الوحدة 1

الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

السابق

حللتَ الدوال من منظور التمثيل البياني.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- استكشاف التناظر في التمثيلات البيانية.
- تحديد الاتصال ومتوسط معدل التغير في الدوال.
- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي.
- إيجاد الدوال العكسية جبريًا وبيانيًا.

لماذا؟

الأعمال تُستخدم الدوال كثيرًا في مختلف قطاعات عالم الأعمال. تتمثل بعض استخدامات الدوال في تحليل التكاليف، والتنبؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، والتنبؤ بالتكاليف والإيرادات المستقبلية، وتقدير الإهلاك، وتحديد القوى العاملة المناسبة.

قراءة سابقة ضع قائمة من شيئين أو ثلاثة أشياء تعرفها عن الدوال.

الاستعداد للوحدة

تمرين سريع

مثّل كل متباينة بيانيًا على خط أعداد. (المهارة المطلوبة)

1. $x > -3$ أو $x < -6$ **2.** $-4 < x \leq -2$

3. $-1 \leq x \leq 5$ **4.** $x < -4$ أو $x > 1$

5. $5 \leq x - 4 \leq 12$ **6.** $7 > -x > 2$

حُلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد قيمة y. (المهارة المطلوبة)

7. $y - 3x = 2$ **8.** $y + 4x = -5$

9. $2x - y^2 = 7$ **10.** $y^2 + 5 = -3x$

11. $9 + y^3 = -x$ **12.** $y^3 - 9 = 11x$

13. **درجة الحرارة** يمكن استخدام الصيغة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، حيث C تمثل درجة الحرارة المئوية وتمثل F درجة الحرارة بمقياس فهرنهيت، في التحويل بين المقياسين. إذا كانت قراءة مقياس الحرارة تشير إلى أن درجة الحرارة تبلغ $23°C$، فكم تكون درجة الحرارة على مقياس فهرنهيت مقربة إلى أقرب عشرة؟ (المهارة المطلوبة)

جد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة المتغير. (المهارة المطلوبة)

14. $3y^2 - 4,\ y = 2$ **15.** $2b^3 + 7,\ b = -3$

16. $x^2 + 2x - 3,\ x = -4a$ **17.** $5z - 2z^2 + 1,\ z = 5x$

18. $-4c^2 + 7,\ c = 7a^2$ **19.** $2 + 3p^2,\ p = -5 + 2n$

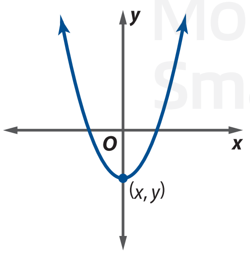
20. **المقذوفات** يقذف طالبان نموذجًا لصاروخ ضمن مادة العلوم. يمكن التعبير عن ارتفاع الصاروخ بالدالة $h(t) = -16t^2 + 200t + 26$، حيث t تمثل الزمن بالثانية وتمثل h الارتفاع بالقدم. جد ارتفاع الصاروخ بعد 7 s. (المهارة المطلوبة)

مفردات جديدة

زمز الفترة	interval notation
الدالة	function
رمز الدالة	function notation
مجال مضمن	implied domain
أصفار	zeros
جذور	roots
دالة زوجية	even function
دالة فردية	odd function
نهاية	limit
السلوك الطرفي	end behavior
تزايد	increasing
تناقص	decreasing
ثابت	constant
العظمى	maximum
الصغرى	minimum
قيم قصوى	extrema
الخط القاطع	secant line
الدالة الأصلية	parent function
تحويل هندسي	transformation
الانعكاس	reflection
تغيير الأبعاد(التمدد)	dilation
تركيب الدوال	composition

مراجعة المصطلحات

القطع المكافئ التمثيل البياني لدالة تربيعية



الميل • المهارة المطلوبة • نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x

الدرس 1-1 الدوال

.. السابق

- استخدمت رمز المجموعة للإشارة إلى العناصر والمجموعات الجزئية والمتممات.

.. الحالي

1 وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية.

2 التعرف على الدوال وإيجاد قيمها وتحديد مجالاتها.

.. لماذا؟

- تتضمن كثيرٌ من الأحداث التي تقع في حياتنا اليومية كميتين مترابطتين. فعلى سبيل المثال، لتشغيل جهاز بيع آلي، تُدخل المبلغ النقدي وتقوم بالاختيار، فتعطيك الآلة ما قمت باختياره وأي عملات متبقية. ما أن تنتهي من اختيارك، يعتمد مبلغ عملات المتبقية الذي تحصل عليه على المبلغ المالي الذي تضعه في الآلة.

مفردات جديدة

رمز بناء المجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

متغير مستقل
independent variable

متغير تابع
dependent variable

مجال مضمن
implied domain

دالة متعددة التعريف
piecewise-defined function

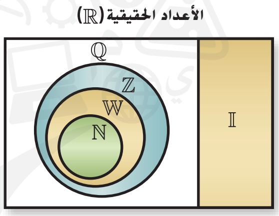
مجال نسبي
relevant domain

1 وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية

تستخدم الأعداد الحقيقية لوصف كميات كالمسافة والمال. تتضمن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المجموعات الجزئية التالية من الأعداد.

المفهوم الرئيسي الأعداد الحقيقية

الحرف	المجموعة	أمثلة
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية	$0.125,\ -\frac{7}{8},\ \frac{2}{3} = 0.666...$
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية	$\sqrt{3} = 1.73205...$
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
$\mathbb{W}$	الأعداد الكلّية	$0, 1, 2, 3...$
$\mathbb{N}$	أعداد طبيعية	$1, 2, 3, 4...$



ويمكن وصف مجموعات الأعداد الحقيقية هذه وغيرها من المجموعات باستخدام رمز بناء المجموعة. يستخدم **رمز بناء المجموعة** خصائص الأعداد في المجموعة لتعريف المجموعة.

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 16,\ x \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد x حيث...

تتمتع x بالخصائص المعطاة...

و x عنصر من مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 استخدام رمز بناء المجموعة

صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعة.

a. $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتضمن المجموعة جميع الأعداد الكلية الأكبر من 8 أو تساويها.

$\{x \mid x \geq 8,\ x \in \mathbb{W}\}$ *تقرأ مجموعة تضم جميع قيم x بحيث x أكبر من 8 أو تساويها وحيث x عنصر بمجموعة الأعداد الكلية.*

b. $x < 7$

ما لم يذكر خلاف ذلك، عليك أن تفترض أن أي مجموعة تتألف من أعداد حقيقية. لذا، تتضمن المجموعة جميع الأعداد الحقيقة الأقل من 7. $\{x \mid x < 7,\ x \in \mathbb{R}\}$

c. **جميع مضاعفات العدد ثلاثة**

تتضمن المجموعة جميع الأعداد الصحيحة التي هي مضاعفات العدد ثلاثة. $\{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

تمرين موجّه

1A. $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

1B. $x \leq -3$

1C. جميع مضاعفات π

رمز الفترة يستخدم المتباينات في وصف المجموعات الجزئية المكونة من أعداد حقيقية. يستخدم الرمزان [أو] للإشارة إلى أن النقطة الطرفية تقع ضمن الفترة بينما يستخدم الرمزان (أو) للإشارة إلى أن النقطة الطرفية لا تقع ضمن الفترة. يستخدم الرمز ∞، اللانهاية الموجبة، والرمز $-\infty$، اللانهاية السالبة، في وصف عدم محدودية الفترة. تكون الفترة غير محدودة إذا استمرت بشكل لا نهائي.

نصيحة دراسية
النظر مجددًا يمكنك مراجعة رمز المجموعات بما في ذلك الاتحاد والتقاطع بين المجموعات.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a]$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استخدام رمز الفترات

اكتب كل مجموعة أعداد باستخدام رمز الفترة.

a. $-8 < x \le 16$ $\quad (-8, 16]$

b. $x < 11$ $\quad (-\infty, 11)$

c. $x \le -16$ **أو** $x > 5$ $\quad (-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

$\cup$ *تقرأ اتحاد*

تمرين موجّه

2A. $-4 \le y < -1$ **2B.** $a \ge -3$ **2C.** $x > 9$ أو $x < -2$

2 تحديد الدوال

تذكر أن العلاقة هي قاعدة تربط بين كميتين. تربط هذه القاعدة عناصر المجموعة A مع عناصر المجموعة B. تمثل المجموعة A التي تضم كافة المدخلات *مجال* العلاقة بينما تحتوي المجموعة B على جميع المخرجات أو *المدى*.

ويجري تمثيل العلاقات عادة بأربع طرق.

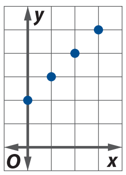
1. لفظيًا جملة تصف العلاقة بين المدخلات والمخرجات.

تكون قيمة المخرج أكبر من قيمة المدخل بمقدار 2.

2. عدديًا جدول قيم أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط كل مدخل (قيمة x) بمخرج (قيمة y).

$\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3. بيانيًا نقاط على التمثيل البياني في المستوى الإحداثي تمثل الأزواج المرتبة.



4. جبريًا معادلة تربط بين الإحداثي x والإحداثي y لكل زوج مرتب.

$y = x + 2$

الدالة هي نوع خاص من العلاقات.

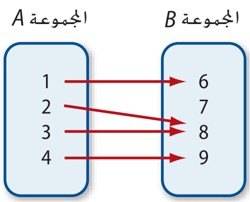
المفهوم الرئيسي الدالة

الشرح الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x في المجموعة A مع عنصر واحد فقط y في المجموعة B.

الرموز العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B هي دالة.

المجموعة A هي المجال. $\quad D = \{1, 2, 3, 4\}$

المجموعة B تحتوي على المدى. $\quad R = \{6, 8, 9\}$



نصيحة دراسية
المجال والمدى في هذا النص، سيكون رمز المجال والمدى D = و R = على الترتيب.

ومن التعاريف البديلة للدالة أنها مجموعة من الأزواج المرتبة لا يكون فيها لاثنين من الأزواج المختلفة نفس قيمة x. يعني التفسير البياني لذلك أنه لا يمكن لنقطتين في التمثيل البياني للدالة في المستوى الإحداثي أن تقعا على نفس الخط الرأسي.

نصيحة دراسية

طريقة العرض الجدولي حين تخفق العلاقة في اختبار المستقيم الرأسي، يكون للقيمة x أكثر من قيمة y مقابلة، كما هو موضح أدناه.

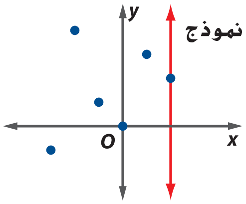
x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

المفهوم الأساسي اختبار الخط المستقيم الرأسي

الشرح

تكون مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي هي التمثيل البياني لدالة إذا تقاطع كل مستقيم رأسي محتمل مع التمثيل البياني في نقطة واحدة على الأكثر.

نموذج



مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثل دوال

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة من x.

a. تمثل قيمة المدخل x رقم بطاقة تعريف أحد الطلاب، وتمثل قيمة المخرج y درجة الطالب في اختبار الفيزياء.

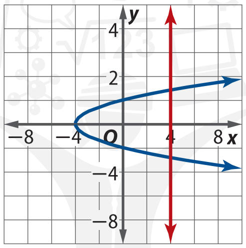
كل قيمة من قيم x لا يمكن تخصيصها لأكثر من قيمة واحدة من قيم y. فالطالب لا يمكن أن يحصل على درجتين مختلفتين في الاختبار. إذًا فالجملة تصف y كدالة من x.

b.

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

كل قيمة من قيم x مخصصة لقيمة y واحدة فقط. لذا فالجدول يعبر عن y في صورة دالة من x.

c.



المستقيم الرأسي عند $x = 4$ يتقاطع مع التمثيل البياني عند اكثر من نقطة ولذا فالتمثيل البياني لا يعبر عن y في صورة دالة x.

d. $y^2 - 2x = 5$

لتحديد ما إن كانت هذه المعادلة تمثل المتغير y كدالة من x، يجب حل المعادلة لإيجاد قيمة y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ أضف $2x$ إلى كل طرف

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

هذه المعادلة لا تمثل y كدالة من x لوجود قيمتين لـ y. إحداهما موجبة والأخرى سالبة، لأي قيمة من قيم x أكبر من -2.5.

نصيحة دراسية

الدوال التي لها قيم y متكررة بالرغم من أنه لا يمكن أن تتضمن الدالة أكثر من قيمة y واحدة مرتبطة بكل قيمة x، إلا أنه يمكن أن تتضمن الدالة قيمة y واحدة مرتبطة بأكثر من قيمة من قيم x، كما هو موضح في المثال 3b.

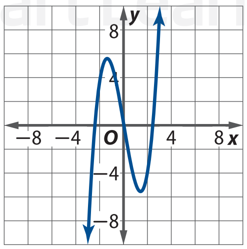
تمرين موجّه

3A. تمثل قيمة المدخل x رمز المنطقة، بينما تمثل قيمة المخرج y رقم هاتف في هذه المنطقة.

3B.

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C.



3D. $3y + 6x = 18$

في رمز الدالة، الرمز $f(x)$ يقرأ الدالة f x ويكون معناه قيمة الدالة f عند x. ولأن $f(x)$ تقابل قيمة y في الدالة f بفرض معرفة قيمة x، فيمكنك الكتابة بالصورة $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة ذات الصلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

ولأن القيمة x قد تمثل أي قيمة في مجال الدالة، لذلك يطلق عليها **المتغير المستقل**. أي قيمة في مدى الدالة f يعبر عنها **بالمتغير التابع**، y.

مثال 4 إيجاد قيم الدوال

إذا كان $g(x) = x^2 + 8x - 24$، فجد قيمة كل دالة.

a. $g(6)$

لإيجاد $g(6)$، عوّض عن x بالعدد 6 في $g(x) = x^2 + 8x - 24$.

$g(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$g(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$	بالتعويض عن x بالعدد 6
$= 36 + 48 - 24$	بسّط
$= 60$	بسّط

b. $g(-4x)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$g(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$	بالتعويض بالعدد $-4x$ عن x
$= 16x^2 - 32x - 24$	بسّط

c. $g(5c + 4)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$g(5c+4) = (5c+4)^2 + 8(5c+4) - 24$	بالتعويض بـــ $5c + 4$ عن x
$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$	بفك القوس $(5c+4)^2$ والقوس $8(5c+4)$
$= 25c^2 + 80c + 24$	بسّط

تمرين موجّه

إذا كان $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فجــد قيمة كل دالة.

4A. $f(12)$ **4B.** $f(6x)$ **4C.** $f(-3a+8)$

الربط بتاريخ الرياضيات

ليونهارت أويلر (1707–1783)

عالم رياضيات سويسري، كان أويلر كاتبًا متمكنًا في مجال الرياضيات حيث نشر خلال مسيرته أكثر من 800 بحث وهو أيضًا من طرح الرمز الرياضي المعاصر الذي نعمل به الآن بما في ذلك الرمز $f(x)$ للدالة f.

عندما تُعطى دالة ذات مجال غير محدد، يكون **المجال المضمن** هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يكون عندها التعبير المستخدم في تعريف الدالة صحيحًا. وبوجه عام، يجب أن تستثني من مجال الدالة القيم التي تؤدي إلى القسمة على صفر أو أخذ الجذر الزوجي لعدد سالب.

مثال 5 إيجاد المجال جبريًا

حدد المجال لكل دالة.

a. $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-7x}$

عندما يكون المقام $\dfrac{2+x}{x^2-7x}$ يساوي صفرًا، يكون التعبير غير معرّف. جـــد حل $x^2 - 7x = 0$. القيم المستبعدة لمجال هذه الدالة هي $x = 0$ و $x = 7$. مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$ و $x = 7$، أو $\{x \mid x \neq 0,\ x \neq 7,\ x \in \mathbb{R}\}$.

b. $g(t) = \sqrt{t-5}$

لأن الجذر التربيعي للعدد السالب لا يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا، فإن $t - 5 \geq 0$. لذا فمجال $g(t)$ هو جميع الأعداد الحقيقية t بحيث $t \geq 5$ أو $[5, \infty)$.

نصيحة دراسية

تسمية الدوال يمكنك استخدام أحرف أخرى في تسمية الدالة ومتغيرها المستقل. على سبيل المثال، $f(x) = \sqrt{x-5}$ و $g(t) = \sqrt{t-5}$ يرمزان لنفس الدالة.

c. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

هذه الدالة تكون معرفة إذا فقط إذا كان $x^2 - 9 > 0$. ولذا فمجال $h(x)$ هو $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تمرين موجّه

عين المجال لكل دالة.

5A. $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ 5B. $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5C. $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

ويطلق على الدالة التي يمكن تعريفها باستخدام معادلتين أو أكثر لفترات مختلفة من المجال، **دالة متعددة التعريف**.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد قيمة دالة متعددة التعريف

الارتفاع يمكن التعبير عن متوسط أقصى طول للأطفال بالسنتيمتر كدالة من أقصى طول آبائهم بالسنتيمتر في صورة الدالة متعددة التعريف التالية. جـد متوسط أقصى طول للأطفال المعطى فيما يلي طول آبائهم. استخدم $h(x)$، حيث x هي المتغير المستقل الذي يمثل طول الآباء كما أن $h(x)$ هي المتغير التابع الذي يمثل طول الطفل.

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 105 & , \quad 160 < x < 167 \\ 3x - 335 & , \quad 167 \le x \le 172 \\ 2x - 167 & , \quad x > 172 \end{cases}$$

a. $h(170)$

حيث إن 170 يقع بين 167 و 172. استخدم $h(x) = 3x - 335$ لإيجاد $h(170)$.

$h(170) = 3x - 335$ دالة لـ $167 \le x \le 172$

$= 3(170) - 335$ بالتعويض بـ 170 عن x

$= 510 - 335$ أو 175 بسّط

وفقًا لهذا النموذج، سيتميز الأطفال الذين يتمتع آباؤهم بحد أقصى من الطول بقيمة 170 cm بمتوسط حد أقصى من الطول بقيمة 175 cm.

b. $h(182)$

لأن 182 أكبر من 172. فاستخدم $h(x) = 2x - 167$.

$h(182) = 2x - 167$ دالة لـ $x > 172$

$= 2(182) - 167$ بالتعويض بـ 182 عن x

$= 364 - 167$ أو 198 بسّط

وفقًا لهذا النموذج، سيتميز الأطفال الذين يتمتع آباؤهم بحد أقصى من الطول بقيمة 182 cm بمتوسط حد أقصى من الطول بقيمة 198 cm.

تمرين موجّه

6. **السرعة** يمكن التعبير عن سرعة السيارة v بالكيلومتر في الساعة بالدالة متعددة التعريف التالية حيث t تمثل الزمن بالثانية. جـد سرعة السيارة في كل من الأوقات التالية.

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \ 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \ 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \ 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

A. $v(5)$ B. $v(15)$ C. $v(245)$

نصيحة دراسية

المجال ذو الصلة **المجال ذو الصلة** هو جزء من المجال يكون له صلة بالنموذج. فكّر في حالة يكون فيها المخرج عبارة عن دالة طول. من غير المعقول أن يكون الطول بقيمة سالبة ومن ثم فالمجال ذو الصلة هو مجموعة أعداد أكبر من 0 أو تساويه.

التمارين

اكتب كل مجموعة أعداد باستخدام رمز المجموعة ورمز الفترة، إن أمكن. (المثالان 1 و 2)

1. $x > 50$
2. $x < -13$
3. $x \leq -4$
4. $\{-4, -3, -2, -1, ...\}$
5. $8 < x < 99$
6. $-31 < x \leq 64$
7. $x < -19$ أو $x > 21$
8. $x < 0$ أو $x \geq 100$
9. $\{-0.25, 0, 0.25, 0.50, ...\}$
10. $x \leq 61$ أو $x \geq 67$
11. $x > 86$ أو $x \leq -45$
12. جميع مضاعفات العدد 8
13. جميع مضاعفات العدد 5
14. $x \geq 32$

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة من x. (المثال 3)

15. تمثل قيمة المدخل x رقم الحساب البنكي وتمثل قيمة المخرج y رصيد الحساب.

16. تمثل قيمة المدخل x العام بينما تمثل قيمة المخرج y اليوم من الأسبوع.

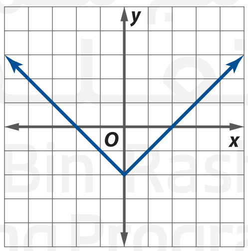
17.

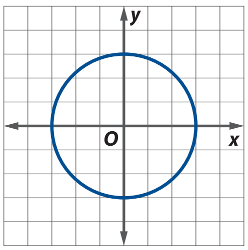
x	y
−50	2.11
−40	2.14
−30	2.16
−20	2.17
−10	2.17
0	2.18

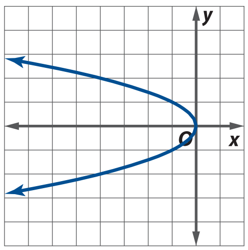
18.

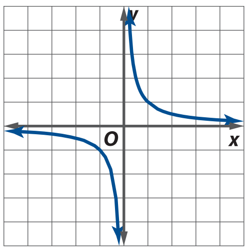
x	y
0.01	423
0.04	449
0.04	451
0.07	466
0.08	478
0.09	482

19. $\frac{1}{x} = y$
20. $x^2 = y + 2$
21. $3y + 4x = 11$
22. $4y^2 + 18 = 96x$
23. $\sqrt{48y} = x$
24. $\frac{x}{y} = y - 6$

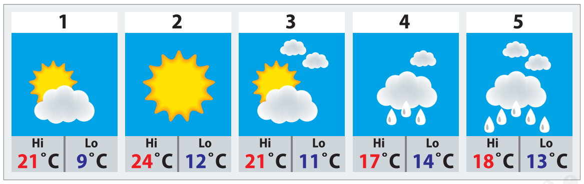
25.


26.


27.


28.


29. **الأرصاد الجوية** فيما يلي حالة الطقس المتوقعة لإحدى المدن لمدة خمسة أيام. (المثال 3)



a. قم بتمثيل العلاقة بين اليوم من الأسبوع ودرجة الحرارة العظمى المتوقعة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة.

b. هل درجة الحرارة العظمى المتوقعة دالة من أيام الأسبوع؟ وهل درجة الحرارة الصغرى كذلك؟ اشرح استنتاجك.

جـد قيمة كل دالة. (مثال 4)

30. $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$
   a. $g(9)$
   b. $g(3x)$
   c. $g(1 + 5m)$

31. $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
   a. $h(4)$
   b. $h(-2y)$
   c. $h(5b + 3)$

32. $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$
   a. $f(-6)$
   b. $f(4t)$
   c. $f(3 - 2a)$

33. $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$
   a. $g(-2)$
   b. $g(5x)$
   c. $g(8 - 4b)$

34. $h(x) = 16 - \frac{12}{2x + 3}$
   a. $h(-3)$
   b. $h(6x)$
   c. $h(10 - 2c)$

35. $f(x) = -7 + \frac{6x + 1}{x}$
   a. $f(5)$
   b. $f(-8x)$
   c. $f(6y + 4)$

36. $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
   a. $g(-2)$
   b. $g(3m)$
   c. $g(4m - 2)$

37. $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
   a. $t(-4)$
   b. $t(2x)$
   c. $t(7 + n)$

38. **مشغلات الصوت الرقمية** يمكن عمل نموذج لمبيعات مشغلات الصوت الرقمية التي بملايين الدراهم خلال فترة خمسة أعوام باستخدام الدالة $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$. حيث t تمثل العام. بيانات المبيعات الفعلية موضحة بالجدول. (المثال 4)

العام	المبيعات (AED)
1	1 مليون
2	3 ملايين
3	14 مليونًا
4	74 مليونًا
5	219 مليونًا

a. جـد $f(1)$ و $f(5)$.

b. هل تعتقد أن النموذج سيكون أكثر دقة في الأعوام الأولى أم الأخيرة؟ اشرح استنتاجك.

حدد المجال لكل دالة. (المثال 5)

39. $f(x) = \dfrac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

40. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

41. $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

42. $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

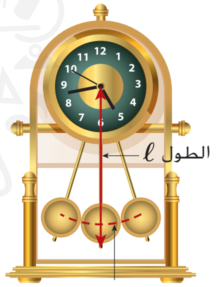
43. $f(a) = \dfrac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

44. $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 16}}$

45. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x + 1}$

46. $g(x) = \dfrac{6}{x + 3} + \dfrac{2}{x - 4}$

47. **الفيزياء** تعبر الفترة T للبندول عن الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة ويمكن حسابها باستخدام الصيغة $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{9.8}}$. حيث ℓ تمثل طول البندول وتمثل 9.8 التسارع بسبب الجاذبية بالمتر لكل ثانية مربعة. هل تمثل هذه الصيغة دالة من ℓ؟ إذا كان كذلك، فحدد المجال وإلا فاشرح السبب. (المثال 5)



جـد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل دالة متعددة التعريف. (المثال 6)

48. $f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & , x < 3 \\ -x^3 & , 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 & , x > 8 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} -5x^2 & , x < -6 \\ x^2 + x + 1 & , -6 \le x \le 12 \\ 0.5x^3 - 4 & , x > 12 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6x + 4 & , x < -4 \\ 6 - x^2 & , -4 \le x < 12 \\ 14 & , x \ge 12 \end{cases}$

51. $f(x) = \begin{cases} -15 & , x < -5 \\ \sqrt{x + 6} & , -5 \le x \le 10 \\ \dfrac{2}{x} + 8 & , x > 10 \end{cases}$

52. **الضريبة على الدخل** يمكن تمثيل ضريبة الدخل الفيدرالية التي يدفعها الشخص الأعزب في الإمارات العربية المتحدة في العام الأخير باستخدام الدالة التالية. حيث تمثل x الدخل وتمثل $T(x)$ إجمالي الضريبة. (المثال 6)

$$T(x) = \begin{cases} 0.10x & , 0 \le x \le 7285 \\ 782.5 + 0.15x & , 7285 < x \le 31{,}850 \\ 4386.25 + 0.25x & , 31{,}850 < x \le 77{,}100 \end{cases}$$

a. جـد $T(7000)$ و $T(10{,}000)$ و $T(50{,}000)$.

b. إذا كان الدخل السنوي للشخص 7285 AED. فكم ستكون الضريبة على دخله؟

53. **المواصلات العامة** يمكن تمثيل استخدام المواصلات العامة على المستوى الوطني باستخدام الدالة التالية. يمثل العام 2012 بـ $t = 0$ وتمثل $P(t)$ رحلات الركاب بالمليون. (المثال 6)

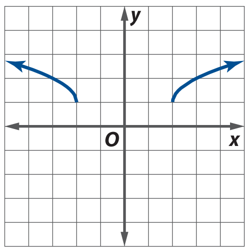
$$P(t) = \begin{cases} 0.35t + 7.6 & , 0 \le t \le 5 \\ 0.04t^2 - 0.6t + 11.6 & , 5 < t \le 10 \end{cases}$$

a. كم يكون العدد التقريبي لرحلات الركاب عام 2016؟ وعام 2020؟

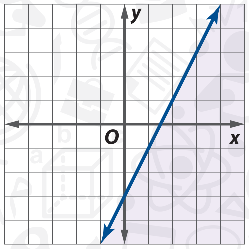
b. عين مجال الدالة.

استخدم اختبار المستقيم الرأسي في تحديد ما إذا كان كل تمثيل بياني يمثل دالة أم لا. اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.

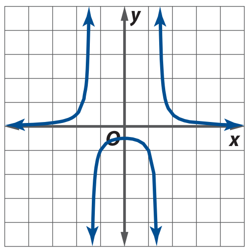
54.



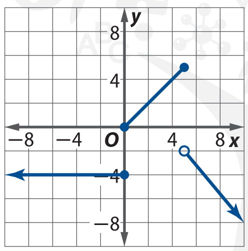
55.



56.



57.



58. **الماراثون الثلاثي** في ماراثون ثلاثي، يقوم الرياضيون بالسباحة مسافة 2.4 km وبركوب الدراجات مسافة 112 km وفي النهاية يجرون مسافة 26.2 km. موضح بالجدول متوسط سرعات محمود في كل مرحلة من مراحل الماراثون.

المرحلة	السرعة
السباحة	4 km/h
ركوب الدراجات	20 km/h
الجري	6 km/h

a. اكتب دالة متعددة التعريف لوصف المسافة D التي قطعها محمود بدلالة الزمن t. قرّب t إلى أقرب عشرة، إن لزم الأمر.

b. عين مجال الدالة.

59. **الانتخابات** صف مجموعة أعوام الانتخابات الرئاسية الأمريكية بدءًا من 1792 باستخدام رمز الفترة أو رمز المجموعة. اشرح استنتاجك.

60. **أكشاك الوجبات الخفيفة** يمكن تمثيل عدد الطلاب الذين يعملون بأكشاك الوجبات الخفيفة بمباراة كرة قدم بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x}{50}$. حيث يمثل x عدد التذاكر المبيعة. صف المجال ذا الصلة للدالة.

61. **الجمهور** تأسس فريق شيكاغو كابس للبيسبول منذ عام 1876. يمكن تمثيل إجمالي الحضور لمبارياته المحلية بالعلاقة $f(x) = 21{,}870x -$ $40{,}962{,}679$، حيث تمثل x السنة. صف المجال ذا الصلة للدالة.

62. **المحاسبة** تبلى أصول الشركات – كالمعدات – أو تُستهلك بمرور الوقت. وتمثل طريقة القسط الثابت إحدى طرق حساب الإهلاك. باستخدام قيمة العمر المقدر للأصول. افترض أن الدالة $v(t) = 10{,}440 - 290t$ تصف القيمة $v(t)$ لماكينة التصوير بعد مرور t من الأشهر. صف المجال ذا الصلة للدالة.

جـد $f(a)$ و $f(a+h)$ و $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا كان $h \neq 0$.

63. $f(x) = -5$

64. $f(x) = \sqrt{x}$

65. $f(x) = \frac{1}{x+4}$

66. $f(x) = \frac{2}{5-x}$

67. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

68. $f(x) = -\frac{1}{4}x + 6$

69. $f(x) = -x^5$

70. $f(x) = x^3 + 9$

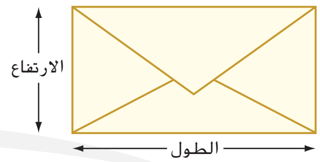
71. $f(x) = 7x - 3$

72. $f(x) = 5x^2$

73. $f(x) = x^3$

74. $f(x) = 11$

75. **البريد** تتطلب هيئة البريد أن تكون النسبة بين بعدي المظاريف (الطول مقسومًا على الارتفاع) هي 1.3 إلى 2.5، شاملة. الحد الأدنى المسموح به للطول يبلغ 12.5 cm بينما الحد الأقصى للطول يبلغ 28.5 cm.

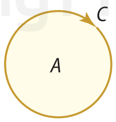


a. اكتب مساحة المظروف A كدالة للطول ℓ. إذا كانت النسبة بين البعدين 1.8. عيّن مجال الدالة.

b. اكتب مساحة المظروف A كدالة للارتفاع h إذا كانت النسبة بين البعدين 2.1. عيّن مجال الدالة.

c. جـد مساحة المظروف بالحد الأقصى للارتفاع عند أقصى نسبة للبعدين.

76. **الهندسة** فلنأخذ الدائرة أدناه ذات المساحة A والمحيط C.



a. قم بتمثيل مساحة الدائرة في صورة دالة لمحيطها.

b. جـد $A(0.5)$ و $A(4)$.

c. ما الذي تلاحظه بشأن مساحة الدائرة مع تزايد المحيط؟

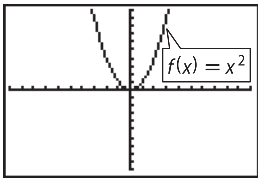
حدد ما إذا كانت كل معادلة تعتبر دالة لـ x. اشرح.

77. $x = |y|$

78. $x = y^3$

79. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف مدى الدالة.

a. **بيانيًا** استخدم حاسبة تمثيل بياني لتمثيل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًا لقيم الأعداد الكلية n من 1 إلى 6، شاملة.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

b. **جدوليّ** تنبأ بمدى كل دالة معتمدًا على التمثيل البياني واعرض في جدول كل قيم n والمدى المقابل لها.

c. **لفظيًا** قدم تخمينًا حول مدى $f(x)$ عندما يكون n عددًا زوجيًا.

d. **لفظيًا** قدم تخمينًا حول مدى $f(x)$ عندما يكون n عددًا فرديًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

80. **تحليل الخطأ** يقوم كل من أحمد وطارق بإيجاد قيمة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. يرى أحمد أن مجال الدالة هو $(-\infty, -2) \cup (1, 1) \cup (2, \infty)$. ويرى طارق أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$. فمن منهما على صواب؟ اشرح.

81. **الكتابة في الرياضيات** اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ بطريقة رمز الفترة وطريقة رمز المجموعة. أي رمز تفضل؟ اشرح.

82. **تحدٍ** $G(x)$ دالة يكون فيها $G(1) = 1$ و $G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\, G(x-1) + 1}{G(x)}$ حيث $x \geq 3$. جـد $G(6)$.

التبرير حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أو خطأ بفرض وجود دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y. إذا كانت الجملة خطأ، فأعد كتابتها بما يجعلها صحيحة.

83. يجب أن يرتبط كُل عُنصر في X بعنصر واحد فقط في Y.

84. يجب أن يرتبط كُل عُنصر في Y بعنصر في X.

85. لا يمكن أن يرتبط عُنصران أو أكثر في X مع نفس العُنصر في Y.

86. لا يمكن أن يرتبط عُنصران أو أكثر في Y مع نفس العُنصر في X.

الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك تحديد دالة وصفت بكل مما يلي.

87. وصف لفظي للمدخلات والمخرجات

88. مجموعة من الأزواج المرتبة

89. جدول قيم

90. تمثيل بياني

91. معادلة

مراجعة شاملة

جـــد الانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات.

92. {200, 476, 721, 579, 152, 158}

93. {5.7, 5.7, 5.6, 5.5, 5.3, 4.9, 4.4, 4.0, 4.0, 3.8}

94. {369, 398, 381, 392, 406, 413, 376, 454, 420, 385, 402, 446}

.95 البيسبول كم عدد الفرق المكونة من 9 لاعبين التي يمكن تشكيلها إن كان هناك 3 لاعبين فقط يمكنهم لعب دور ملتقط الكرة و 4 لاعبين فقط يمكنهم اللعب عند أول قاعدة و 6 لاعبين فقط يمكنهم اللعب في دور الرامي و 14 لاعبًا يمكنهم اللعب في أي من المراكز الستة المتبقية؟

جـــد قيم x و y لجعل كل معادلة مصفوفية صحيحة.

96. $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 3 \\ y - 2 \end{bmatrix}$

97. $\begin{bmatrix} 3y \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 + 6x \\ 5y \end{bmatrix}$

98. $[9 \quad 11] = [3x + 3y \quad 2x + 1]$

استخدم أي طريقة لحل نظام المعادلات. حدد ما إذا كان نظام المعادلات *متوافقًا* أو *تابعًا* أو *مستقلاً* أو *غير متوافق*.

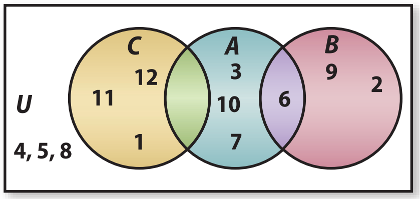
99. $2x + 3y = 36$
$4x + 2y = 48$

100. $5x + y = 25$
$10x + 2y = 50$

101. $7x + 8y = 30$
$7x + 16y = 46$

.102 أعمال تجارية يبيع متجر للكتب المستعملة 1400 كتاب ورقي الغلاف أسبوعيًا بسعر AED 9 للكتاب. ويقدر مالك المتجر أن المبيعات ستقل 100 كتاب لكل زيادة في السعر بمقدار AED 1. ما السعر الذي سيرفع دخل المتجر لأقصى حد؟

استخدم مخطط فن لإيجاد كل مما يلي.



103. A'

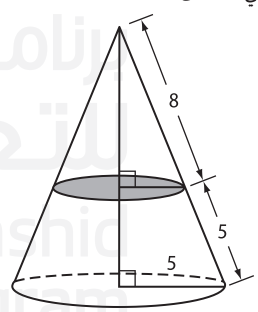
104. $A \cup B$

105. $B \cap C$

106. $A \cap B$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.107 SAT/ACT مخروط أسطواني بقاعدة نصف قطرها 5 تم قطعه كما هو موضح في الشكل.



فما ارتفاع المخروط العلوي الأصغر؟

A $\frac{8}{13}$ **C** $\frac{96}{12}$ **E** $\frac{104}{5}$

B $\frac{96}{13}$ **D** $\frac{96}{5}$

.108 مراجعة أي الدوال التالية دالة خطية؟

F $f(x) = x^2$ **H** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

G $g(x) = 2.7$ **J** $g(x) = \sqrt{x - 1}$

.109 يسافر عمر بالطيارة من الشارقة إلى أبو ظبي لحضور مؤتمر. ويمكنه أن يركن سيارته في موقف السيارات طويل الأجل الموجود بمطار الشارقة أو بمرفق وقوف السيارات القريب الخاص بالحافلات. تبلغ تكلفة موقف السيارات طويل الأجل AED 4 في الساعة أو أي جزء من الساعة وبحد أقصى AED 24 في اليوم. في المرفق الخاص بالحافلات، يدفع AED 16 في اليوم أو جزء من اليوم. أي الموقفين أقل تكلفة إذا كان عمر سيعود بعد يومين و 3 ساعات؟

A مرفق وقوف الحافلات

B موقف السيارات بالمطار

C سيكون لكليهما نفس التكلفة.

D لا يمكن تحديد بالمعطيات المتوفرة

.110 مراجعة بافتراض أن $y = 2.24x + 16.45$. أي العبارات تقدم الوصف الأفضل لتأثير تحريك التمثيل البياني وحدتين للأسفل؟

F يزيد التقاطع مع المحور الرأسي y.

G يظل التقاطع مع المحور الأفقي x كما هو.

H يزيد التقاطع مع المحور الأفقي x.

J يبقى التقاطع مع المحور الرأسي y كما هو.

الدرس 1-2

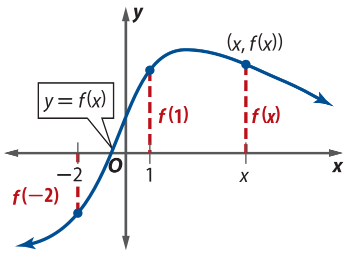
تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• قمت بتحديد الدوال. (الدرس 1-1)	• 1 استخدام التمثيلات البيانية للدوال في تقدير قيم الدوال. 2 تحديد الدوال الفردية والزوجية.	• مع لجوء المزيد من الأفراد إلى الإنترنت لمعرفة الأخبار والترفيه عن أنفسهم، أصبحت الدعاية عبر الإنترنت عملاً تجاريًا ضخمًا. يمكن حساب إجمالي العوائد R بملايين الدراهم التي حققتها إحدى الشركات العالمية في مجال الدعاية عبر الإنترنت خلال الفترة من 1999 إلى 2008 من العلاقة $R(t) = 17.7t^3 - 269t^2 + 1458t - 910,\ 1 \le t \le 10$. حيث t تمثل عدد الأعوام منذ 1998. قد تساعدك التمثيلات البيانية لدوال كهذه في تصور العلاقات بين الكميات في الحياة اليومية.

مفردات جديدة
أصفار zeros
جذور roots
تناظر محوري line symmetry
تناظر نقطي point symmetry
دالة زوجية even function
دالة فردية odd function

1 تحليل التمثيلات البيانية للدوال

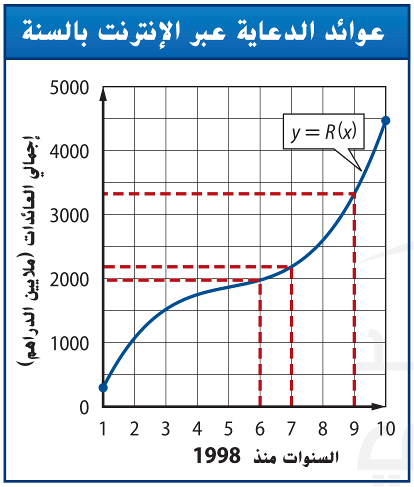
التمثيل البياني للدالة f عبارة عن مجموعة من الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ بحيث تقع x ضمن مجال f. بعبارة أخرى، التمثيل البياني للدالة f هو التمثيل البياني للمعادلة $y = f(x)$. ولذا فقيمة الدالة هي المسافة الموجهة y على التمثيل البياني من النقطة x على المحور الأفقي x كما هو موضح.



