Grade 12 General

Math Department

Power, Polynomial, and Rational Functions

Chapter 2

Mr/ Mohamed Taha
0566151988

2022-2023

1- Graph and analyze power functions.
2- Graph and analyze radical functions, and solve radical equations.

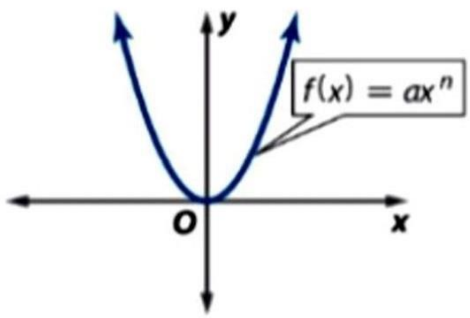
1- تمثيل دوال القوة بيانياً وتحليلها.
2- تمثيل الدوال الجذرية بيانياً وتحليلها.

Key Concept **Monomial Functions** الدوال أحادية الحد

Let f be the power function $f(x) = ax^n$, where n is a positive integer

لنفترض أن f دالة قوة بحيث $f(x) = ax^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب

n Even عدد زوجي, a Positive عدد موجب



Domain المجال: $(-\infty, \infty)$ Range المدى : $[0, \infty)$

x- and y-Intercept: 0 التقاطع مع المحورين x و y

continuity: continuous for $x \in \mathbb{R}$

الاتصال : متصلة علي $x \in \mathbb{R}$

Symmetry : y-axis التناظر : المحور الرأسي y

Minimum القيمة الصغرى : (0, 0)

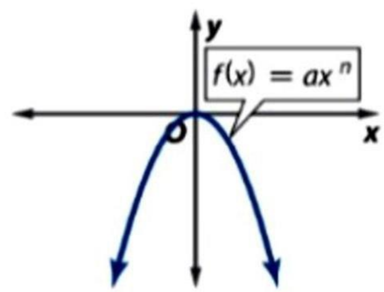
Decreasing متناقصة: $(-\infty, 0)$

Increasing متزايدة: $(0, \infty)$

End behavior السلوك الطرفي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

n Even عدد زوجي, a Negative عدد سالب



Domain المجال : $(-\infty, \infty)$ Range المدى: $(-\infty, 0]$

x- and y-Intercept: 0

التقاطع مع المحورين x و y

continuity: continuous for $x \in \mathbb{R}$

الاتصال : متصلة علي $x \in \mathbb{R}$

Symmetry : y-axis

التناظر : المحور الرأسي y

Maximum القيمة العظمى: (0, 0)

