



Functions from a Calculus Perspective

الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

Lesson 1-7 Inverse Relations and Functions

الدرس 7-1 العلاقات والدوال العكسية

استخدام اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان لدالة ما دالة عكسية

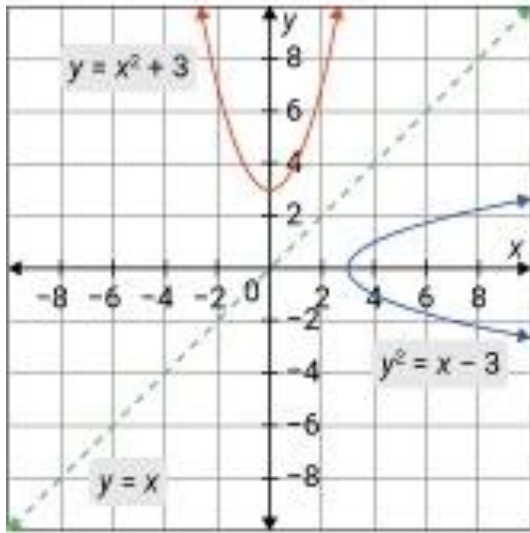
إيجاد الدوال العكسية جبريًا وبيانيًا.

نواتج التعلم

علاقة عكسية Inverse Relation، دالة عكسية Inverse Function، واحد لواحد One to One.

المفردات الجديدة

استكشاف العلاقات العكسية

العلاقة
 $y = x^2 + 3$

x	y
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7

العلاقة العكسية
 $y^2 = x - 3$

x	y
7	-2
4	-1
3	0
4	1
7	2

اختبار الخط الأفقي

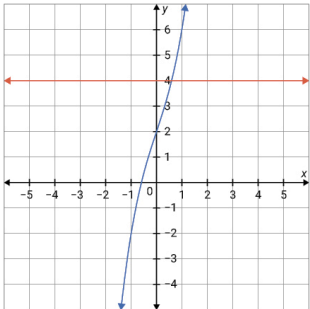
طريقة اختبار إن كانت الدالة لها دالة عكسية عن طريق رسم مستقيم أفقي على التمثيل البياني للدالة.

إذا كانت العلاقة العكسية للدالة f دالة أيضًا،فهي تسمى حينئذ الدالة العكسية للدالة f ، ويرمز لها بالرمز f^{-1} ويُقرأ معكوس f .

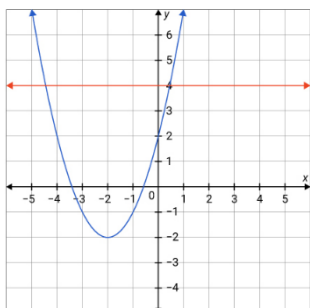
يمكن استخدام اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس الدالة هي دالة أيضًا

إذا تقاطع مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة f في نقطة واحدة على الأكثر،فإن معكوس الدالة f^{-1} هي دالة أيضًا.إذا تقاطع مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة f في نقطتين أو أكثر،فإن معكوس الدالة f^{-1} هي ليست دالة