يمكنك استخدام التمثيل البياني في تقدير قيم الدوال.

مثال 1 من الحياة اليومية تقدير قيم الدوال

الإنترنت ادرس التمثيل البياني للدالة R الموضحة.



a. استخدم التمثيل البياني في تقدير إجمالي عوائد الدعاية عبر الإنترنت في 2007. تأكد من التقدير جبريًا.

العام 2007 يأتي بعد 9 أعوام من العام 1998. قيمة الدالة عندما $x = 9$ تبدو حوالي 3300 مليون AED. ولذا فإجمالي عوائد الإعلانات عبر الإنترنت في 2007 بلغ حوالي 3.3 مليار AED.

لتأكيد هذا التقدير جبريًا، قم بإيجاد $f(9)$.

$$f(9) = 17.7(9)^3 - 269(9)^2 + 1458(9) - 910$$

≈ 3326.3 مليون أو 3.326 مليار

وبناءً على ذلك، يعد التقدير البياني البالغ 3.3 مليار AED منطقيًا.

b. استخدم التمثيل البياني في تقدير العام الذي بلغ فيه إجمالي عوائد الإعلان عبر الإنترنت 2 مليار AED. تأكد من التقدير جبريًا.

تبلغ قيمة الدالة 2 مليار AED أو 2000 مليون AED عندما تكون قيم x بين 6 و 7. لذا بلغ إجمالي العائدات حوالي 2 مليار AED في 1998 + 6 أو 2004 ولكن تجاوزت 2 مليار AED بنهاية 1998 + 7 أو 2005.

للتأكيد جبريًا، قم بإيجاد $f(6)$ و $f(7)$.

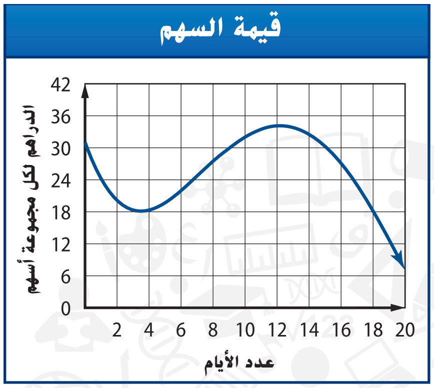
$f(6) = 17.7(6)^3 - 269(6)^2 + 1458(6) - 910$ أو حوالي 1977 مليون

$f(7) = 17.7(7)^3 - 269(7)^2 + 1458(7) - 910$ أو حوالي 2186 مليون

بوحدة المليار، تكون $f(6) \approx 1.977$ مليار وتكون $f(7) \approx 2.186$ مليار. لذا، فالتقدير البياني الذي يشير إلى أن عوائد الإعلان عبر الإنترنت بلغت 2 مليار AED في 2005 يكون منطقيًا.

تمرين موجّه

1. الأسهم قام أحد المستثمرين بإيجاد قيمة متوسط القيمة اليومية لمجموعة سهم معين على مدار 20 يومًا. يمكن إيجاد قيمة تقريبية لقيمة السهم من خلال العلاقة $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31,\ 0 \le d \le 20$، حيث d تمثل يوم التقييم.



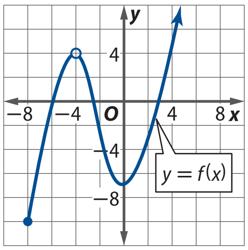
A. استخدم التمثيل البياني في تقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. تأكد من التقدير جبريًا.

B. استخدم التمثيل البياني في تقدير الأيام التي بلغت قيمة السهم فيها AED 30 للسهم. تأكد من التقدير جبريًا.

كما يمكنك استخدام التمثيل البياني في إيجاد المجال والمدى للدالة. ما لم يكن التمثيل البياني للدالة محدودًا على الجانب الأيسر بدائرة أو نقطة، يمكنك افتراض أن الدالة ممتدة إلى ما بعد حواف التمثيل البياني.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

استخدم التمثيل البياني لـ f لمعرفة مجال الدالة ومداها.



المجال

- النقطة الموجودة عند $(-8, -10)$ تشير إلى أن مجال الدالة f يبدأ عند -8 ويشملها.
- الدائرة الموجودة عند $(-4, 4)$ تشير إلى أن -4 ليست جزءًا من المجال.
- يشير السهم الموجود على الجانب الأيمن إلى أن التمثيل البياني سيمتد دون حد.

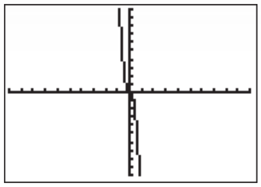
مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. في رمز بناء المجموعة، يكون المجال هو $\{x \mid -8 \le x,\ x \ne -4,\ x \in \mathbb{R}\}$.

المدى

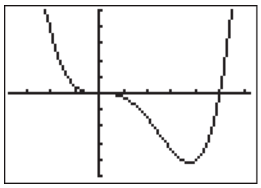
لا يمتد التمثيل البياني تحت $f(-8)$ أو -10. لكن الدالة $f(x)$ تتزايد بلا حد كلما زادت قيمة x. ولذا فمدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

تلميح تقني

اختيار نافذة مناسبة تُعد نافذة عرض التمثيل البياني صورة من التمثيل البياني لمجال ومدى محددين. قد لا يمثل هذا التمثيل البياني بالكامل. لاحظ الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ المرسومين أدناه.



[−10, 10] scl: 1 by
[−10, 10] scl: 1

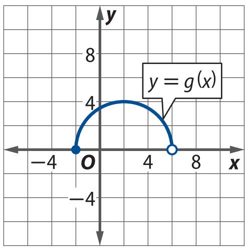


[−15, 25] scl: 4 by
[−20,000, 20,000] scl: 4000

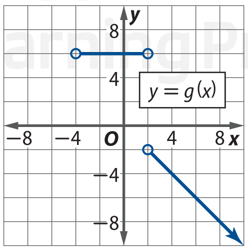
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لـ g لإيجاد المجال والمدى لكل دالة.

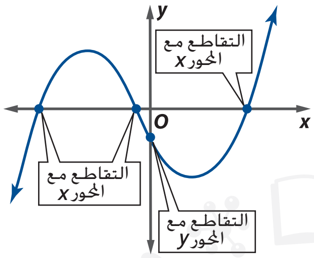
2A.



2B.



يطلق على النقطة التي يتقاطع فيها التمثيل البياني أو يتقابل فيها مع المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y نقطة التقاطع. يحدث التقاطع مع المحور الأفقي x عندما تكون $y = 0$. يحدث التقاطع مع المحور الرأسي y عندما تكون $x = 0$. قد لا يتقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور الأفقي x أو يتقاطع مرة واحدة فقط أو أكثر من مرة ولكن يتقاطع مرة واحدة فقط على الأكثر مع المحور الرأسي y.

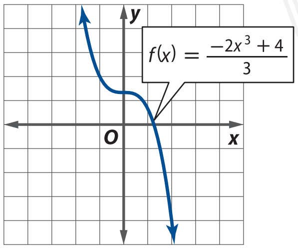


لإيجاد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y للتمثيل البياني للدالة f جبريًا، جـد $f(0)$.

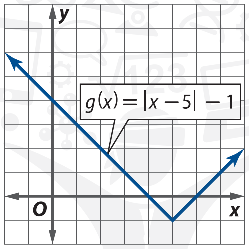
مثال 3 إيجاد التقاطع مع المحور الرأسي y

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتحديد القيم التقريبية للتقاطع مع المحور y ثم جـد التقاطع مع المحور الرأسي y جبريًا.

a.



b.



a. التقدير بيانيًا

يبدو أن الدالة $f(x)$ تتقاطع مع المحور الرأسي y تقريبًا عند $\left(0, 1\frac{1}{3}\right)$. ولذا فإن التقاطع مع المحور الرأسي y يكون تقريبًا عند $1\frac{1}{3}$.

الحل جبريًا

جـد $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} \text{ أو } \frac{4}{3}$$

التقاطع مع المحور الرأسي y عند $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

b. التقدير بيانيًا

يبدو أن الدالة $g(x)$ تتقاطع مع المحور الرأسي y عند $(0, 4)$. ولذا فإن التقاطع مع المحور الرأسي y عند 4.

الحل جبريًا

جـد $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 \text{ أو } 4$$

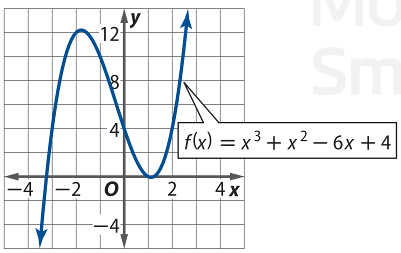
التقاطع مع المحور الرأسي y عند 4.

نصيحة دراسية

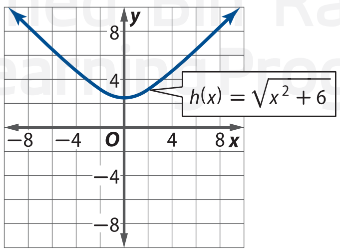
تسمية محور على التمثيلات البيانية عند تسمية محور على التمثيل البياني، سيظهر حرف المتغير للمجال على المحور الأفقي x وحرف المتغير للمدى على المحور الرأسي y. خلال هذا الكتاب، هناك ثلاثة متغيرات مختلفة مستخدمة لكل من المجال والمدى. للتوحيد، المحور الأفقي دائمًا هو x والمحور الرأسي دائمًا هو y.

تمرين موجّه

3A.



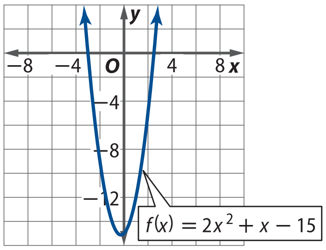
3B.



يطلق على نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور الأفقي x أيضًا **أصفار** الدالة. حلول المعادلة المقابلة تسمى **جذور** المعادلة. لإيجاد أصفار الدالة f، اجعل الدالة تساوي 0 وجـد حلها لمعرفة قيم المتغير المستقل.

مثال 4 إيجاد الأصفار

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لتحديد أصفارها تحديدًا تقريبيًا ثم جـد أصفارها جبريًا.



التقدير بيانيًا

تبدو تقاطعات المحور الأفقي x عند -3 و 2.5 تقريبًا.

الحل جبريًا

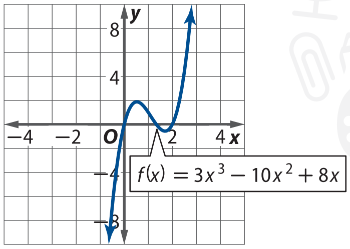
$2x^2 + x - 15 = 0$	بفرض $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 2.5$ ، $x = -3$	جـد الحل لمعرفة x

أصفار الدالة f هي -3 و 2.5.

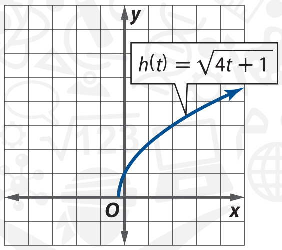
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتحديد القيم التقريبية لأصفارها ثم جـد أصفارها جبريًا.

4A.



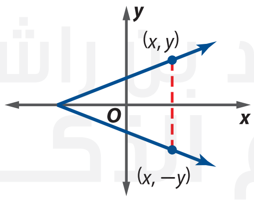
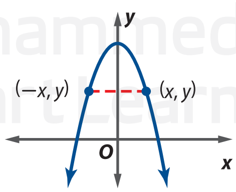
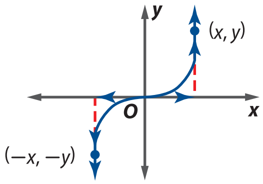
4B.



2 تناظر التمثيلات البيانية

تتخذ التمثيلات البيانية للعلاقات نوعين مختلفين من التناظر. التمثيلات البيانية التي تتخذ **التناظر المحوري** يمكن طيها حول مستقيم بحيث يتطابق النصفان تمامًا. التمثيلات البيانية التي تتخذ **التناظر النقطي** يمكن تدويرها بمقدار $180°$ حول نقطة معينة وتظهر دون تغيير. موضح أدناه أشهر ثلاثة أنواع من التناظر.

المفهوم الرئيسي اختبارات التناظر

اختبار التمثيل البياني	استخدام النماذج	الاختبار الجبري
يُعد التمثيل البياني لأي علاقة *متناظرة* حول *المحور الأفقي* x فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) على التمثيل البياني توجد النقطة $(x, -y)$ أيضًا على التمثيل البياني.		حذف y ووضع $-y$ محلها ينتج معادلة مكافئة.
يُعد التمثيل البياني لأي علاقة *متناظرًا* حول *المحور الرأسي* y فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) على التمثيل البياني توجد النقطة $(-x, y)$ أيضًا على التمثيل البياني.		حذف x ووضع $-x$ محلها ينتج معادلة مكافئة.
يُعد التمثيل البياني لأي علاقة *متناظرًا* حول *نقطة الأصل* فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) على التمثيل البياني توجد النقطة $(-x, -y)$ أيضًا على التمثيل البياني.		حذف x ووضع $-x$ محلها وحذف y أيضًا ووضع $-y$ محلها ينتج معادلة مكافئة.

نصيحة دراسية

التناظر والعلاقات والدوال هناك *علاقات* كثيرة يكون فيها التناظر حول المحور الأفقي x أو حول المحور الرأسي y أو حول نقطة الأصل. إلا أن *الدالة* الوحيدة المشتملة على الأنواع الثلاثة للتناظر هي الدالة الصفرية، $f(x) = 0$.

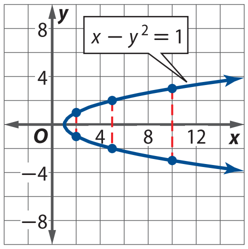
نصيحة دراسية

التناظر يمكن أن يعرض التمثيل البياني أكثر من نوع واحد للتناظر.

مثال 5 اختبار التناظر

استخدم التمثيل البياني لكل معادلة في اختبار التناظر حول المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y أو نقطة الأصل. دعّم إجابتك عدديًا ثم أكدها جبريًا.

a. $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًا

يبدو التمثيل البياني متناظرًا حول المحور الأفقي x لأن لكل نقطة (x, y) على التمثيل البياني توجد نقطة $(x, -y)$.

الدعم عدديًا

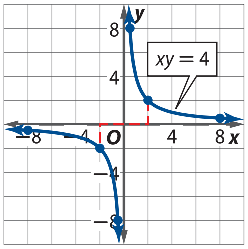
جدول قيم يدعم هذه الفرضية.

x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التأكيد جبريًا

لأن $x - (-y)^2 = 1$ مكافئة لـ $x - y^2 = 1$. فالتمثيل البياني متناظر حول المحور الأفقي x.

b. $xy = 4$



التحليل بيانيًا

يبدو التمثيل البياني متناظرًا حول نقطة الأصل لأن لكل نقطة (x, y) على التمثيل البياني توجد نقطة $(-x, -y)$.

الدعم عدديًا

جدول قيم يدعم هذه الفرضية.

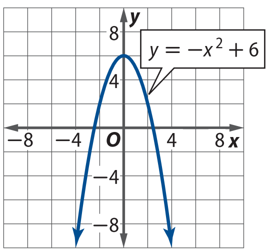
x	−8	−2	−0.5	0.5	2	8
y	−0.5	−2	−8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

التأكيد جبريًا

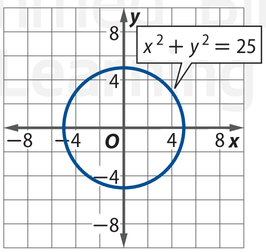
لأن $(-x)(-y) = 4$ مكافئ لـ $xy = 4$. فالتمثيل البياني متناظر حول نقطة الأصل.

تمرين موجّه

5A.



5B.



قد تتناظر التمثيلات البيانية للدوال حول المحور الرأسي y أو نقطة الأصل. الدوال التي بهذه الأنواع من التناظر تكون لها أسماء خاصة.

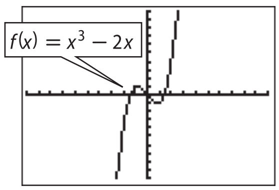
المفهوم الرئيسي الدوال الفردية والدوال الزوجية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
يُطلق على الدوال المتناظرة حول المحور الرأسي y **دوال زوجية**.	لكل x في مجال الدالة f. $f(-x) = f(x)$.
يُطلق على الدوال المتناظرة حول نقطة الأصل **دوال فردية**.	لكل x في مجال الدالة f. $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

حاسبة التمثيل البياني قم بتمثيل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني في تحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو *ليست أيًا منهما*. قم بتأكيد الحل جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.

a. $f(x) = x^3 - 2x$



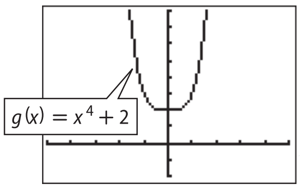
$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

يبدو أن التمثيل البياني للدالة متناظر حول نقطة الأصل.
اختبر هذه الفرضية.

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$	بالتعويض بـ $-x$ عن x
$= -x^3 + 2x$	بسّط
$= -(x^3 - 2x)$	خاصية التوزيع
$= -f(x)$	الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

الدالة فردية لأن $f(-x) = -f(x)$. ولذا، فالدالة متناظرة حول نقطة الأصل.

b. $g(x) = x^4 + 2$



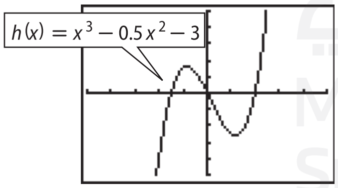
$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

يبدو أن التمثيل البياني للدالة متناظر حول المحور الرأسي y.
اختبر هذه الفرضية.

$g(-x) = (-x)^4 + 2$	بالتعويض بـ $-x$ عن x
$= x^4 + 2$	بسّط
$= g(x)$	الدالة الأصلية $g(x) = x^4 + 2$

الدالة زوجية لأن $g(-x) = g(x)$. ولذا، فالدالة متناظرة حول المحور الرأسي y.

c. $h(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

يبدو أن التمثيل البياني للدالة متناظر حول نقطة الأصل.
اختبر هذه الفرضية جبريًا.

$h(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$	بالتعويض بـ $-x$ عن x
$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$	بسّط

لأن $-h(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$. إذًا فالدالة ليست فردية
ولا زوجية لأن $h(-x) \neq h(x)$ و $h(-x) \neq -h(x)$.

نصيحة دراسية

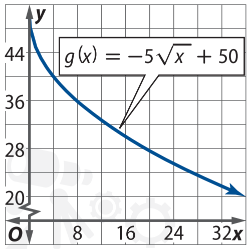
الدوال الزوجية والدوال الفردية من الضروري دائمًا تأكيد التناظر جبريًا. فقد لا تكون التمثيلات البيانية التي تبدو متناظرة متناظرة بالفعل.

تمرين موجّه

6A. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ **6B.** $g(x) = 4\sqrt{x}$ **6C.** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

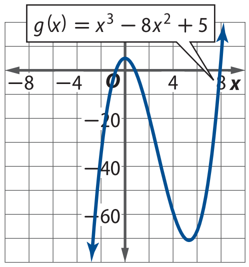
استخدم التمثيل البياني لكل دالة في تقدير قيم كل دالة. بعد ذلك، قم بتأكيد التقدير جبريًا. قرّب إلى أقرب مئة، إن لزم الأمر. (مثال 1)

1.



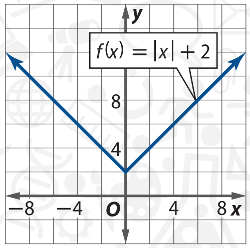
a. $g(6)$ b. $g(12)$ c. $g(19)$

2.



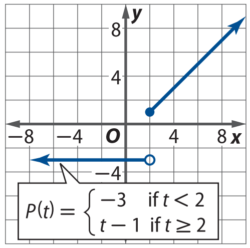
a. $g(-2)$ b. $g(1)$ c. $g(8)$

3.



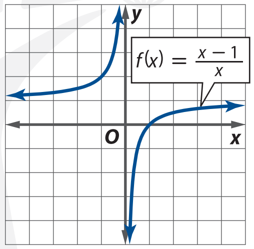
a. $f(-8)$ b. $f(-3)$ c. $f(0)$

4.



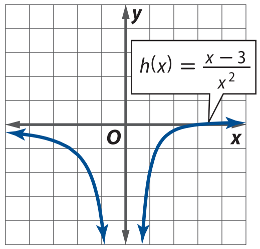
a. $P(-6)$ b. $P(2)$ c. $P(9)$

5.



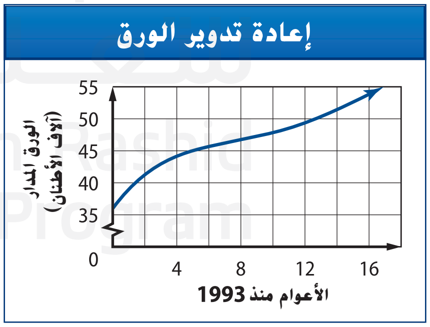
a. $f(-3)$ b. $f(0.5)$ c. $f(0)$

6.



a. $h(-1)$ b. $h(1.5)$ c. $h(2)$

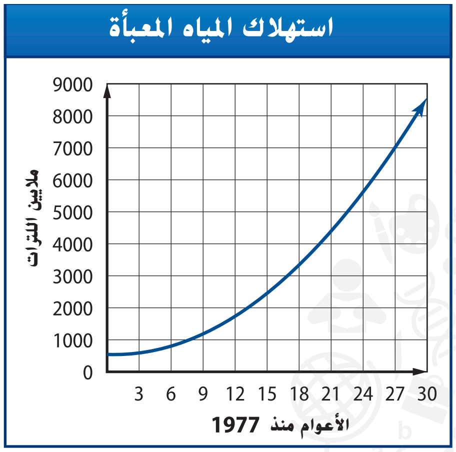
.7 **إعادة التدوير** يمكن تمثيل كمية الورق الذي يُعاد تدويره في الولايات المتحدة بآلاف الأطنان من عام 1993 حتى عام 2007 بالعلاقة $p(x) = -0.0013x^4 + 0.0513x^3 - 0.662x^2 + 4.128x + 35.75$، حيث تمثل x عدد الأعوام منذ 1993. (مثال 1)



.a استخدم التمثيل البياني في تقدير كمية الورق المعاد تدويره في الأعوام 1993 و 1999 و 2006. بعد ذلك. جد كل قيمة جبريًا.

.b استخدم التمثيل البياني في تقدير العام الذي بلغت فيه كمية الورق المُعاد تدويره 50,000 طن.

.8 **الماء** يمكن تمثيل استهلاك المياه المعبأة من 1977 حتى عام 2006 باستخدام العلاقة $f(x) = 9.35x^2 - 12.7x + 541.7$. حيث تمثل x عدد الأعوام منذ 1977. (مثال 1)



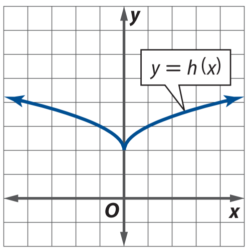
.a استخدم التمثيل البياني في تقدير كمية المياه المعبأة المُستهلكة في العام 1994.

.b جد جبريًا استهلاك العام 1994. قرّب إلى أقرب مليون لتر.

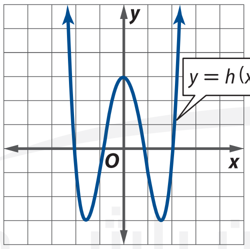
.c استخدم التمثيل البياني في تقدير الزمن الذي بلغ استهلاك الماء فيه 6 مليارات لتر. أكّد الحل جبريًا.

استخدم التمثيل البياني للدالة h في إيجاد المجال والمدى لكل دالة. (مثال 2)

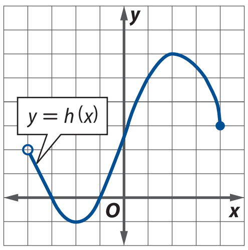
9.



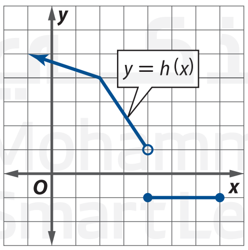
10.



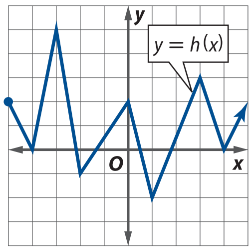
11.



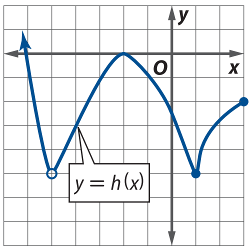
12.



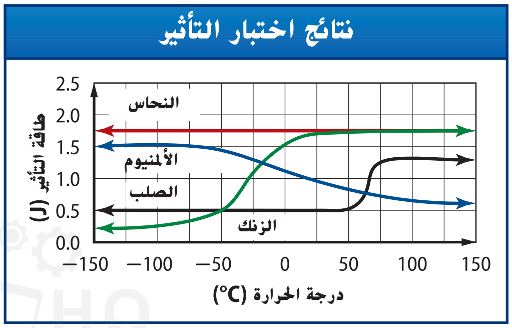
13.



14.



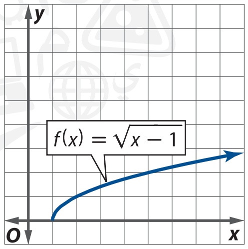
15. **الهندسة** تُجرى اختبارات على السلوك الفيزيائي لأربع عينات معدنية في درجات حرارة مختلفة بالدرجة المئوية. تُقاس طاقة التأثير أو الطاقة التي تمتصها العينة خلال الاختبار بالجول. موضح فيما يلي نتائج الاختبار (مثال 2)

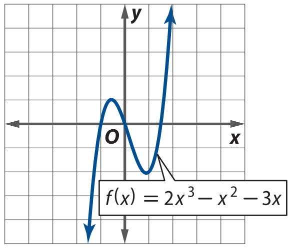


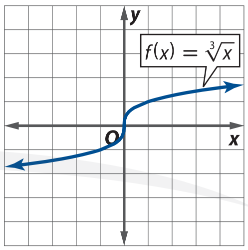
a. عيّن المجال والمدى لكل دالة.

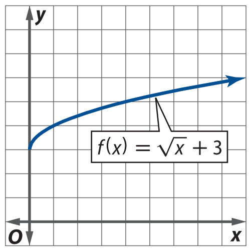
b. استخدم التمثيل البياني في تقدير طاقة التأثير الخاصة بكل قطعة معدنية عند درجة الحرارة $0°C$.

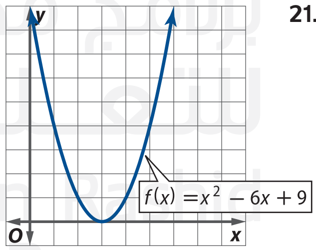
استخدم التمثيل البياني لكل دالة في إيجاد تقاطعها مع المحور الرأسي y وكذلك إيجاد أصفارها. ثم جـد هذه القيم جبريًا. (المثالان 3 و 4)

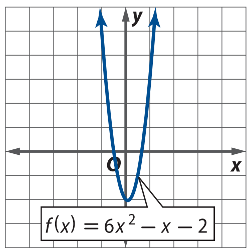
16.


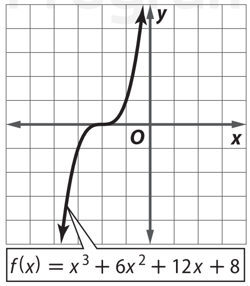
17.


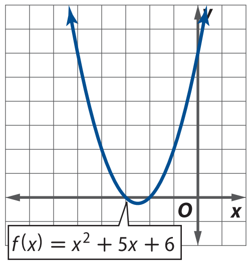
18.


19.


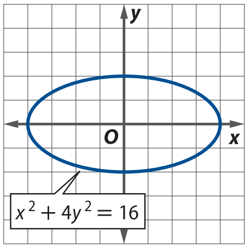
20.


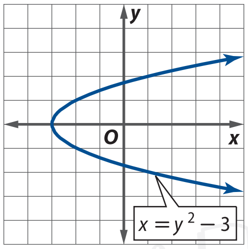
21.


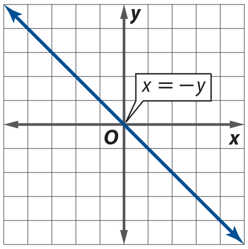
22.


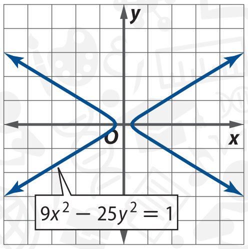
23.


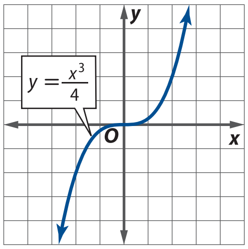
استخدم التمثيل البياني لكل معادلة في اختبار التناظر حول المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y أو نقطة الأصل. دعّم إجابتك عدديًا ثم أكدها جبريًا. (المثال 5)

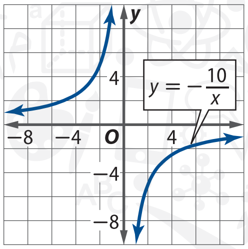
24.


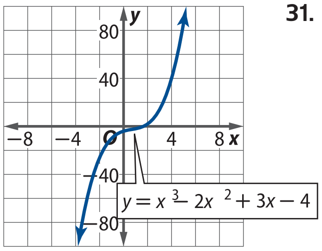
25.


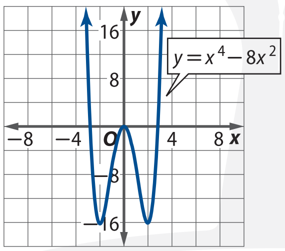
26.


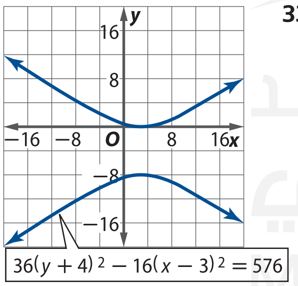
27.


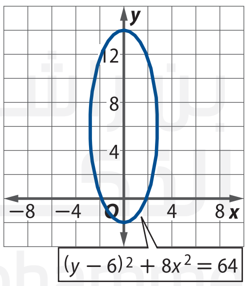
28.


29.


30.


31.


32.


33.


حاسبة التمثيل البياني قم بتمثيل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو *ليست أيًا منهما*. قم بتأكيد الحل جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة. (مثال 6)

34. $f(x) = x^2 + 6x + 10$

35. $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

36. $g(x) = \sqrt{x+6}$

37. $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

38. $h(x) = |8 - 2x|$

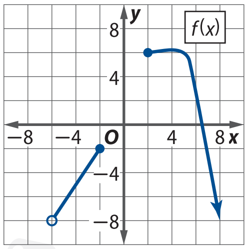
39. $f(x) = |x^3|$

40. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

41. $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

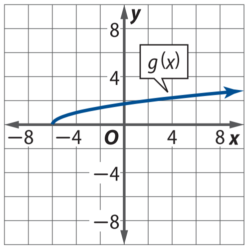
استخدم التمثيل البياني لكل دالة في تقدير قيم الدوال المُشار إليها.

42.



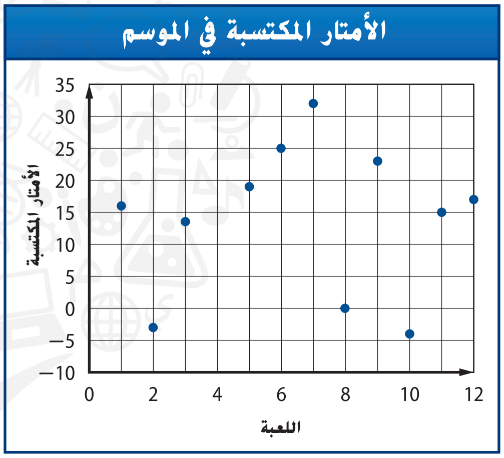
a. $f(-2)$ b. $f(-6)$ c. $f(0)$

43.



a. $g(-8)$ b. $g(-6)$ c. $g(-2)$

.44 الرجبي موضح فيما يلي عدد الأمتار التي قطعها المدافع في كل مباراة بالموسم.



.a حدد المجال والمدى للعلاقة.

.b في أي مباراة لم يقطع اللاعب أية أمتار؟

.45 الهواتف يمكن تمثيل عدد الأسر h بالمليون التي لم تمتلك إلا خدمة الهاتف اللاسلكي من عام 2001 حتى عام 2005 بالعلاقة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$. حيث تمثل x عدد الأعوام بعد العام 2001.

.a حدد المجال ذا الصلة وقيمة تقريبية للمدى.

.b استخدم التمثيل البياني في تقدير عدد الأسر التي لم تمتلك إلا خدمة الهاتف اللاسلكي في العام 2003. بعد ذلك، جد هذا العدد جبريًا.

.c استخدم التمثيل البياني في تحديد التقاطع مع المحور الرأسي y للدالة تحديدًا تقريبيًا. بعد ذلك، جد التقاطع جبريًا. ما الذي يمثله التقاطع مع المحور الرأسي y؟

.d هل لهذه الدالة أصفار؟ إن كان لها، فقم بتقديرها واشرح ما تعنيه وإن لم يكن لها أصفار فاشرح سبب ذلك.

.46 الدوال فلنأخذ $f(x) = x^n$.

.a استخدم حاسبة التمثيل البياني في تمثيل الدالة $f(x)$ بيانيًا لقيم n في المدى $1 \le n \le 6$، حيث $n \in \mathbb{N}$.

.b صف المجال والمدى لكل دالة.

.c صف تناظر كل دالة.

.d تنبأ بالمجال والمدى والتناظر للدالة $f(x) = x^{35}$. اشرح استنتاجك.

.47 علم الصيدلة لنفترض أنه يمكن تمثيل كمية مسكن الألم في مجرى الدم بالمليجرام بعد x ساعة من تناول الجرعة بالعلاقة $f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$.

.a استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

.b عيّن المجال ذا الصلة. اشرح استنتاجك.

.c كم بلغ الحد الأقصى التقريبي من كمية مسكن الألم بالمليجرام في مجرى الدم في أي وقت مُعطى؟

حاسبة التمثيل البياني مثّل كل دالة بيانيًا وحدد موقع الأصفار لكل دالة. أكّد الإجابات جبريًا.

48. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x}$

49. $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x + 3}$

50. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

51. $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$

52. $g(x) = -12 + \dfrac{4}{x}$

53. $g(x) = \dfrac{6}{x} + 3$

.54 التلفاز يمكن تمثيل النسبة المئوية لعدد الأسر h في إحدى المدن التي تمتلك كابلاً رئيسيًا في السنوات من 1986 وحتى 2012 باستخدام العلاقة $h(x) = -0.115x^2 + 4.43x + 25.6,\ 0 \le x \le 26$. حيث x تمثل عدد الأعوام بعد 1986.

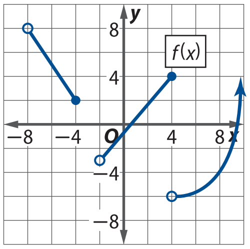
.a استخدم حاسبة التمثيل البياني في عمل التمثيل البياني للدالة.

.b ما النسبة المئوية للأسر التي امتلكت كابلاً رئيسيًا في العام 2005؟ قرّب إلى أقرب نسبة مئوية.

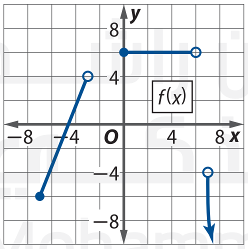
.c ما الأعوام التي تجاوزت فيها النسبة المئوية للمشتركين 65%؟

استخدم التمثيل البياني للدالة f في إيجاد المجال والمدى لكل دالة.

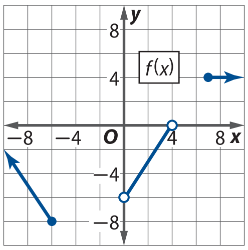
55.



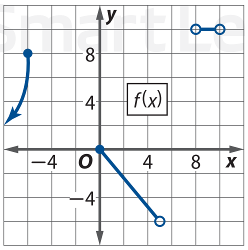
56.



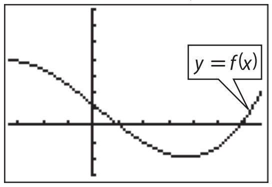
57.



58.



.59 **السكان** في مطلع العام 1900 كان سكان إحدى المدن 140000 نسمة. يعبر عن النسبة المئوية للتغير في عدد السكان من العام 1930 إلى العام 2010 بالعلاقة $f(x) = 0.0001x^3 - 0.001x^2 - 0.825x + 12.58$. حيث تمثل x عدد الأعوام منذ 1930.



$[-50, 100]$ scl: 15 by $[-30, 70]$ scl: 10

.a حدد المجال ذا الصلة وقدّر مدى هذا المجال.

.b استخدم التمثيل البياني في تحديد التقاطع مع المحور الرأسي y تحديدًا تقريبيًا. بعد ذلك، جـد جبريًا التقاطع مع المحور الرأسي y ما الذي يمثله التقاطع مع المحور الرأسي y؟

.c جـد أصفار الدالة وفسّرها.

.d استخدم النموذج في تحديد ما ستكون عليه النسبة المئوية للتغير في عدد السكان في العام 2080. هل هذه القيمة ستبدو واقعية؟ اشرح استنتاجك.

.60 **سوق الأوراق المالية** يمكن تمثيل النسبة المئوية p لتأرجح سعر السهم في عام واحد بالعلاقة $p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$، حيث تمثل x عدد الشهور منذ يناير.

.a استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

.b حدد المجال ذا الصلة وقم بتقدير المدى.

.c استخدم التمثيل البياني في تحديد التقاطع مع المحور الرأسي y تحديدًا تقريبيًا. بعد ذلك، جـد جبريًا التقاطع مع المحور الرأسي y ما الذي يمثله التقاطع مع المحور الرأسي y؟

.d جـد أصفار الدالة وفسّرها.

.61 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف قيم مدى الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ حيث تقترب x من 2.

.a **جدوليّ** انسخ الجدول أدناه واستكمله. أضف قيمة أخرى إلى يسار العدد 2 وإلى يمينها.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$					

.b **تحليلي** استخدم الجدول من الجزء a لوصف سلوك الدالة عندما تقترب x من 2.

.c **بيانيًا** مثّل الدالة بيانيًا. هل التمثيل البياني يدعم تخمينك من الجزء b؟ اشرح.

.d **لفظيًا** قدّم تخمينًا يفسر اقتراب التمثيل البياني للدالة من القيمة (القيم) الموجودة في الجزء c، وفسر حالات عدم الاتساق الموجودة بالتمثيل البياني.

حاسبة التمثيل البياني **قم بتمثيل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني في تحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو *ليست أيًا منهما*. قم بتأكيد الحل جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.**

62. $f(x) = x^2 - x - 6$
63. $g(n) = n^2 - 37$
64. $h(x) = x^6 + 4$
65. $f(g) = g^9$
66. $g(y) = y^4 + 8y^2 + 81$
67. $h(y) = y^5 - 17y^3 + 16y$
68. $h(b) = b^4 - 2b^3 - 13b^2 + 14b + 24$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

مسألة غير محددة الإجابة **ارسم تمثيلًا بيانيًا يطابق كل وصف.**

.69 يمر بالنقاط $(-3, 8)$ و $(-4, 4)$ و $(-5, 2)$ و $(-8, 1)$ ومتناظر حول المحور الرأسي y

.70 يمر بالنقاط $(0, 0)$، و $(2, 6)$، و $(3, 12)$، و $(4, 24)$ ومتناظر حول المحور الأفقي x

.71 يمر بالنقاط $(-3, -18)$ و $(-2, -9)$ و $(-1, -3)$ ومتناظر حول نقطة الأصل

.72 يمر بالنقاط $(4, -16)$، و $(6, -12)$، و$(8, -8)$ ويمثل دالة زوجية

.73 **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يمكن ألا تتقاطع الدالة مع المحور الأفقي x أو تتقاطع معه عند نقطة واحدة فقط أو أكثر من نقطة ولكن تتقاطع مع المحور الرأسي y عند نقطة واحدة فقط.

.74 **تحدٍ** استخدم حاسبة التمثيل البياني في تمثيل الدالة $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 - 12x}$، وتنبأ بمجالها. ثم قم بتأكيد المجال جبريًا. اشرح استنتاجك.

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم *خطأ*. اشرح استنتاجك.**

.75 مدى الدالة $f(x) = nx^2$، حيث n أي عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

.76 مدى الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$، حيث n أي عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

.77 كل الدوال الفردية أيضًا متناظرة حول المستقيم $y = -x$.

.78 الدالة الزوجية التي تدور $180n°$ حول نقطة الأصل، حيث n أي عدد صحيح، تظل دالة زوجية.

