلى الحائط بعد عدد t من الثواني.
   c. أوجد معادلة للمسافة d من قمة السلم إلى الأرض بدلالة t بالتعويض بالتعبير الموجود في الجزء b في مبرهنة فيثاغورس.
   d. استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة d من قمة السلم إلى الأرض عندما يكون $t = 0, 1, 2, 3, 3.5, 3.75$.
   e. اصنع تمثيلاً بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟
   f. استخدم ناتج قسمة الفرق لتقدير معدل تغير m للمسافة من قمة السلم إلى الأرض عندما تكون $t = 2$. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$. وباقتراب قيمة h من الصفر. فإلى أي القيم يبدو اقتراب قيم m ؟