معكوس الدالة هي دالة

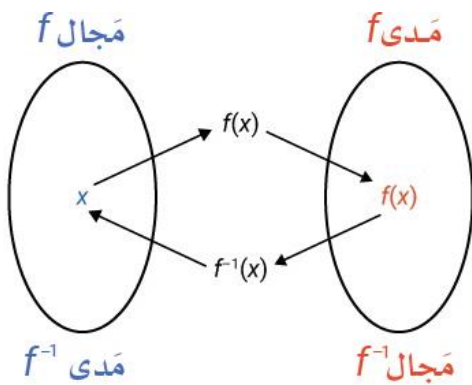
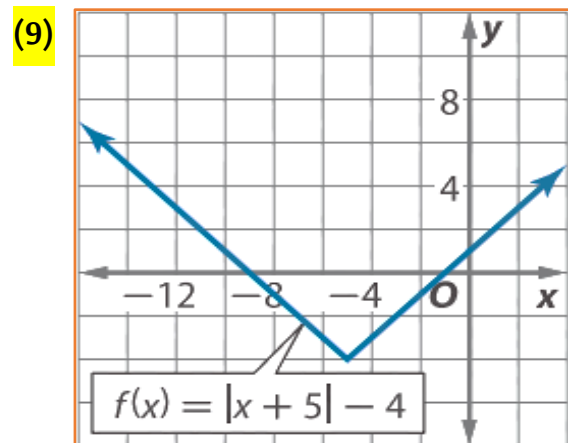
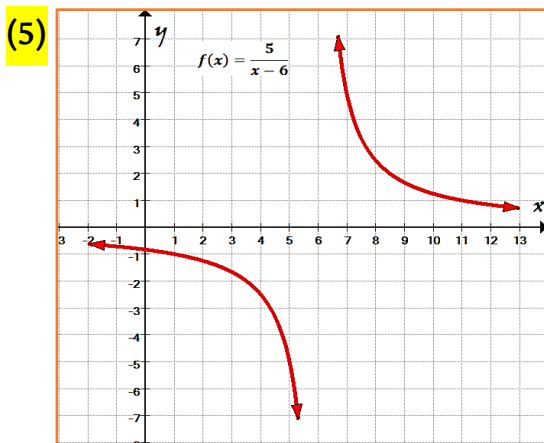
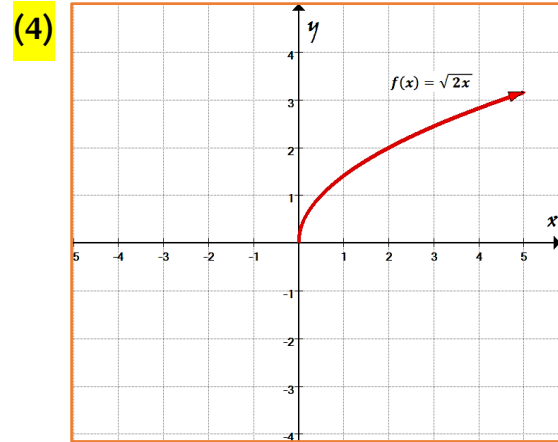
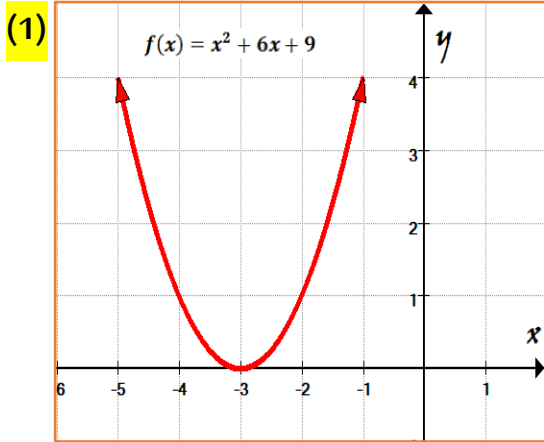


معكوس الدالة هي ليست دالة



تمارين صفحة 70 و 71

طبق اخبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان للدالة الممثلة بيانياً دالة عكسية. اكتب نعم أو لا.



إيجاد الدوال العكسية

إذا اجتازت الدالة اختبار الخط المستقيم الأفقي، يُقال إذا إنها دالة "واحد لواحد".

لإيجاد الدالة العكسية جبرياً، اتبع الخطوات الآتية:

1. استخدام اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة "واحد لواحد" ولها دالة عكسية.
2. استبدال $f(x)$ بـ y في معادلة $f(x)$. ثم بادل بين x و y .
3. جِدِ الحَلَّ من أجل y ، ثم استبدل y باستبدال $f^{-1}(x)$.
4. حدِّد أي فيوود على مجال f^{-1} ثم تَحَقَّق من أن مجال f مُساوٍ لمدى f^{-1} ومدى f مُساوٍ لمجال f^{-1} .

إذا كانت الدالة f من دوال "واحد لواحد"، يكون لها الدالة العكسية f^{-1} .