التبرير **إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدد ما إذا كانت $b(x)$ فردية أم زوجية أم *ليست أيًا منهما* أو أنه *لا يمكن تحديد ذلك*. اشرح استنتاجك.**

79. $b(x) = a(-x)$
80. $b(x) = -a(x)$
81. $b(x) = [a(x)]^2$
82. $b(x) = a(|x|)$
83. $b(x) = [a(x)]^3$

التبرير **حدد ما إذا كان التمثيل البياني لكل نوع من التناظر يمثل دالة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم *لا يمثل دالة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.**

.84 متناظر حول المستقيم $x = 4$

.85 متناظر حول المستقيم $y = 2$

.86 متناظر حول المستقيم $y = x$

.87 متناظر حول كل من المحور الأفقي x والمحور الرأسي y

.88 **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن أن تكون الدالة زوجية وفردية؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

جـــد قيمة كل دالة. (الدرس 1-1)

89. $g(x) = x^2 - 10x + 3$
  a. $g(2)$
  b. $g(-4x)$
  c. $g(1 + 3n)$

90. $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$
  a. $h(-9)$
  b. $h(3x)$
  c. $h(2 + m)$

91. $p(x) = \dfrac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$
  a. $p(3)$
  b. $p(x^2)$
  c. $p(x + 1)$

.92 **الدرجات** فيما يلي درجات اختبار منتصف الفصل الدراسي لمادة الكيمياء لصف دراسي يضم 25 طالبًا. جـــد مقاييس الانتشار لمجموعة البيانات.

درجات نصف الفصل الدراسي				
81	72	91	76	89
74	80	74	65	81
96	83	76	92	73
70	74	80	61	66
72	62	73	78	97

.93 **بطاقات الفهرسة** من مجموعة بطاقات فهرسة عددها 52 بطاقة، مقسمة بالتساوي بين أربعة ألوان مختلفة أحمر وأصفر وأخضر وأزرق حيث كل لون مرقم من 1 إلى 13. فما احتمال اختيار 5 بطاقات فهرسة تطابق كل وصف مما يلي.

.a 3 بطاقات باللون الأحمر وبطاقتان باللون الأصفر

.b بطاقة واحدة بالرقم 1 وبطاقتان بالرقم 11 وبطاقتان بالرقم 13

.c البطاقات الـــ 5 تحمل الأرقام 11 أو 12 أو 13

جـــد ما يلي حيث $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$.

94. $4A - 2B$

95. $3C + 2A$

96. $-2(B - 3A)$

جـــد قيمة كل تعبير مما يلي.

97. $27^{\frac{1}{3}}$

98. $64^{\frac{5}{6}}$

99. $49^{-\frac{1}{2}}$

100. $16^{-\frac{3}{4}}$

101. $25^{\frac{3}{2}}$

102. $36^{-\frac{3}{2}}$

.103 **الوراثة** افترض أن R و W يمثلان اثنين من الجينات التي يرثها أحد النباتات من آبائه. تمثل حدود المفكوك $(R + W)^2$ أزواج الجينات المحتمل تواجدها في الذرية. اكتب $(R + W)^2$ كدالة كثيرة الحدود.

بسّط.

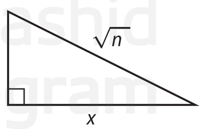
104. $(2 + i)(4 + 3i)$

105. $(1 + 4i)^2$

106. $(2 - i)(3 + 2i)(1 - 4i)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.107 **SAT/ACT** في الشكل. إذا كان n عددًا حقيقيًا أكبر من 1. فما قيمة x بدلالة n؟



A $\sqrt{n^2 - 1}$
B $\sqrt{n - 1}$
C $\sqrt{n + 1}$
D $n - 1$
E $n + 1$

.108 **مراجعة** ما المتباينة التي تصف مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ على المجال $-2 < x < 3$؟

F $5 \le y < 9$
G $2 < y < 10$
H $1 < y < 9$
J $1 \le y < 10$

.109 أي مما يلي يُعد دالة زوجية؟

A $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 8$
B $g(x) = 3x^6 + x^4 - 5x^2 + 15$
C $m(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 35x$
D $h(x) = 4x^6 + 2x^4 + 6x - 4$

.110 أي مما يلي يُعد مجالًا للدالة $g(x) = \dfrac{1 + x}{x^2 - 16x}$؟

F $(-\infty, 0) \cup (0, 16) \cup (16, \infty)$
G $(-\infty, 0] \cup [16, \infty)$
H $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
J $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$

الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

.. السابق

- إيجاد المجال والمدى باستخدام التمثيل البياني لدالة. (الدرس 1-2)

.. الحالي

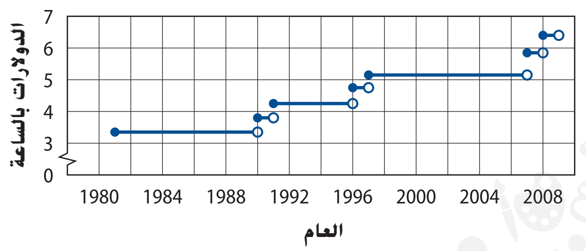
1 استخدام النهايات لتحديد اتصال الدالة.

2 استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

.. لماذا؟

- منذ بدايات ثمانينيات القرن العشرين، شهد الحد الأدنى للأجور في الولايات المتحدة عدة قفزات. ويوضح التمثيل البياني للحد الأدنى للأجور في صورة دالة زمن تلك القفزات في صورة فواصل في التمثيل البياني، مثل تلك الظاهرة عند $x = 1990$ و $x = 1996$ و $x = 2008$.

الحد الأدنى للأجور



مفردات جديدة

دالة متصلة
continuous function

نهاية limit

دالة غير متصلة (منفصلة)
discontinuous function

انفصال لا نهائي
infinite discontinuity

انفصال قفزي
jump discontinuity

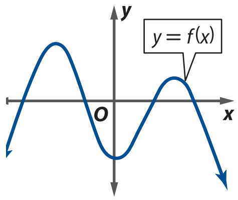
انفصال قابل للإزالة
removable discontinuity

انفصال nonremovable
غير قابل للإزالة
discontinuity

سلوك طرفي
end behavior

1 الاتصال

التمثيل البياني **لدالة متصلة** لا يحتوي على فواصل أو فجوات أو فراغات. ويمكن تتبع التمثيل البياني لدالة متصلة دون رفع القلم الرصاص عن الورقة.



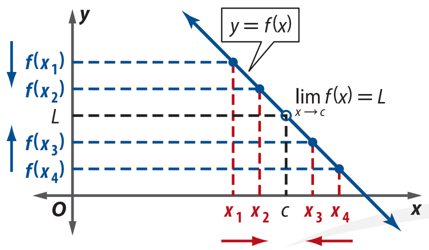
$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

أحد شروط اتصال الدالة $f(x)$ عند $x = c$ هو أن الدالة يجب أن تقترب من إحدى قيمها الفريدة عند اقتراب قيم x من c من الجانبين الأيسر والأيمن. ومفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة يُسمى **نهاية**.

المفهوم الأساسي النهايات

الشرح إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من قيمة وحيدة L عندما تقترب x من c من كل جانب، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز $\lim_{x \to c} f(x) = L$، والتي تعني *نهاية* $f(x)$ *مع اقتراب* x *من القيمة* c *هي* L.

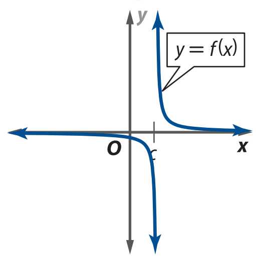


لفهم ما تعنيه الدالة المتصلة من منظور جبري، سيكون من المفيد فحص التمثيلات البيانية **للدوال غير المتصلة** أو الدوال التي ليست متصلة. ويمكن أن تتصف الدوال بأنواع مختلفة من الانفصال.

المفهوم الأساسي أنواع الانفصال

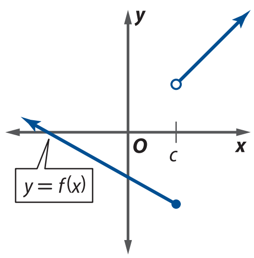
يكون للدالة **انفصال لا نهائي** عند $x = c$ إذا زادت قيمة الدالة أو تناقصت بشكلٍ لا نهائي مع اقتراب x من c من اليسار واليمين.

مثال



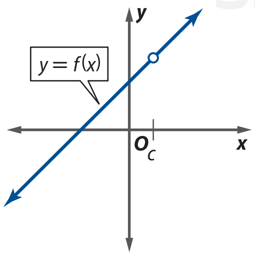
يكون للدالة **انفصال قفزي** عند $x = c$ في حالة وجود نهايتين للدالة بينما تقترب x من c من اليسار واليمين ولكن بقيمتين مختلفتين.

مثال



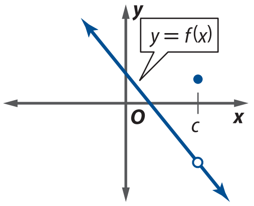
يكون للدالة **انفصال قابل للإزالة** عندما تكون الدالة متصلة في كل مكان باستثناء فجوة عند $x = c$.

مثال



> **نصيحة دراسية**
> **النهايات** إن وجود قيمة لـ $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها لا يؤثر على وجود *نهاية* لـ $f(x)$ مع اقتراب x من c.

لاحظ أنه بالنسبة إلى التمثيلات البيانية للدوال التي لها انفصال قابل للإزالة، توجد نهاية $f(x)$ عند النقطة c ولكن إما أن تكون قيمة الدالة عند c غير معرفة، أو لا تكون قيمة $f(c)$ هي نفسها قيمة النهاية عند النقطة c، كما هو الحال مع التمثيل البياني الموضح.



تُصنَّف الانفصالات اللانهائية والانفصالات القفزية على أنها **انفصالات غير قابلة للإزالة**. ولا يمكن إزالة انفصال غير قابل للإزالة عن طريق إعادة تعريف الدالة عند تلك النقطة، حيث تقترب الدالة من قيم مختلفة من الجانبين الأيمن والأيسر عند تلك النقطة أو لا تقترب من قيمة واحدة على الإطلاق. وبدلاً من ذلك، فإنها تشهد زيادةً أو نقصانًا بصورة لا نهائية.

وتؤدي تلك الملاحظات إلى اختبار الاتصال التالي لدالة.

ملخص المفهوم اختبار الاتصال

وتكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا كانت تحقق الشروط التالية.

- $f(x)$ معرفة عند c. بمعنى، $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة ذاتها من جانبي c. بمعنى، $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- القيمة التي تقترب $f(x)$ منها من جانبي c هي $f(c)$. بمعنى، $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

مثال 1 تحديد نقطة اتصال

حدد ما إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة أم لا عند $x = 2$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

تحقق من الشروط الثلاثة في اختبار الاتصال.

1. هل $f(2)$ موجودة؟

لأن $f(2) = 1$، تكون الدالة معرفة عند $x = 2$.

2. هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

ضع جدولاً يظهر قيم $f(x)$ عندما تقترب قيم x من 2 من اليمين ومن اليسار.

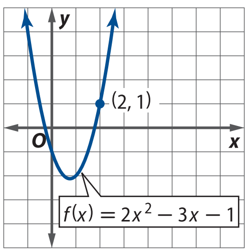
← x تقترب من 2 ——— ——— x تقترب من 2 →

x	1.9	1.99	1.999	**2.0**	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يقترح نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 2 من اليسار واليمين، تقترب $f(x)$ من 1. إذًا، نقدّر أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

3. هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$؟

لأن $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3x - 1)$ تُقدّر بأنها 1 و $f(2) = 1$، نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x = 2$. والتمثيل البياني لـ $f(x)$ الموضح في الشكل 1.3.1 يدعم هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.1

تمرين موجّه

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند $x = 0$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

1A. $f(x) = x^3$

1B. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

في حالة عدم تحقق شرط واحد من شروط الاتصال، تكون الدالة منفصلة عند $x = c$.ويمكن أن يساعدك فحص الدالة على تحديد نوع الانفصال في هذه المرحلة.

مثال 2 تحديد نقاط الانفصال

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم x المذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء *لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة*.

a. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \le -3 \end{cases}$; **عند** $x = -3$

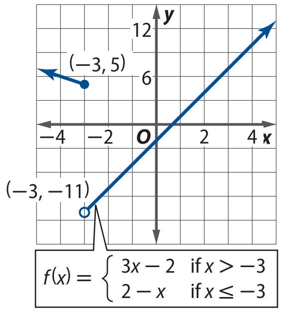
1. لأن $f(-3) = 5$, $f(-3)$ موجودة.

2. استكشف قيم الدالة القريبة من $f(-3)$.

x تقترب من -3 ⟶ ⟵ x تقترب من -3

x	−3.1	−3.01	−3.001	**−3.0**	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		−10.997	−10.97	10.7

يقترح نمط المخرجات أن $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار و -11 عندما تقترب $f(x)$ من -3 من اليمين. ولأن القيمتين مختلفتان، $\lim_{x \to -3} f(x)$ غير موجودة. إذًا، $f(x)$ منفصلة عند $x = -3$. لأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عند $x = -3$, $f(x)$ بها انفصال قفزي عند $x = -3$. التمثيل البياني لــ $f(x)$ في الشكل 1.3.2 يدعم هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.2

b. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$; **عند** $x = -3$ **و** $x = 3$

1. لأن $f(-3) = \frac{0}{0}$ و $f(3) = \frac{6}{0}$، تمت إعادة تعريف كل منهما. $f(-3)$ و $f(3)$ غير موجودتين. إذًا، $f(x)$ منفصلة عند $x = -3$ و $x = 3$.

2. استكشف قيم الدالة القريبة من $f(-3)$.

x تقترب من -3 ⟶ ⟵ x تقترب من -3

x	−3.1	−3.01	−3.001	**−3.0**	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

يشير نمط المخرجات إلى أن $f(x)$ تقترب من نهاية قريبة من -0.167 عندما تقترب x من -3 من كل جانب. إذًا $\lim_{x \to -3} f(x) \approx -0.167$ أو $-\frac{1}{6}$.

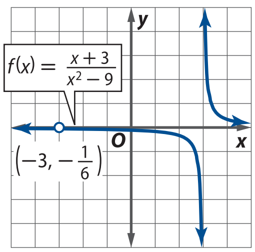
استكشف قيم الدالة القريبة من $f(3)$.

x تقترب من 3 ⟶ ⟵ x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	**3.0**	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يقترح نمط المخرجات أن بالنسبة إلى قيم x التي تقترب من 3 من اليسار، تصبح $f(x)$ سالبة بدرجة أكبر على نحو متزايد. وبالنسبة إلى قيم x التي تقترب من 3 من اليمين، تصبح $f(x)$ موجبة بدرجة أكبر على نحو متزايد. إذًا، $\lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة.

3. لأن $\lim_{x \to -3} f(x)$ موجودة، ولكن $f(-3)$ غير معرّفة، $f(x)$ بها انفصال غير قابل للإزالة عند $x = -3$. لأن $f(x)$ تتناقص بلا نهاية بينما تقترب x من 3 من اليسار وتزداد بلا نهاية بينما تقترب x من 3 من اليمين، $f(x)$ بها انفصال لا نهائي عند $x = 3$. التمثيل البياني لــ $f(x)$ في الشكل 1.3.3 يدعم هذه الاستنتاجات.



الشكل 1.3.3

تمرين موجّه

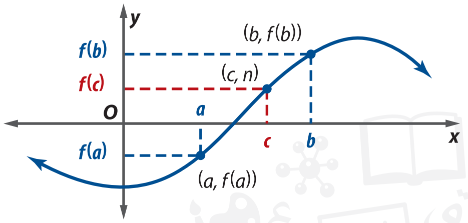
2A. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; عند $x = 0$

2B. $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \le 2 \end{cases}$; عند $x = 2$

إذا كانت الدالة متصلة، فيمكنك تقريب موقع أصفارها باستخدام نظرية القيمة الوسطية ولازمتها مبدأ تحديد الموقع.

المفهوم الأساسي نظرية القيمة الوسطية

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و $a < b$ وهناك قيمة n بحيث تكون n بين $f(a)$ و $f(b)$. فهناك العدد c. بحيث $a < c < b$ و $f(c) = n$.



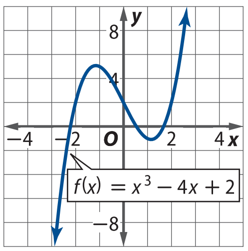
النتيجة: مبدأ تحديد الموقع إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكانت $f(a)$ و $f(b)$ متعاكستان بالاشارة، فهناك على الأقل قيمة واحدة c. بحيث $a < c < b$ و $f(c) = 0$. بمعنى، يوجد صفر بين a و b.

مثال 3 الأصفار التقريبية

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

a. $f(x) = x^3 - 4x + 2; [-4, 4]$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−46	−13	2	5	2	−1	2	17	50

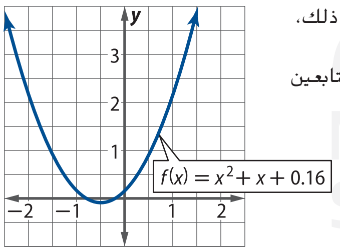


لأن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، حسب مبدأ تحديد الموقع، $f(x)$ لها صفر بين -3 و -2. وتتغير علامة قيمة $f(x)$ أيضًا بالنسبة إلى $0 \leq x \leq 1$ و $1 \leq x \leq 2$. ويشير هذا إلى وجود أصفار حقيقية في هاتين الفترتين.

ويدعم التمثيل البياني لـــ $f(x)$ الموضح على اليسار استنتاج أن هناك أصفارًا حقيقية بين -3 و -2, 0 و 1 و 1 و 2.

b. $f(x) = x^2 + x + 0.16; [-3, 3]$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16



لا تتغير علامة قيم $f(x)$ بالنسبة إلى قيم x المستخدمة. على الرغم من ذلك، بينما تقترب قيم x من -1 من اليسار، تتناقص $f(x)$ ثم تبدأ في التزايد عند $x = 0$. إذًا، ربما توجد أصفار حقيقية بين العددين الصحيحين المتتابعين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًا للتحقق.

يقطع التمثيل البياني لـــ $f(x)$ محور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$. وبذلك توجد أصفار حقيقية بين -1 و 0.

نصيحة دراسية

تقريب الأصفار دون تغيير في العلامة في حين يشير تغير العلامة في فترة إلى موقع صفر حقيقي، لا يشير عدم تغير العلامة إلى أنه لا توجد أصفار حقيقية في تلك الفترة. وتمثيل الدالة بيانيًا هو أفضل طرق التحقق من ذلك.

تمرين موجّه

3A. $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}; [-3, 4]$

3B. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1; [-5, 0]$

2 السلوك الطرفي

السلوك الطرفي يصف **السلوك الطرفي** لدالة كيفية *سلوك* الدالة على *جانبي* التمثيل البياني. بمعنى، السلوك الطرفي هو ما يحدث لقيمة $f(x)$ بينما تتزايد x أو تتناقص بلا نهاية بحيث تصبح أكبر وأكبر وسالبة بدرجة أكبر. ولوصف السلوك الطرفي لتمثيل بياني، يمكنك استخدام مفهوم النهاية.

قراءة في الرياضيات

النهايات التعبير $\lim_{x \to \infty} f(x)$ يعني نهاية $f(x)$ بينما تقترب x من اللانهاية الموجبة. والتعبير $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ يعني نهاية $f(x)$ بينما تقترب x من اللانهاية السالبة.

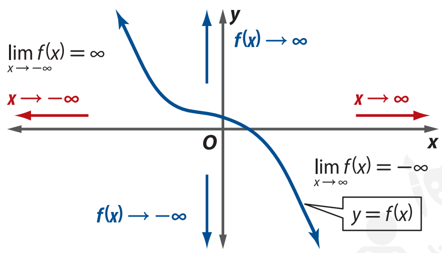
السلوك الطرفي الأيسر

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

السلوك الطرفي الأيمن

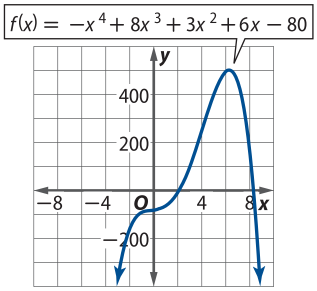
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

أحد إمكانات السلوك الطرفي للتمثيل البياني لدالة هو أن تزداد قيمة $f(x)$ أو تنقص دون قيد. ويتم وصف هذا السلوك النهائي عن طريق القول بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو سالب ما لانهاية.



مثال 4 التمثيلات البيانية التي تقترب من ما لانهاية

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوكها الطرفي. ادعم فرضيتك بالأرقام.



التحليل بيانيًا

في التمثيل البياني لـ $f(x)$، يظهر أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

الدعم بالأرقام

ضع جدولاً بالقيم لاستكشاف قيم الدالة مع تزايد $|x|$. بمعنى، استكشف قيمة $f(x)$ بينما تصبح x أكبر وأكبر أو تصبح سالبة بدرجة أكبر.

x تقترب من $-\infty$ ← ‏ ‏ ‏ → x تقترب من ∞

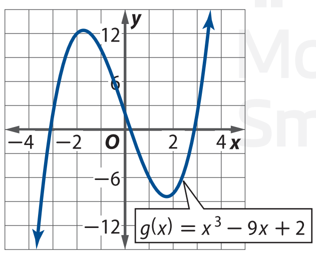
x	−10,000	−1000	−100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	−80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب x من $-\infty$، فإن $f(x)$ تقترب من $-\infty$ ومع اقتراب x من ∞، فإن $f(x)$ تقترب من $-\infty$. ويدعم هذا الفرضية.

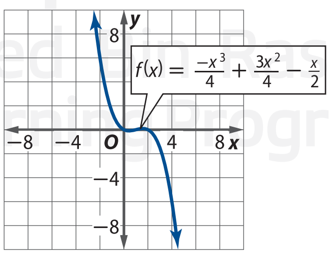
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام.

4A.

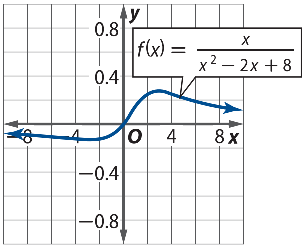


4B.



وبدلاً من أن تكون $f(x)$ غير مقيدة، بحيث تقترب من ∞ أو $-\infty$ مع تزايد $|x|$، تقترب بعض الدوال من قيمة ثابتة ولكنها لا تبلغها أبدًا.

مثال 5 التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة



استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوكها الطرفي. ادعم الفرضية بالأرقام.

التحليل بيانيًا

في التمثيل البياني لــ $f(x)$، يظهر أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

الدعم بالأرقام

x تقترب من $-\infty$ ← | → x تقترب من ∞

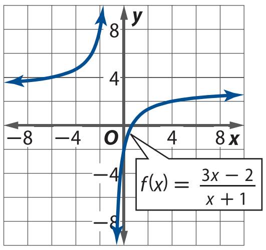
x	$-10{,}000$	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب x من $-\infty$، فإن $f(x)$ تقترب من 0 ومع اقتراب x من ∞، فإن $f(x)$ تقترب من 0. ويدعم هذا الفرضية.

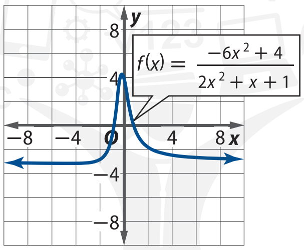
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام.

5A.

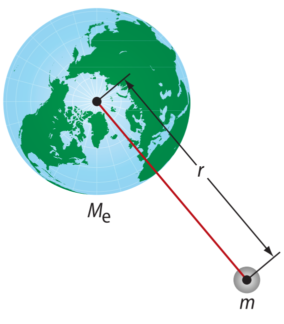


5B.



ويمكن أن تساعدك معرفة السلوك الطرفي لدالة في حل مشكلات من الحياة اليومية.

مثال 6 من الحياة اليومية تطبيق السلوك الطرفي



الفيزياء تتحدد طاقة الجاذبية الكامنة لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$، حيث تمثل G ثابت جاذبية نيوتن وتمثل m كتلة الجسم، وتمثل M_e كتلة الأرض، وتمثل r المسافة من الجسم إلى مركز الأرض كما هو موضح. ماذا يحدث لطاقة الجاذبية الكامنة لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض؟

مطلوبٌ منا أن نصف السلوك الطرفي $U(r)$ للقيم الكبيرة لــ r. أي، مطلوبٌ منا إيجاد $\lim\limits_{r \to \infty} U(r)$. لأن G و m و M_e قيم ثابتة. فيكون ناتج ضرب GmM_e قيمة ثابتة كذلك. بالنسبة إلى قيم r المتزايدة، سوف يقترب الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ من 0. إذًا $\lim\limits_{r \to \infty} U(r) = 0$. وعلى ذلك، إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض، فإن طاقة الجاذبية الكامنة به تقترب من 0.

تمرين موجّه

6. الفيزياء الضغط الديناميكي هو الضغط المتولد بواسطة سرعة السائل المتحرك ويتحدد بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث تمثل ρ كثافة السائل وتمثل v سرعة السائل. ماذا سيحدث للضغط الديناميكي لسائل لو استمرت السرعة في التزايد؟

الربط بالحياة اليومية

العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لطاقة الجاذبية الكامنة تستعمل لحساب السرعة اللازمة للإفلات من الجاذبية الأرضية، وهي 40,270 km في الساعة.

المصدر: *مجلة الميكانيك*

التمارين

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم x المذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; عند $x = -5$

2. $f(x) = \sqrt{x + 5}$; عند $x = 8$

3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$; عند $x = -6$ و $x = 6$

4. $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$; عند $x = -5$ و $x = 5$

5. $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$; عند $x = 1$

6. $g(x) = \dfrac{2 - x}{2 + x}$; عند $x = -2$ و $x = 2$

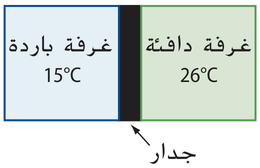
7. $h(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$; عند $x = 1$ و $x = 4$

8. $h(x) = \dfrac{x(x - 6)}{x^3}$; عند $x = 0$ و $x = 6$

9. $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{إذا } x \le -6 \\ -x + 2 & \text{إذا } x > -6 \end{cases}$; عند $x = -6$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{إذا } x > -2 \\ x - 5 & \text{إذا } x \le -2 \end{cases}$; عند $x = -2$

11. **الفيزياء** يفصل جدار بين غرفتين لهما درجات حرارة مختلفة. ويمكن تمثيل انتقال الحرارة بالواط بين الغرفتين بالعلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث تمثل w سمك الجدار بالمتر. (المثالان 1 و 2)



a. حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند $w = 0.4$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة.

c. مثّل الدالة بيانيًا للتحقق من استنتاجك في الجزء b.

12. **كيمياء** ينبغي تخفيف محلول ليمكن استخدامه في تجربة. وتؤدي إضافة محلول تركيزه 4 مول إلى محلول تركيزه 10 مول إلى خفض التركيز. ويمكن تمثيل تركيز C المزيج بالعلاقة $C(x) = \frac{500 + 4x}{50 + x}$، حيث تمثل x عدد اللترات المضافة من محلول 4 مول. (المثالان 1 و 2)

a. حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند $x = 10$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة وصف تأثير الانفصال، إن وجد، على تركيز المزيج.

c. مثّل الدالة بيانيًا للتحقق من استنتاجك في الجزء b.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة. (المثال 3)

13. $f(x) = x^3 - x^2 - 3;\ [-2, 4]$

14. $g(x) = -x^3 + 6x + 2;\ [-4, 4]$

15. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3;\ [-3, 3]$

16. $h(x) = -x^4 + 4x^3 - 5x - 6;\ [3, 5]$

17. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 2x + 2;\ [-2, 4]$

18. $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 1};\ [-4, 3]$

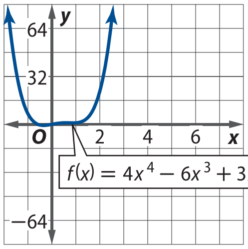
19. $h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 5};\ [-2, 4]$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6;\ [3, 8]$

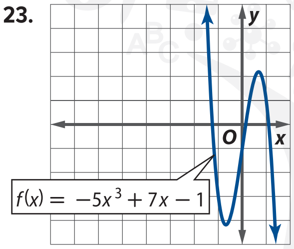
21. $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5;\ [0, 5]$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام. (المثالان 4 و 5)

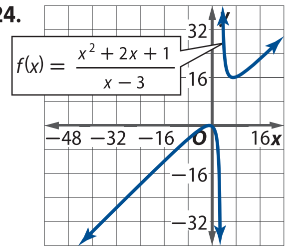
22.



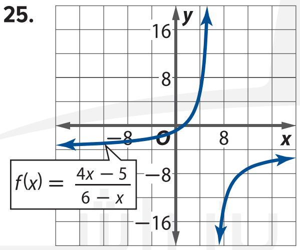
23.



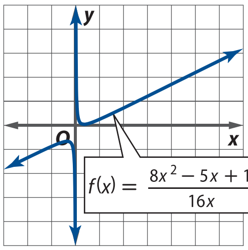
24.



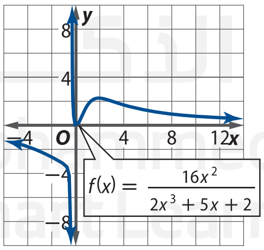
25.



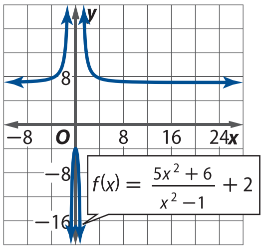
26.



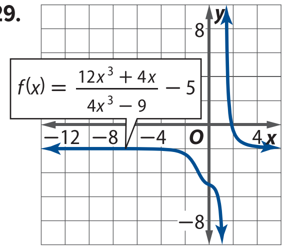
27.



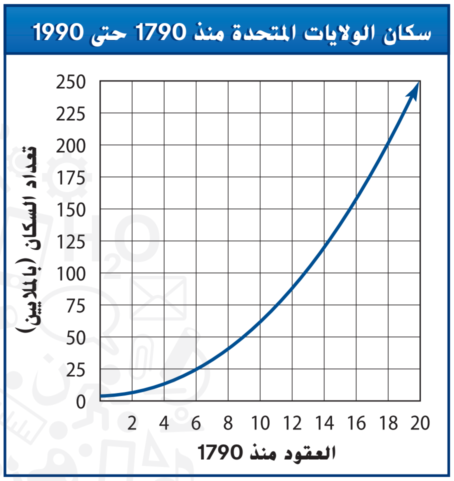
28.



29.



30. التعداد السكاني يمكن تمثيل عدد سكان الولايات المتحدة من 1790 إلى 1990 بالعلاقة
$p(x) = 0.0057x^3 + 0.4895x^2 + 0.3236x + 3.8431$.
حيث يمثل x عدد العقود بعد 1790. استخدم السلوك الطرفي للتمثيل البياني لوصف توجه التعداد السكاني. ادعم الفرضية بالأرقام. هل يبدو هذا التوجه واقعيًا؟ اشرح استنتاجك. (المثال 4)

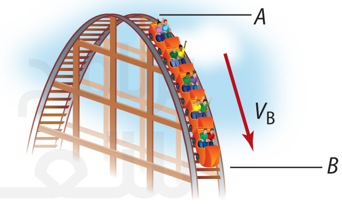


31. كيمياء يتم استخدام عامل مساعد لزيادة معدل التفاعل الكيميائي. يتم تمثيل معدل التفاعل R، أو سرعة حدوث التفاعل، بواسطة العلاقة $R(x) = \frac{0.5x}{x+12}$، حيث يمثل x تركيز المحلول بالمللي جرام للمادة المذابة لكل لتر من المحلول. (المثال 5)

a. مثّل الدالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

b. ما الذي يعنيه السلوك الطرفي للتمثيل البياني في سياق هذه التجربة؟ ادعم الفرضية بالأرقام.

32. الأفعوانيات يمكن تمثيل سرعة الأفعوانية بعد هبوطها من ارتفاع A إلى ارتفاع B بالعلاقة $f(h_A) = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$، حيث يمثل h_A الارتفاع عند النقطة A ويمثل h_B الارتفاع عند النقطة B ويمثل g التسارع بفعل الجاذبية. ماذا سيحدث لـ $f(h_A)$ عندما تتناقص h_B إلى 0؟ (المثال 6)



استخدم التفكير المنطقي لتحديد السلوك الطرفي أو نهاية الدالة عندما تقترب x من اللانهاية. اشرح استنتاجك. (المثال 6)

33. $q(x) = -\frac{24}{x}$

34. $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

35. $p(x) = \frac{x+1}{x-2}$

36. $m(x) = \frac{4+x}{2x+6}$

37. $c(x) = \frac{5x^2}{x^3+2x+1}$

38. $k(x) = \frac{4x^2-3x-1}{11x}$

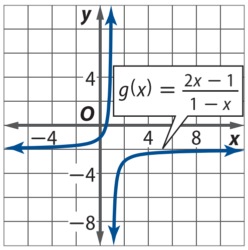
39. $h(x) = 2x^5 + 7x^3 + 5$

40. $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

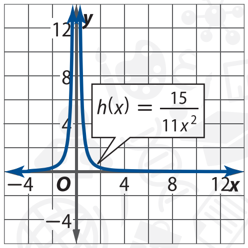
41. فيزياء يمكن التعبير عن الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$، حيث يمثل p كمية التحرك ويمثل m كتلة الجسم. وإذا تمت إضافة الرمال إلى عربة قطار متحركة، فما الذي يمكن أن يحدث مع استمرار m في التزايد؟ (المثال 6)

حدد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة عندها منفصلة. وحدد نوع الانفصال. ثم استخدم التمثيل البياني لوصف سلوكها الطرفي. وبرر إجاباتك.

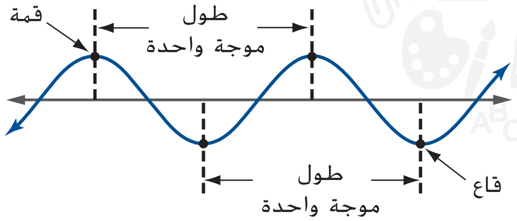
42.



43.



44. فيزياء يكون طول الموجة λ لموجة دورية عبارة عن المسافة بين النقاط المتناظرة المتتابعة على الموجة، مثل قمتين أو قاعين.



يتم تمثيل التردد f، أو عدد قمم الموجات التي تعبر نقطة محددة أثناء فترة زمنية محددة، بواسطة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$، حيث تكون c سرعة الضوء أو 2.99 m x 10^8 لكل ثانية.

a. مثّل الدالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

b. استخدم التمثيل البياني لوصف السلوك الطرفي للدالة. وادعم الفرضية بالأرقام.

c. هل الدالة متصلة؟ وإن لم تكن كذلك، فحدد أي نقاط انفصال وقم بوصفها.

حاسبة التمثيل البياني مثّل كل دالة بيانيًا وحدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت منفصلة، فحدد أي نقاط انفصال وقم بوصفها. ثم صف سلوكها الطرفي وحدد موقع أي أصفار.

45. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

46. $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 5x^2 - 18x + 72}$

47. $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

48. $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 29x - 24}{x^2 - 2x - 15}$

49. $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

50. **المركبات** عدد A من المركبات التي تستخدم الوقود البديل المستخدمة في الولايات المتحدة الأمريكية من 2000 إلى 2010 يمكن تقريبه بواسطة $f(t) = 5420t^2 - 14{,}726t + 531{,}750$، حيث يمثل t عدد الأعوام منذ 2000.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. كم كان تقريبًا عدد المركبات التي تستخدم الوقود البديل في الولايات المتحدة عام 2008؟

c. مع مرور الزمن، كم سيبلغ العدد الذي سيقترب منه عدد المركبات التي تستخدم الوقود البديل، وفقًا للنموذج؟ هل تعتقد أن النموذج صالحٌ بعد عام 2010؟ اشرح.

حاسبة التمثيل البياني **مثّل كل دالة بيانيًا وصِف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام، وقم بتوفير نافذة عرض لكل تمثيل بياني.**

51. $f(x) = -x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 4$

52. $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

53. $f(x) = \dfrac{16x^2}{x^2 + 15x}$

54. $g(x) = \dfrac{8x - 24x^3}{14 + 2x^3}$

55. **الأعمال** يخطط فارس لافتتاح مشروع صغير للطباعة بالشاشة الحريرية وبيع الأكواب الخزفية. ويتكلف إنتاج كل كوب AED 3. وقد استثمر مبدئيًا AED 4000 لشراء طابعة بالشاشة الحريرية وغيرها من مستلزمات المشروع.

a. اكتب دالة لتمثيل متوسط التكلفة للقميص الواحد باعتبارها دالة لعدد القمصان المباعة n.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإعداد تمثيل بياني للدالة.

c. مع زيادة عدد القمصان المباعة، ما القيمة التي يقترب منها متوسط التكلفة؟

56. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف النهايات. فكّر في $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر و b و d عددان صحيحان.

a. **جدوليّ** افترض أن $c = 1$. واختر ثلاث مجموعات قيم مختلفة للرموز a و b و d. اكتب الدالة باستخدام كل مجموعة قيم. انسخ الجدول أدناه وأكمله.

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b. **جدوليّ** اختر ثلاث مجموعات قيم مختلفة لكل متغير: مجموعة يكون فيها $a > c$ ومجموعة يكون فيها $a < c$ ومجموعة يكون فيها $a = c$. اكتب كل دالة وقم بعمل جدول كما فعلت في الجزء a.

c. **تحليلي** خمّن نهاية $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ بينما تقترب x من موجب لانهاية وسالب لانهاية.

57. مثل بيانيًا مجموعة مختلفة من الدالات بالصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$، حيث n و a و b أعداد صحيحة. $n \geq 2$.

a. خمن السلوك الطرفي للدالة عندما يمثل n عددًا زوجيًا موجبًا. قم بتضمين تمثيل بياني واحد على الأقل لدعم الفرضية.

b. خمن السلوك الطرفي للدالة عندما يمثل n عددًا فرديًا موجبًا. قم بتضمين تمثيل بياني واحد على الأقل لدعم الفرضية.

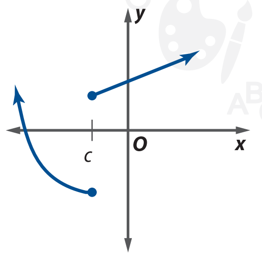
مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

التبرير **حدد ما إذا كانت كل دالة بها انفصال لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة عند $x = 0$. اشرح.**

58. $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

59. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5}$

60. **تحليل الخطأ** يعمل خالد وسعيد على تحديد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بيانيًا أدناه متصلة أم لا عند النقطة c. يعتقد خالد أنه تمثيل بياني لدالة $f(x)$ منفصلة عند النقطة c لأن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ من جانب واحد فقط للنقطة c. ويعتقد سعيد التمثيل البياني ليس لدالة لأنه عند $x = c$. تحتوي العلاقة على قيمتين مختلفتين للمتغير y. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



61. **تحدٍ** حدد قيم a و b التي تجعل f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 3 \\ bx + a, & -3 < x < 3 \\ \sqrt{-b - x}, & x \leq -3 \end{cases}$$

التبرير **جد $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ لكل مما يلي. اشرح استنتاجك.**

62. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ و f دالة زوجية.

63. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ و f دالة فردية.

64. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ والتمثيل البياني لـ f متماثل بالنسبة إلى نقطة الأصل.

65. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ والتمثيل البياني لـ f متماثل بالنسبة إلى محور y.

66. **الكتابة في الرياضيات** أعطِ مثالاً لدالة بها انفصال قابل للإزالة. اشرح كيفية إزالة هذا الانفصال. كيف تؤثر إزالة الانفصال على الدالة؟

مراجعة شاملة

حاسبة التمثيل البياني **قم بتمثيل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني في تحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو *ليست أيًا منهما*. قم بتأكيد الحل جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.** (الدرس 2-1)

67. $h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ **68.** $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$ **69.** $g(x) = x^5 - 5x^3 + x$

اذكر مجال كل دالة. (الدرس 1-1)

70. $f(x) = \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$ **71.** $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$ **72.** $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$

73. خدمة البريد تستخدم خدمة البريد الأمريكية رموزًا بريدية من خمسة أرقام لتوجيه الرسائل والطرود إلى وجهاتها.

a. كم عدد الرموز البريدية الممكنة إذا كانت الأرقام من 0 إلى 9 مستخدمة لكل رقم من الأرقام الخمسة؟

b. لنفترض أنه عندما يكون الرقم الأول 0، فإن الأرقام الثاني والثالث والرابع لا يمكن أن تكون 0. كم عدد الرموز البريدية المكونة من خمسة أرقام الممكنة إذا كان الرقم الأول 0؟

c. في عام 1983، أدخلت خدمة البريد الأمريكية الرمز البريدي + 4، والذي أضاف أربعة أرقام إلى الرموز البريدية التي كانت موجودة حينها والمكونة من خمسة أرقام. باستخدام الأرقام من 0 إلى 9، كم عدد الرموز البريدية التي كانت ممكنة؟

إذا علمتَ أن $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$**، فقم بحل كل معادلة لإيجاد** X**.**

74. $3X - B = A$ **75.** $2B + X = 4A$ **76.** $A - 5X = B$

حُلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية.