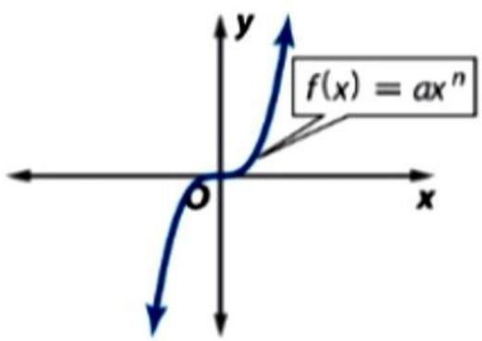
Decreasing متناقصة : $(0, \infty)$

Increasing متزايدة: $(-\infty, 0)$

End behavior السلوك الطرفي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

n Odd عدد فردي , a Positive عدد موجب



Domain and range المجال و المدى : $(-\infty, \infty)$

x- and y-Intercept: 0

التقاطع مع المحورين x و y

continuity: continuous on $(-\infty, \infty)$

الاتصال : متصلة في $(-\infty, \infty)$

Symmetry التناظر : origin نقطة الأصل

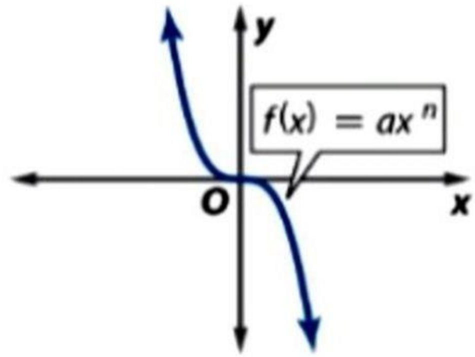
Extrema القيم القصوى: none لا يوجد

Increasing متزايدة: $(-\infty, \infty)$

End behavior السلوك الطرفي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

n Odd عدد فردي, a negative عدد سالب



Domain and range المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

x- and y-Intercept: 0

التقاطع مع المحورين x و y

continuity: continuous for $x \in \mathbb{R}$

الاتصال : متصلة علي $x \in \mathbb{R}$

Symmetry التناظر : origin نقطة الأصل

Extrema القيم القصوى: none لا يوجد

decreasing تزايد : $(-\infty, \infty)$

End behavior السلوك الطرفي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \ \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Graph and analyze each function. Describe the domain, range, intercepts, end behavior, continuity, and where the function is increasing or decreasing.

مثل كل دالة بيانياً وحللها، وضح المجال والمدي والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال ، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^5$

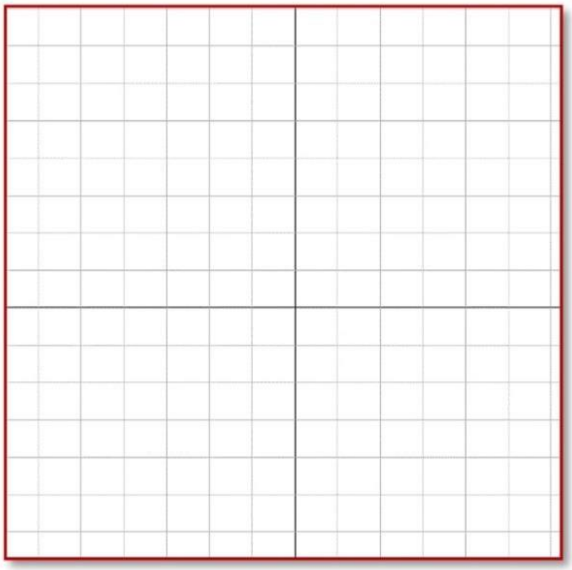
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							

2) $f(x) = -x^7$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							



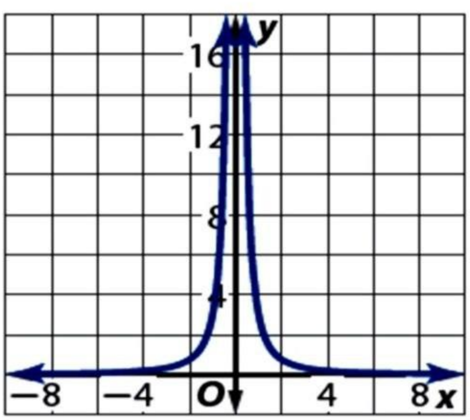
....
....
....
....
....
....

✍ مثل كل دالة بيانياً وحللها ، وضح المجال والمدي والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال ، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

✍ **Graph and analyze each function. Describe the domain, range, intercepts, end behavior, continuity, and where the function is increasing or decreasing.**

a. $f(x) = 3x^{-2}$

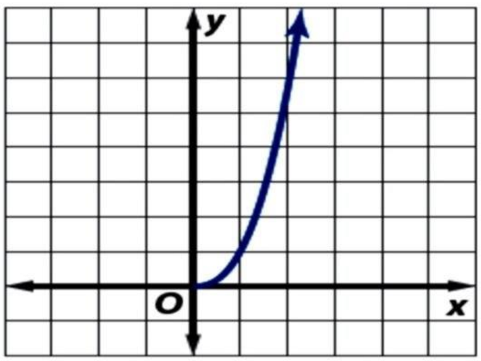
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							



....
....
....
....
....
....

b. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

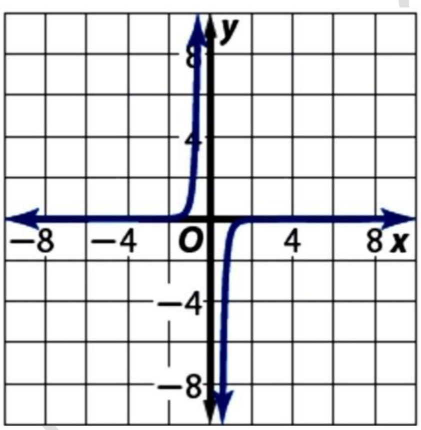
X	0	1	2	3	4	5	6
F(x)							



....
....
....
....
....
....

c. $f(x) = -\frac{3}{4}x^{-5}$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							



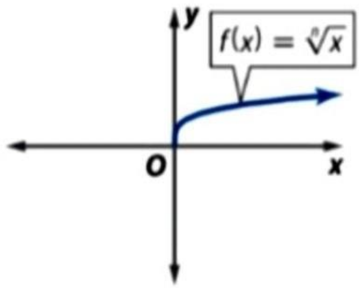
....
....
....
....
....
....

Key Concept Radical Functions الدوال الجذرية

Let f be the radical function f(x) = $\sqrt[n]{x}$ where n is a positive integer

لنفترض أن f دالة جذرية $\sqrt[n]{x}$ حيث n عدد صحيح موجب.

n Even عدد زوجي



Domain and range المجال والمدي : $[0, \infty)$

x- and y-Intercept: 0

تقاطع المحورين x و y

continuity: continuous on $[0, \infty)$

الاتصال : متصلة في $[0, \infty)$

Symmetry التناظر : noneلا يوجد

Extrema: absolute minimum at (0, 0)

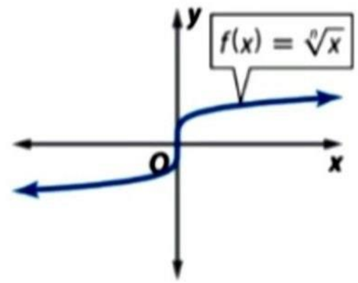
القيم القصوي : القيمة الصغري المطلقة عند (0, 0)

Increasing متزايدة : (-0, ∞)

End behavior السلوك الطرفي :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

n Odd عدد فردي



Domain and range المجال والمدي : $(-\infty, \infty)$

x- and y-Intercept: 0

تقاطع المحورين x و y

continuity: continuous on $(-\infty, \infty)$

الاتصال : متصلة في $(-\infty, \infty)$

Symmetry التناظر : origin نقطة الاصل

Extrema القيم القصوي : noneلا يوجد

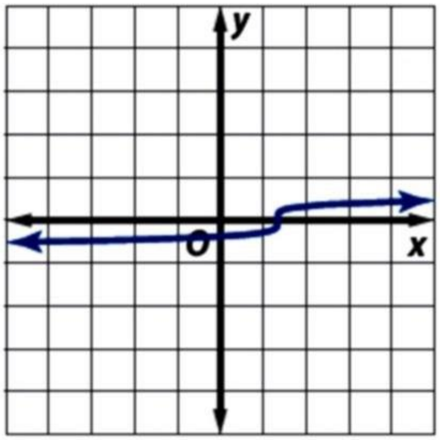
Increasing متزايدة : (- ∞, ∞)

End behavior السلوك الطرفي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \; and \; \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

a. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x-8}$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)							



b. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2x^3-16}$

X							
F(x)							

Solve radical equations حل المعادلات الجذرية

Solve each equation **حل كل من المعادلات التالية**

a. $x = \sqrt{2x-4} + 2$

....
....
....
....
....
....

b. $x = 5 + \sqrt{x+1}$

....
....
....
....
....
....

c. $3x = 3 + \sqrt{18x - 18}$

....
....
....
....
....
....

d. $2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

....
....
....
....
....
....