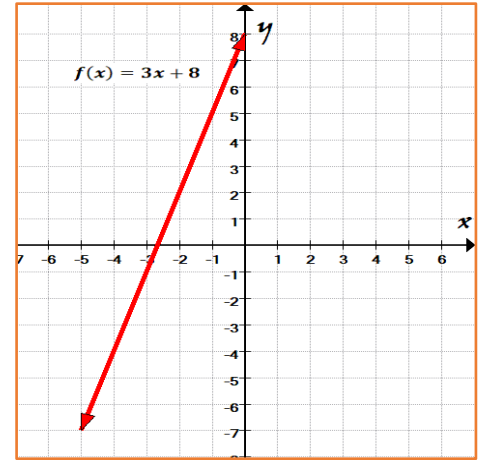
مجال f مُساوٍ لمدى f^{-1} .

مجال f^{-1} مُساوٍ لمدى f .

حدّد ما إذا كان للدالة دالة عكسيّة. فإن كان لها دالة عكسيّة فجدّها واذكر أيّ قيود على مجالها.

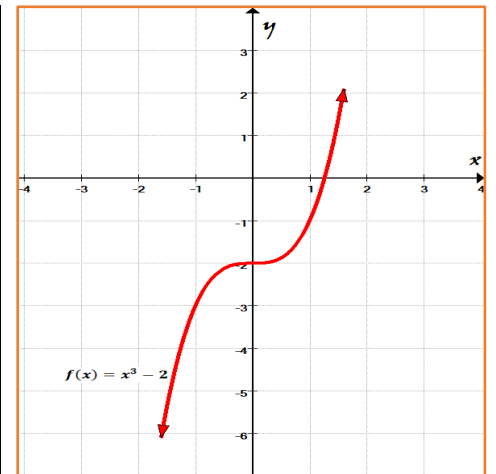
(4) $f(x) = 3x + 8$

الدالة الأصلية	$f(x) = 3x + 8$
استبدل y بـ $f(x)$	
بادل بين المتغيرات x و y	
حل لأجل المتغير y	
استبدل y بـ $f^{-1}(x)$	



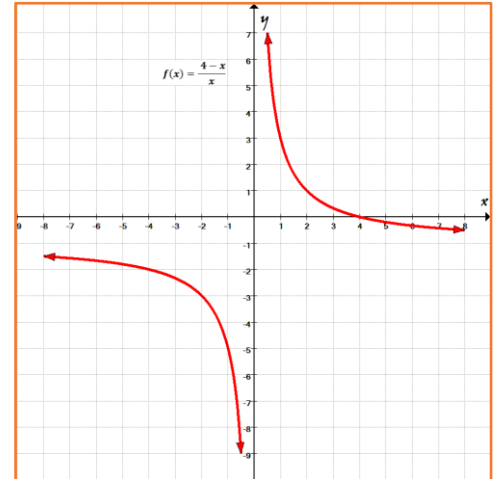
(11) $f(x) = x^3 - 2$

الدالة الأصلية	$f(x) = x^3 - 2$
استبدل y بـ $f(x)$	
بادل بين المتغيرات x و y	
حل لأجل المتغير y	
استبدل y بـ $f^{-1}(x)$	



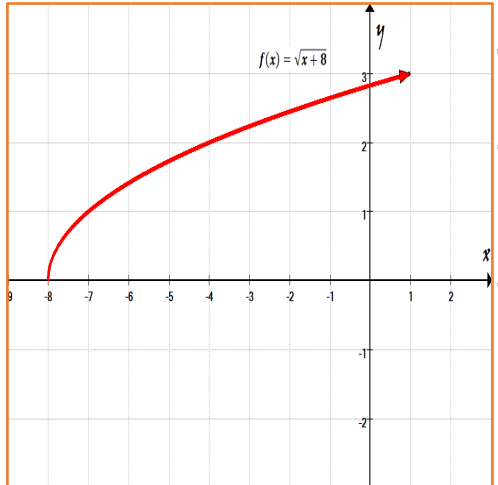
(19) $f(x) = \frac{4-x}{x}$

الدالة الأصلية	$f(x) = \frac{4-x}{x}$
استبدل y بـ $f(x)$	
بادل بين المتغيرات x و y	
حل لأجل المتغير y	
استبدل y بـ $f^{-1}(x)$	