77.
$4x - 6y + 4z = 12$
$6x - 9y + 6z = 18$
$5x - 8y + 10z = 20$

78.
$x + 2y + z = 10$
$2x - y + 3z = -5$
$2x - 3y - 5z = 27$

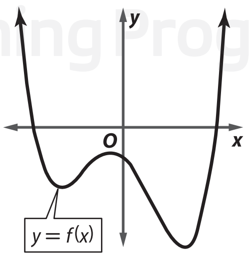
79.
$2x - y + 3z = -2$
$x + 4y - 2z = 16$
$5x + y - z = 14$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT في مدرسة الشيخ زايد الثانوية، يوجد 36 طالبًا يدرسون إما الحساب أو الفيزياء أو كليهما، و 10 طلاب يدرسون كلاً من الحساب والفيزياء؟ فإذا كان هناك 31 طالبًا في صف الحساب، فكم يبلغ عدد الطلاب في فصل الفيزياء؟

A 5 **C** 11 **E** 21
B 8 **D** 15

81. أي العبارات التالية يمكن استخدامها لوصف السلوك الطرفي لـــ $f(x)$؟



F $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

G $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

H $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

J $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

82. مراجعة يتضمن رمز خزانة سها ثلاثة أعداد بين 1 و 45، بما فيها القيمتين الطرفيتين. ولا يمكن أن يتكرر أي عدد. فكم عدد التباديل الممكنة للخزانة؟

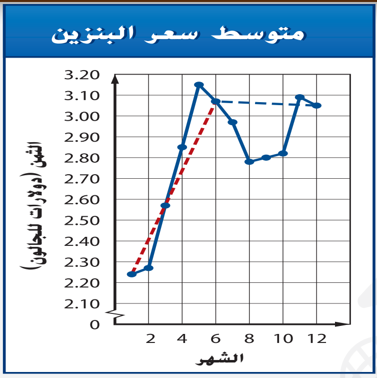
83. مراجعة لنفترض أن شكلاً يشتمل على ثلاث دوائر متحدة المركز أنصاف أقطارها 1 و 2 و 3 م. جد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة الخارجية (بين الدائرتين الثانية والثالثة).

A $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{4}{9}$
B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{5}{9}$

الدرس 1-4

القيم القصوى ومتوسط معدل التغيير

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)	1 • تحديد الفترات التي تكون عندها الدوال متزايدة أو ثابتة، أو متناقصة. 2 إيجاد متوسط معدل التغيير لدالة ما.	• يظهر التمثيل البياني متوسط السعر للبنزين من الدرجة المتوسطة في الولايات المتحدة من يناير حتى ديسمبر. وقد بلغ أعلى سعر متوسط حوالي AED 3.15 لكل جالون في مايو. يُبيّن ميل كل من الخطين المنقطين الأحمر والأزرق أن سعر البنزين تغير تغيرًا أكثر سرعة في النصف الأول من العام منه في النصف الثاني من العام.



المفردات الجديدة

increasing متزايدة
decreasing متناقصة
constant ثابتة
نقطة حرجة critical point
extrema قيم قصوى
maximum القيمة العظمى
minimum القيمة الصغرى
نقطة انعطاف point of inflection
متوسط معدل التغيير average rate of change
secant line الخط القاطع

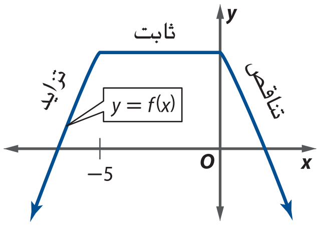
1 سلوك التزايد والتناقص

يمكن أن يتضمن تحليل الدالة أيضًا وصفًا للفترات التي تتزايد عندها الدالة أو تتناقص أو تبقى ثابتة.

فكّر في التمثيل البياني الموضح لـ $f(x)$. بينما تتحرك من *اليسار لليمين*، تكون $f(x)$

- متزايدة أو *متصاعدة* عند $(-\infty, -5)$
- ثابتة أو *مسطحة* عند $(-5, 0)$
- متناقصة أو *هابطة* عند $(0, \infty)$.

ويمكن التعبير عن تلك التفسيرات البيانية أيضًا بصورة جبرية.

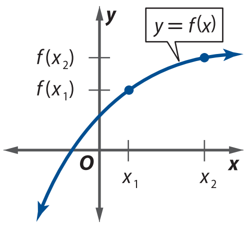


المفهوم الأساسي الدوال المتزايدة والمتناقصة والثابتة

الشرح تكون الدالة f **متزايدة** في الفترة I إذا فقط إذا كان لأي نقطتين في I. أدى التغيير الموجب في x إلى تغيير موجب في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في فترة I، $f(x_1) < f(x_2)$ عند $x_1 < x_2$.

مثال

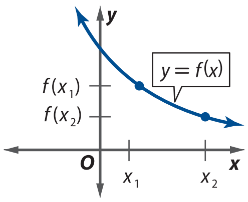


الفترة: $(-\infty, \infty)$

الشرح تكون الدالة f **متناقصة** في الفترة I إذا فقط إذا كان لأي نقطتين في I. أدى التغيير السالب في x إلى تغيير سالب في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في فترة I، $f(x_1) > f(x_2)$ عند $x_1 < x_2$.

مثال

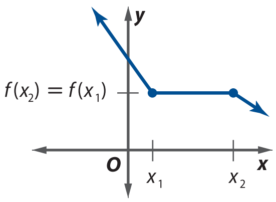


الفترة: $(-\infty, \infty)$

الشرح تكون الدالة f **ثابتة** في الفترة I إذا فقط إذا كان لأي نقطتين في I. لم يؤدي التغيير الموجب في x إلى أي تغيير في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في فترة I، $f(x_1) = f(x_2)$ عند $x_1 < x_2$.

مثال

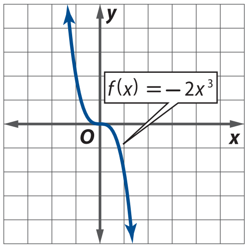


الفترة: (a, b)

مثال 1 تحليل سلوك التزايد والتناقص

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ادعم إجابتك عدديًا.

a. $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًا

عند العرض من اليسار لليمين، يهبط التمثيل البياني لـ f لجميع القيم الحقيقية لـ x. إذًا، يمكننا افتراض أن f متناقصة عند $(-\infty, \infty)$.

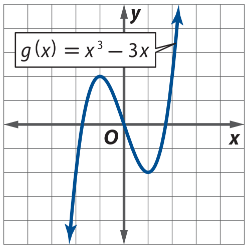
الدعم عدديًا

ضع جدولاً باستخدام القيم في الفترة.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضح الجدول أنه بينما تتزايد x، تتناقص $f(x)$. وهذا يدعم الفرضية.

b. $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًا

من التمثيل البياني، يمكننا أن نفترض أن f تتزايد عند $(-\infty, -1)$، وتتناقص عند $(-1, 1)$ وتتزايد عند $(1, \infty)$.

الدعم عدديًا

قم بإنشاء جدول من القيم باستخدام قيم x في كل فترة.

$(-\infty, -1)$:

x	−13	−11	−9	−7	−5	−3
$f(x)$	−2158	−1298	−702	−322	−110	−18

$(-1, 1)$:

x	−0.75	−0.5	0	0.5	0.75
$f(x)$	1.828	1.375	0	−1.375	−1.828

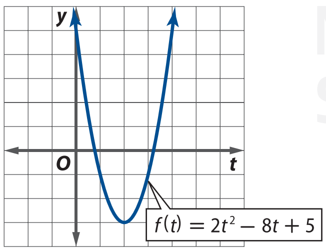
$(1, \infty)$:

x	3	5	7	9	11	13
$f(x)$	18	110	322	702	1298	2158

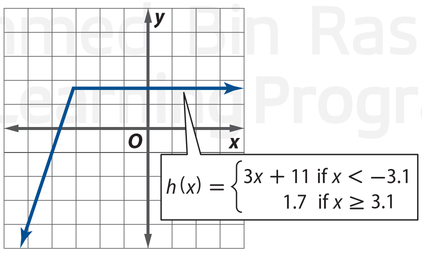
توضح الجداول أنه مع زيادة x إلى -1، فإن $f(x)$ تزيد؛ ومع زيادة x من -1 إلى 1، فإن $f(x)$ تتناقص؛ ومع زيادة x من 1، فإن $f(x)$ تتزايد. وهذا يدعم الفرضية.

تمرين موجّه

1A.



1B.



على حين يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة، ويمكن إثبات ذلك عدديًا. إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لتأكيد هذا السلوك ولتأكيد أن دالة لا تغير سلوكها أبعد من المجال الظاهر.

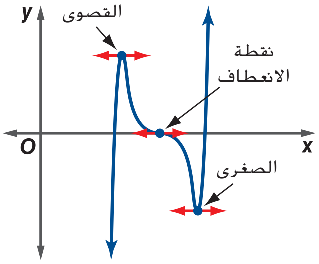
انتبه!

فترات لا تكون الدالة متزايدة ولا متناقصة عند نقطة، وعلى ذلك ينبغي استخدام رموز القوسين (و) عند وصف الفترات التي تكون دالة عندها متزايدة أو متناقصة.

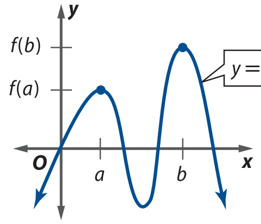
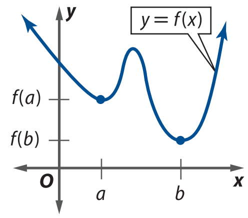
نصيحة دراسية

الدوال المتزايدة والمتناقصة والثابتة تسمى الدوال التي تتزايد أو تتناقص أو تكون ثابتة لجميع قيم x في مجالاتها الدوال *المتزايدة* أو *المتناقصة* أو *الثابتة* على الترتيب. والدالة المذكورة في المثال 1a دالة متناقصة، في حين لا يمكن تصنيف الدالة في المثال 1b باعتبارها متزايدة أو متناقصة لأن بها فترة تكون فيها متزايدة، وأخرى تكون فيها متناقصة.

النقاط الحرجة لدالة ما هي تلك النقاط التي يكون عندها الخط المماس للمنحنى أفقي أو رأسي. **القيم القصوى** هي نقاط حرجة تغير الدالة عندها سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. وعند هذه النقاط، تكون للدالة قيمة **عظمى** أو **صغرى**، محلية أو مطلقة. **نقطة الانعطاف** يمكن أن تكون أيضًا نقطة حرجة. وعند هذه النقاط، تغير الدالة من إتجاه تقعرها، ولكن لا تغير سلوكها من حيث التزايد أو التناقص. بدلًا عن ذلك، يتغير اتجاه المنحنى من أعلى لأسفل أو العكس.

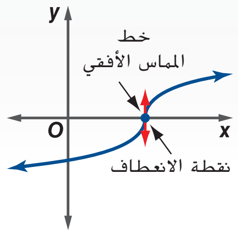


المفهوم الأساسي القيم العظمى المحلية والمطلقة

الشرح	*القيمة العظمى المحلية* لدالة f هي أكبر قيمة يمكن أن تبلغها $f(x)$ في فترة من المجال.	**النموذج**
الرموز	$f(a)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت هناك فترة (x_1, x_2) تحتوي على a بحيث $f(a) > f(x)$ لكل $x \neq a$ في (x_1, x_2).	
الشرح	إذا كانت القيمة العظمى المحلية هي أكبر قيمة يمكن أن تبلغها الدالة f في مجالها بالكامل، فهي *قيمة عظمى مطلقة*.	$f(a)$ هي القيمة العظمى المحلية لــ f.
الرموز	$f(b)$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f إذا كان $f(b) > f(x)$ لكل $x \neq b$. في مجال f.	$f(b)$ هي القيمة العظمى المطلقة لــ f.
الشرح	*القيمة الصغرى المحلية* لدالة f هي أصغر قيمة يمكن أن تبلغها $f(x)$ في فترة من المجال.	**النموذج**
الرموز	$f(a)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت هناك فترة (x_1, x_2) تحتوي على a بحيث $f(a) < f(x)$ لكل $x \neq a$ في (x_1, x_2).	
الشرح	إذا كانت القيمة الصغرى المحلية هي أصغر قيمة يمكن أن تبلغها الدالة f في مجالها بالكامل، فهي *قيمة صغرى مطلقة*.	$f(a)$ هي القيمة الصغرى المحلية لــ f.
الرموز	$f(b)$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f إذا كان $f(b) < f(x)$ لكل $x \neq b$. في مجال f.	$f(b)$ هي القيمة الصغرى المطلقة لــ f.

نصيحة دراسية

المماس تذكر من دراستك للهندسة أن أي خط يعد خط مماس لمنحنى إن كان يتقاطع مع المنحنى في نقطة واحدة بالضبط.

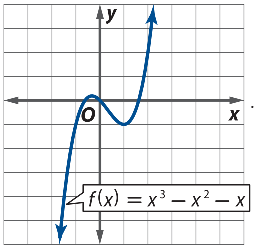


قراءة في الرياضيات

صيغ الجمع في اللغة العربية، *القيم القصوى* هي جمع *القيم العظمى والقيم الصغرى*.

مثال 2 تقدير وتحديد القيم القصوى لدالة

قدّر وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني للدالة $f(x)$. ادعم إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا

يبدو أن $f(x)$ لها قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 1$. ويبدو أيضًا أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. إذًا نفترض أن هذه الدالة ليست لها قيم عظمى مطلقة.

الدعم بالأرقام

اختر قيم x في فترات من نصف وحدة على جانبي قيمة x المقدرة لكل قيمة قصوى بالإضافة إلى قيمة كبيرة جدًا وقيمة صغيرة جدًا لــ x.

x	−100	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	−1.00	0.125	0	−0.63	−1	−0.38	$9.9 \cdot 10^5$

لأن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$. هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(-1, 0)$ بالقرب من -0.5. والقيمة التقريبية لهذه القيمة العظمى المحلية هي $f(-0.5)$ أو حوالي 0.13.

بالمثل، لأن $f(1) < f(0.5)$ و $f(1) < f(1.5)$. هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(0.5, 1.5)$ بالقرب من 1. والقيمة التقريبية لهذه القيمة الصغرى المحلية هي $f(1)$ أو -1.

$f(-0.5) > f(100)$ و $f(1) > f(-100)$. وهو ما يدعم افتراضنا بأن f ليست لها قيم قصوى مطلقة.

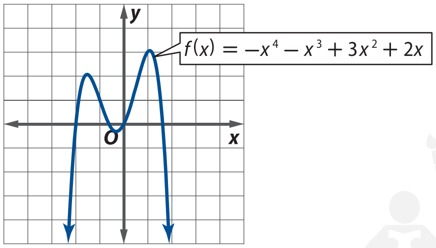
نصيحة دراسية

القيم القصوى المحلية القيم القصوى المحلية تُسمى أيضًا القيم القصوى *المحلية*. والقيم القصوى المطلقة تُسمى أيضًا القيم القصوى *العامة*.

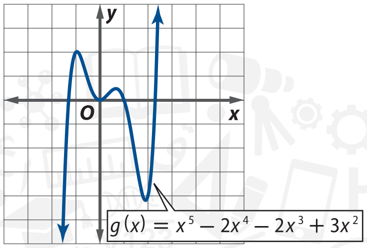
تمرين موجّه

قدّر وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادعم إجاباتك عدديًا.

2A.



2B.

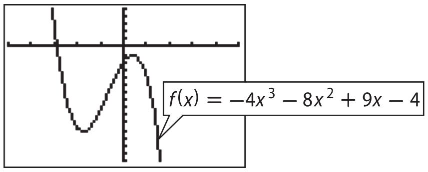


لأن حساب التفاضل والتكامل مطلوب لتأكيد سلوك الدالة من حيث التزايد والتناقص. حساب التفاضل والتكامل مطلوب أيضًا لتأكيد القيم العظمى المحلية والمطلقة لدالة. لكن حاليًا، يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لمساعدتك على الوصول لتقريب أفضل للموقع والقيم القصوى للدالة.

مثال 3 استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب القيم القصوى

حاسبة التمثيل البياني **قرّب إلى أقرب جزء من المئة القيم العظمى المحلية أو المطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$. اذكر قيم x حيث تظهر.**

مثّل الدالة بيانيًا وعدّل النافذة حسب الحاجة بحيث يظهر سلوك التمثيل البياني بالكامل.



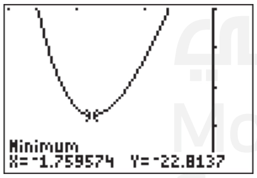
[−5, 5] scl: 1 by [−30, 10] scl: 4

تلميح تقني

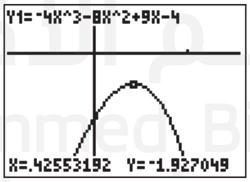
التكبير/التصغير عند تحديد موقع القيم العظمى والصغرى، احرص على التكبير أو التصغير بدرجة كافية للاطلاع على تفاصيل التمثيل البياني ومظهره العام، فربما لا توضح النافذة القياسية المشهد بالكامل.

من التمثيل البياني للدالة f، يتضح أن الدالة لها قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$ قيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$ من المجال. ويقترح السلوك الطرفي للتمثيل البياني أن هذه الدالة ليست لها قيم عظمى مطلقة.

باستخدام خيار minimum (قيمة صغرى) وخيار maximum (قيمة عظمى) من القائمة CALC في حاسبة التمثيل البياني، يمكنك تقدير أن $f(x)$ لها قيمة صغرى محلية مقدارها -22.81 عند $x \approx -1.76$ وقيمة عظمى محلية مقدارها -1.93 عند $x \approx 0.43$.



[−3, 0.5] scl: 1 by [−28, 12] scl: 4



[−0.9, 1.6] scl: 1 by [−7.3, 2.7] scl: 4

تمرين موجّه

حاسبة التمثيل البياني **قرّب إلى أقرب جزء من المئة القيم العظمى المحلية أو المطلقة لكل دالة. حدّد قيم x حيث تظهر.**

3A. $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

البحث عن الحل الأمثل هو تطبيق مبادئ الرياضيات حيث يبحث الطالب عن قيمة عظمى أو صغرى في ظل مجموعة من القيود. إذا أمكن تمثيل مجموعة كميات من الحياة اليومية بواسطة دالة، فسوف تشير القيم القصوى للدالة إلى هذه القيم المثلى.

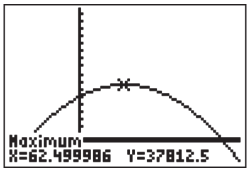
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام القيم القصوى للبحث عن الحل الأمثل

الزراعة افترض أن كل شجرة من أشجار مزرعة برتقال بولاية فلوريدا وعددها 75 شجرة تنتج 400 برتقالة في الموسم. وافترض كذلك أنه لكل شجرة إضافية يتم زراعتها في المزرعة، يقل المحصول بمقدار برتقالتين لكل شجرة. فكم عدد الأشجار الإضافية الواجب زراعتها للحصول على أكبر محصول إجمالي؟

اكتب دالة $P(x)$ لوصف محصول المزرعة في صورة دالة x. عدد الأشجار الإضافية المزروعة في المزرعة.

المزرعة	=	عدد الأشجار	•	عدد البرتقالات لكل شجرة في محصول المزرعة
$P(x)$	=	$(75 + x)$	•	$(400 - 2x)$

نريد الوصول إلى أقصى محصول للمزرعة أو $P(x)$. مثل بيانيًا هذه الدالة باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ثم استخدم خيار maximum (قيمة عظمى) من قائمة CALC لتقريب قيمة x التي تحقق أكبر قيمة $P(x)$.



[−100, 221.3] scl: 1 by
[−12270.5, 87900] scl: 5000

التمثيل البياني له قيمة عظمى مقدارها 37,812.5 لـ $x \approx 62.5$. إذًا من خلال زراعة 62 شجرة إضافية، يمكن أن تنتج المزرعة أكبر محصول ويبلغ 37,812 برتقالة.

تمرين موجّه

4. الحِرف هناك حامل شموع زجاجي على شكل أسطوانة دائرية قائمة لها قاع وليست لها قمة ومساحة سطحها الإجمالية 10π cm^2. حدد نصف قطر وارتفاع حامل الشموع بما يتيح أقصى حجم ممكن.

الربط بالحياة اليومية

تنتج ولاية فلوريدا 95% من محصول البرتقال لإنتاج عصير البرتقال في الولايات المتحدة. وفي أحد الأعوام مؤخرًا، تم استهلاك أكثر من 800,000 طن من البرتقال في الولايات المتحدة.

المصدر: وزارة الزراعة بالولايات المتحدة

2 متوسط معدل التغيير

في الجبر، تعلمتَ أن الميل بين أي نقطتين في التمثيل البياني لدالة خطية يمثل معدل تغيير *ثابتًا*. وبالنسبة إلى الدالة غير الخطية، يتغير الميل بين أزواج النقاط المختلفة. إذًا يمكننا فقط الحديث عن *متوسط* معدل التغيير بين أي نقطتين.

المفهوم الأساسي متوسط معدل التغيير

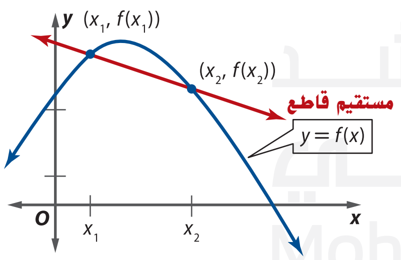
الشرح **متوسط معدل التغيير** بين أي نقطتين في التمثيل البياني للدالة f هو ميل الخط بالنقطتين.

الهندسة الخط المار بنقطتين على منحنى يُسمى **القاطع**. ويُشار إلى ميل القاطع بواسطة m_{sec}.

الرموز متوسط معدل التغيير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

النموذج



عندما يكون متوسط معدل التغيير عبر فترة ما موجبًا، تزداد الدالة في المتوسط عبر تلك الفترة. وعندما يكون متوسط معدل التغيير عبر فترة ما سالبًا، تتناقص الدالة في المتوسط عبر تلك الفترة.

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغيير

جـد متوسط معدل التغيير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ في كل فترة.

a. $[-2, -1]$

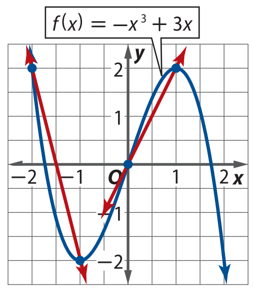
استخدم صيغة الميل لإيجاد متوسط معدل تغيير f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$
ضع -1 مكان x_2 و -2 مكان x_1.

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$
جـد قيمة $f(-1)$ و $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} \text{ أو } -4$$
بسّط.

متوسط معدل التغيير في الفترة $[-2, -1]$ هو -4. الشكل 1.4.1 يدعم هذا الاستنتاج.



الشكل 1.4.1

b. $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$
ضع 1 مكان x_2 و 0 مكان x_1.

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} \text{ أو } 2$$
جـد قيمة $f(1)$ و $f(0)$ وبسّط.

متوسط معدل التغيير في الفترة $[0, 1]$ هو 2. الشكل 1.4.1 يدعم هذا الاستنتاج.

تمرين موجّه

جـد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة.

5A. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2;\ [2, 3]$

5B. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x;\ [-5, -3]$

متوسط معدل التغيير له العديد من التطبيقات في الحياة اليومية. وأحد التطبيقات يتضمن متوسط سرعة جسم يتحرك عبر مسافة d أو من ارتفاع h لمدة زمنية محددة t. لأن السرعة هي المسافة المقطوعة في كل وحدة زمنية. فلا يمكن أن يكون متوسط سرعة جسم بالسالب.

الربط بالحياة اليومية

بفعل مقاومة الهواء، في النهاية يصل الجسم أثناء سقوطه إلى سرعة ثابتة تُسمى *السرعة القصوى*. وفي العادة، يصل لاعب القفز بالمظلات قبل فتح المظلة إلى سرعة قصوى تتراوح بين 190 و 240 km/h.

المصدر: *إم إس إن إنكارتا*

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد متوسط السرعة

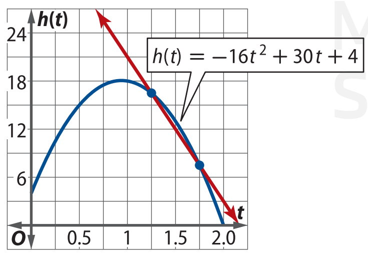
فيزياء **يتم تمثيل ارتفاع جسم تم قذفه لأعلى مباشرة من ارتفاع 4 ft فوق سطح الأرض بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 30t + 4$، حيث يمثل t الزمن بالثانية بعد قذف الجسم. جـد وفسر متوسط سرعة الجسم من الثانية 1.25 إلى 1.75.**

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{h(1.75) - h(1.25)}{1.75 - 1.25}$$
ضع 1.75 مكان t_2 و 1.25 مكان t_1.

$$= \frac{[-16(1.75)^2 + 30(1.75) + 4] - [-16(1.25)^2 + 30(1.25) + 4]}{0.5}$$
جـد قيمة $h(1.75)$ و $h(1.25)$.

$$= \frac{7.5 - 16.5}{0.5} = -18$$
بسّط.

متوسط معدل التغيير في الفترة هو -18. إذًا، متوسط سرعة الجسم من الثانية 1.25 إلى 1.75 هو 18 ft/s. ويتناقص متوسط المسافة بين الجسم والأرض خلال تلك الفترة. كما هو موضح بالشكل على اليسار.

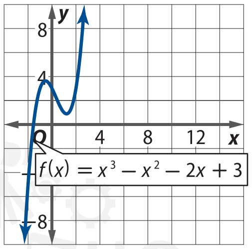


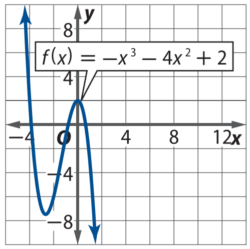
تمرين موجّه

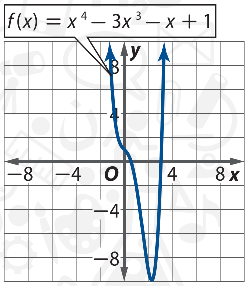
6. **فيزياء** إذا تم إهمال مقاومة الرياح، فيتم تمثيل المسافة $d(t)$ بالقدم والتي يقطعها جسم يتحرك بعد إسقاطه من مكان مرتفع باستخدام العلاقة $d(t) = 16t^2$، حيث يمثل t الزمن بالثانية بعد إسقاط الجسم. جـد وفسر متوسط سرعة الجسم من الثانية 2 إلى 4.

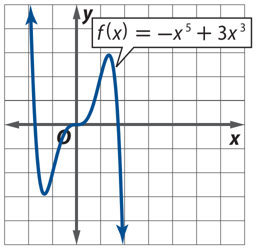
التمارين

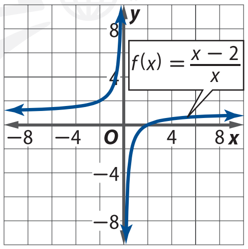
استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ادعم إجابتك عدديًا. (مثال 1)

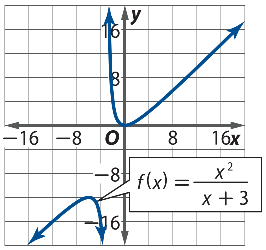
1.


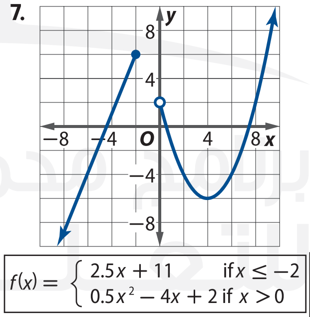
2.


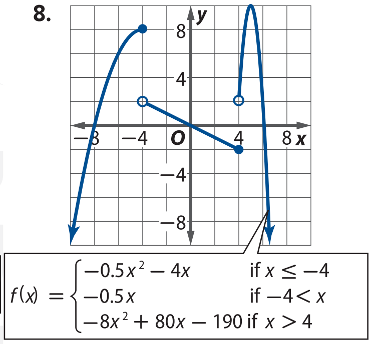
3.


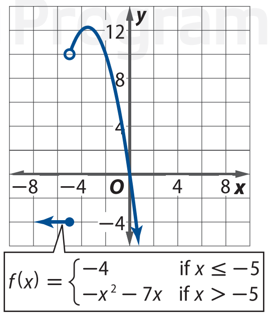
4.


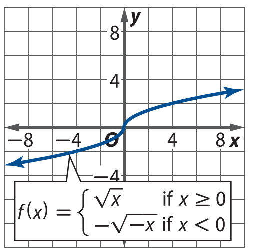
5.


6.


7.


8.


9.


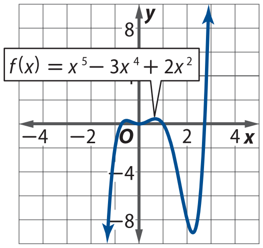
10.


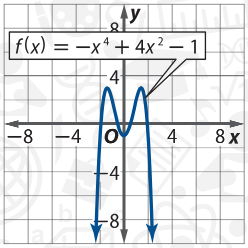
11. **كرة السلة** يمكن تمثيل ارتفاع رمية حرة بواسطة العلاقة $f(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 1.2$، حيث يمثل t الزمن بالثانية ويمثل $f(t)$ الارتفاع بالمتر. (مثال 2)

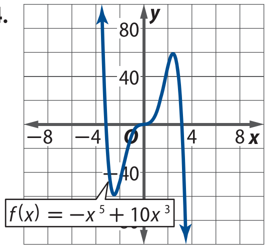
a. مثل بيانيًا ارتفاع الكرة.

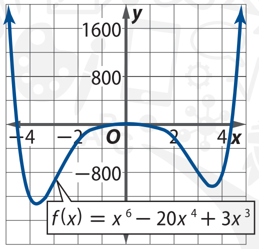
b. قدّر أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة. ادعم إجابتك عدديًا.

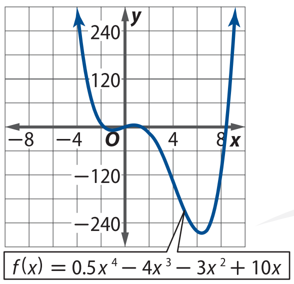
قدّر وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادعم إجاباتك عدديًا. (مثال 2)

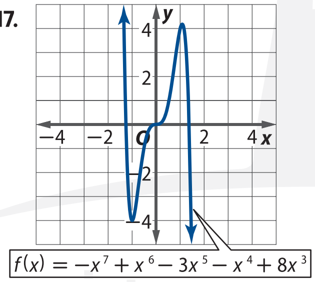
12.


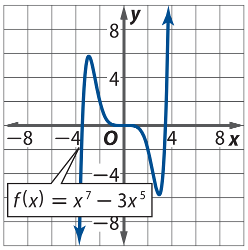
13.


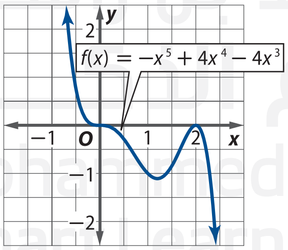
14.


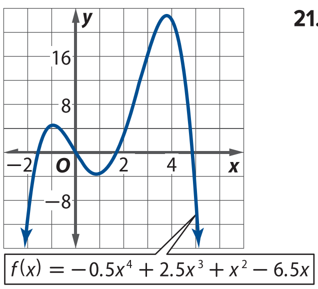
15.


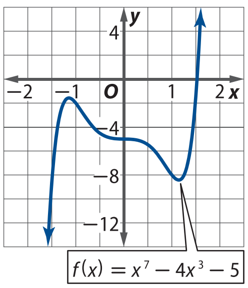
16.


17.


18.


19.


20.


21.


حاسبة التمثيل البياني قرّب إلى أقرب جزء من المائة القيم القصوى المحلية أو المطلقة لكل دالة. اذكر قيم x حيث تظهر. (مثال 3)

22. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8$

23. $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

24. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2$

25. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

26. $f(x) = x^5 - 2x^3 - 6x - 2$

27. $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

28. $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

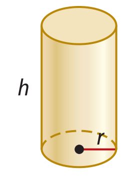
29. $g(x) = x^7 + 6x^2 - 4$

30. $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

31. $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

32. **تصميم الرسوميات** يريد مصمم رسوميات ابتكار رسم مستطيل هامشه 2 cm على كل جانب و 4 cm بالأعلى والأسفل. وينبغي أن تكون مساحة التصميم، بما فيه الهوامش، $392\ cm^2$. فما الأبعاد الإجمالية التي تحقق الحجم الأقصى للتصميم، دون حساب الهوامش؟ (*تلميح:* إذا كان أحد جانبي التصميم هو x، فإن الجانب الآخر هو 392 مقسوم على x.) (مثال 4)

33. **الهندسة** حدد نصف القطر والارتفاع اللازمين للوصول للحجم الأقصى للأسطوانة الموضحة. قرّب إلى أقرب جزء من المائة من السنتيمتر إذا لزم الأمر. (مثال 4)



$SA = 20.5\pi\ cm^2$

جـد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة. (مثال 5)

34. $g(x) = -4x^2 + 3x - 4; [-1, 3]$

35. $g(x) = 3x^2 - 8x + 2; [4, 8]$

36. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6; [2, 6]$

37. $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 2x - 8; [-2, 3]$

38. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1; [5, 9]$

39. $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6; [-1, 5]$

40. $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9; [3, 6]$

41. $h(x) = x^5 + 2x^4 + 3x - 12; [-5, -1]$

42. $f(x) = \frac{x-3}{x}; [5, 12]$

43. $f(x) = \frac{x+5}{x-4}; [-6, 2]$

44. $f(x) = \sqrt{x+8}; [-4, 4]$

45. $f(x) = \sqrt{x-6}; [8, 16]$

46. **الطقس** يمكن تمثيل متوسط درجة الحرارة العظمى بالشهر في دبي بواسطة العلاقة $f(x) = -0.5x^2 + 5x + 23$، حيث يمثل x الشهر ويمثل $x = 1$ يناير. جـد متوسط معدل التغيير لكل فترة زمنية. واشرح ما يمثله هذا المعدل. (مثال 6)

a. أبريل إلى مايو

b. يوليو إلى نوفمبر

47. **القهوة** يمكن تمثيل استهلاك القهوة من 1990 إلى 2000 بالعلاقة $f(x) = -0.004x^4 + 0.077x^3 - 0.38x^2 + 0.46x + 12$، حيث يمثل x العام، ويناظر $x = 0$ عام 1990. ويتم قياس الاستهلاك بالمليون كيلو جرام. جـد متوسط معدل التغيير لكل فترة زمنية. (مثال 6)

a. 1990 إلى 2000

b. 1995 إلى 2000

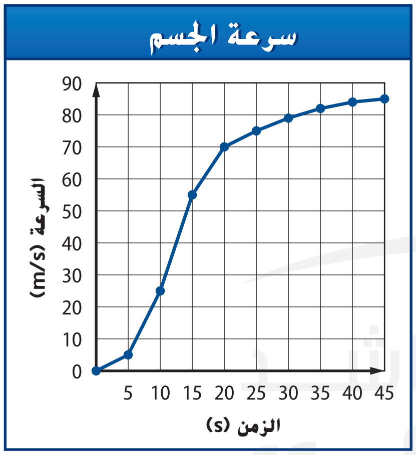
48. **السياحة** يمكن تمثيل السياحة في أبو ظبي في عام محدد بالعلاقة $f(x) = 0.0635x^6 - 2.49x^5 + 37.67x^4 - 275.3x^3 + 986.6x^2 - 1547.1x + 1390.5$، حيث تمثل x، $1 \le x \le 12$ الشهر، وتناظر $x = 1$ الأول من مايو، وتمثل $f(x)$ عدد السياح بالألف.

a. مثّل المعادلة بيانيًا.

b. ما الشهر الذي وصل فيه عدد السياح إلى القيمة العظمى المطلقة؟

c. ما الشهر الذي وصل فيه عدد السياح إلى القيمة العظمى المحلية؟

49. استخدم التمثيل البياني لإكمال ما يلي.



a. جـد متوسط معدل التغيير لكل من [5, 15] و [15, 20] و [25, 45].

b. قارن وبين الفرق بين طبيعة سرعة الجسم خلال تلك الفترات الزمنية.

c. ما الاستنتاجات التي يمكن التوصل إليها بشأن مقدار معدل التغيير وانحدار التمثيل البياني وطبيعة الدالة؟

50. **التكنولوجيا** قرر فريق الأبحاث بشركة كمبيوتر أنه يمكن تمثيل ربح كل رقاقة لرقاقة معالج جديدة بالعلاقة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$، حيث يمثل x سعر بيع الرقاقة بالمائة درهم.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. ما السعر الأمثل للرقاقة؟

c. ما ربح الرقاقة حسب السعر الأمثل؟

51. الدخل يمكن تمثيل متوسط صافي الدخل الشخصي لموظفي شركة من 1997 إلى 2007 بالعلاقة $I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \le x \le 10$. حيث يمثل x عدد الأعوام منذ 1997.

a. مثّل المعادلة بيانيًا.

b. كم كان متوسط معدل التغيير من 2000 إلى 2007؟ ما الذي تمثله هذه القيمة؟

c. ما الفترة الممتدة لأربعة أعوام والتي كان فيها متوسط معدل التغيير الأعلى؟ الأدنى؟

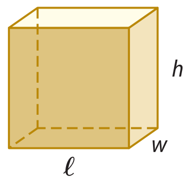
52. الأعمال تعمل شركة في مجال تصنيع الأحواض المستطيلة سعة $0.4\ m^3$. يتكلف الزجاج المستخدم لتصنيع قاعدة الحوض AED 4 لكل متر مربع والزجاج المستخدم لتصنيع الجوانب AED 7 لكل متر مربع.

a. إذا علمتَ أن ارتفاع الحوض وعرضه متساويان. فجد الأبعاد التي تحقق الحد الأدنى لتكلفة صناعة الحوض.

b. ما الحد الأدنى للتكلفة؟

c. إذا علمتَ أن الشركة تصنع كذلك الأحواض على شكل مكعب بنفس السعة، فما الفرق في تكاليف التصنيع؟

53. التعبئة يريد خالد تصميم صندوق مغلق بقاعدة مربعة وحجمه $3024\ cm^3$. فما الأبعاد التي تحقق الحد الأدنى لمساحة سطح الصندوق؟ ادعم استنتاجك.



ارسم التمثيل البياني لكل دالة بمجموعة الخواصّ التالية.

54. $f(x)$ متصلة ومتزايدة دائمًا.

55. $f(x)$ متصلة ومتناقصة دائمًا.

56. $f(x)$ متصلة ومتزايدة دائمًا. و $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

57. $f(x)$ متصلة ومتناقصة دائمًا. و $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

58. $f(x)$ متصلة ومتزايدة عند $x < -2$ ومتناقصة عند $x > -2$.

59. $f(x)$ متصلة ومتناقصة عند $x < 0$ ومتزايدة عند $x > 0$.

حدد إحداثيات القيم القصوى المطلقة لكل دالة. واذكر ما إذا كانت كل قيمة عظمى أو صغرى.

60. $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

61. $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$

62. $f(x) = -4|x-22| + 65$

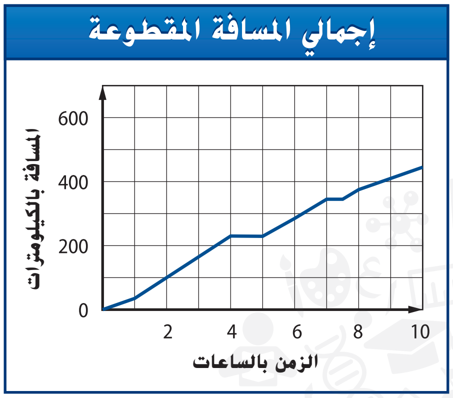
63. $f(x) = 4(3x-7)^4 + 8$

64. $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

65. $f(x) = -(25 - x^2)^{0.5}$

66. $f(x) = x^3 + x$

67. السفر في كل ساعة، سجّل سعيد ومثل بيانيًا المسافة الإجمالية بالكيلو متر والتي قطعتها عائلته بالسيارة خلال رحلة. اذكر بعض أسباب اختلاف متوسط معدل التغيير وظهوره كأنه ثابت خلال فترتين.