e. $\sqrt[3]{(x-5)^2} + 14 = 50$

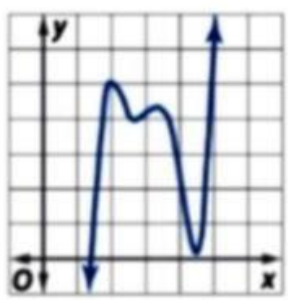
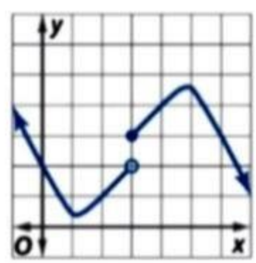
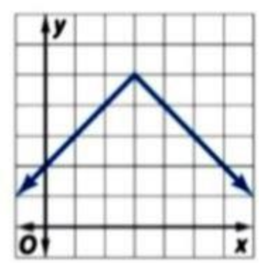
....
....
....
....
....
....

1- Graph polynomial functions.

1- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً.

2- Model real-world data with polynomial functions.

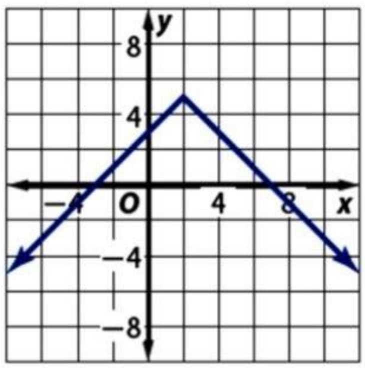
2- تمثيل البيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

Graphs of polynomial Functions التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود	
Example مثال	**None examples أمثلة خارجه عن التعريف**
	 
Polynomial functions are defined and continuous for all real numbers and have smooth, rounded turns. **الدوال كثيرة الحدود محددة ومتصلة لجميع الأعداد وبها منحنيات سلسلة دورانية.**	**Graphs of polynomial functions do not have breaks, holes, gaps, or sharp corners.** **لا يحتوي التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود علي فواصل أو فراغات أو فجوات أو زوايا حادة.**

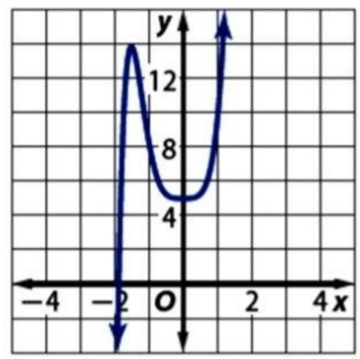
✍ Determine whether each graph could show a polynomial function. Write yes or no. If not, explain why not.

✍ حدد هل يمكن أن يوضح كل تمثيل بياني دالة كثيرة الحدود ، اكتب نعم أو لا ، وإذا كانت الإجابة هي لا ، فاشرح السبب.

a)



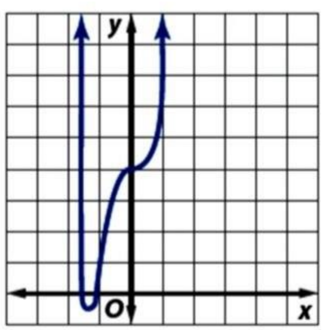
b)



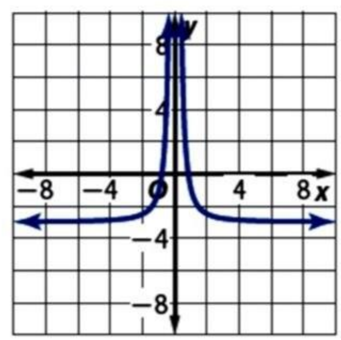
....

....

c)



d)



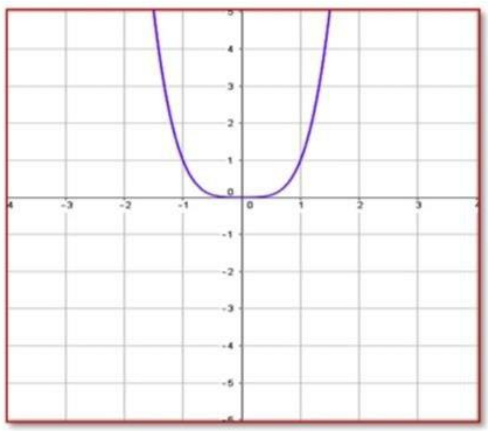
....