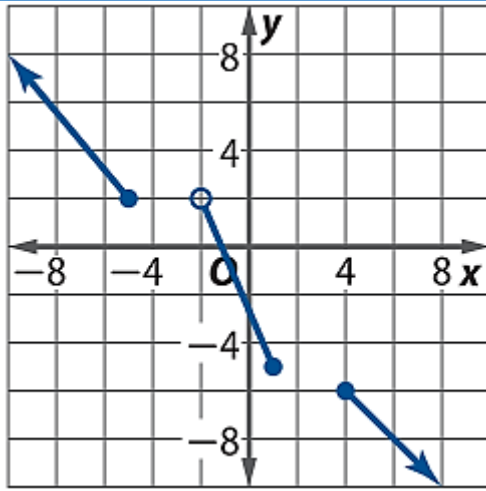


(16) $f(x) = \sqrt{x+8}$

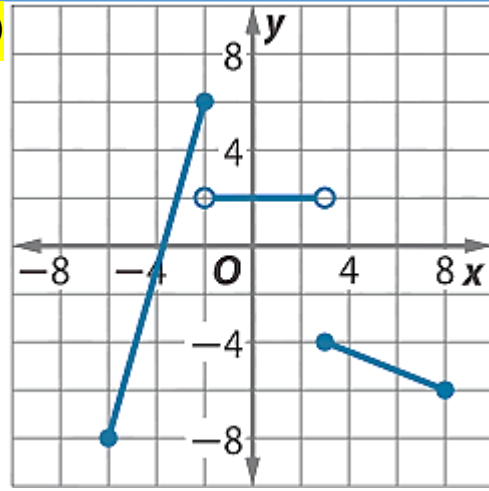
الدالة الأصلية	$f(x) = \sqrt{x+8}$
استبدل y بـ $f(x)$	
بادل بين المتغيرات x و y	
حل لأجل المتغير y	
استبدل y بـ $f^{-1}(x)$	



(47)



(48)



حدّد إن كان للدالة $f(x) = \sqrt{x-8}$ دالة عكسية. فإن كان لها دالة عكسية، فجدّها واذكر أي قيود على مجالها.

• $f^{-1}(x) = x^2 + 8$ ، المجال: $[0, \infty)$ والمدى: $[8, \infty)$.

• $f^{-1}(x) = x^2 + 8$ ، المجال: $(-\infty, \infty)$ والمدى: $[8, \infty)$.

• $f^{-1}(x) = x^2 - 8$ ، المجال: $[0, \infty)$ والمدى: $[-8, \infty)$.

• $f^{-1}(x)$ غير موجودة.

استخدام تركيب الدوال العكسية

تكون الدالتان f و g دالتين عكسيتين لبعضيهما إذا وفقط إذا كانت:

• $f(g(x)) = x$ لكل x في مجال $g(x)$ و

• $g(f(x)) = x$ لكل x في مجال $f(x)$

تركيب الدالة مع دالتها العكسية يكون دوماً الدالة المحايدة.

أثبت جبرياً أنَّ f و g دالتان مُتعاكستان.

(27) $f(x) = -6x + 3$, $g(x) = \frac{3-x}{6}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$
$f(g(x)) =$	$g(f(x)) =$

(31) $f(x) = 2x^3 - 6$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$
$f(g(x)) =$	$g(f(x)) =$

$$(35) \quad f(x) = \frac{x+4}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x-1}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$
$f(g(x)) =$	$g(f(x)) =$

(54) درجة الحرارة تستخدم الصيغة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ لتحويل x من الدرجات المئوية إلى درجات فهرنهايت.

a. جد f^{-1} ما الذي تمثله هذه الدالة؟
b. أثبت أن f و f^{-1} دالتان متعاكستان.

إيجاد الدوال العكسية بيانيًا

غالبًا ما يكون إيجاد الدوال العكسية لمُعْظَم دوال "واحد لواحد" جبريًا أمرًا صعبًا، إلا أنه من الممكن تمثيل الدالة العكسية بيانيًا باستخدام انعكاس التمثيل البياني للدالة الأصلية في الخط المستقيم $y = x$.