68. نقاط الانعطاف حدد التمثيلات البيانية في التمارين 10-1 و 21-12 والتي تحتوي على نقاط انعطاف تعتبر من النقاط الحرجة. وقدر موقع هذه النقاط في كل تمثيل بياني.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لكل دالة بمجموعة الخواصّ التالية.

69. انفصال لا نهائي عند $x = -2$
متزايدة في $(-\infty, -2)$
متزايدة في $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

70. متصلة
متوسط معدل التغيير بالنسبة إلى $[3, 8]$ هو 4
متناقصة في $(8, \infty)$
$f(-4) = 2$

71. التبرير ما ميل المستقيم القاطع من $(a, f(a))$ إلى $(b, f(b))$ عندما تكون $f(x)$ ثابتة للفترة $[a, b]$؟ اشرح استنتاجك.

72. التبرير إذا علمتَ أن متوسط معدل تغيير $f(x)$ في الفترة (a, b) موجب. فهل $f(x)$ *أحيانًا* أم *دائمًا* أم *مطلقًا* متزايدة في (a, b)؟ اشرح استنتاجك.

73. تحدٍ استخدم حاسبة للتمثيل البياني لـــ $f(x) = \sin x$ في وضع الدرجات. صف القيم العظمى المحلية للدالة والنافذة المستخدمة للتمثيل البياني.

74. التبرير الدالة المتصلة f لها قيمة صغرى محلية عند c وهي متزايدة عندما تزداد x من c. صف سلوك الدالة عندما تزداد x إلى c. اشرح استنتاجك.

75. الكتابة في الرياضيات صف وجه الارتباط بين متوسط معدل تغيير دالة بالدالة عندما تكون متزايدة ومتناقصة وثابتة خلال فترة.

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم x المذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء *لا نهائي* أو *قفزي* أو *قابل للإزالة*. (الدرس 1-3)

78. $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}; x = -5$ و $x = 5$

77. $f(x) = \sqrt{x + 1}; x = 3$

76. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}; x = -3$

حاسبة التمثيل البياني **قم بتمثيل كل دالة بيانيًا. قم بتحليل التمثيل البياني في تحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو *ليست أيًا منهما*. قم بتأكيد الحل جبريًا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.** (الدرس 1-2)

81. $g(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

80. $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$

79. $f(x) = |x^5|$

اذكر مجال كل دالة. (الدرس 1-1)

84. $h(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$

83. $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

82. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$

85. جد قيم x, y و z بالنسبة إلى $\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6z & 3x + y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x & y - 1 \\ 4 & 3z \end{bmatrix}$.

86. إن أمكن، جد حل $z = -1 - 2x$, $y = x + 2z$ و $x = y - 14$.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

89. $z^2 - 4z - 21 = 0$

88. $2a^2 + 11a - 21 = 0$

87. $x^2 + 3x - 18 = 0$

بسّط.

92. $\left(\frac{1}{2} + i\right) - (2 - i)$

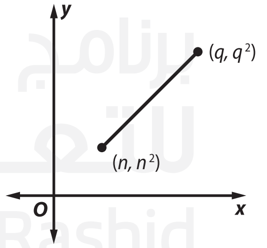
91. $(7 - 4i) + (2 - 3i)$

90. i^{19}

93. **الكهرباء** يمكن تمثيل عدد وحدات الفولت E الناتج عن دائرة بالعلاقة $E = I \cdot Z$، حيث يمثل I التيار بالأمبير ويمثل Z المقاومة بالأوم. ما عدد وحدات الأمبير اللازمة في دائرة مقاومتها $3 - j$ أوم لإنتاج $12j + 21$ فولت؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

94. **SAT/ACT** في الشكل، إذا علمتَ أن $q \neq n$، فما ميل القطعة المستقيمة؟



A $q + n$

B $q - n$

C $\frac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\frac{1}{q + n}$

E $\frac{1}{q - n}$

95. **مراجعة** إذا كان رقم السنة يقبل القسمة على 4، تكون هذه السنة كبيسة. ولكن عندما يقبل القسمة على 100، لا تكون السنة كبيسة، إلا إذا كان رقمها يقبل القسمة على 400. أي مما يلي ليست سنة كبيسة؟

F 1882

G 1900

H 2000

J 2100

96. الدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ لها قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية عند أي من قيم x التالية؟

A قيمة عظمى محلية عند $x \approx -0.7$، قيمة صغرى محلية عند $x \approx 2$

B قيمة عظمى محلية عند $x \approx -0.7$، قيمة صغرى محلية عند $x \approx -2$

C قيمة عظمى محلية عند $x \approx -2$، قيمة صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D قيمة عظمى محلية عند $x \approx 2$، قيمة صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

97. **مراجعة** هناك نافذة على شكل مثلث متساوي الأضلاع، طول كل ضلع 2.5 m. والنافذة مقسومة نصفين بدعامة من رأس إلى نقطة منتصف ضلع المثلث المقابل للرأس. فما طول الدعامة تقريبًا؟

F 1.74 m

G 2.2 m

H 3.4 m

J 4.2 m

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-1 إلى 1-4

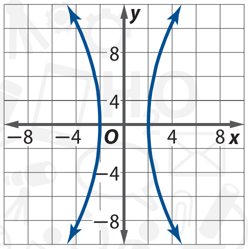
حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة x. (الدرس 1-1)

1. $3x + 7y = 21$

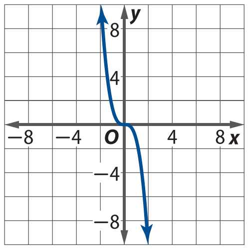
2.

x	-1	1	3	5	7
y	-1	3	7	11	15

3.



4.



5. جـد قيمة $f(2)$ من أجل $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x , & x < 2 \\ x + 10 , & x \geq 2 \end{cases}$ (الدرس 1-1)

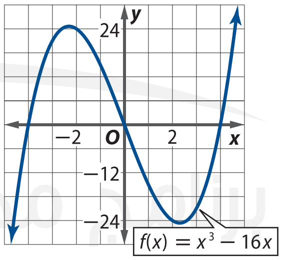
6. رياضة أثناء إحدى مباريات كرة القاعدة، أرسل ضارب الكرة الكرة إلى الملعب الداخلي. بعد t ثانية، يمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالقدم بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 50t + 5$. (الدرس 1-1)

a. ما ارتفاع كرة القاعدة بعد 3 ثوانٍ؟

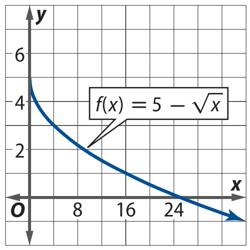
b. ما هو المجال ذو الصلة لهذه الدالة؟ اشرح استنتاجك.

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لإيجاد تقاطعها مع المحور الرأسي y وكذلك إيجاد أصفارها. ثم جـد هذه القيم جبريًا. (الدرس 1-2)

7.

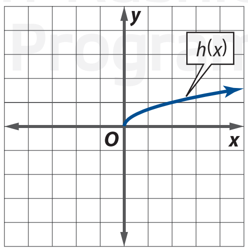


8.

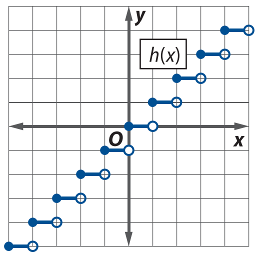


استخدم التمثيل البياني للدالة h في إيجاد المجال والمدى لكل دالة. (الدرس 1-2)

9.



10.



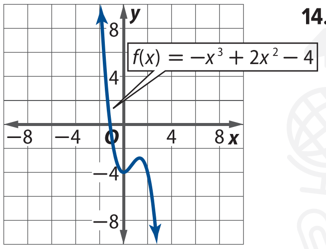
حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند $x = 5$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. (الدرس 1-3)

11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

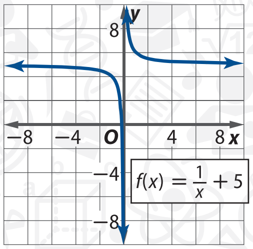
12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 5}$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. (الدرس 1-3)

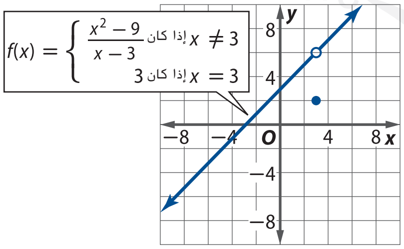
13.



14.



15. الاختيار من متعدد يحتوي التمثيل البياني لـ $f(x)$ على انفصال ________ عند $x = 3$. (الدرس 1-3)



A غير معرّف

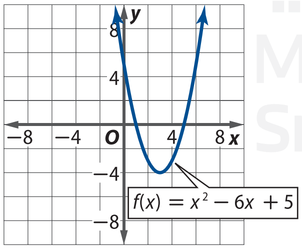
B لا نهائي

C قفزي

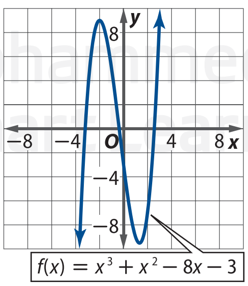
D قابل للإزالة

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. (الدرس 1-4)

16.



17.



18. فيزياء إذا أسقِط جسمٌ من ارتفاع 80 ft فوق سطح الأرض، فإن ارتفاعه بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $f(t) = -16t^2 + 80$. ما متوسط سرعة الجسم خلال أول ثانيتين بعد وقوعه؟ (الدرس 1-4)

الدرس 1-5

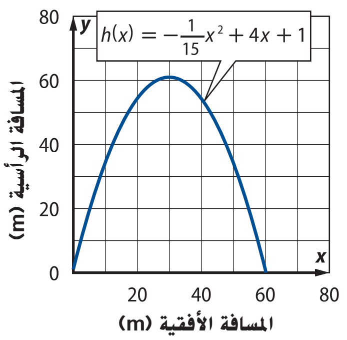
الدوال الأصلية والتحويلات

السابق
- قمت بتحليل التمثيلات البيانية للدوال الدروس من (2-11 إلى 4-11)

الحالي
1. تحليل الدوال الأصلية وتمثلها بيانيًا ووصفها.
2. تحديد تحويلات الدوال وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- يمكن تمثيل مسار ركلة حرة من مسافة 60 m بواسطة الدالة على اليسار. وهذه الدالة مرتبطة بالدالة التربيعية الأساسية $f(x) = x^2$.

ركلة حرة



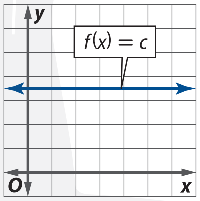
المفردات الجديدة
دالة أصلية parent function
الدالة الثابتة constant function
الدالة الصفرية zero function
الدالة المحايدة identity function
الدالة التربيعية quadratic function
الدالة التكعيبية cubic function
دالة الجذر التربيعي square root function
الدالة العكسية reciprocal function
دالة القيمة المطلقة absolute value function
الدالة الدرجية step function
دالة أكبر عدد صحيح greatest integer function
تحويل transformation
إزاحة translation
انعكاس reflection
تغيير أبعاد(تمدد) dilation

1 الدوال الأصلية
عائلة الدوال هي مجموعة من الدوال مع تمثيلات بيانية تظهر واحدة أو أكثر من الخصائص المتشابهة. **الدالة الأصلية** هي أبسط دالة في العائلة. وهي الدالة التي تم تحويلها لإنشاء أعضاء آخرين في عائلة الدوال.

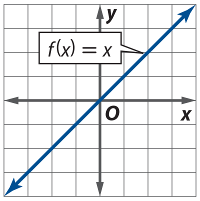
في هذا الدرس، ستدرس ثمانية من أكثر الدوال الأصلية شيوعًا من حيث الاستخدام. ومن المفترض أنك بالفعل على دراية بالتمثيلات البيانية لما يلي من الدوال الأصلية الخطية وكثيرة الحدود.

المفهوم الأساسي الدوال الأصلية الخطية وكثيرة الحدود

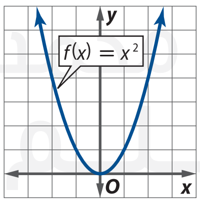
الدالة الثابتة تكون بالصورة $f(x) = c$، حيث c أي عدد حقيقي، وتمثيلها البياني خط أفقي. وعند $c = 0$، فإن $f(x)$ تكون **دالة صفرية**.



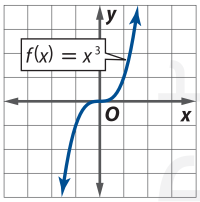
الدالة المحايدة $f(x) = x$ تمر بجميع النقاط ذات الإحداثيات (a, a).



الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ تمثيلها البياني على شكل حرف U.



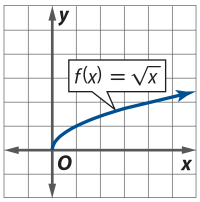
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متناظرة حول نقطة الأصل.



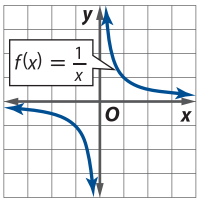
ومن المفترض أيضًا أنك على دراية بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والدوال العكسية.

المفهوم الأساسي دوال الجذر التربيعي والدوال العكسية الأصلية

دالة الجذر التربيعي تكون بالصورة $f(x) = \sqrt{x}$.



الدالة العكسية تكون بالصورة $f(x) = \frac{1}{x}$.



من الدوال الأصلية أيضًا دالة القيمة المطلقة متعددة التعريف.

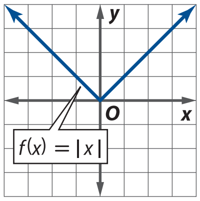
المفهوم الأساسي دالة القيمة المطلقة الأصلية

الشرح **دالة القيمة المطلقة**، المشار إليها $f(x) = |x|$، هي دالة على شكل V ويتم تعريفها بالصورة

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة $|-5| = 5,\ |0| = 0,\ |4| = 4$

النموذج



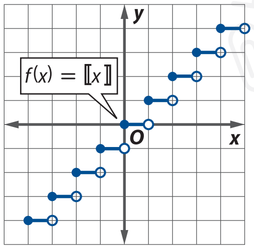
الدالة متعددة التعريف التي يشبه تمثيلها البياني مجموعة من درجات السلم تُسمى **الدالة الدرجية**. وأكثر الدوال الدرجية شهرة هي دالة العدد الصحيح الأكبر.

المفهوم الأساسي دالة أكبر عدد صحيح الأصلية

الشرح **دالة أكبر عدد صحيح**، المشار إليها $f(x) = [\![x]\!]$. يتم تعريفها بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

أمثلة $[\![-4]\!] = -4,\ [\![-1.5]\!] = -2,\ \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

النموذج



نصيحة دراسية

دالة الجزء الصحيح دالة العدد الصحيح الأكبر تسمى أيضًا دالة الجزء الصحيح.

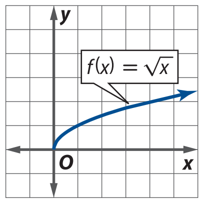
باستخدام الأدوات التي تعلمتها في الدروس من 1-1 إلى 1-4، يمكنك وصف خصائص كل دالة أصلية. ويمكن أن تساعدك معرفة خصائص الدالة الأصلية على تحليل أشكال التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا في هذه المجموعة.

مثال 1 وصف خصائص الدالة الأصلية

صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد/تناقص التمثيل البياني.

يتسم التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) بالخصائص التالية.

- مجال الدالة هو $[0, \infty)$ والمدى هو $[0, \infty)$.
- يحتوي التمثيل البياني على تقاطع واحد عند $(0, 0)$.
- لا يحتوي التمثيل البياني على تماثل. إذًا، $f(x)$ ليست فردية ولا زوجية.
- التمثيل البياني متصل لجميع القيم في المجال.
- يبدأ التمثيل البياني عند $x = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- التمثيل البياني متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

تمرين موجّه

1. صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية $f(x) = |x|$: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد/تناقص التمثيل البياني.

2 التحويلات

التحويلات لدالة أصلية يمكن أن تؤثر على مظهر التمثيل البياني الأصلي. *التحويلات الثابتة* تغير فقط موقع التمثيل البياني مع عدم تغيير الحجم والشكل. *التحويلات غير الثابتة* تغير شكل التمثيل البياني.

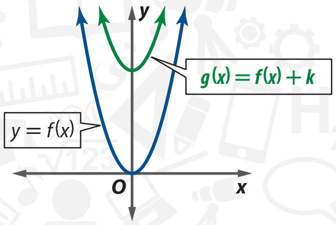
الإزاحة هي تحويل ثابت يحرك التمثيل البياني للدالة. *الإزاحة الرأسية* للدالة f تحرك التمثيل البياني للدالة f لأعلى أو لأسفل. بينما *الإزاحة الأفقية* تحرك التمثيل البياني لليسار أو اليمين. والإزاحة الأفقية والرأسية من أمثلة التحويلات الثابتة.

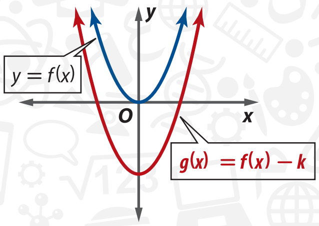
المفهوم الأساسي الإزاحة الأفقية والرأسية

الإزاحة الرأسية

التمثيل البياني لـــ $g(x) = f(x) + k$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x)$ بعد إزاحته

- k **وحدة لأعلى** عند $k > 0$، و
- k **وحدة لأسفل** عند $k < 0$.

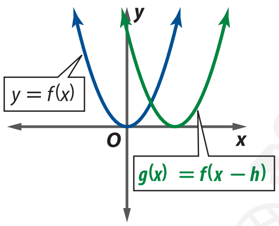


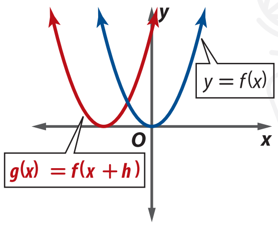


الإزاحة الأفقية

التمثيل البياني لـــ $g(x) = f(x - h)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x)$ بعد إزاحته

- h **وحدة لليمين** عند $h > 0$، و
- h **وحدة لليسار** عند $h < 0$.





مثال 2 إزاحة التمثيل البياني

استخدم التمثيل البياني لـــ $f(x) = |x|$ لتمثيل كل دالة بيانيًا.

a. $g(x) = |x| + 4$

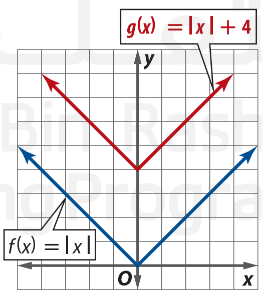
هذه الدالة بالصورة $g(x) = f(x) + 4$. إذًا، التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x) = |x|$ بعد إزاحته 4 وحدات لأعلى، كما هو موضح بالشكل 1.5.2.

b. $g(x) = |x + 3|$

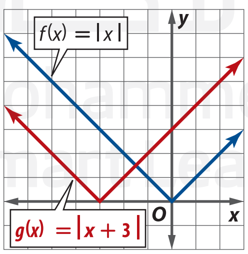
هذه الدالة بالصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$. إذًا، التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x) = |x|$ بعد إزاحته 3 وحدات لليسار، كما هو موضح بالشكل 1.5.3.

c. $g(x) = |x - 2| - 1$

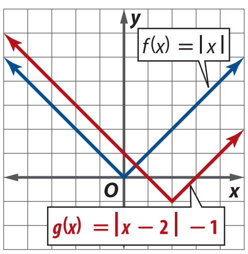
هذه الدالة بالصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$. إذًا، التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x) = |x|$ بعد إزاحته بمقدار وحدتين لليمين ووحدة لأسفل، كما هو موضح بالشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تمرين موجّه استخدم التمثيل البياني لـــ $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة بيانيًا.

2A. $h(x) = x^3 - 5$　**2B.** $h(x) = (x - 3)^3$　**2C.** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

تلميح تقني

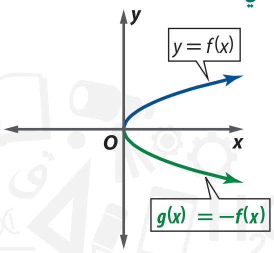
الإزاحات يمكنك إزاحة تمثيل بياني باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ضمن $\boxed{Y=}$، ضع معادلة في Y1. انتقل إلى السطر Y2، ثم اضغط على $\boxed{VARS}$ $\boxed{▶}$ $\boxed{ENTER}$ $\boxed{ENTER}$. سوف يؤدي هذا إلى وضع Y1 في السطر Y2. أدخل العدد المطلوب لإزاحة الدالة. اضغط على $\boxed{GRAPH}$. يتم تمثيل المعادلتين بيانيًا في النافذة ذاتها.

نوع آخر من التحويل الثابت هو **الانعكاس**، والذي ينتج صورة مرآة للتمثيل البياني للدالة بالنسبة إلى خط معين.

المفهوم الأساسي الانعكاس على المحاور الإحداثية

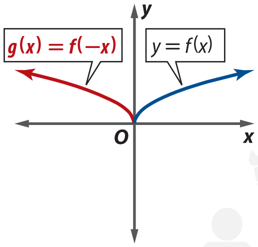
الانعكاس حول المحور الأفقي x

$g(x) = -f(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد انعكاسه حول المحور الأفقي x.**

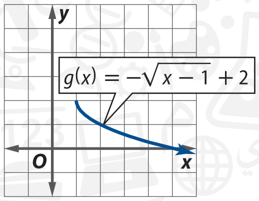


الانعكاس حول المحور الرأسي y

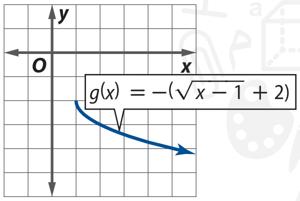
$g(x) = f(-x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد انعكاسه حول المحور الرأسي y.**



عند كتابة معادلة لدالة مزاحة، انتبه إلى الإشارة إلى التحويلات بالشكل الصحيح. التمثيل البياني لـ $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن التمثيل البياني لـ $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



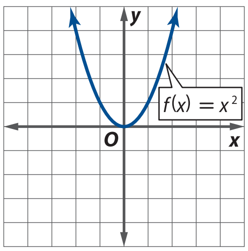
انعكاس $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور الأفقي x ثم الإزاحة بمقدار وحدة لليمين ووحدتين لأعلى



إزاحة $f(x) = \sqrt{x}$ بمقدار وحدة لليمين ووحدتين لأعلى ثم الانعكاس حول المحور الأفقي x

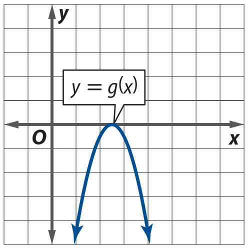
مثال 3 كتابة معادلات للتحويلات

صف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ و $g(x)$. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$.



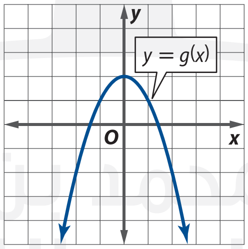
الشكل 1.5.5

a.



التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بعد إزاحته 2.5 وحدة لليمين وانعكاسه حول المحور الأفقي x. إذًا، $g(x) = -(x - 2.5)^2$.

b.

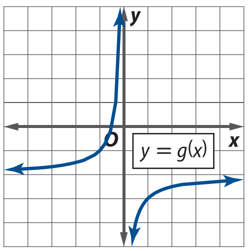


التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بعد انعكاسه حول المحور الأفقي x وإزاحته وحدتين لأعلى. إذًا، $g(x) = -x^2 + 2$.

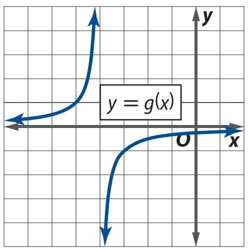
تمرين موجّه

صف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$.

3A.



3B.



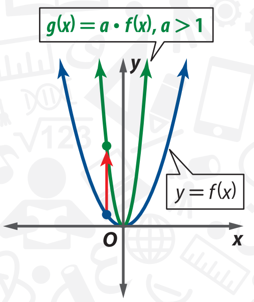
تغيير الأبعاد (التمدد) تحوُّل غير ثابت له تأثير ضغط (تقلص) أو توسيع (تكبير) التمثيل البياني لدالة أفقيًا أو رأسيًا.

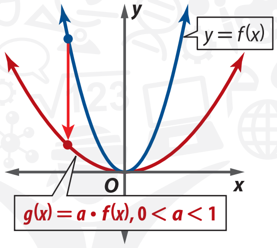
المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد بمقياس (التمدد) أفقيًا ورأسيًا

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا. إذًا $g(x) = a \cdot f(x)$ هو

- التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد توسعه رأسيًا**. إذا كان $a > 1$.
- التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد انكماشه رأسيًا**. إذا كان $0 < a < 1$.

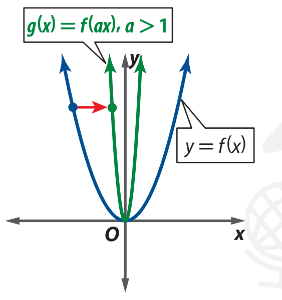


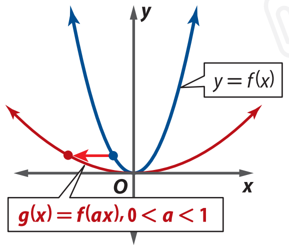


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا. إذًا $g(x) = f(ax)$ هو

- التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد انكماشه أفقيًا**. إذا كان $a > 1$.
- التمثيل البياني لـ $f(x)$ **بعد توسعه أفقيًا**. إذا كان $0 < a < 1$.





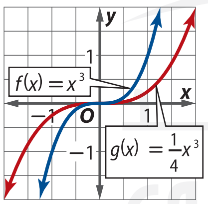
نصيحة دراسية

تغييرات الأبعاد أحيانًا تبدو أزواج تغييرات الأبعاد متشابهة مثل التوسع الرأسي والانضغاط الأفقي. ومن المستحيل تمييز تغيير الأبعاد الذي يمثل تحويلاً من التمثيل البياني. ويجب مقارنة معادلة الدالة المتحولة بالدالة الأصلية.

مثال 4 وصف التحويلات وتمثيلها بيانيًا

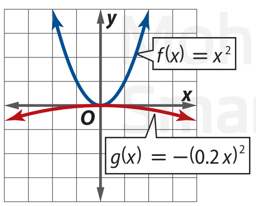
حدد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$، وصف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $g(x)$ و $f(x)$. ثم مثل بيانيًا $f(x)$ و $g(x)$ على المحاور ذاتها.

a. $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3$ بعد انكماشه رأسيًا لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ و $0 < \frac{1}{4} < 1$.

b. $g(x) = -(0.2x)^2$



التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بعد توسعه أفقيًا ثم انعكاسه على المحور الأفقي x لأن $g(x) = -(0.2x)^2 = -f(0.2x)$ و $0 < 0.2 < 1$.

تمرين موجّه

4A. $g(x) = [\![x]\!] - 4$

4B. $g(x) = \frac{15}{x} + 3$

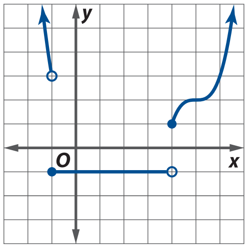
يمكنك استخدام ما تعلمتَ عن تحويلات الدوال من أجل تمثيل دالة متعددة التعريف بيانيًا.

مثال 5 التمثيل البياني لدالة متعددة التعريف

مثّل بيانيًا $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$

في الفترة $(-\infty, -1)$. مثّل بيانيًا $y = 3x^2$.
في الفترة $[-1, 4)$. مثّل بيانيًا الدالة الثابتة $y = -1$.
في الفترة $[4, \infty)$. مثّل بيانيًا $y = (x-5)^3 + 2$.

ارسم دائرتين عند $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطتين عند $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.



تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

5A. $g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$

5B. $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x < -5 \\ 7 & , \quad -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \quad x > 2 \end{cases}$

يمكنك كذلك استخدام ما تعلمت عن التحويلات لتحويل الدوال التي تمثل البيانات أو الظواهر من الحياة اليومية.

مثال 6 من الحياة اليومية تحويلات الدوال

كرة القدم **يمكن تمثيل مسار ركلة حرة من مسافة 60 m بالعلاقة $g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$، حيث $g(x)$ تمثل المسافة الرأسية للكرة عن سطح الأرض بالمتر، وتمثل x المسافة الأفقية بالمتر حيث $x = 0$ تناظر 20 m من خط مرمى صاحب الركلة الحرة.**

a. *صف تحويلات الدالة الأصلية $f(x) = x^2$ المستخدمة للتمثيل البياني لـ $g(x)$.*

أعد كتابة الدالة بحيث تكون بالصورة $g(x) = a(x-h)^2 + k$ من خلال إكمال المربع.

$g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ الدالة الأصلية

$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$ عامل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$.

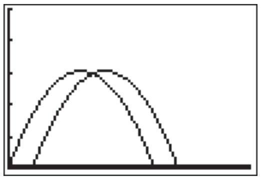
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$ أكمل المربع.

$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61$ اكتب $x^2 - 60x + 900$ في صورة مربع كامل وبسّط.

إذًا، $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ بعد إزاحته 30 وحدة لليمين وضغطه رأسيًا وانعكاسه حول المحور الأفقي x ثم إزاحته 61 وحدة لأعلى.

b. *افترض أنه قد تم تنفيذ الركلة الحرة من مسافة 30 m من خط مرمى المنفذ. أعد كتابة $g(x)$ لتعكس هذا التغيير. ومثل الدالتين بيانيًا على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها.*

تغيير الموقع من 20 إلى 30 m من خط مرمى منفذ الركلة الحرة هو إزاحة أفقية بمقدار 10 m لليمين. إذًا اطرح 10 m إضافية من داخل التعبير المربع.



[0, 100] scl: 1 by [0, 100] scl: 20

$g(x) = -\frac{1}{15}(x - 30 - 10)^2 + 61$ أو $g(x) = -\frac{1}{15}(x - 40)^2 + 61$

تمرين موجّه

6. **الكهرباء** يتم وصف التيار بالأمبير الذي يتدفق عبر مشغل أسطوانات DVD بالعلاقة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$، حيث يمثل x القدرة بالواط والمقاوم بالأوم تساوي 11.

A. صف تحويلات الدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$ المستخدمة للتمثيل البياني لـ $I(x)$.

B. مقاومة مصباح تساوي 15 أوم. اكتب دالة تصف التيار المتدفق عبر المصباح.

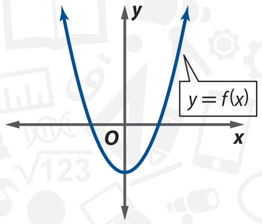
C. مثّل بيانيًا مقاومة مشغل أسطوانات DVD والمصباح على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها.

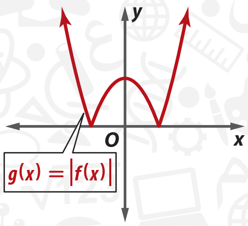
تحويل آخر غير ثابت يتضمن القيمة المطلقة.

المفهوم الأساسي التحويلات مع القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

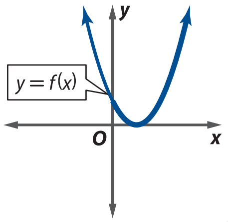
يعكس هذا التحويل أي جزء من التمثيل البياني لـ $f(x)$ يكون أسفل المحور الأفقي x بحيث يصبح فوق المحور الأفقي x.

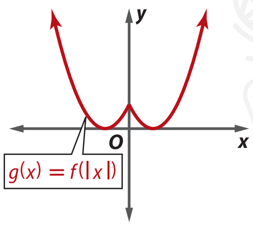




$g(x) = f(|x|)$

يؤدي هذا التحويل إلى استبدال جزء التمثيل البياني لـ $f(x)$ الذي يقع على يسار المحور الرأسي y بانعكاس الجزء الذي يقع على يمين المحور الرأسي y.



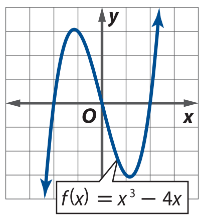


تلميح تقني

تحويلات القيمة المطلقة يمكنك التحقق من التمثيل البياني لتحويل قيمة مطلقة باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ويمكنك كذلك تمثيل الدالتين بيانيًا على المحاور الإحداثية ذاتها.

مثال 7 وصف التحويلات وتمثيلها بيانيًا

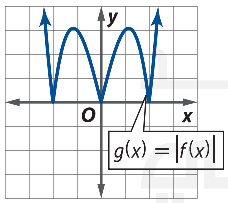
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3 - 4x$ في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل دالة بيانيًا.



الشكل 1.5.6

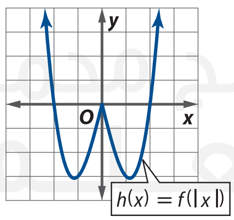
a. $g(x) = |f(x)|$

التمثيل البياني لـ $f(x)$ يقع أسفل المحور الأفقي x في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$. إذًا اعكس هذه الأجزاء حول المحور الأفقي x واترك الباقي بلا تغيير.



b. $h(x) = f(|x|)$

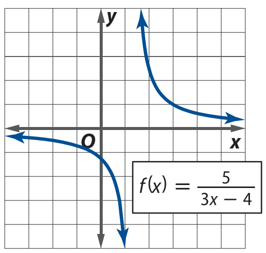
استبدل التمثيل البياني لـ $f(x)$ على يسار المحور الرأسي y بانعكاس التمثيل البياني على يمين المحور الرأسي y.



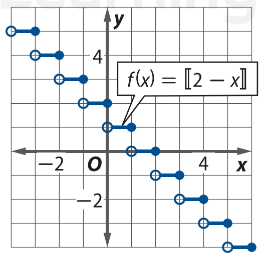
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ الموضحة من أجل التمثيل البياني لـ $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$.

7A.



7B.



تمارين

صف الخصائص التالية للتمثيل البياني للدالة الأصلية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل والاتصال والسلوك الطرفي وفترات تزايد/تناقص التمثيل البياني. (مثال 1)

1. $f(x) = [\![x]\!]$ **2.** $f(x) = \frac{1}{x}$ **3.** $f(x) = x^3$

4. $f(x) = x^4$ **5.** $f(x) = c$ **6.** $f(x) = x$

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل دالة بيانيًا. (مثال 2)

7. $g(x) = \sqrt{x-4}$ **8.** $g(x) = \sqrt{x+3}$

9. $g(x) = \sqrt{x+6} - 4$ **10.** $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

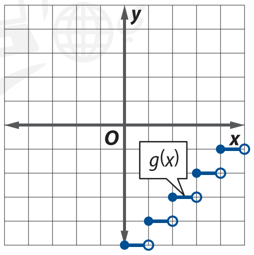
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل دالة بيانيًا. (مثال 2)

11. $g(x) = \frac{1}{x} + 4$ **12.** $g(x) = \frac{1}{x} - 6$

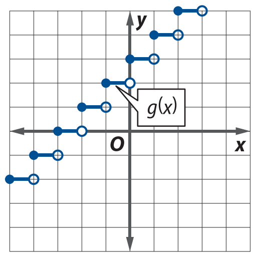
13. $g(x) = \frac{1}{x-6} + 8$ **14.** $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

صف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$. (مثال 3)

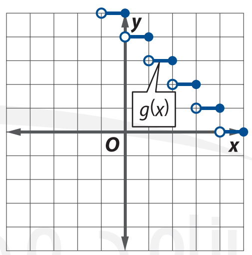
15.



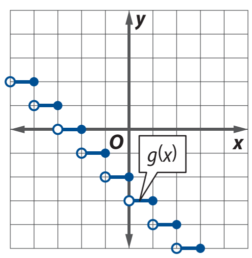
16.



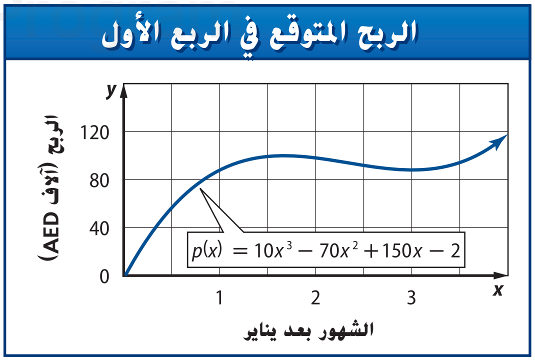
17.



18.

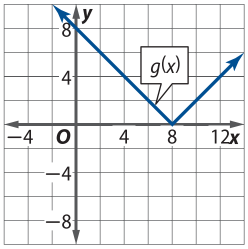


19. **الربح** تعرضت شركة سيارات لتأخير غير متوقع في تصنيع سيارة جديدة. الربح المتوقع من مبيعات السيارة قبل التأخير $p(x)$ موضح أدناه. صف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $p(x)$ والتمثيل البياني لإسقاط يتضمن التأخير $d(x)$. ثم اكتب معادلة لـ $d(x)$. (مثال 3)

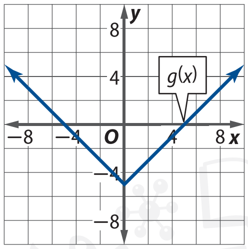


صف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $f(x) = |x|$ و $g(x)$. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$. (مثال 3)

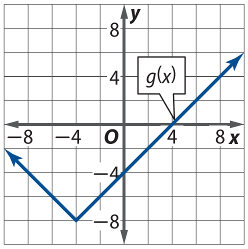
20.



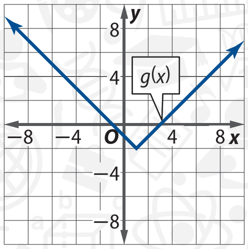
21.



22.



23.



حدد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$، وصف وجه الارتباط بين التمثيل البياني لـ $g(x)$ و $f(x)$. ثم مثل بيانيًا $f(x)$ و $g(x)$ على المحاور ذاتها. (مثال 4)

24. $g(x) = 3|x| - 4$ **25.** $g(x) = 3\sqrt{x+8}$

26. $g(x) = \frac{4}{x+1}$ **27.** $g(x) = 2[\![x-6]\!]$

28. $g(x) = -5[\![x-2]\!]$ **29.** $g(x) = -2|x+5|$

30. $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$ **31.** $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

مثّل كل دالة بيانيًا. (مثال 5)

32. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < -2 \\ 3, & -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2, & x \ge 7 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x+4, & x < -6 \\ \frac{1}{x}, & -6 \le x < 4 \\ 6, & x \ge 4 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -5 \\ x^3, & -2 \le x \le 2 \\ \sqrt{x+3}, & x > 3 \end{cases}$

35. $h(x) = \begin{cases} |x-5|, & x < -3 \\ 4x-3, & -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x}, & x \ge 4 \end{cases}$

36. $g(x) = \begin{cases} 2, & x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5, & -1 \le x < 1 \\ [\![x]\!] + 1, & x \ge 3 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} -3x - 1, & x \le -1 \\ 0.5x + 5, & -1 < x \le 3 \\ -|x-5| + 3, & x > 3 \end{cases}$

38. **البريد** تكلفة طابع بريدي من الفئة الأولى في الولايات المتحدة من 1988 إلى 2008 موضحة في الجدول أدناه. استخدم البيانات لتمثيل دالة درجية بيانيًا. (مثال 5)

العام	السعر (AED)
1988	25
1991	29
1995	32
1999	33
2001	34
2002	37
2006	39
2007	41
2008	42

39. **الأعمال** تحصل شركة هاتف جوال بلا تعاقد حدًا أدنى للاستخدام اليومي و AED 0.10 لكل دقيقة. يمكن تمثيل الباقة بالعلاقة $c(x) = 0.1[\![x]\!] + 1.99$، حيث يمثل x عدد الدقائق المستهلكة. (مثال 6)

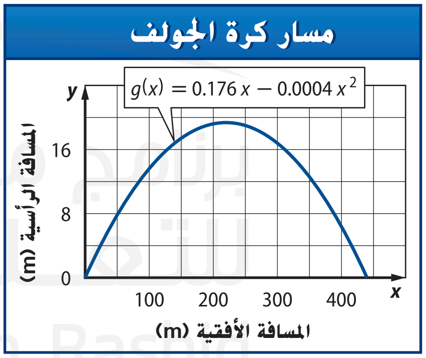
a. صف تحويلات الدالة الأصلية $f(x) = [\![x]\!]$ المستخدمة للتمثيل البياني لـــ $c(x)$.

b. تقدم الشركة باقة أخرى السعر اليومي فيها AED 2.49 وسعر الدقيقة AED 0.05. ما الدالة $d(x)$ التي يمكن استخدامها لوصف الباقة الثانية؟

c. مثل الدالتين بيانيًا على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها.

d. هل ستتساوى تكلفة الباقتين؟ وإذا كان الأمر كذلك، فعند استهلاك كم دقيقة؟

40. **الجولف** يمكن تمثيل مسار كرة جولف بالدالة الموضحة، حيث يمثل $g(x)$ المسافة الرأسية بالمتر للكرة فوق سطح الأرض ويمثل x المسافة الأفقية بالمتر بحيث يناظر $x = 0$ نقطة البداية (مثال 6)



a. صف تحويلات الدالة الأصلية $f(x) = x^2$ المستخدمة للتمثيل البياني لـــ $g(x)$.

b. إذا أطلق لاعب جولف آخر ضربة مشابهة أبعد بمقدار 30 m من اللاعب الأول، فما الدالة $h(x)$ التي يمكن استخدامها لوصف ضربة اللاعب الثاني؟

c. مثل الضربتين بيانيًا على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها.

d. على أي مسافتين أفقية ورأسية يحدث تقاطع بين الضربتين؟

استخدم التمثيل البياني لـــ $f(x)$ من أجل التمثيل البياني لـــ $h(x) = f(|x|)$ و $g(x) = |f(x)|$. (مثال 7)

41. $f(x) = \frac{2}{x}$

42. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

43. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

44. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8x - 2$

45. $f(x) = \frac{1}{x - 3} + 5$

46. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 6$

47. **النقل** تم عرض مثال للتكلفة القياسية لأجرة التاكسي. الوحدة تساوي مسافة 0.2 km أو 60 s في حالة توقف السيارة.

a. اكتب دالة العدد الصحيح الأكبر $f(x)$ التي تمثل تكلفة وحدات أجرة التاكسي، حيث $x > 0$. قرّب إلى أقرب وحدة.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. كيف سيتغير التمثيل البياني لـــ $f(x)$ إذا زادت أجرة الوحدة الأولى إلى AED 3.70 بينما ظلت تكلفة الوحدة عند AED 0.40؟ مثّل الدالة الجديدة بيانيًا.