....

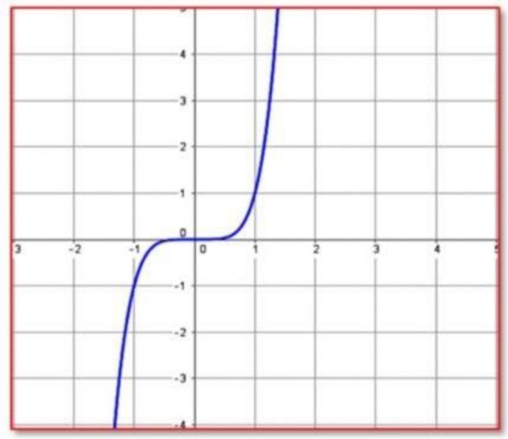
✍ **graph each function.**

✍ **ارسم كل دالة.**

a. $g(x) = -x^4 + 1$



b. $f(x) = (x-2)^5$



Key Concept **Leading Term Test For Polynomial End Behavior**

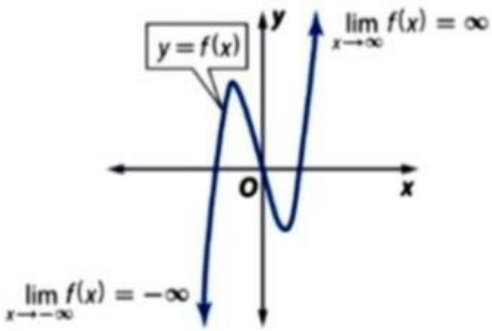
اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

The end behavior of any non-constant polynomial function $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ can be described in one of the following four ways, as determined by the degree n of the polynomial and its leading coefficient a_n.

يمكن وصف السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة حدود غير ثابتة $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ بإحدى الطرق الأربع التالية كما هو محدد بالدرجة n للدالة كثيرة الحدود ومعامل الحد الرئيس لها a_n.

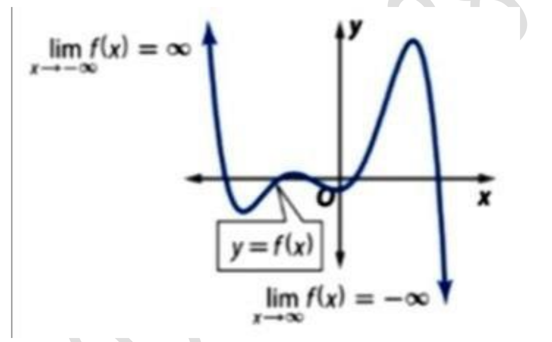
n Odd عدد فردي, a_n Positive عدد موجب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$



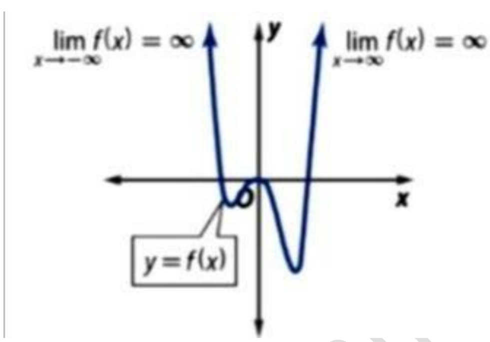
n Odd عدد فردي, a_n Negative عدد سالب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$