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لتمثيل $f^{-1}(x)$ بيانيًا • حدد مواقع ثلاث نقاط على التمثيل البياني.

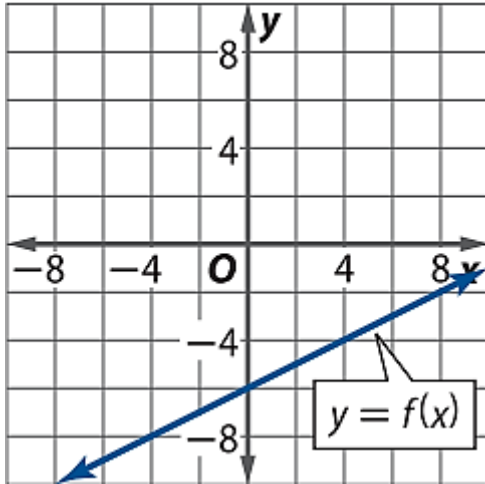
• اعكس النقاط الثلاث في المستقيم $y = x$.

• صل بين النقاط الثلاث المعكوسة بمنحنى

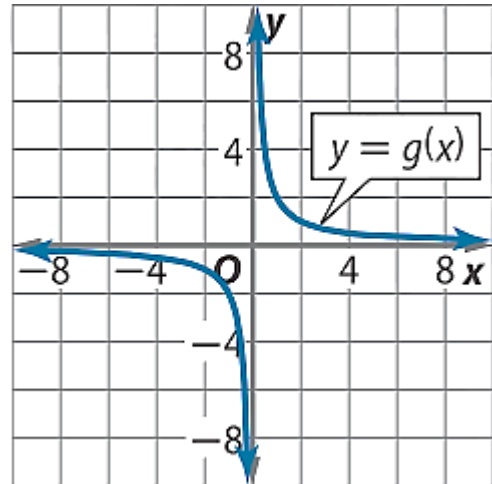
منتظم لرسم التمثيل البياني لـ $f^{-1}(x)$.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتمثيل دالتها العكسية بيانياً.

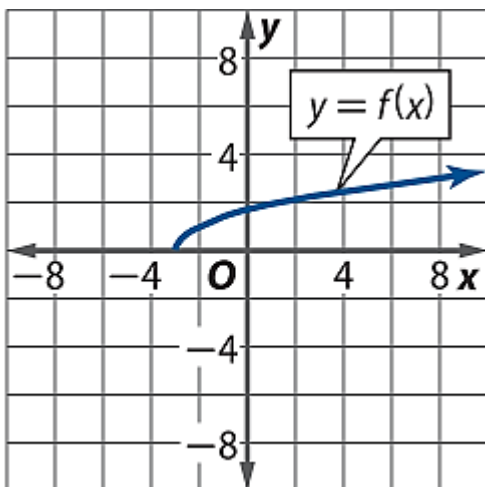
(38)



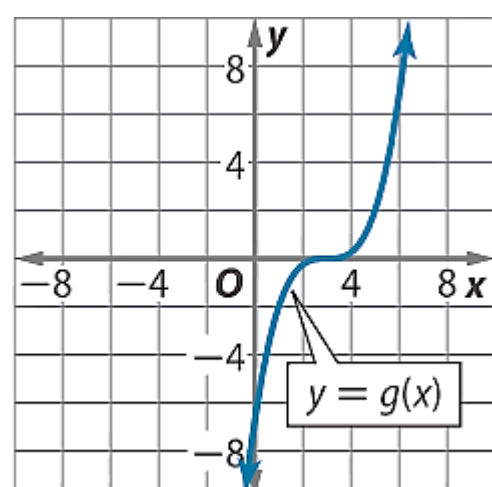
(41)



(42)



(43)



حدد ما إذا كانت f^{-1} موجودة، وإذا كانت كذلك، فأكمل جدولاً للدالة f^{-1} .

(50)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

(43)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16