48. **فيزياء** الطاقة الكامنة بالجول لزنبرك تم شده أو ضغطه محددة بالعلاقة $p(x) = \frac{cx^2}{2}$، حيث تمثل c ثابت الزنبرك وتمثل x المسافة من موضع التوازن. عندما تكون x سالبة، يكون الزنبرك في حالة انضغاط، وعندما تكون x موجبة، يكون الزنبرك في حالة شد.

a. صف تحويلات الدالة الأصلية $f(x) = x^2$ المستخدمة للتمثيل البياني لـــ $p(x)$.

b. يمر التمثيل البياني للطاقة الكامنة لزنبرك آخر بالنقطة (3, 315). جـــد ثابت الزنبرك واكتب دالة للطاقة الكامنة.

اكتب ومثّل بيانيًا الدالة بالدالة الأصلية والخصائص المعطاة.

49. $f(x) = \frac{1}{x}$؛ توسعة رأسية بعامل 2، وإزاحة 7 وحدات لليسار و 5 وحدات لأعلى

50. $f(x) = [\![x]\!]$؛ توسعة رأسية بعامل 3، وانعكاس حول المحور الأفقي x. وإزاحة 4 وحدات لأسفل

فيزياء المسافة التي يتحركها جسم كدالة زمن محددة بالعلاقة $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$، حيث يمثل a التسارع، ويمثل v_0 السرعة الإبتدائية، ويمثل x_0 الموقع الابتدائي للجسم. صف تحولات الدالة الأصلية $f(t) = t^2$ المستخدمة للتمثيل البياني لـــ $f(t)$ لكل مما يلي.

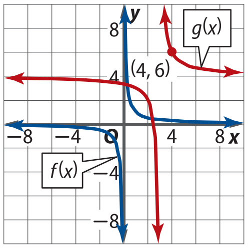
51. $a = 2, v_0 = 2, x_0 = 0$

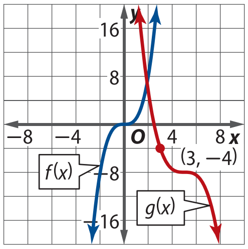
52. $a = 2, v_0 = 0, x_0 = 10$

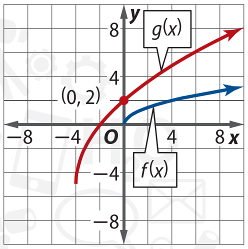
53. $a = 4, v_0 = 8, x_0 = 1$

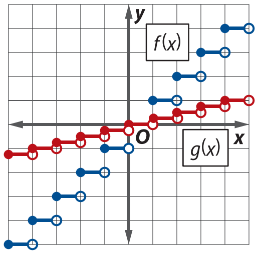
54. $a = 3, v_0 = 5, x_0 = 3$

اكتب معادلة لكل $g(x)$.

55. 

56. 

57. 

58. 

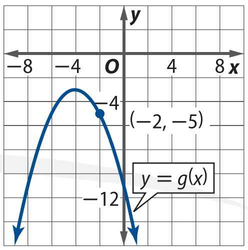
59. **التسوق** توقعت إدارة مركز تسوق جديد أن الحضور بالألف سيتبع العلاقة $f(x)=\sqrt{7x}$ في أول 60 يومًا من العمل. حيث يمثل x عدد الأيام بعد الافتتاح ويناظر $x = 1$ يوم الافتتاح. اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل موقف أدناه.

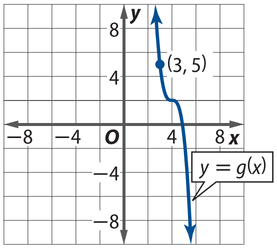
a. كان الحضور أعلى من المتوقع بنسبة 12% بشكل مستمر.

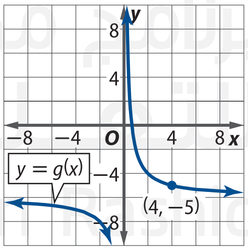
b. تأخر الافتتاح 30 يومًا نتيجة أعمال الإنشاءات.

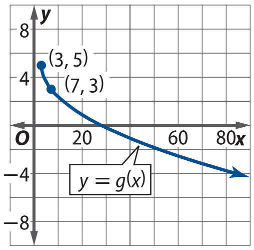
c. كان الحضور أقل من المتوقع بمقدار 450.

حدد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$، وصف تحويلات (x) المستخدمة للتمثيل البياني لـ $g(x)$.

60. 

61. 

62. 

63. 

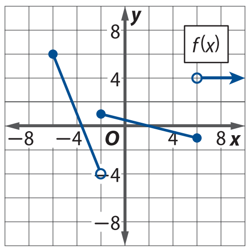
استخدم $f(x)$ للتمثيل البياني لـ $g(x)$.

64. $g(x) = 0.25f(x) + 4$

65. $g(x) = 3f(x) - 6$

66. $g(x) = f(x - 5) + 3$

67. $g(x) = -2f(x) + 1$



استخدم $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة بيانيًا.

68. $g(x) = 2f(x) + 5$

69. $g(x) = -3f(x) + 6$

70. $g(x) = f(4x) - 5$

71. $g(x) = f(2x + 1) + 8$

72. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف العمليات على الدوال. فكّر فيما يلي:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7,$
- $g(x) = 4x + 3,$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10.$

a. **جدوليًا** انسخ وأكمل الجدول أدناه للقيم الثلاث لـ a.

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$

b. **لفظيًا** ما وجه الارتباط بين $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$؟

c. **جبريًا** أثبت العلاقة من الجزء b جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الخطأ** يصف عبيد وماجد تحويل $g(x) = [\![x + 4]\!]$. يقول عبيد إنه قد تمت إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لليسار، بينما يقول ماجد إنه قد تمت إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لأعلى. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.

74. **التبرير** افترض أن $f(x)$ دالة فردية. إذا كانت $g(x)$ انعكاس لـ $f(x)$ حول المحور الأفقي x و $h(x)$ انعكاس لـ $g(x)$ حول المحور الرأسي y. فما العلاقة بين $f(x)$ و $h(x)$؟ اشرح.

75. **الكتابة في الرياضيات** اشرح أهمية الترتيب عند تحويل دالة باستخدام الانعكاسات والإزاحات.

التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

76. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن $|f(x)| = f(x)$.

77. إذا كانت $f(x)$ دالة فردية، فإن $f(-x) = -|f(x)|$.

78. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن $f(-x) = -|f(x)|$.

79. **تحدٍ** صف تحويل $f(x) = \sqrt{x}$ إذا علمتَ أن $(-2, -6)$ تقع على المنحنى.

80. **التبرير** افترض أن (a, b) نقطة على التمثيل البياني لـ $f(x)$. صف الفرق بين تحويلات (a, b) عند التوسيع الرأسي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ بعامل 4 وعند الضغط الأفقي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ بعامل 4.

81. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الشرح والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لربط الدوال الأصلية بالتحويلات. وضح هذه العلاقة بمثال محدد.

مراجعة شاملة

جـد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة. (الدرس 1-4)

82. $g(x) = -2x^2 + x - 3;\ [-1, 3]$

83. $g(x) = x^2 - 6x + 1;\ [4, 8]$

84. $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4;\ [-2, 3]$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي. وادعم الفرضية بالأرقام. (الدرس 1-3)

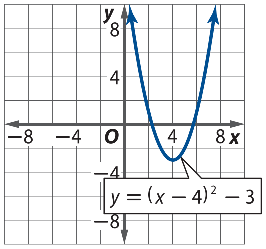
85. $q(x) = -\frac{12}{x}$

86. $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

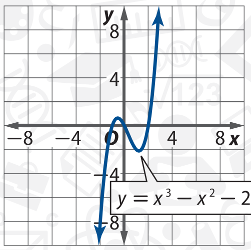
87. $p(x) = \frac{x+2}{x-3}$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لإيجاد تقاطعها مع المحور الرأسي y وكذلك إيجاد أصفارها. ثم جـد هذه القيم جبريًا. (الدرس 1-2)

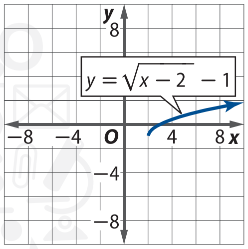
88.



89.



90.



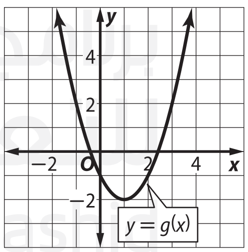
91. الحكومة عدد المرات التي صوت فيها الرؤساء الأوائل وعددهم 42 على مشروعات قوانين مدرج أدناه. ما الانحراف المعياري للبيانات؟

2,	0,	0,	7,	1,	0,	12,	1,	0,	10,	3,	0,	0,	9,
7,	6,	29,	93,	13,	0,	12,	414,	44,	170,	42,	82,	39,	44,
6,	50,	37,	635,	250,	181,	21,	30,	43,	66,	31,	78,	44,	25

92. المنافسة في منافسة يجب أن يخمن اللاعب أي خمس كرات سيتم اختيارها من بين الكرات البيضاء المرقمة من 1 إلى 49. لا يهم ترتيب اختيار الكرات. يجب على اللاعب أيضًا تخمين أي كرة سيتم اختيارها من بين الكرات الحمراء المرقمة من 1 إلى 42. فكم عدد الطرق التي يمكن للاعب استخدامها لتوقع الكرات المختارة؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

93. SAT/ACT يوضح الشكل التمثيل البياني لـ $y = g(x)$. والذي به قيمة صغرى عند $(1, -2)$. ما القيمة القصوى لـ $h(x) = -3g(x) - 1$؟



A 6

B 5

C 3

D 2

E لا يمكن تحديد بالمعطيات المتوفرة.

94. مراجعة ما الصورة المبسطة لـ $\frac{4x^3y^2z^{-1}}{(x^{-2}y^3z^2)^2}$؟

95. ما مدى $y = \frac{x^2+8}{2}$؟

F $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

G $\{y \mid y \geq 4\}$

H $\{y \mid y \geq 0\}$

J $\{y \mid y \leq 0\}$

96. مراجعة ما التأثير على التمثيل البياني لـ $y = kx^2$ عندما يتناقص k من 3 إلى 2؟

A التمثيل البياني لـ $y = 2x^2$ هو انعكاس التمثيل البياني لـ $y = 3x^2$ عبر المحور الأفقي y.

B يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجةً حول نقطة الأصل.

C يضيق التمثيل البياني.

D يزيد عرض التمثيل البياني.

التوسع

1-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
المتباينات غير الخطية

الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل المتباينات غير الخطية.

يمكن حل المتباينة غير الخطية ذات المتغير الواحد بيانيًا بتحويلها إلى متباينتين ذواتا متغيرين وإيجاد التقاطع. ويمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد هذا التقاطع.

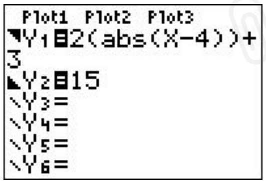
النشاط حل المتباينة باستخدام التمثيل البياني

حُلّ $2|x - 4| + 3 < 15$.

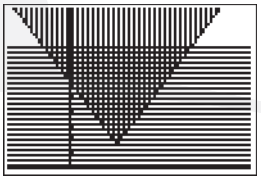
الخطوة 1 افصل المتباينة إلى متباينتين، بحيث تكون هناك واحدة لكل طرف من طرفي رمز المتباينة. عوّض عن كل طرف باستخدام y لتكوين متباينة جديدة.

$2|x - 4| + 3 < Y1;\ Y2 < 15$

الخطوة 2 مثّل كل متباينة بيانيًا. اذهب إلى الجانب الأيسر من علامة التساوي وحدد ENTER حتى تومض المثلثات المظللة لتظهر علامة كل متباينة. يمثّل المثلّث العلوي أكبر من ويمثّل المثلّث السفلي أقل من. بالنسبة إلى)abs، اضغط على 1 ▶ MATH.

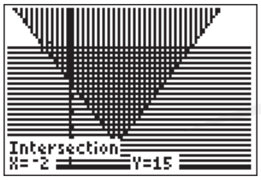


الخطوة 3 مثّل المتباينات بيانيًا في النافذة الملائمة. يمكنك استخدام خاصية ZOOM أو تعديل النافذة يدويًا لعرض التمثيلين البيانيين. وتصلح أي نافذة توضح نقطتي التقاطع.



$[-5, 15]$ scl: 1 by $[0, 20]$ scl: 1

الخطوة 4 تشير المنطقة المظلّلة بلون داكن لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم خاصية التقاطع لإثبات أن التمثيلين البيانيين يتقاطعان عند $(-2, 15)$ و $(10, 15)$.



$[-5, 15]$ scl: 1 by $[0, 20]$ scl: 1

الخطوة 5 يقع الحل في المنطقة بالتمثيل البياني حيث $-2 < x < 10$. إذًا، سيكون حل $2|x - 4| + 3 < 15$ هو مجموعة قيم x حيث $-2 < x < 10$. تحقق من إجاباتك جبريًا بالتأكد من أن قيمة x في هذه الفترة هي حل للمتباينة.

نصيحة دراسية

تعديل النافذة يمكن استخدام خيار ZoomFit أو ZoomOut أو تعديل النافذة يدويًا بحيث تتضمن التمثيلين البيانيين.

التمارين

حل كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

1. $3|x + 2| - 4 > 8$
2. $-2|x + 4| + 6 \leq 2$
3. $5|2x + 1| > 15$
4. $-3|2x - 3| + 1 \leq 10$
5. $|x - 6| > x + 2$
6. $|2x + 1| \geq 4x - 3$

التوسع

7. **التبرير** صف مظهر التمثيل البياني لمتباينة بلا حل.

8. **تحدٍ** جـد حل $-10x - 32 < |x + 3| - 2 < -|x + 4| + 8$ باستخدام التمثيل البياني.

الدرس

1-6 العمليات على الدوال وتركيب الدوال

·:السابق

- وجدت قيم الدوال.
(الدرس 1-1)

·:الحالي

1 إجراء العمليات على الدوال.

2 إيجاد تركيب الدوال

·:لماذا؟

- في شهر أبريل عام 2008، بلغ عدد الزوار الفريدين لأشهر موقع من مواقع التواصل الاجتماعي– الذي أسسه كل من كريس ديوولف وتوم أندرسون– أكثر من 60.4 مليون زائر، بينما كان عدد الزوار الفريدين للموقع الذي يأتي في المرتبة الثانية في ذلك الوقت 24.9 مليون زائر، أو أقل بمقدار 35.5 مليون زائر فريد.

افترض أن $A(t)$ و $B(t)$ يمثلان عدد الزوار الفريدين لموقعي التواصل الاجتماعي رقم واحد ورقم اثنين تباعًا، حيث يمثل t الأعوام منذ عام 2000. وتمثل الصيغة $A(t) - B(t)$ الفرق في عدد الزوار الفريدين بين كل من الموقعين لمدة t من الأعوام بعد عام 2000.

مفردات جديدة

تركيب الدوال
composition

1 العمليات على الدوال

تستطيع التوفيق بين دالتين، تمامًا كما تستطيع التوفيق بين عددين حقيقيين مستخدمًا الجمع والطرح والضرب والقسمة.

المفهوم الأساسي العمليات على الدوال

افترض أن f و g دالتان يتقاطع مجالهما. إذًا لجميع قيم x في التقاطع، يكون مجموع f و g وناتج ضربهما والفرق بينهما وناتج قسمتهما دوال جديدة معرفة كما يلي:

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**ناتج الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الفرق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**ناتج القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

في كل دالة جديدة، يتكون المجال من قيم x المشتركة بين مجالي f و g. ويقيد مجال دالة ناتج القسمة أكثر من ذلك عن طريق استثناء أي قيم تجعل المقام، $g(x)$، صفرًا.

مثال 1 العمليات على الدوال

بفرض أن $f(x) = x^2 + 4x$، و $g(x) = \sqrt{x+2}$، و $h(x) = 3x - 5$، جـد كل دالة ومجالها.

a. $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال g هو $[-2, \infty)$.
إذًا، مجال $(f+g)$ هو تقاطع هذين المجالين، أو $[-2, \infty)$.

b. $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجالا f و h هما $(-\infty, \infty)$.
إذًا مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c. $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجالا f و h هما $(-\infty, \infty)$. إذًا مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d. $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} \text{ أو } \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجالا h و f هما $(-\infty, \infty)$، لكن $x = 0$ أو $x = -4$ ينتج عنهما صفر في مقام $\left(\frac{h}{f}\right)$. إذًا، مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $(-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (0, \infty)$.

تمرين موجّه

جـــد $(f+g)(x)$، و $(f-g)(x)$، و $(f \cdot g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. اذكر مجال كل دالة جديدة.

1A. $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B. $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

2 تركيب الدوال

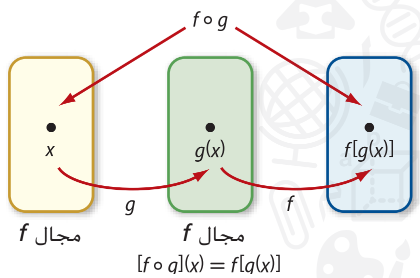
توفق الدالة $y = (x-3)^2$ بين الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$. ولكن هذا التوفيق لا ينطوي على أي من عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة. هذا النوع من التوفيق بين الدوال، والذي يسمى تركيبًا، يكون نتيجة استخدام دالة لايجاد قيمة دالة أخرى.

المفهوم الأساسي تركيب الدوال

يُعرّف **تركيب** الدالة f مع الدالة g بالصيغة

$$[f \circ g](x) = f[g(x)].$$

يتضمن مجال $f \circ g$ جميع قيم x في مجال g والتي تطابق قيم $g(x)$ في مجال g على النحو الموضح .



في التركيب $f \circ g$، الذي يقرأ f بـعـد g أو f للدالة g. تُطبق الدالة g أولاً ثم الدالة f.

مثال 2 تركيب دالتين

بفرض أن $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$، جـد كلاً مما يلي.

a. $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x-4)$	استبدل $g(x)$ بـ $x - 4$.
$= (x-4)^2 + 1$	عوّض بـ $x - 4$ عن x في $f(x)$.
$= x^2 - 8x + 16 + 1 = x^2 - 8x + 17$	بسّط.

b. $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	استبدل $f(x)$ بـ $x^2 + 1$.
$= (x^2 + 1) - 4 = x^2 - 3$	عوّض بـ $x^2 + 1$ عن x في $g(x)$.

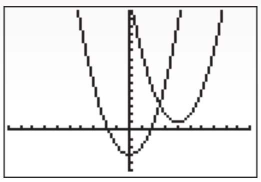
c. $[f \circ g](2)$

جـــد قيمة التعبير $[f \circ g](x)$ الذي كتبته في الجزء a لـــ $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$	عوّض بالعدد 2 عن x في $x^2 - 8x + 17$.

انتبه!

ترتيب التركيب في معظم الحالات تكون $f \circ g$ و $g \circ f$ دالتان مختلفتين؛ وهذا لأن تركيب الدوال لا يتسم بخاصية التبديل. لاحظ أن التمثيلين البيانيين للدالتين $[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$ و $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ من المثال 2 مختلفتان.



[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

تمرين موجّه

لكل زوج من الدوال، جـــد $[f \circ g](x)$، و $[g \circ f](x)$، و $[f \circ g](3)$.

2A. $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 5 - x^2$

2B. $f(x) = 6x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$

لأن مجالي f و g في المثال 2 يتضمنان جميع الأعداد الحقيقية، إذًا مجال $f \circ g$ هو جميع الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$.

عندما يكون مجال الدالة f أو مجال الدالة g مقيدين، يكون مجال $f \circ g$ مقيدًا بجميع قيم x في مجال g التي تقع قيم مداها، $g(x)$، ضمن مجال الدالة f.

مثال 3 إيجاد دالة مركبة مجالها مقيد

جـد $f \circ g$.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد $f \circ g$، يجب أن تتمكن أولاً من إيجاد $g(x) = x^2 - 9$، والذي يمكن القيام به لجميع الأعداد الحقيقية. بعد ذلك، يجب أن تتمكن من إيجاد قيمة $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ لكل من قيم $g(x)$، الأمر الذي يمكن القيام به فقط عندما تكون $g(x) \neq -1$. باستثناء هذه القيم التي يكون معها $x^2 - 9 = -1$ من المجال، أي عندما يكون $x = \pm\sqrt{8}$ أو $\pm 2\sqrt{2}$. يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2},\ x \in \mathbb{R}\}$.

الآن جـد $[f \circ g](x)$.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$

$$= f(x^2 - 9) \qquad \text{استبدل } g(x) \text{ بـ } x^2 - 9.$$

$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8} \qquad \text{عوّض بـ } x^2 - 9 \text{ عن } x \text{ في } f(x).$$

لاحظ أن $\dfrac{1}{x^2 - 8}$ تكون غير معرفة عندما $x^2 - 8 = 0$. وهذا عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ولأن المجال المضمن هو المجال ذاته الذي يحدّد بالنظر إلى مجالي f و g، يمكن كتابة التركيب بالصيغة $[f \circ g](x) = \dfrac{1}{x^2 - 8}$ لـ $x \neq \pm 2\sqrt{2}$.

b. $f(x) = x^2 - 2,\ g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$، يجب أن تتمكن أولاً من إيجاد $g(x)$، الأمر الذي يمكن القيام به فقط لـ $x \geq 3$. بعد ذلك، يجب أن تتمكن من تربيع كل من قيم $g(x)$ وطرح 2، وهذا يمكن القيام به لجميع الأعداد الحقيقية. ولذا، مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3,\ x \in \mathbb{R}\}$. الآن جـد $[f \circ g](x)$.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$

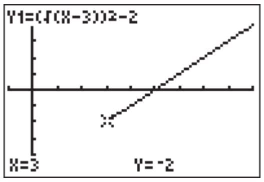
$$= f\left(\sqrt{x-3}\right) \qquad \text{استبدل } g(x) \text{ بـ } \sqrt{x-3}.$$

$$= \left(\sqrt{x-3}\right)^2 - 2 \qquad \text{عوّض بـ } \sqrt{x-3} \text{ عن } x \text{ في } f(x).$$

$$= x - 3 - 2 = x - 5 \qquad \text{بسّط.}$$

بعد تبسيط التركيب، سيبدو أن الدالة معرّفة لجميع الأعداد الحقيقية، ومن المعروف أن هذا غير صحيح. لذا، اكتب التركيب بالصيغة $[f \circ g](x) = x - 5$ لـ $x \geq 3$.

التحقق استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من هذه النتيجة. أدخل الدالة بالصيغة $y = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. سيظهر التمثيل البياني على أنه جزء من الخط المستقيم $y = x - 5$. ثم استخدم خاصية TRACE لتساعد في تحديد الدالة لتبدأ عند $x = 3$ وتمتد إلى ∞.



$[-1, 9]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

نصيحة دراسية

مجالات الدوال المركبة من المهم جدًا إنهاء تحليل المجال قبل إجراء التركيب، فقد لا تكون قيود المجال واضحة بعد تبسيط التركيب.

تمرين موجّه

3A. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = x^2 - 1$

3B. $f(x) = \dfrac{5}{x},\ g(x) = x^2 + x$

نصيحة دراسية

استخدام القيمة المطلقة تذكر أنه عندما تجد جذرًا زوجيًا لقوة أسية زوجية وتكون النتيجة قوة أسية فردية، يجب عليك حينها استخدام القيمة المطلقة للنتيجة لضمان أن الإجابة لن تكون سالبة. $\sqrt{x^2} = |x|$

من المهارات الهامة في حساب التفاضل والتكامل القدرة على تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. فلتفكيك الدالة h، جـد دالتين تركيبهما يكون الدالة h.

مثال 4 تحليل دالة مركبة

جـد الدالتين f و g بحيث تكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون إحدى الدالتين هي الدالة المحايدة $f(x) = x$.

a. $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أن h تعرّف باستخدام الجذر التربيعي لـ $x^3 - 4$. إذًا، الطريقة الأولى لكتابة h على أنها دالة مركبة من دالتين تكون بفرض أن $g(x) = x^3 - 4$ و $f(x) = \sqrt{x}$. ثم

$$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] \text{ أو } [f \circ g](x).$$

b. $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$ — لاحظ أن $h(x)$ قابلة للتحليل.

$= 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$ — عامل.

الطريقة الأولى لكتابة $h(x)$ على أنها دالة مركبة تكون بفرض أن $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = x + 5$.

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] \text{ أو } [f \circ g](x).$$

تمرين موجّه

4A. $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B. $h(x) = \dfrac{1}{x + 7}$

يمكنك استخدام تركيب الدوال لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية تركيب دوال من الحياة اليومية

الرسوم المتحركة الحاسوبية لتحريك اقتراب الخصم مباشرة أمام اللاعب، يبدأ أخصائي تحريك ألعاب الحاسوب بصورة مستطيلة أبعادها 20 بكسل في 60 بكسل، ثم يزيد كل بعد من أبعاد المستطيل بمقدار 15 بكسل في الثانية.

a. جـد الدوال التي تمثل البيانات.

يزيد طول L في المستطيل بمعدل 15 بكسل في الثانية. إذًا $L(t) = 20 + 15t$، حيث t هو الزمن بالثواني و $t \geq 0$. ومساحة المستطيل تكون ناتج ضرب طوله L في عرضه، وعرض هذا المستطيل يزيد عن طوله بمقدار 40 بكسل أو $L + 40$. إذًا، مساحة المستطيل تساوي $A(L) = L(L + 40)$ أو $L^2 + 40L$ و $L \geq 20$.

b. جـد $A \circ L$. ما الذي تمثّله هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$ — تعريف $A \circ L$

$= A(20 + 15t)$ — استبدل $L(t)$ بـ $20 + 15t$.

$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$ — عوّض بـ $20 + 15t$ عن L في $A(L)$.

$= 225t^2 + 1200t + 1200$ — بسّط.

تمثّل هذه الدالة المركبة مساحة المستطيل في صورة دالة زمن.

c. ما الزمن المستغرق ليصل المستطيل إلى ثلاثة أمثال حجمه الأصلي؟

تبلغ المساحة الإبتدائية للمستطيل $20 \cdot 60$ أو 1200 بكسل. وسيصل المستطيل إلى ثلاثة أمثال حجمه الأصلي عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. جـد قيمة t لتجد أن $t \approx 1.55$ أو -6.88. ولأن قيمة t السالبة ليست جزءًا من مجال $L(t)$، فهي أيضًا ليست جزءًا من مجال الدالة المركبة. ستتضاعف المساحة ثلاثة أضعاف بعد 1.55 من الثواني تقريبًا.

تمرين موجّه

5. الأعمال التجارية يقدم أحد متاجر بيع أجهزة الحاسوب خصمًا بنسبة 15% لطلاب الجامعة عند شراء أي حاسوب محمول. كما يعلن المتجر أيضًا عن قسائم بمبلغ 100 AED.

A. جـد الدوال التي تمثل البيانات.

B. جـد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. ما الذي تمثله كل دالة مركبة؟

C. أي تركيب للقسيمة والخصم ينتج عنه أقل سعر؟ اشرح.

مهنة من الحياة اليومية

أخصائي الرسوم المتحركة الحاسوبية يعمل أخصائيو الرسوم المتحركة في العديد من الصناعات لابتكار الصور المتحركة التي تستخدم في الأفلام والتليفزيون وألعاب الفيديو. ويجب أن يكون هؤلاء الأخصائيون مبدعين، كما أن معظمهم يتلقى تدريبًا بعد المرحلة الثانوية في كليات متخصصة.

جـد $(f+g)(x)$، و $(f-g)(x)$، و $(f \cdot g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. اذكر مجال كل دالة جديدة. (المثال 1)

1. $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = 8 - x^3$
$g(x) = x - 3$

3. $f(x) = x^2 + 5x + 6$
$g(x) = x + 2$

4. $f(x) = x - 9$
$g(x) = x + 5$

5. $f(x) = x^2 + x$
$g(x) = 9x$

6. $f(x) = x - 7$
$g(x) = x + 7$

7. $f(x) = \frac{6}{x}$
$g(x) = x^3 + x$

8. $f(x) = \frac{x}{4}$
$g(x) = \frac{3}{x}$

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = 4\sqrt{x}$

10. $f(x) = \frac{3}{x}$
$g(x) = x^4$

11. $f(x) = \sqrt{x+8}$
$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

12. $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{x-4}$

13. **إعداد الميزانية** افترض أن ميزانية شخص واحد بالدراهم لشهر واحد تقدّر تقريبًا بواسطة $f(x) = 25x + 350$ و $g(x) = 15x + 200$. حيث يمثّل f تكلفة الإيجار والبقالة، ويمثّل g تكلفة الغاز وجميع النفقات الأخرى. وتمثّل الصيغة $x = 1$ نهاية الأسبوع الأول. (المثال 1)

a. جـد $(f+g)(x)$ والمجال ذا الصلة.

b. ما الذي تمثله $(f+g)(x)$؟

c. جـد $(f+g)(4)$. ما الذي تمثّله هذه القيمة؟

14. **الفيزياء** تُبذل قوتان مختلفتان على جسم يُدفع عبر الأرضية: قوة الشخص الذي يدفع الجسم وقوة الاحتكاك. إذا كان W هو الشغل المبذول بالجول، و F هو مقدار القوة بالنيوتن، و d هو إزاحة الجسم بالمتر، فإن الصيغة $W_p(d) = F_p d$ تصف الشغل الذي يبذله الشخص، والصيغة $W_f(d) = F_f d$ تصف الشغل المبذول بالاحتكاك. والزيادة في الطاقة الحركية للجسم هي الفرق بين الشغل الذي يبذله الشخص W_p والشغل المبذول بالاحتكاك W_f. (المثال 1)

a. جـد $(W_p - W_f)(d)$.

b. حدّد المقدار الصافي للشغل المبذول عند دفع أحد الأشخاص صندوقًا لمسافة 50 m بقوة 95 N. بينما ينتج عن الاحتكاك قوة مقدارها 55 N.

لكل زوج من الدوال، جـد $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ و $[f \circ g](6)$. (المثال 2)

15. $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

16. $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
$g(x) = -5x + 6$

17. $f(x) = 8 - x^2$
$g(x) = x^2 + x + 1$

18. $f(x) = x^2 - 16$
$g(x) = x^2 + 7x + 11$

19. $f(x) = 3 - x^2$
$g(x) = x^3 + 1$

20. $f(x) = 2 + x^4$
$g(x) = -x^2$

جـد $f \circ g$. (المثال 3)

21. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 4$

22. $f(x) = \frac{2}{x-3}$
$g(x) = x^2 + 6$

23. $f(x) = \sqrt{x+4}$
$g(x) = x^2 - 4$

24. $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = \sqrt{x+3}$

25. $f(x) = \frac{5}{x}$
$g(x) = \sqrt{6-x}$

26. $f(x) = -\frac{4}{x}$
$g(x) = \sqrt{x+8}$

27. $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 + 4x - 1$

28. $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = x^2 + 8$

29. **النسبية** في نظرية النسبية، $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ حيث c هو سرعة الضوء، 300 مليون m/s و m هو كتلة جسم يبلغ وزنه 100 kg. ويتحرك بسرعة v 7 m/s. (المثال 4)

a. هل هناك أي قيود على مجال الدالة؟ اشرح معناها.

b. جـد $m(10)$، و $m(10,000)$، و $m(1,000,000)$.

c. صف سلوك $m(v)$ عند اقتراب v من c.

d. فكّك الدالة إلى دالتين منفصلتين.

جـد الدالتين f و g بحيث تكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون إحدى الدالتين هي الدالة المحايدة $f(x) = x$. (المثال 4)

30. $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

31. $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

32. $h(x) = |4x + 8| - 9$

33. $h(x) = [\![-3(x-9)]\!]$

34. $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

35. $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

36. $h(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

37. $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

38. $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

39. $h(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x-1}}$

40. **ميكانيكا الكم** الطول الموجي λ لجزيء كتلته m kg يتحرك بسرعة v = 7 m/s تمثّله الصيغة $\lambda = \frac{h}{mv}$. حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a. جـد دالة تمثل الطول الموجي لجسم يبلغ وزنه 25 kg في صورة دالة لسرعته.

b. هل هناك أي قيود على مجال الدالة؟ اشرح معناها.

c. إذا كان الجسم يتحرك بسرعة 8 m/s. فجـد الطول الموجي بدلالة h.

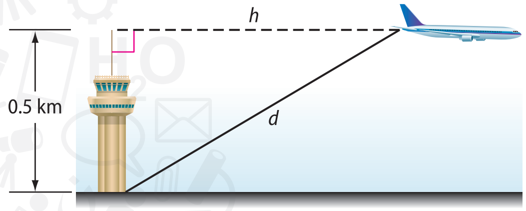
d. فكّك الدالة إلى دالتين منفصلتين.

41. **الوظائف** يتقاضى مندوب مبيعات يعمل لدى وكالة تأمين راتبًا سنويًا بالإضافة إلى مكافأة نسبتها 4% من المبيعات التي تحقق أكثر من AED 300,000. افترض أن $f(x) = x - \text{AED } 300{,}000$ و $h(x) = 0.04x$. حيث x هو إجمالي المبيعات. (المثال 5)

a. إذا كان x أكبر من AED 300,000. فهل تُمثل المكافأة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ اشرح استنتاجك.

b. حدّد مقدار المكافأة لعام واحد بلغت مبيعاته AED 450,000.

42. **السفر** طائرة تحلق فوق مدرج لهبوط الطائرات بسرعة 275 km/h مرّت ببرج مراقبة على مسافة 0.5 km تحتها عند $t = 0$ من الساعات. (المثال 5)



a. جـــد المسافة d بين الطائرة وبرج المراقبة في صورة دالة للمسافة الأفقية h من برج المراقبة إلى الطائرة.

b. جـــد h في صورة دالة زمن t.

c. جـــد $d \circ h$. ما الذي تمثّله هذه الدالة؟

d. إذا استمرت الطائرة في التحليق على نفس المسافة من الأرض، فكم ستبعد عن برج المراقبة بعد 10 دقائق؟

جـــد الدالتين f و g بحيث تكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون إحدى الدالتين هي الدالة المحايدة $f(x) = x$.

43. $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

44. $h(x) = \sqrt{2x+6} + \frac{6}{x}$

45. $h(x) = \frac{8}{x^2+2} + 5|x|$

46. $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

47. $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

48. $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد $f(0.5)$، و $f(-6)$، و $f(x+1)$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

49. $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6,\ g(x) = x + 4$

50. $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3},\ g(x) = 2x$

51. $g(x) - f(x) + \frac{3}{5} = 9x^2 + 4x,\ g(x) = \frac{x}{10}$

52. $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x},\ g(x) = \sqrt{1-x}$

جـــد $[f \circ g \circ h](x)$.

53. $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

54. $f(x) = x^2 - 2$
$g(x) = 5x + 12$
$h(x) = \sqrt{x} - 4$

55. $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

56. $f(x) = \frac{3}{x}$
$g(x) = x^2 - 4x + 1$
$h(x) = x + 2$

57. إذا كان $f(x) = x + 2$. فجـــد $g(x)$ بحيث يكون:

a. $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$

b. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

58. إذا كان $f(x) = \sqrt{4x}$. فجـــد $g(x)$ بحيث يكون:

a. $[f \circ g](x) = |6x|$

b. $[g \circ f](x) = 200x + 25$

59. إذا كان $f(x) = 4x^2$. فجـــد $g(x)$ بحيث يكون:

a. $(f \cdot g)(x) = x$

b. $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{8}x^{\frac{7}{3}}$

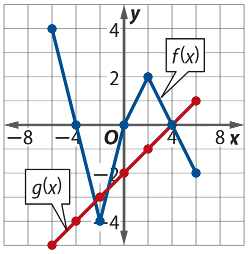
60. **المرابحة** حساب الاستثمار يدفع مرابحة مركّبة ربعيًا (كل ثلاثة أشهر). فإذا استُثمرت x من الدراهم في حساب، فسيكون الاستثمار $I(x)$ بعد الربع الأول هو الاستثمار الأولي بالإضافة إلى المرابحة المستحقة أو $I(x) = 1.016x$.

a. جـــد $[I \circ I](x)$، و $[I \circ I \circ I](x)$، و $[I \circ I \circ I \circ I](x)$.

b. ما الذي تمثله التركيبات؟

c. ما النسبة المئوية للعائد السنوي للحساب؟

استخدم التمثيلين البيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ لإيجاد قيمة كل دالة.



61. $(f+g)(2)$

62. $(f-g)(-6)$

63. $(f \cdot g)(4)$

64. $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

65. $[f \circ g](-4)$

66. $[g \circ f](6)$

67. **الكيمياء** يمكن تمثيل متوسط سرعة $v(m)$ جزيئات الغاز عند درجة حرارة 30°C m/s بالصيغة

$v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$. حيث m هي الكتلة المولية للغاز بالكيلوجرام لكل مول.

a. هل هناك أي قيود على مجال الدالة؟ اشرح معناها.

b. جـــد متوسط سرعة جزيئات غاز كتلتها 145 kg لكل مول عند درجة حرارة 30°C.

c. كيف سيتغير متوسط السرعة مع تزايد الكتلة المولية للغاز؟

d. فكّك الدالة إلى دالتين منفصلتين.

جـــد الدوال f، و g، و h بحيث $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$.

68. $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

69. $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

70. $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

71. $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)^2 + 1}$

لكل زوج من الدوال، جـد $f \circ g$ و $g \circ f$.

72. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
$g(x) = \sqrt{x + 4} + 3$

73. $f(x) = x^2 + 8x - 3$
$g(x) = \sqrt{x + 19} - 4$

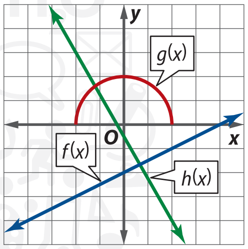
74. $f(x) = \sqrt{x + 6}$
$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

75. $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

76. $f(x) = -\frac{8}{5 - 4x}$
$g(x) = \frac{2}{3 + x}$

77. $f(x) = \frac{6}{2x + 1}$
$g(x) = \frac{4}{4 - x}$

مثّل كلًا مما يلي بيانيًا.



78. $(f + h)(x)$

79. $(h - f)(x)$

80. $(f + g)(x)$

81. $(h + g)(x)$

82. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف معكوسات الدوال.

a. **جبريًا** جــد تركيب f مع g وتركيب g مع f لكل زوج من الدوال.

$g(x)$	$f(x)$
$x - 3$	$x + 3$
$\frac{x}{4}$	$4x$
$\sqrt[3]{x}$	x^3

b. **لفظيًا** صِف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c. **بيانيًا** مثّل كل زوج من الدوال بيانيًا على المستوى الإحداثي. ومثّل مستقيم الانعكاس بيانيًا من خلال إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة بين النقاط المتقابلة.

d. **لفظيًا** خمّن وضع مستقيم الانعكاس بين الدوال.

e. **تحليليًا** يعدّ التركيبان $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ مكافئين لأي من الدوال الأصلية؟

f. **تحليليًا** جــد $g(x)$ لكل $f(x)$ بحيث $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

i. $f(x) = x - 6$

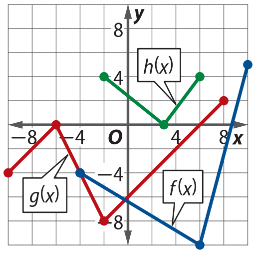
ii. $f(x) = \frac{x}{3}$

iii. $f(x) = x^5$

iv. $f(x) = 2x - 3$

v. $f(x) = x^3 + 1$

حدّد مجال كل دالة مركبة.



83. $[f \circ g](x)$

84. $[g \circ f](x)$

85. $[h \circ f](x)$

86. $[h \circ g](x)$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التبرير حدّد ما إذا كانت $[f \circ g](x)$ زوجية أم فردية أم غير ذلك أم ليست هناك معلومات كافية، لكل مما يلي.

87. f و g فرديتان.

88. f و g زوجيتان.

89. f زوجية و g فردية.

90. f فردية و g زوجية.

تحدٍ جــد الدالة f بخلاف $f(x) = x$ بحيث يكون كل مما يلي صحيحًا.

91. $[f \circ f](x) = x$

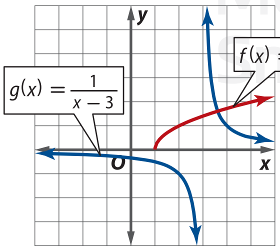
92. $[f \circ f \circ f](x) = f(x)$

93. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف أنه قد يكون مجال $f(x)$ مقيدًا، بينما لا يكون مجال $[f \circ g](x)$ هكذا. اذكر مثالًا لتبرر استنتاجك.

94. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.
إذا كانت الدالة f دالة جذر تربيعي، وكانت g دالة تربيعية. إذًا $f \circ g$ تكون دائمًا دالة خطية.

95. **تحدٍ** حدّد مجال $[f \circ g \circ h](x)$ للدوال $f(x) = \frac{1}{x - 2}$. و $g(x) = \sqrt{x + 1}$. و $h(x) = \frac{4}{x}$.

96. **الكتابة في الرياضيات** صِف كيف يمكنك إيجاد مجال $[f \circ g](x)$.



97. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد تركيب دالتين.

مراجعة شاملة

98. المعرفة المالية يوضّح الإعلان تكلفة العمل على صيانة السيارات في شركة بي آند بي لصيانة السيارات. (الدرس 1-5)

a. مثّل بيانيًا الدالة التي تصف تكلفة x ساعة من العمل.

b. مثّل بيانيًا الدالة التي توضّح التكلفة الإضافية التي تقدّر بــ AED 25 إذا قررت تغيير الزيت والكشف على السوائل.

c. كم ستكون تكلفة صيانة سيارة تحتاج إلى 3.45 ساعات من العمل إذا طلب المالك تغيير الزيت والكشف على السوائل؟

قرّب إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى النسبية أو المطلقة لكل دالة. حدّد قيم x حيث تظهر. (الدرس 1-4)

99. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

100. $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

101. $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

قرّب الأصفار الحقيقية لكل دالة، وذلك للفترة المعطاة. (الدرس 1-3)

102. $g(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^2 - 1;\ [-1, 3]$

103. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 4};\ [-3, 3]$

104. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x};\ [1, 5]$

105. الرياضة يوضّح الجدول إجمالي عدد أهم الرميات المسدّدة والرميات المسجلة في الدوري الأمريكي 2004–2008. (الدرس 1-1)

العام	2004	2005	2006	2007	2008
الرميات المسدّدة	43	48	54	54	48
الرميات المسجلة	150	148	137	156	146

المصدر: *التقويم العالمي*

a. مثّل بيانات الرميات المسددة بيانيًا على المحور الأفقي، وبيانات الرميات المسجلة على المحور الرأسي.

b. حدّد المدى والمجال.

c. هل التمثيل البياني يمثّل دالة؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

106. SAT/ACT يحتوي برطمان على كرات زجاجية حمراء وخضراء وزرقاء فقط. ويزيد احتمال التقاطك لكرة زجاجية حمراء عشوائيًا عن التقاطك لكرة خضراء بثلاثة أضعاف، كما يزيد احتمال التقاطك لكرة زجاجية خضراء عن التقاطك لكرة زرقاء بخمسة أضعاف. فأي مما يلي يمكن أن يكون عدد الكرات الزجاجية في البرطمان؟

A 39 **B** 40 **C** 41 **D** 42 **E** 63

107. إذا كان $G(X) = X^2 + 9X + 21$ و $H(X) = 2(X - 5)^2$. إذًا $H[G(X)] =$

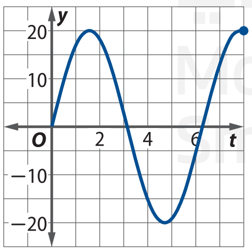
F $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

G $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

H $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

J $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

108. إجابة حرة يوضّح التمثيل البياني التغير في درجة حرارة إحدى المواد بالدرجات المئوية في صورة دالة زمن حيث $0 \le t \le 8$.



a. هذا التمثيل البياني يمثّل دالة. اشرح السبب.

b. حدّد المجال والمدى.

c. إذا كانت درجة الحرارة المبدئية 25°C. فما درجة الحرارة التقريبية للمادة عند $t = 7$؟

d. حلّل التمثيل البياني لتحديد التماثل والأصفار، وحدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

e. هل الدالة متصلة عند $t = 2$؟ اشرح.

f. حدّد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

g. قدّر متوسط معدل التغيير للفترة [2, 5].

h. ما أهمية إجابتك على الجزأين f و g في سياق الموقف؟

الدرس 1-7 العلاقات والدوال العكسيّة

.. السابق

- وجدت تركيب دالتين. (الدرس 1-6)

.. الحالي

1. استخدام اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان لدالة ما دالة عكسية.
2. إيجاد الدوال العكسيّة جبريًا وبيانيًا.

.. لماذا؟

- يبيع مشجعو الفريق في مدرسة هنا الثانوية تذاكر البطولة. ويصل الجدول A التكلفة بالدراهم بعدد التذاكر المبيعة، ويصل الجدول B عدد التذاكر التي يمكن شراؤها بعدد الدراهم التي أنفقت. وبمبادلة المدخل والمخرج في الجدول A، حصلت هنا على الجدول B.

مفردات جديدة

علاقة عكسيّة
inverse relation
دالة عكسيّة
inverse function
واحد لواحد one-to-one

الجدول A

التذاكر	1	2	3	4	6
التكلفة (AED)	2	4	6	8	10

الجدول B

النقود التي أنفقت (AED)	2	4	6	8	10
التذاكر	1	2	3	4	6

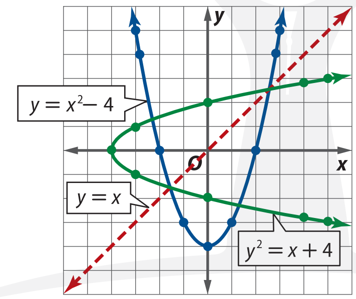
1 الدوال العكسيّة

إن العلاقة الموضّحة في الجدول A هي *العلاقة العكسيّة* للعلاقة الموضّحة في الجدول B. وتحدث **العلاقات العكسيّة** إذا– فقط إذا– كانت إحدى العلاقتين تشتمل على (a, b) بينما تشتمل الأخرى على (b, a). وعندما يُعبر عن العلاقة في صورة معادلة، يمكن إيجاد علاقتها العكسيّة من خلال التبادل بين المتغيرات المستقلة والمتغيرات التابعة. تأمل ما يلي.

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسيّة

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن هذه العلاقات العكسيّة هي انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة للتمثيلات البيانية لجميع العلاقات وعلاقاتها العكسيّة. إننا نهتم كثيرًا بالدوال التي تعدّ علاقاتها العكسيّة *دوالًا* أيضًا. وإذا كانت العلاقة العكسيّة للدالة f دالة أيضًا، فهي تسمى حينئذ **الدالة العكسيّة** للدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1}. والذي يُقرأ معكوس f.

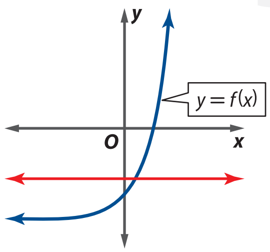
ليست جميع الدوال لها دوال عكسيّة. في التمثيل البياني الموضّح أعلاه، لاحظ أن العلاقة الأصلية دالة لأنها اجتازت اختبار المستقيم الرأسي، لكن علاقاتها العكسيّة فشلت في هذا الاختبار، ولذا فهي ليست بدالة. وتقودنا العلاقة الانعكاسية بين التمثيل البياني للدالة وعلاقاتها العكسيّة إلى الاختبار البياني التالي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسيّة للدالة موجودة أم لا.

المفهوم الأساسي اختبار الخط الأفقي

الشرح تكون للدالة f الدالة العكسيّة f^{-1} إذا –فقط إذا– تقاطع كل مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة في نقطة واحدة على الأكثر.

مثال بما أنه لا يتقاطع أي مستقيم أفقي مع التمثيل البياني للدالة f أكثر من مرة، إذًا توجد الدالة العكسيّة f^{-1}.

نموذج



مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

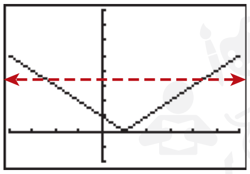
مثّل كل دالةٍ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني، وطبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسيّة موجودة. اكتب نعم أو لا.

a. $f(x) = |x - 1|$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.1 أنه من الممكن إيجاد مستقيم أفقي يتقاطع مع التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أكثر من مرة. ولذا، يمكنك استنتاج أن الدالة f^{-1} غير موجودة.

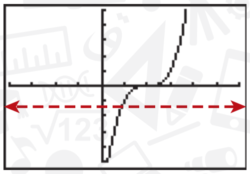
b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل 1.7.2 أنه من غير الممكن إيجاد مستقيم أفقي يتقاطع مع التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة واحدة. ولذا، يمكنك استنتاج أن الدالة g^{-1} موجودة.



[−4, 6] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

الشكل 1.7.1



[−4, 6] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الشكل 1.7.2

تمرين موجّه

1A. $h(x) = \frac{4}{x}$

1B. $f(x) = x^2 + 5x - 7$

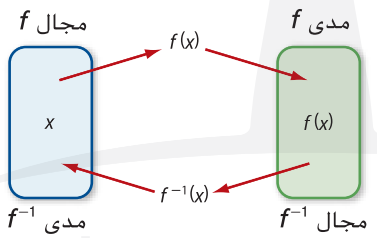
انتبه!

اختبار المستقيم الأفقي عند استخدام حاسبة التمثيل البياني، افحص عن كثب الأماكن التي يبدو فيها أن الدالة قد تفشل في اختبار الخط الأفقي. استخدم خاصيتي التكبير (Zoom In) و التصغير (Zoom Out) أو عدّل النافذة لتتأكّد.

2 إيجاد الدوال العكسيّة

إذا اجتازت الدالة اختبار الخط المستقيم الأفقي، يُقال إذًا إنها دالة **"واحد لواحد"**، وذلك لأن قيم x لا تطابق أي منها أكثر من واحدة من قيم y، وقيم y لا تطابق أي منها أكثر من واحدة من قيم x.

إذا كانت الدالة f من دوال "واحد لواحد"، يكون لها الدالة العكسيّة f^{-1}، حيث يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1}، ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



قراءة في الرياضيات

رمز الدوال العكسيّة ينبغي عدم الخلط بين الرمز $f^{-1}(x)$ والدالة العكسيّة $\frac{1}{f(x)}$. فإذا كانت f دالة، يمكن تفسير الرمز f^{-1} فقط على أنه f معكوس x.

لإيجاد دالة عكسيّة جبريًا، اتبع الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي إيجاد الدالة العكسيّة

الخطوة 1 حدّد ما إذا كان للدالة معكوس من خلال التحقّق لمعرفة ما إذا كانت دالة "واحد لواحد" مستخدمًا اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2 في معادلة $f(x)$، استبدل $f(x)$ بـ y، ثم بادل بين x و y.

الخطوة 3 جـد الحل من أجل y، ثم استبدل y بـ $f^{-1}(x)$ في المعادلة الجديدة.

الخطوة 4 حدّد أي قيود على مجال f^{-1}، ثم بيّن أن مجال f مساوٍ لمدى f^{-1}، وأن مدى f مساوٍ لمجال f^{-1}.

تشير الخطوة الأخيرة إلى أن جزءًا فقط من الدالة التي تجدها جبريًا قد يكون الدالة العكسيّة للدالة f. ولذا، تأكد من تحليل مجال f عند إيجاد f^{-1}.

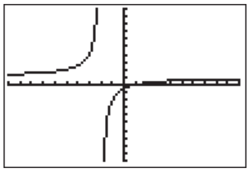
قراءة في الرياضيات

الدوال القابلة للعكس يُقال على الدالة التي لها دالة عكسيّة بأنها *قابلة للعكس*.

مثال 2 إيجاد الدوال العكسيّة جبريًا

حدّد ما إذا كان للدالة f دالةٌ عكسيّة. فإن كان لها، فجـد الدالة العكسيّة واذكر أي قيودٍ على مجالها.

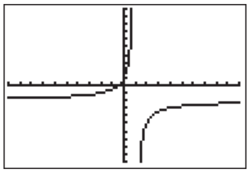
a. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

يجتاز التمثيل البياني الموضّح للدالة f اختبار الخط الأفقي. إذًا، f دالة "واحد لواحد" ولها دالة عكسيّة. في التمثيل البياني، تستطيع أن ترى أن مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، وأن مداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. الآن، جـد f^{-1}.

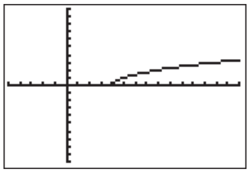
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	دالة أصلية
$y = \dfrac{x-1}{x+2}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \dfrac{y-1}{y+2}$	بادل بين x و y.
$xy + 2x = y - 1$	اضرب كل طرف في $y + 2$. ثم طبّق خاصية التوزيع.
$xy - y = -2x - 1$	اعزل الحدود التي بها y.
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	جـد الحل من أجل y.
$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$. ولاحظ أن $x \neq 1$.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

في التمثيل البياني الموضّح على اليسار، تستطيع أن ترى أن الدالة f^{-1} مجالها $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ومداها $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. إن مجال ومدى الدالة f مساويان لمدى ومجال الدالة f^{-1}، على التوالي. إذًا، $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$ حيث $x \neq 1$.

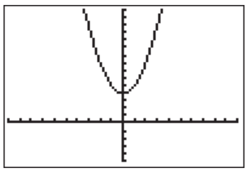
b. $f(x) = \sqrt{x-4}$



$[-5, 15]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

يجتاز التمثيل البياني الموضّح للدالة f اختبار الخط الأفقي. إذًا، f دالة "واحد لواحد" ولها دالة عكسيّة. في التمثيل البياني، تستطيع أن ترى أن مجال الدالة f هو $[4, \infty)$، وأن مداها هو $[0, \infty)$. الآن، جـد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \sqrt{y-4}$	بادل بين x و y.
$x^2 = y - 4$	قم بتربيع كل طرف.
$y = x^2 + 4$	جـد الحل من أجل y.
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-5, 15]$ scl: 1

في التمثيل البياني الموضّح لـ $y = x^2 + 4$. تستطيع أن ترى أن العلاقة العكسيّة مجالها $(-\infty, \infty)$ ومداها $[4, \infty)$. وبتقييد مجال العلاقة العكسيّة على $[0, \infty)$، يكون مجال ومدى الدالة f مساويين لمدى ومجال الدالة f^{-1}، على التوالي. إذًا، $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ حيث $x \geq 0$.

تمرين موجّه

2A. $f(x) = -16 + x^3$ **2B.** $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$ **2C.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

إن الدالة العكسيّة f^{-1} لها تأثير "إلغاء" عمل الدالة f. ولهذا السبب، يمكن تعريف الدوال العكسيّة أيضًا بدلالة تركيبها مع بعضها البعض.

المفهوم الأساسي تركيب الدوال العكسيّة

تكون الدالتان f و g دالتين عكسيتين لبعضهما إذا وفقط إذا كانت
- $f[g(x)] = x$ لكل x في مجال $g(x)$ و
- $g[f(x)] = x$ لكل x في مجال $f(x)$.

نصيحة دراسية

الدوال العكسيّة إن العبارة ثنائية الشرط "إذا وفقط إذا" في تعريف الدوال العكسيّة تعني أنه إذا كانت الدالة g معكوس الدالة f، فإن من الصحيح أيضًا أن الدالة f هي معكوس الدالة g.

لاحظ أن تركيب الدالة مع دالتها العكسيّة يكون دومًا الدالة المحايدة. ويمكنك استخدام هذه الحقيقة للتأكد من صحة أن كلاً من الدالتين دالة عكسيّة للأخرى.

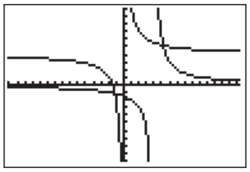
مثال 3 إثبات صحة الدوال العكسيّة

أثبت أن $f(x) = \dfrac{6}{x-4}$ و $g(x) = \dfrac{6}{x} + 4$ دالتان متعاكسان.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وأن $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$



[−15.16, 15.16] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

لأن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$. الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ دالتان متعاكستان. وهذا الأمر مدعّم بيانيًا؛ لأن $f(x)$ و $g(x)$ تظهر كل منهما على أنها انعكاس للأخرى في المستقيم $y = x$.

تمرين موجّه

أثبت أن f و g دالتان متعاكسان.

3A. $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \dfrac{x}{3}$

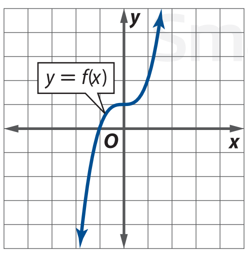
3B. $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0;\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

غالبًا ما يكون إيجاد الدوال العكسيّة لمعظم دوال "واحد لواحد" جبريًا أمرًا صعبًا. إلا أنه من الممكن تمثيل الدالة العكسيّة بيانيًا باستخدام انعكاس التمثيل البياني للدالة الأصلية في الخط المستقيم $y = x$.

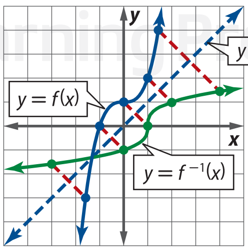
مثال 4 إيجاد الدوال العكسيّة بيانيًا

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$ بيانيًا.

مثّل المستقيم $y = x$ بيانيًا. حدّد مواقع بضع نقاط على التمثيل البياني للدالة $f(x)$. واعكس هذه النقاط في المستقيم $y = x$. ثم صِل بينها بمنحنى منتظم يعكس انحناء الدالة $f(x)$ في المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

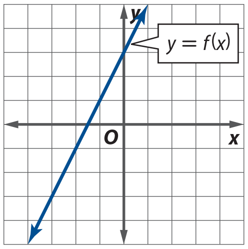
نصيحة دراسية

الدوال العكسيّة والقيم القصوى يكون للدالة المتصلة دالة عكسيّة إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو قيم صغرى محلية. فإذا كانت لها قيم عظمى أو قيم صغرى محلية، فلن تجتاز إذًا اختبار المستقيم الأفقي ولن تكون دالة "واحد لواحد".

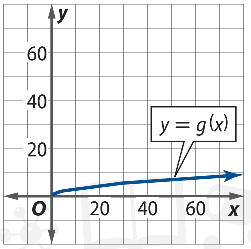
تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتمثيل دالتها العكسيّة بيانيًا.

4A.

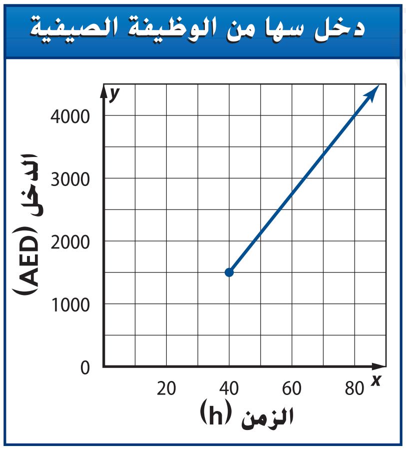


4B.



مثال 5 من الحياة اليومية استخدام الدالة العكسيّة

أرباح الصيف تحصل سها على مبلغ 40 AED في الساعة، وتعمل 40 ساعة على الأقل في الأسبوع، وتتقاضى أجرًا ضعف معدّل أجرها الطبيعي في الساعة بنسبة 1.5 مقابل العمل الإضافي لأي وقت يزيد عن 40 ساعة. وإجمالي ما تكسبه $f(x)$ في الأسبوع الذي تعمل فيه عدد x من الساعات تمثّله الصيغة $f(x) = 1600 + 60(x - 40)$.



a. اشرح لماذا توجد الدالة العكسيّة $f^{-1}(x)$، ثم جـد $f^{-1}(x)$.

تُبسّط الدالة إلى $f(x) = 1600 + 60x - 2400$ أو $60x - 800$. ويجتاز التمثيل البياني للدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. إذًا، الدالة $f(x)$ دالة "واحد لواحد" ولها دالة عكسيّة. جـد $f^{-1}(x)$.

$f(x) = 60x - 800$	دالة أصلية
$y = 60x - 800$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = 60y - 800$	بادل بين x و y.
$x + 800 = 60y$	أضف 800 إلى كل طرف.
$y = \frac{x + 800}{60}$	جـد الحل من أجل y.
$f^{-1}(x) = \frac{x + 800}{60}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثّله كل من $f^{-1}(x)$ و x في الدالة العكسيّة؟

في الدالة العكسيّة، يمثّل x ما تكسبه سها في أسبوع بعينه، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل التي قضتها سها في ذاك الأسبوع.

c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$؟ اشرح.

تفترض الدالة $f(x)$ أن سها تعمل 40 ساعة على الأقل في الأسبوع. وتوجد $24 \cdot 7$ أو 168 ساعة في الأسبوع. إذًا، مجال $f(x)$ هو $[40, 168]$. ولأن $f(40) = 1600$ و $f(168) = 9280$. فمدى $f(x)$ هو $[1600, 9280]$. ولأن مدى $f(x)$ يجب أن يكون مساويًا لمجال $f^{-1}(x)$. فمجال $f^{-1}(x)$ هو $[1600, 9280]$.

d. جـد عدد الساعات التي قضتها سها في العمل الأسبوع الماضي إذا كان ما كسبته يبلغ 1900 AED.

لأن $f^{-1}(1900) = \frac{1900 + 800}{60}$ أو 45. فقد عملت سها 45 ساعة الأسبوع الماضي.

تمرين موجّه

5. المدخرات تبلغ نسبة صافي راتب أمل 65% من إجمالي الراتب، وتخصّص أمل ميزانية قيمتها 2400 AED في الشهر لنفقات الحياة اليومية، وتقدّر أنه يمكنها ادخار 20% من المال المتبقي لديها. إذًا، ما تدخره في شهر واحد $f(x)$ من إجمالي راتب قيمته x من الدراهم تمثّله الصيغة $f(x) = 0.2(0.65x - 2400)$.

A. اشرح لماذا توجد الدالة العكسيّة $f^{-1}(x)$، ثم جـد $f^{-1}(x)$.

B. ما الذي تمثّله كل من $f^{-1}(x)$ و x في الدالة العكسيّة؟

C. ما القيود- إن وجدت- التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و $f^{-1}(x)$؟ اشرح.

D. حدّد إجمالي راتب أمل في شهر واحد إذا كان ما ادخرته في هذا الشهر قيمته 480 AED.

التمارين

مثّل كل دالةٍ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني، وطبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان لها دالة عكسية. اكتب نعم أو لا. (المثال 1)

1. $f(x) = x^2 + 6x + 9$
2. $f(x) = x^2 - 16x + 64$
3. $f(x) = x^2 - 10x + 25$
4. $f(x) = 3x - 8$
5. $f(x) = \sqrt{2x}$
6. $f(x) = 4$
7. $f(x) = \sqrt{x + 4}$
8. $f(x) = -4x^2 + 8$
9. $f(x) = \dfrac{5}{x - 6}$
10. $f(x) = \dfrac{8}{x + 2}$
11. $f(x) = x^3 - 9$
12. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$

حدّد ما إذا كان لكل دالة دالةٌ عكسيّة. فإن كان لها، فجـــد الدالة العكسيّة واذكر أي قيودٍ على مجالها. (المثال 2)

13. $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$
14. $f(x) = 4x^5 - 8x^4$
15. $h(x) = x^7 + 2x^3 - 10x^2$
16. $f(x) = \sqrt{x + 8}$
17. $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$
18. $f(x) = |x - 6|$
19. $f(x) = \dfrac{4 - x}{x}$
20. $g(x) = \dfrac{x - 6}{x}$
21. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{8 - x}}$
22. $g(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x + 3}}$
23. $f(x) = \dfrac{6x + 3}{x - 8}$
24. $h(x) = \dfrac{x + 4}{3x - 5}$
25. $g(x) = |x + 1| + |x - 4|$

26. **السرعة** سرعة جسم ما بالكيلومتر في الساعة y هي $y = 1.6x$. حيث x هي سرعة الجسم بالميل في الساعة. (المثال 2)

a. جـــد معادلة لمعكوس الدالة. ما الذي يمثّله كل متغير؟

b. مثّل كل معادلة بيانيًا على المستوى الإحداثي ذاته.

أثبت جبريًا أن f و g دالتان متعاكسان. (المثال 3)

27. $f(x) = -6x + 3$
$g(x) = \dfrac{3 - x}{6}$

28. $f(x) = 4x + 9$
$g(x) = \dfrac{x - 9}{4}$

29. $f(x) = -3x^2 + 5,\ x \ge 0$
$g(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{3}}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + 8,\ x \ge 0$
$g(x) = \sqrt{4x - 32}$

31. $f(x) = 2x^3 - 6$
$g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 6}{2}}$

32. $f(x) = (x + 8)^{\frac{3}{2}}$
$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8,\ x \ge 0$

33. $g(x) = \sqrt{x + 8} - 4$
$f(x) = x^2 + 8x + 8,\ x \ge -4$

34. $g(x) = \sqrt{x - 8} + 5$
$f(x) = x^2 - 10x + 33,\ x \ge 5$

35. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x}$
$g(x) = \dfrac{4}{x - 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x - 6}{x + 2}$
$g(x) = \dfrac{2x + 6}{1 - x}$

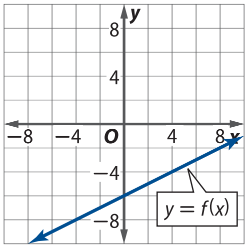
37. **الفيزياء** يمكن وصف الطاقة الحركية لجسم أثناء حركته بالجول باستخدام الصيغة $f(x) = 0.5mx^2$. حيث m هي كتلة الجسم بالكيلوجرام و x هي سرعة الجسم بالمتر في الثانية. (المثال 3)

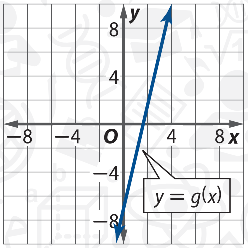
a. جـــد معكوس الدالة. ما الذي يمثّله كل متغير؟

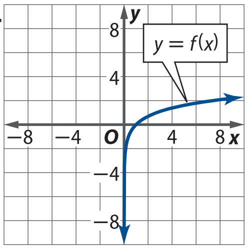
b. أثبت أن الدالة $f(x)$ والدالة التي وَجَدتَها في الجزء a معكوسان.

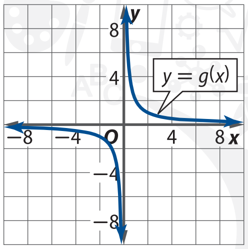
c. مثّل بيانيًا $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها إذا كانت كتلة الجسم تساوي كيلوجرامًا واحدًا.

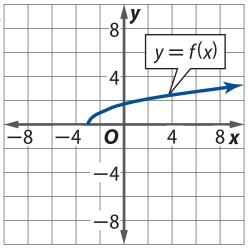
استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتمثيل دالتها العكسيّة بيانيًا. (المثال 4)

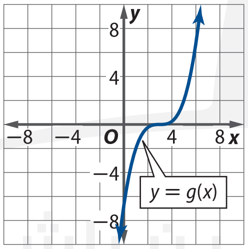
38.


39.


40.


41.


42.


43.


44. **الوظائف** تبيع سها أحذية في متجر كبير ذي أقسام متعدّدة بعد المدرسة. ويبلغ راتبها الأساسي كل أسبوع AED 560. وتحصل على عمولة نسبتها 10% على كل زوج تبيعه من الأحذية. إجمالي ما كسبته $f(x)$ في أسبوع باعت فيه أحذية بقيمة x من الدراهم هو $f(x) = 560 + 0.1x$. (المثال 5)

a. اشرح لماذا توجد الدالة العكسيّة $f^{-1}(x)$. ثم جـــد $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثّله كل من $f^{-1}(x)$ و x في الدالة العكسيّة؟

c. ما القيود– إن وجدت– التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و $f^{-1}(x)$؟ اشرح.

d. جـــد إجمالي مبيعات سها في الأسبوع الماضي إذا كان ما كسبته في هذا الأسبوع قيمته AED 880.

45. **العملة** يمكن وصف متوسط سعر تغيير اليورو إلى الدولار الأمريكي في الأشهر الأربعة الأخيرة بالصيغة $f(x) = 0.66x$. حيث x هي قيمة العملة باليورو. (المثال 5)

a. اشرح لماذا توجد الدالة العكسيّة $f^{-1}(x)$. ثم جـد $f^{-1}(x)$.

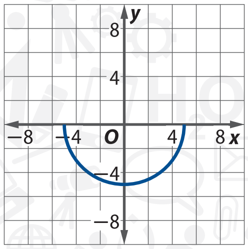
b. ما الذي تمثّله كل من $f^{-1}(x)$ و x في الدالة العكسيّة؟

c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و $f^{-1}(x)$؟ اشرح.

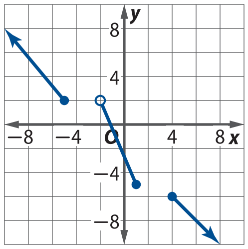
d. ما قيمة 100 دولار أمريكي باليورو؟

حدّد ما إذا كانت كل دالة لها دالة عكسيّة.

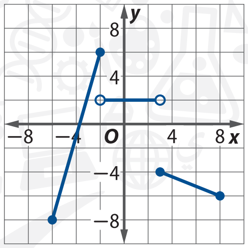
46.



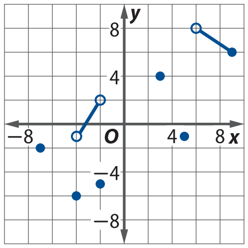
47.



48.



49.



حدّد ما إذا كانت f^{-1} موجودة، وإذا كانت كذلك، فأكمل جدولًا للدالة f^{-1}.

50.

x	−6	−4	−1	3	6	10
$f(x)$	−4	0	3	5	9	13

51.

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

52.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	8	16	54	27	16

53.

x	−10	−9	−8	−7	−6	−5
$f(x)$	8	7	6	5	4	3

54. **درجة الحرارة** تُستخدم الصيغة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ لتحويل x من الدرجات المئوية إلى درجات فهرنهايت. ولتحويل x من درجات فهرنهايت إلى درجات كلفن، تُستخدم الصيغة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$.

a. جـد f^{-1}. ما الذي تمثّله هذه الدالة؟

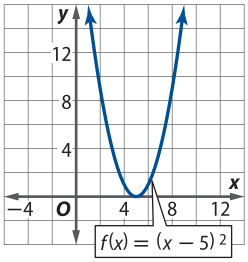
b. أثبت أن f و f^{-1} دالتان متعاكستان، ومثّل كل دالة بيانيًا على شاشة حاسبة التمثيل البياني ذاتها.

c. جـد $[k \circ f](x)$. ما الذي تمثّله هذه الدالة؟

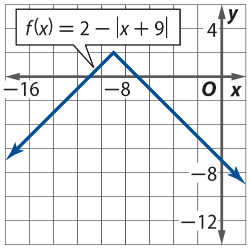
d. إذا كانت درجة الحرارة 60°C، فكم ستكون درجة الحرارة بالكلفن؟

قيّد مجال كل دالة حتى تكون الدالة الناتجة دالة "واحد لواحد"، ثم حدّد معكوس الدالة.

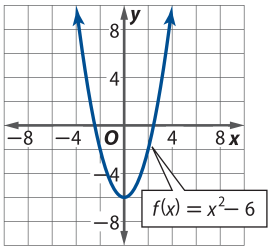
55.



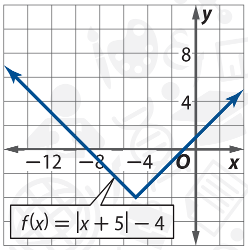
56.



57.



58.



حدّد مجال ومدى الدالة f والدالة f^{-1}، إذا كانت f^{-1} موجودة.

59. $f(x) = \sqrt{x - 6}$

60. $f(x) = x^2 + 9$

61. $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 4}$

62. $f(x) = \frac{8x + 3}{2x - 6}$

63. **البيئة** النسر الأصلع، الذي كان من الأنواع المهدّدة بالانقراض يومًا ما، أصبح بقاؤه في حالة غير مهدّدة عام 1995. ويوضّح الجدول عدد أزواج النسور المعشّشة كل عام.

العام	الأزواج المعشّشة
1984	1757
1990	3035
1994	4449
1998	5748
2000	6471
2005	7066

a. استخدم الجدول لتقريب دالة خطية تصل عدد الأزواج المعشّشة بالعام. افترض أن 0 يمثّل 1984.

b. جـد معكوس الدالة الذي حصلت عليه في الجزء a. ما الذي يمثّله كل متغير؟

c. باستخدام الدالة العكسيّة، في أي عام تقريبًا كان عدد الأزواج المعشّشة 5094؟

64. **الزهور** تحتاج نسرين إلى شراء 75 ساق زهرة من أجل زينة المأدبة، ويمكنها أن تختار زهور الزنبق أو زهور الأرطنسية. وتبلغ تكلفة هذه الزهور على التوالي AED 5.00 للساق و AED 3.50 للساق.

a. اكتب دالة للتكلفة الإجمالية للزهور.

b. جـد معكوس دالة التكلفة. ما الذي يمثّله كل متغير؟

c. جـد مجال دالة التكلفة ومعكوسها.

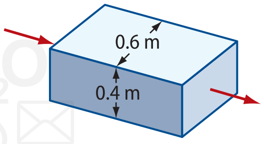
d. إذا كان إجمالي تكلفة الزهور AED 307.50، فكم عدد زهور الزنبق التي اشترتها نسرين؟

جـــد معادلة لمعكوس كل دالة، إذا كان موجودًا، ثم مثّل المعادلات بيانيًا على المستوى الإحداثي ذاته، وأدرج أي قيود على المجال.

65. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad -4 \geq x \\ -x+5 & , \quad -4 < x \end{cases}$

66. $f(x) = \begin{cases} -4x+6 & , x= > -5 \\ 2x-8 & , x < -5 \end{cases}$

67. **معدّل التدفق** إن معدّل تدفق الغاز هو حجم الغاز الذي يمر عبر مساحة ما خلال فترة زمنية محدّدة. ويمكن إيجاد سرعة v الهواء المتدفق من خلال فتحة باستخدام $v(r) = \frac{r}{A}$، حيث r هو معدّل التدفق بالمتر المكعب في الثانية، و A هي مساحة المقطع العرضي للفتحة بالمتر المربّع.



a. جـــد v^{-1} للفتحة الموضّحة. ما الذي تمثّله هذه الدالة؟

b. حدّد سرعة الهواء المتدفق من خلال الفتحة بالمتر في الثانية. إذا كان معدّل التدفق $425\ m^3/s$.

c. حدّد معدّل تدفق الغاز في فتحة دائرية يبلغ قطرها $1.5\ m$ حيث يتحرك تيار الغاز بسرعة $0.5\ m/s$.

68. **الاتصالات** تقدّم إحدى شركات الهواتف الخلوية تخفيضات كما هو موضّح. افترض أن التخفيض الذي يبلغ AED 50 سيُقدّم فقط بعد تقديم الخصم بنسبة 10%.

a. اكتب الدالة r لسعر الهاتف في صورة دالة للسعر الأصلي إذا طُبق التخفيض فقط.

b. اكتب الدالة r لسعر الهاتف في صورة دالة للسعر الأصلي إذا طُبق الخصم فقط.

c. جـــد صيغة لـــ $T(x) = [r \circ d](x)$ إذا طُبق كل من الخصم والتخفيض.

d. جـــد T^{-1} واشرح ما الذي يمثّله المعكوس.

e. إذا كان إجمالي تكلفة الهاتف بعد الخصم والتخفيض يبلغ AED 49. فكم كان السعر الأصلي للهاتف؟

استخدم $f(x) = 8x - 4$ و $g(x) = 2x + 6$ لإيجاد كل مما يلي.

69. $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$ **70.** $[g^{-1} \circ f^{-1}](x)$

71. $[f \circ g]^{-1}(x)$ **72.** $[g \circ f]^{-1}(x)$

73. $(f \cdot g)^{-1}(x)$ **74.** $(f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$

استخدم $f(x) = x^2 + 1$ بمجال $[0, \infty)$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ لإيجاد كل مما يلي.

75. $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$ **76.** $[g^{-1} \circ f^{-1}](x)$

77. $[f \circ g]^{-1}(x)$ **78.** $[g \circ f]^{-1}(x)$

79. $(f \cdot g^{-1})(x)$ **80.** $(f^{-1} \cdot g)(x)$

81. **النسخ** تفرض مطبعة خلف على المستخدمين مبلغ AED 0.40 لكل دقيقة أو جزء من دقيقة مقابل استخدام الماسح الضوئي للحاسوب الخاص بهم. افترض أنك استخدمت الماسح الضوئي لعدد x من الدقائق، حيث x هو أي عدد حقيقي أكبر من 0.

a. ارسم التمثيل البياني للدالة $C(x)$ التي تعطي تكلفة استخدام الماسح الضوئي لعدد x من الدقائق.

b. ما مجال الدالة $C(x)$ وما مداها؟

c. ارسم التمثيل البياني لمعكوس $C(x)$.

d. ما مجال المعكوس وما مداه؟

e. ما الموقف المأخوذ من الحياة اليومية الذي يمثّله المعكوس؟

82. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف معكوسات الدوال الموجبة والدوال السالبة.

a. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية للدوال الزوجية الثلاثة المختلفة. هل التمثيلات البيانية تجتاز اختبار الخط الأفقي؟

b. **تحليليًا** ما النمط الذي تستطيع تمييزه بالنظر إلى معكوسات الدوال الزوجية؟ أكّد أو ارفض النمط جبريًا.

c. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية للدوال الفردية الثلاثة المختلفة. هل التمثيلات البيانية تجتاز اختبار الخط الأفقي؟

d. **تحليليًا** ما النمط الذي تستطيع تمييزه بالنظر إلى معكوسات الدوال الفردية؟ أكّد أو ارفض النمط جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

83. **التبرير** إذا كان للدالة f معكوس وصفر عند 6. ما الذي يمكنك تحديده بشأن التمثيل البياني للدالة f^{-1}؟

84. **الكتابة في الرياضيات** اشرح نوع القيد اللازم وضعه على المجال لتحديد معكوس دالة تربيعية، وسبب الحاجة إلى القيد، مع ذكر مثال.

85. **التبرير** صحيح أم *خطأ*. اشرح استنتاجك.
جميع الدوال الخطية لها دوال عكسيّة.

86. **تحدٍ** إذا كان $f(x) = x^3 - ax + 8$ و $f^{-1}(23) = 3$، فجـــد قيمة a.

87. **التبرير** هل يمكن أن تجتاز $f(x)$ اختبار الخط الأفقي عندما $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$؟ اشرح.

88. **التبرير** لماذا لا تستخدم $\pm$ عند إيجاد الدالة العكسيّة للدالة $f(x) = \sqrt{x+4}$؟

89. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف أن معكوس الدالة f من الممكن وجوده. اذكر مثالاً شريطة أن يكون مجال f مقيدًا والدالة f لا يكون لها معكوس عندما يكون المجال غير مقيد.

مراجعة شاملة

لكل زوجٍ من الدوال، جــد $f \circ g$ و $g \circ f$، ثم حدّد مجال كل دالة مركّبة. (الدرس 6-1)

90. $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

91. $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

92. $f(x) = x - 4$
$g(x) = 3x^2$

استخدم التمثيل البياني للدالة الأصلية المعطاة لوصف التمثيل البياني لكل دالة ذات صلة. (الدرس 5-1)

93. $f(x) = x^2$
   a. $g(x) = (0.2x)^2$
   b. $h(x) = (x - 5)^2 - 2$
   c. $m(x) = 3x^2 + 6$

94. $f(x) = x^3$
   a. $g(x) = |x^3 + 3|$
   b. $h(x) = -(2x)^3$
   c. $m(x) = 0.75(x + 1)^3$

95. $f(x) = |x|$
   a. $g(x) = |2x|$
   b. $h(x) = |x - 5|$
   c. $m(x) = |3x| - 4$

.96 **الدعاية** أجرت إحدى الجرائد استطلاعًا للرأي في بعض الشركات فيما يتعلق بالمبلغ السنوي من الأموال التي تنفق على الإعلانات التجارية في التليفزيون، والعدد التقديري للأشخاص الذين يتذكرون رؤية هذه الإعلانات التجارية كل أسبوع. تنفق شركة تصنع المشروبات الغازية 40.1 مليون AED، وتقدّر أن 78.6 مليون شخص يتذكرون الإعلانات التجارية. وبالنسبة لإحدى خدمات تسليم الطرود، تبلغ الميزانية 22.9 مليون AED لعدد 21.9 مليون شخص. وتصل شركة اتصالات إلى 88.9 مليون شخص من خلال إنفاق 154.9 مليون AED. استخدم مصفوفة لتمثيل هذه البيانات.

حُلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

97. $x + 2y + 3z = 5$
$3x + 2y - 2z = -13$
$5x + 3y - z = -11$

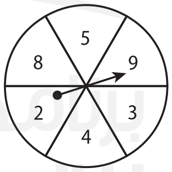
98. $7x + 5y + z = 0$
$-x + 3y + 2z = 16$
$x - 6y - z = -18$

99. $x - 3z = 7$
$2x + y - 2z = 11$
$-x - 2y + 9z = 13$

.100 **كرة البيسبول** قام ضارب الكرة بضرب الكرة لترتفع إلى أعلى. افترض أن الكرة كانت على ارتفاع 3.5 ft فوق الأرض عندما ضربها لأعلى مباشرة بسرعة ابتدائية تبلغ 80 ft/s. الدالة $d(t) = 80t - 16t^2 + 3.5$ تعطي ارتفاع الكرة فوق الأرض بالمتر في صورة دالة للزمن t بالثواني. ما المدة التي يحتاجها ملتقط الكرة ليتخذ الوضع المناسب ليلتقط الكرة بعد ضربها؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.101 **SAT/ACT** ما احتمال توقف القرص الدوار على عدد إما أن يكون زوجيًا أو أكبر من 5؟



A $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{2}{3}$

E $\frac{5}{6}$

.102 **مراجعة** إذا كان كل من m و n عددين طبيعيين فرديين، فأي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا؟

I. $m^2 + n^2$ زوجي.

II. $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4.

III. $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4.

F لاشيء

G I فقط

H I و II فقط

J I و III فقط

.103 أي مما يلي هو معكوس $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

.104 **مراجعة** يقطع قطار d كيلومتر في t ساعة، ويصل إلى وجهته متأخرًا 3 ساعات. ما متوسط السرعة، بالكيلومتر في الساعة، التي كان ينبغي على القطار أن يتحرك بها ليصل في موعده؟

F $t - 3$

G $\frac{t - 3}{d}$

H $\frac{d}{t - 3}$

J $\frac{d}{t} - 3$

مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل المعكوسات بيانيًا باستخدام المعادلات الوسيطيّة

الهدف
- استخدم حاسبة التمثيل البياني والمعادلات الوسيطيّة لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا على الحاسبة.

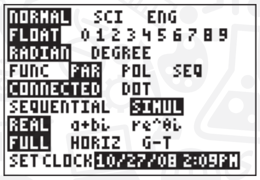
مفردات جديدة
المعادلات الوسيطيّة
parametric equations

المعادلات الوسيطيّة هي المعادلات التي يمكنها التعبير عن موقع أحد الأجسام في صورة دالة زمن. والفرضية الأساسية للمعادلات الوسيطيّة هي تقديم متغير إضافي t؛ يسمى *مَعلَمة*. على سبيل المثال، يمكن التعبير عن $y = x + 4$ وسيطيًا باستخدام $x = t$ و $y = t + 4$.

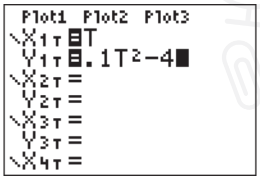
النشاط 1 التمثيل البياني الوسيطي

مثّل بيانيًا $x = t$ و $y = 0.1t^2 - 4$.

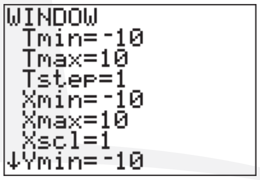
الخطوة 1 اضبط الوضع من القائمة MODE. اختر *par* و *simul*. حيث يسمح ذلك بتمثيل المعادلتين في الوقت نفسه.



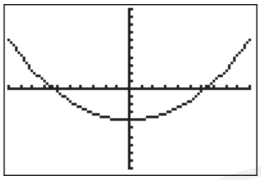
الخطوة 2 أدخل المعادلتين الوسيطيتين. في الصيغة الوسيطيّة، سوف تستخدم X,T,θ,n بدلًا من t من x.



الخطوة 3 اضبط النافذة كما هو موضح.



الخطوة 4 مثّل المعادلتين بيانيًا. ولاحظ أن التمثيل البياني يشبه $y = 0.1x^2 - 4$ ولكنّه يُرسم من $t = -10$ إلى $t = 10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; tstep: 1

نصيحة دراسية
النافذة القياسية يمكنك استخدام ZoomStandard لضبط النافذة على الصيغة القياسية.

تمارين

1. **التبرير** مثّل المعادلات بيانيًا باستخدام Tstep = 10 و 5 و 0.5 و 0.1. كيف يؤثر ذلك في طريقة ظهور التمثيل البياني؟

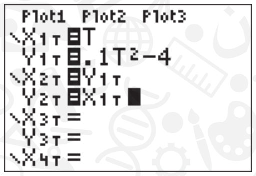
2. في هذه المسألة، ستقوم باستكشاف العلاقة بين x و y و t.
   a. مثّل $X_{1T} = t - 3$ و $Y_{1T} = t + 4$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.
   b. استبدل المعادلتين في الجزء a بـ $X_{1T} = t$ و $Y_{1T} = t + 7$ ومثّلهما بيانيًا.
   c. ما الذي تلاحظه بشأن التمثيلين البيانيين؟
   d. **التبرير** ما الاستنتاجات التي يمكنك استخلاصها عن العلاقة بين x و y و t؟ بمعنىً آخر، كيف تعتقد أن المجموعة الثانية من المعادلات الوسيطيّة قد شكّلت باستخدام المجموعة الأولى منها؟

من فوائد المعادلات الوسيطيّة هي القدرة على تمثيل الدوال العكسية بيانيًا دون تحديدها.

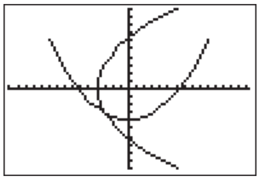
النشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا

مثّل بيانيًا معكوس الدالة $x = t$ و $y = 0.1t^2 - 4$.

الخطوة 1 أدخل المعادلات المعطاة في الصورة X_{1T} و Y_{1T}. لتمثيل معكوس الدالة.
ضع $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$.
تجد ذلك في القائمة VARS.
اختر Y-Vars, parametric, X_{1T}.



الخطوة 2 مثّل العلاقة والمعكوس بيانيًا. يمكنك استخدام ZSquare لرؤية تماثل التمثيلين البيانيين على نحوٍ أوضح.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; tstep: 1

التمارين

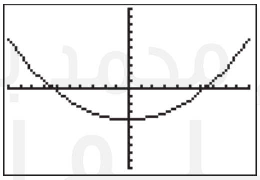
3. **التبرير** ما الذي يتعيّن أن ينطبق على الأزواج المرتّبة لكل تمثيلٍ بياني في النشاط 2؟

4. **التبرير** هل التمثيل البياني لـــ $x = t$ و $y = 0.1t^2 - 4$ يمثل دالة واحد إلى واحد؟ اشرح.

النشاط 3 المجالات ودوال الواحد لواحد

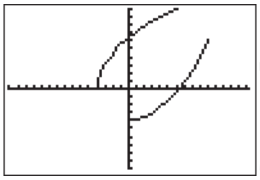
احصر مجال $x = t$، $y = 0.1t^2 - 4$ لجعلها دالة واحد لواحد.

الخطوة 1 تقع القيمة الصغرى للتمثيل البياني عند $t = 0$. يمكننا تشكيل دالة واحد لواحد لقيم t بحيث $0 \le t \le 10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; tstep: 1

الخطوة 2 غيّر Tmin من −10 إلى 0 لحصر المجال. مثّل دالة واحد لواحد ومعكوسها بيانيًا.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; tstep: 1

نصيحة دراسية

التماثل قد تحتاج إلى استخدام السّمة TRACE وضبط Tstep لتحديد محور التماثل.

تمارين

مثّل كل دالةٍ بيانيًا. ثم مثّل الدالة العكسية وحدّد المجال المحدود عند الضرورة.

5. $x = t - 6,\ y = t^2 + 2$
6. $x = 3t - 1,\ y = t^2 + t$
7. $x = 3 - 2t,\ y = t^2 - 2t + 1$
8. $x = 2t^2 + 3,\ y = \sqrt{t}$
9. $x = 4t,\ y = \sqrt{t + 2}$
10. $x = t - 8,\ y = t^3$

11. **تحدٍ** خذ دالةً خماسيةً لها قيمتان أعظميتان نسبيتان وقيمتان أصغريتان نسبيتين. كم عدد الدوال المختلفة من النوع واحد لواحد التي يمكن تقسيم هذه الدالة إليها إذا كان كل قسمٍ يستخدم أكبر فترةٍ ممكنة؟

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال (الدرس 1-1)

- المجموعات الجزئية الشائعة التي تتكون من أعداد حقيقية هي الأعداد الصحيحة والأعداد النسبية والأعداد غير النسبية، والأعداد الكلية والأعداد الطبيعية.
- دالة f هي علاقة قائمة على تعيين عنصر واحد في المدى لكل عنصر في المجال.
- التمثيل البياني لدالة يجتاز اختبار المستقيم الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 1-2)

- قد تكون التمثيلات البيانية متماثلة بالنسبة *للمحور الرأسي* y، *والمحور الأفقي* x.
- الدوال الزوجية متماثلة بالنسبة للمحور الرأسي y. والدوال الفردية متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

الاتصال والسلوك النهائي والنهايات (الدرس 1-3)

- إذا قاربت قيمة $f(x)$ قيمةً مميزةً L مع اقتراب x من c من أيٍ من الجانبين، إذًا فحدّ $f(x)$ مع اقتراب x من c هو L. ويكتب الحدّ بالصورة $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- ربما تكون الدالة منفصلةً بسبب الانفصال اللانهائي أو عدم الاتصال القفزي أو الانفصال القابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 1-4)

- يمكن وصف الدالة بأنها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.
- تشمل القيم القصوى لدالة القيم النسبية العظمى والصغرى والقيم المطلقة العظمى والصغرى.
- يمكن تمثيل متوسط معدل التغير $m_{sec} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

الدوال الأصلية والتحويلات (الدرس 1-5)

- تشتمل التحويلات على الدوال الأصلية الإزاحات والانعكاسات وتغييرات الأبعاد.

العمليات على الدوال وتركيب الدوال (الدرس 1-6)

- يشكل مجموع دالتين والفرق بينهما وناتجه ضربهما وقسمتهما وتركيبهما دوالًا جديدة.

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 1-7)

- تُعد علاقتان عكسيتين فقط إذا كانت إحداهما تحتوي على العنصر (a, b) كلما احتوت الأخرى على العنصر (b, a).
- تعدّ دالّتان f و f^{-1} دالتين معكوستين فقط وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات الأساسية

تركيب الدوال composition
الثابت constant
الدالة المتصلة continuous function
الدالة المتناقصة decreasing function
تغيير الأبعاد(التمدد) dilation
دالة غير متصلة discontinuous function
السلوك الطرفي end behavior
الدالة الزوجية even function
القيم القصوى extrema
الدالة function
متزايدة increasing
رمز الفترة interval notation
دالة عكسية inverse function
علاقة عكسية inverse relation
نهاية limit
تماثل محوري line symmetry
العظمى maximum
الصغرى minimum
انفصال غير قابل للإزالة nonremovable discontinuity
دالة فردية odd function
واحد لواحد one-to-one
دالة أصلية parent function
دالة متعددة التعريف piecewise-defined function
تماثل نقطي point symmetry
الانعكاس reflection
جذور roots
إزاحة translation
دالة صفرية zero function
أصفار zeros

مراجعة المصطلحات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموجود تحت خط لجعل الجملة صحيحة.

1. تخصّص الدالة عنصرًا واحدًا في المدى لكل عنصر في المجال.
2. يمكن تدوير التمثيلات البيانية ذات التماثل النقطي بمقدار 180° بالنسبة إلى نقطة دون أن يبدو عليها أي تغيير.
3. للدالة الفردية نقطة تماثل.
4. ليس في التمثيل البياني للـــدالة المتصلة أي فواصل أو فجوات.
5. يصف نهاية التمثيل البياني الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.
6. تعدّ الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها بزيادة قيم x دالةً متناقصة.
7. يمكن أن تضمّ القيم القصوى لدالّة قيمًا نسبيةً عظمى وصغرى.
8. تُنتِج إزاحة تمثيلٍ بيانيٍ صورةً طبق الأصل للتمثيل البياني بالنسبة لمستقيم.
9. تجتاز دالة واحد لواحد اختبار الخط الأفقي.
10 تتمتع دوال الواحد لواحد بتماثل محوري.

مراجعة درس بدرس

1-1 الدوال

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة من x.

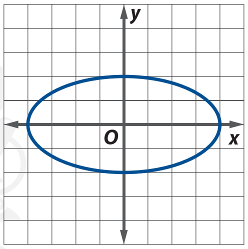
11. $3x - 2y = 18$

12. $y^3 - x = 4$

13.

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

14.



لنفترض أن لديك الدالة $f(x) = x^2 - 3x + 4$. جـد كل قيمة للدالة مما يلي.

15. $f(5)$

16. $f(-3x)$

حدّد مجال كل دالة مما يلي.

17. $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18. $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19. $h(a) = \dfrac{5}{a + 5}$

20. $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

حدّد ما إذا كانت الدالة $y^2 - 8 = x$ تمثّل y كدالة لـ x.

حُلّ لإيجاد y.

$y^2 - 8 = x$ المعادلة الأصلية

$y^2 = x + 8$ بإضافة 8 إلى كلٍ من الطرفين.

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

لا تمثل هذه المعادلة y كدالة لـ x لأنه مقابل أي قيمة لـ x أكبر من -8 ليست هناك أي قيمٍ مقابلة لـ y.

مثال 2

لنفترض أن $g(x) = -3x^2 + x - 6$. جـد $g(2)$.

عوّض القيمة 2 بدلاً من x في التعبير $-3x^2 + x - 6$.

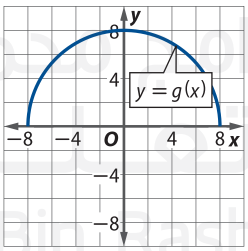
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $\quad x = 2$

$= -12 + 2 - 6$ أو -16 $\quad$ بسّط.

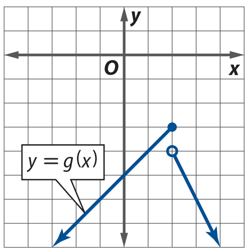
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

استخدم التمثيل البياني لـ g لإيجاد المجال والمدى لكل دالة.

21.



22.



جـد نقطة (نقاط) تقاطع كل دالة مما يلي مع المحور الرأسي y إضافةً إلى أصفارها.

23. $f(x) = 4x - 9$

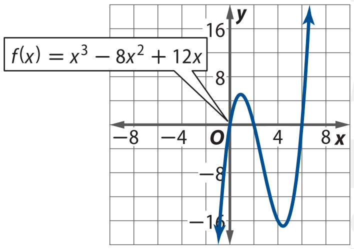
24. $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25. $f(x) = x^3 - 16x$

26. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد أصفارها ونقاط تقاطعها مع المحور الرأسي y. ثم جـد هذه القيم جبريًا.



التقدير بيانيًا

يبدو أن الدالة $f(x)$ تقطع المحور الرأسي y عند النقطة $(0, 0)$، إذًا فنقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي 0.

يبدو أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x تقع عند 0 و 2 و 6 تقريبًا.

الحل جبريًا

جـد $f(0)$.

$f(0) = (0)^3 - 8(0)^2 + 12(0) = 0$

تقع نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y عند 0.

حلل المعادلة ذات الصلة إلى عوامل.

$x(x^2 - 8x + 12) = 0$

$x(x - 6)(x - 2) = 0$

أصفار f هي 0 و 6 و 2.

دليل الدراسة والمراجعة *تابع*

1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة أم لا عند قيم x المذكورة. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدد نوع الانفصال سواء لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة.

27. $f(x) = x^2 - 3x;\ x = 4.$

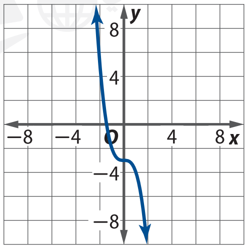
28. $f(x) = \sqrt{2x - 4};\ x = 10$

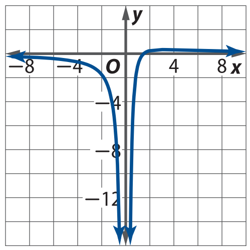
29. $f(x) = \frac{x}{x+7};\ x = 0$ و $x = 7$

30. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4};\ x = 2$ و $x = 4$

31. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{إذا كانت } x < 1 \\ 2x & \text{إذا كانت } x \geq 1 \end{cases};\ x = 1$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي.

32. 

33. 

مثال 4

حدّد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{x-4}$ متصلة عند $x = 0$ و $x = 4$. برّر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت منفصلة، فحدّد نوع الانفصال على أنه *لا نهائي* أو *قفزي* أو *قابل للإزالة*.

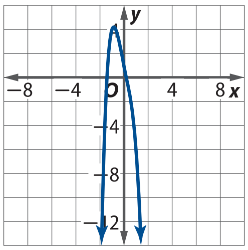
$f(0) = -0.25$. إذًا f معرّفة عند 0. تقترب قيم الدالة أنّه مع اقتراب f من -0.25. تقترب x من 0.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

نظرًا إلى أنه يقدّر أن $\lim_{x \to 0} f(x)$ تساوي -0.25 و $f(0) = -0.25$. فيمكن أن نستنتج أن $f(x)$ مستمرة عند $x = 0$. نظرًا إلى أن f ليست معرفةً عند 4. فإن f ليست متصلةً عند 4.

مثال 5

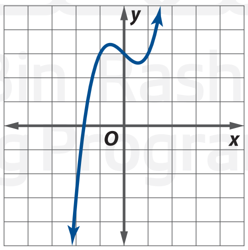
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = -2x^4 - 5x + 1$ لوصف سلوكها الطرفي.

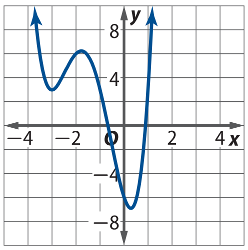


اختبر التمثيل البياني لـ $f(x)$.
عندما $x \to \infty$. فإن $f(x) \to -\infty$.
وعندما $x \to -\infty$. فإن $f(x) \to -\infty$.

1-4 مالقيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استخدم التمثيل البياني لكل دالةٍ لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب إلى 0.5 وحدة والتي تتزايد عندها الدالة أو تتناقص أو تكون ثابتة. ثم قدّر قيمتها مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة.

34. 

35. 

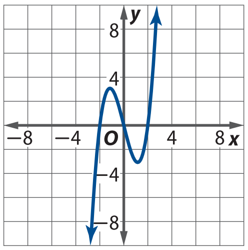
جـد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة.

36. $f(x) = -x^3 + 3x + 1;\ [0, 2]$

37. $f(x) = x^2 + 2x + 5;\ [-5, 3]$

مثال 6

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تتزايد عندها الدالة أو تتناقص أو تكون ثابتة. ثم قدّر قيمتها مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة.



من التمثيل البياني. يمكننا أن نقدّر أن f تتزايد بالفترة $(-\infty, -1)$. وتتناقص بالفترة $(-1, 1)$ وتتزايد بالفترة $(1, \infty)$.

يمكننا تقدير أن f لها قيمة نسبية عظمى عند $(-1, 3)$ وقيمة نسبية صغرى عند $(1, -3)$.

1-5 الدوال الأصلية والتحويلات

حدّد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$ وصِف كيف يرتبط التمثيل البياني لـ $g(x)$ والتمثيل البياني لـ $f(x)$. ثم مثّل $f(x)$ و $g(x)$ على نفس المحورين.

38. $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$

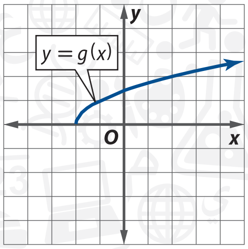
39. $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

40. $g(x) = \frac{1}{2(x+7)}$

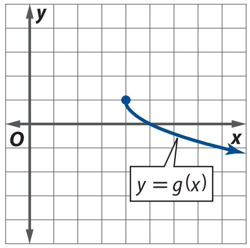
41. $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!] + 3$

صِف كيف يرتبط التمثيلان البيانيان لـ $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x)$. ثم اكتب معادلةً لـ $g(x)$.

42.



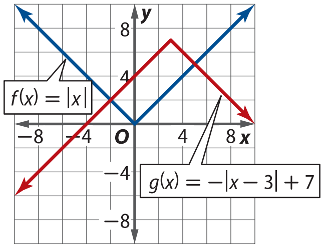
43.



مثال 7

حدّد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x) = -|x-3| + 7$، وصِف كيف يرتبط التمثيل البياني لـ $g(x)$ و $f(x)$. ثمّ مثّل $f(x)$ و $g(x)$ على نفس المحورين.

الدالة الأصلية لـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. سيكون التمثيل البياني لـ g هو نفسه التمثيل البياني لـ f معكوسًا بالنسبة للمحور الأفقي x ومُزاحًا لمسافة 3 وحدات إلى الجهة اليمنى و 7 وحدات إلى الأعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب

جد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل دالة $f(x)$ و $g(x)$. واذكر مجال كل دالة جديدة.

44. $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

45. $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

46. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

47. $f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$

لكلّ زوجٍ من الدوال، جد $[f \circ g](x)$، $[g \circ f](x)$، و $[f \circ g](2)$.

48. $f(x) = 4x - 11;\ g(x) = 2x^2 - 8$

49. $f(x) = x^2 + 2x + 8;\ g(x) = x - 5$

50. $f(x) = x^2 - 3x + 4;\ g(x) = x^2$

جد $f \circ g$.

51. $f(x) = \frac{1}{x-3}$
$g(x) = 2x - 6$

52. $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا علمت أن $f(x) = x^3 - 1$ و $g(x) = x + 7$، جد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$. واذكر مجال كل دالة جديدة.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^3 - 1) + (x + 7)\\ &= x^3 + x + 6\end{aligned}$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^3 - 1) - (x + 7)\\ &= x^3 - x - 8\end{aligned}$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^3 - 1)(x + 7)\\ &= x^4 + 7x^3 - x - 7\end{aligned}$$

مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $(-\infty, \infty)$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ أو $\frac{x^3 - 1}{x + 7}$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $D = (-\infty, -7) \cup (-7, \infty)$.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

1-7 العلاقات والدوال العكسية

مثّل كل دالةٍ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني، وطبّق اختبار المستقيم الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة. اكتب نعم أو لا.

53. $f(x) = |x| + 6$

54. $f(x) = x^3$

55. $f(x) = \frac{3}{x + 6}$

56. $f(x) = x^3 - 4x^2$

جـد الدالة العكسية وحدد أي قيود في المجال.

57. $f(x) = x^3 - 2$

58. $g(x) = -4x + 8$

59. $h(x) = 2\sqrt{x + 3}$

60. $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

مثال 9

جـد معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{x} - 3$ واذكر أي قيودٍ على مجالها.

لاحظ أن للدالة f المجال $[0, \infty)$ والمدى $[-3, \infty)$. والآن جـد معكوس علاقة f.

$y = \sqrt{x} - 3$	عوّض $f(x)$ بـ y.
$x = \sqrt{y} - 3$	بدّل بين x و y.
$x + 3 = \sqrt{y}$	بإضافة 3 إلى كل طرف.
$(x + 3)^2 = y$	بتربيع كل طرف. لاحظ أن $D = (-\infty, \infty)$ و $R = [0, \infty)$.

لا يساوي مجال $y = (x + 3)^2$ مدى f ما لم يُقيّد على $[-3, \infty)$. إذًا، $f^{-1}(x) = (x + 3)^2$ عند $x \geq -3$.

التطبيقات وحل المسائل

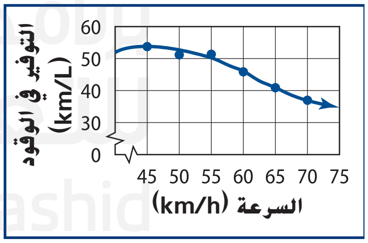
61. الهواتف الخلوية طرحت إحدى شركات خدمات الهواتف الخلوية عرضًا كلفته AED 39.99 في الشهر. ويتضمن العرض 500 دقيقة للتحدث خلال النهار من يوم الأحد إلى الخميس بين الساعة 7 A.M. و 7 P.M. يفرض على المستخدمين رسمٌ قيمته ADE 0.20 عن كل دقيقة يتم التحدث خلالها في النهار بعد استهلاك الدقائق الـ 500. (الدرس 1-1)

a. اكتب دالةً $p(x)$ تعبّر عن تكلفة شهرٍ تستخدم فيه الخدمة لمدة x دقيقة خلال النهار.

b. ما المبلغ الذي سيحتسب عليك إذا استهلكت 450 دقيقة خلال النهار؟ وماذا سيحتسب عليك إذا استهلكت 550 دقيقة خلال النهار؟

c. مثّل $p(x)$ بيانيًا.

62. السيارات يعرض الشكل التوفير الذي تحققه سيارةٌ هجينةٌ في الوقود عند سرعاتٍ مختلفةٍ على الطريق السريع. (الدرس 1-2)



a. كم يساوي التوفير التقريبي في الوقود عندما تسير السيارة بسرعة 50 km/h؟

b. ما هي السرعة التقريبية التي سيكون عندها توفير السيارة للوقود أقل من 40 km/L؟

63. الرواتب مُنحت الآنسة منى علاوةً بعد عملها لمدّة خمس سنوات. وهي تقبض في الوقت الحالي AED 1500 في الشهر زيادةً عن راتبها السابق. فهل ستكون الدالة التي تمثّل دخلها السنوية دالةً متصلة؟ اشرح. (الدرس 1-3)

64. البيسبول يوضح الجدول عدد الركضات الكاملة التي حققها لاعب بيسبول خلال كلٍ من السنوات الخمس الأخيرة التي مارس خلالها اللعبة بصفة لاعبٍ محترف. (الدرس 1-4)

العام	2004	2005	2006	2007	2008
عدد الركضات الكاملة	5	36	23	42	42

a. اشرح السبب في أن 2006 يمثل قيمةً صغرى نسبية.

b. على فرض أن متوسط معدل التغيير في الركضات الكاملة بين عامي 2008 و 2011 هو 5 ركضات كاملة في العام. فكم عدد الركضات الكاملة التي حُقّقت عام 2011؟

c. على فرض أن متوسط معدل التغيير في الركضات الكاملة بين عامي 2007 و 2012 سالب. قارن عدد الركضات الكاملة خلال عام 2007 و 2012.

65. الفيزياء يُقذف حجرٌ باتجاهٍ أفقيٍ من أعلى جُرف. يمكن تمثيل السرعة الاتجاهية للحجر مقيسةً بالأمتار في الثانية بعد t ثانيةً باستخدام الدالة $v(t) = -\sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. سرعة الحجر هي القيمة المطلقة لسرعته الاتجاهية. ارسم تمثيلًا بيانيًا لسرعة الحجر خلال الثواني الـ 6 الأولى. (الدرس 1-5)

66. المعرفة المالية يعرض أحد المتاجر الكبرى خصمًا بمبلغ AED 40 على سعر أي بنطال جينز. فكم ستكون كلفة أحد بناطيل الجينز إذا كان سعره الأصلي AED 220 وكانت هناك ضريبة مبيعاتٍ بنسبة 8.5% ؟ (الدرس 1-6)

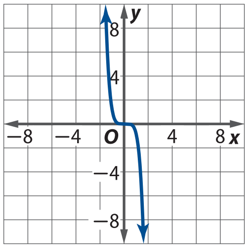
67. القياس تساوي البوصة الواحدة تقريبًا 2.54 cm. (الدرس 1-7)

a. اكتب دالةً $A(x)$ تحوّل المساحة x لمستطيل من البوصات المربعة إلى السنتيمترات المربعة.

b. اكتب دالةً $A^{-1}(x)$ تحوّل المساحة x لمستطيل من السنتيمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

تدريب على الاختبار

حدد ما إذا كانت العلاقة المذكورة تمثل y كدالة لـ x.

1. $x = y^2 - 5$
2. 

3. $y = \sqrt{x^2 + 3}$

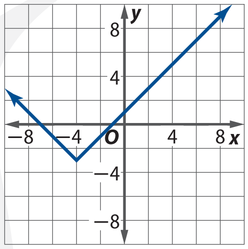
.4 **ركن السيارات** تبلغ تعرفة ركن سيارةٍ في قلب المدينة AED 0.75 لكل 30 دقيقة مع تعرفة قصوى تساوي AED 4.50. وتُحتسب التعرفة بالثانية.

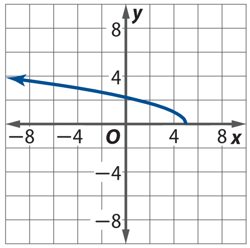
.a اكتب دالةً لـ $c(x)$، وهي تعرفة ركن السيارة لمدة x ساعات.

.b جـد $c(2.5)$.

.c ما هو مجال $c(x)$؟ اشرح استنتاجك.

حدد المجال والمدى لكل دالة.

5. 

6. 

جـد نقطة (نقاط) تقاطع كل دالة مما يلي مع المحور الرأسي y إضافةً إلى أصفارها.

7. $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$
8. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

.9 **الاختيار من متعدد** ما هي العلاقة المتماثلة بالنسبة للمحور الأفقي x؟

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد إن كانت كل دالةٍ مما يلي متصلةً عند $x = 3$. فإذا كانت منفصلة، حدّد نوع الانفصال على أنه *لا نهائي* أو *قفزي* أو *قابلٌ للإزالة*.

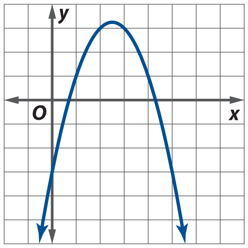
10. $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 3 \\ x - 9 & , x \geq 3 \end{cases}$

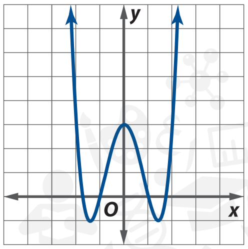
11. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

جـد متوسط معدل التغير لكل دالة في الفترة $[-6, 2]$.

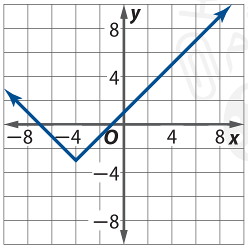
12. $f(x) = -x^4 + 3x$
13. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة والتي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة.

14. 

15. 

.16 **الاختيار من متعدد** ما الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



F $f(x) = |x - 4| - 3$

G $f(x) = |x - 4| + 3$

H $f(x) = |x + 4| - 3$

J $f(x) = |x + 4| + 3$

حدّد الدالة الأصلية $f(x)$ لـ $g(x)$. ثم ارسم التمثيل البياني لـ $g(x)$.

17. $g(x) = -(x + 3)^3$
18. $g(x) = |x^2 - 4|$

إذا علمت أن $f(x) = x - 6$ و $g(x) = x^2 - 36$، جـد كل دالةٍ ومجالها.

19. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
20. $[g \circ f](x)$

.21 **درجة الحرارة** تقاس درجة الحرارة في معظم البلدان بالدرجات المئوية. وللمعادلة التي تحول الدرجات بالفهرنهايت إلى الدرجات المئوية الصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$.

.a اكتب C كدالة لـ F.

.b جـد الدالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$.

حدّد ما إذا كان للدالة f دالةٌ عكسية. فإن كان ذلك، جـد الدالة العكسية واذكر أي قيودٍ على مجالها.

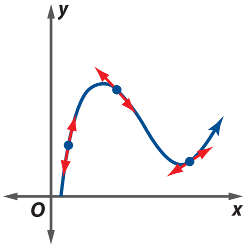
22. $f(x) = (x - 2)^3$
23. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 8}$
24. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
25. $f(x) = x^2 - 16$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
معدل التغير عند نقطة

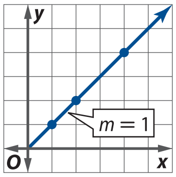
الهدف

- تقريب معدل تغير الدالة عند نقطة.

حساب *التفاضل* هو فرعٌ من فروع حساب التفاضل والتكامل يركّز على معدّلات تغيّر الدوال عند نقاطٍ وحيدة. لقد تعلمت حساب المعدل الثابت للتغير، أو الميل، في الدوال الخطية ومتوسط معدل التغيير في الدوال غير الخطية. يمكنك باستخدام حساب التفاضل تحديد معدّل التغيير *الدقيق* لأيّ دالةٍ عند نقطةٍ وحيدة، وذلك وفق ما تمثّله ميول خطوط المماس في الشكل الموضح على اليسار.



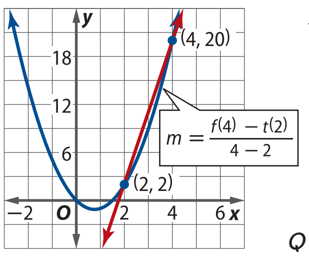
إن معدّل التغيّر الثابت لدالةٍ خطيةٍ لا يمثل ميل التمثيل البياني بين نقطتين فحسب، بل يمثّل أيضًا المعدّل *الدقيق* لتغيّر الدالة عند كل نقطةٍ من نقاطها. على سبيل المثال، لاحظ في الشكل على اليسار أن الميل m للدالة يساوي 1. وتشير هذه القيمة أيضًا إلى المعدل *الدقيق* التي تتغير وفقه الدالة عند أي نقطةٍ من مجالها. وهذا ما يركّز عليه حساب التفاضل.



يمثّل متوسط معدل تغيير دالةٍ غير خطيةٍ بميل مستقيم مرسوم بين أي نقطتين على التمثيل البياني للدالة. ويدعى هذا المستقيم *بالمستقيم القاطع*. وهذا الميل ليس معدّل التغيّر الدقيق للدالة عند أي نقطةٍ وحيدة. ولكننا يمكن أن نستخدم هذه العملية لتعطينا تقريبًا لمعدّل التغيّر اللحظي.

النشاط 1 تقريب معدل التغير

قدّر معدّل التغير التقريبي لـ $f(x) = 2x^2 - 3x$ عند $x = 2$.



الخطوة 1 مثّل الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x$ بيانيًا وارسم النقطة $P = (2, f(2))$.

الخطوة 2 ارسم قاطعًا يمر بالنقطتين $P = (2, f(2))$ و $Q = (4, f(4))$.

الخطوة 3 احسب متوسط معدّل التغير m للدالة $f(x)$ باستخدام P و Q، على النحو الموضح في الشكل.

الخطوة 4 كرّر الخطوات من 1 إلى 3 أربع مراتٍ أخرى. واستخدم $Q = (3, f(3))$ و $Q = (2.5, f(2.5))$ و $Q = (2.25, f(2.25))$ و $Q = (2.1, f(2.1))$.

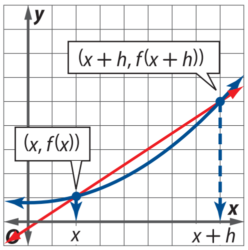
تحليل النتائج

1. عندما Q تقارب P. فماذا يقارب متوسط معدل التغير m ؟
2. يمكن أن يعطي استخدام قاطعٍ لتقدير معدل تغيير نقطةٍ نتائج متباينة. فخمّن متى تؤدي هذه العملية إلى تقديراتٍ دقيقة.

وفي حساب التفاضل، نعبر عن معادلة متوسط معدل التغير بدلالة x وبدلالة المسافة الأفقية h بين النقطتين اللتين تحددان المستقيم القاطع.

النشاط 2 الحساب التقريبي لمعدل التغير

اكتب صيغةً عامةً لإيجاد الميل m لأي قاطع. واستخدم هذه الصيغة لتقدير معدل تغيير $f(x) = 2x^2 - 3x$ عند $x = 2$.



الخطوة 1 اكتب تعبيرًا لإيجاد متوسط معدل التغير في الشكل المبيّن على اليسار. حيث يدعى هذا التعبير ناتج قسمة الفرق.

الخطوة 2 استخدم ناتج قسمة الفرق لتقدير معدّل تغيّر $f(x)$ عند $x = 2$. وليكن $h = 0.4$ و 0.25 و 0.1.

تحليل النتائج

3. عندما تقترب قيمة h أكثر فأكثر من 0. فمّم يقرب متوسط معدل التغير؟
4. مثّل بيانيًا $f(x)$ والمستقيم القاطع الذي ينشأ عندما $h = 0.1$.
5. إلامَ يتحوّل المستقيم القاطع عندما تقترب h من 0؟
6. خمّن معدل تغير دالةٍ عند نقطةٍ بناءً على إجابتك عن السؤال السابق.

يمكننا استخدام ناتج قسمة الفرق لإيجاد معدل التغير *الدقيق* لدالة عند نقطة وحيدة.

النشاط 3 حساب معدل التغير

استخدم ناتج قسمة الفرق لحساب المعدّل *الدقيق* لتغير $f(x) = 2x^2 - 3x$ عند النقطة $x = 2$.

الخطوة 1 عوّض $x = 2$ في ناتج قسمة الفرق كما هو موضح.

$$m = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

الخطوة 2 فكّك ناتج قسمة الفرق عبر إيجاد قيمته بالنسبة لـ $f(2 + h)$ و $f(2)$.

$$m = \frac{[2(2+h)^2 - 3(2+h)] - [2(2)^2 - 3(2)]}{h}$$

الخطوة 3 بسّط التعبير. ستحتاج في مرحلةٍ ما إلى تحليل h في البسط إلى عوامل ومن ثم الاختزال.

الخطوة 4 جد معدّل التغير الدقيق للدالة $f(x)$ عند $x = 2$ عبر تعويض $h = 0$ في تعبيرك.

تحليل النتائج

7. قارن معدل التغير الدقيق الذي وَجَدتَه في الخطوة 4 مع معدلات التغير السابقة التي وَجَدتَها.
8. ماذا يحدث للمستقيم القاطع لـ $f(x)$ في $x = 2$ عندما $h = 0$؟
9. اشرح عملية حساب معدل التغير الدقيق لدالة عند نقطة باستخدام ناتج قسمة الفرق.

النموذج والتطبيق

10. ستقدّر في هذه المسألة معدّل التغيّر على نحو التقريب وستحسب المعدّل الدقيق لـ $f(x) = x^2 + 1$ عند $x = 1$.
   a. قدّر معدّل تغير الدالة $f(x)$ عند $x = 1$ عبر حساب متوسط معدل التغير للمستقيمات القاطعة الثلاثة لـ $f(3)$ و $f(2)$ و $f(1.5)$. مثّل بيانيًا الدالة $f(x)$ والمستقيمات القاطعة الثلاثة على المستوى الإحداثي نفسه.
   b. قدّر معدّل تغير الدالّة $f(x)$ عند $x = 1$ عبر استخدام ناتج قسمة الفرق وثلاث قيمٍ مختلفةٍ لـ h. لتكن $h = 0.4$ و 0.25 و 0.1.
   c. احسب معدل التغير الدقيق للدالة $f(x)$ عند $x = 1$ أولاً من خلال تقدير ناتج قسمة الفرق لـ $f(1 + h)$ و $f(1)$ ومن ثم تعويض $h = 0$؛ اتّبع الخطوات المذكورة في النشاط 3.