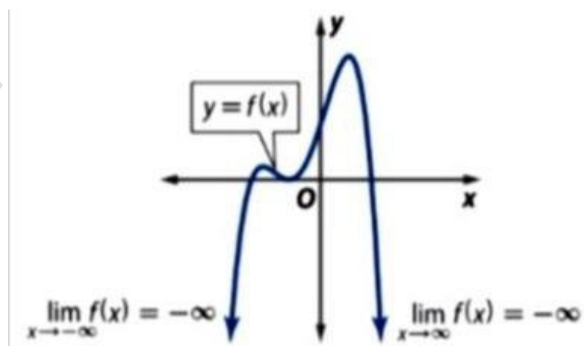
n even عدد زوجي , a_n Positive عدد موجب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$



n Even عدد زوجي, a_n Negative عدد سالب

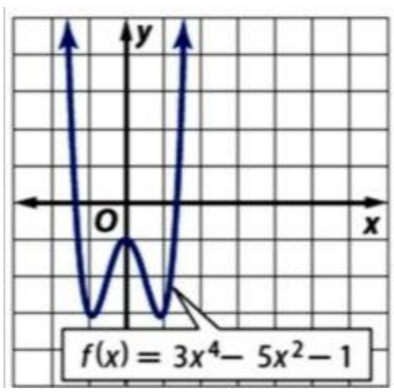
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ and \ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$



✍ Describe the end behavior of the graph of each polynomial function using limits. Explain your reasoning using the leading term test.

✍ وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود ، اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

a. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$



....
....
....
....
....

b. $g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

c. $h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

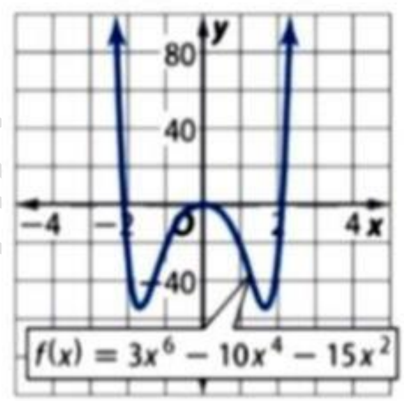
....
....
....

Key Concept **Zeros and Turning Points of Polynomial Functions**

الأصفار ونقاط الدوران للدوال كثيرة الحدود

A polynomial function f of degree $n \geq 1$ has at most n distinct real zeros and at most n – 1 turning points.

تحتوي الدالة كثيرة الحدود f من الدرجة $n \geq 1$ علي n من الأصفار الحقيقية المختلفة علي أكثر تقدير وعلي n – 1 من نقاط الدوران علي أكثر تقدير.



Example
مثال

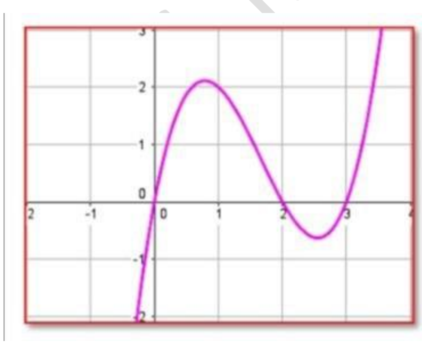
Let $f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$. Then f has at most 6 distinct real zeros and at most 5 turning points. The graph of f suggests that the function has 3 real zeros and 3 turning points.

لنفرض أن $f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$ فالدالة f تحتوي علي 6 أصفار حقيقية مختلفة علي الأكثر و 5 نقاط دوران علي الأكثر.
يوضح التمثيل البياني للدالة f أن الدالة تحتوي علي 3 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران.

✍ State the number of possible real zeros and turning points of $f(x)$. Then determine all of the real zeros by factoring.

✍ أذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة f(x) ، ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلي عوامل.

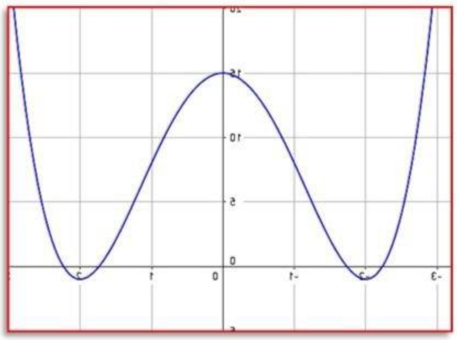
a. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$



....
....
....
....
....

✍ State the number of possible real zeros and turning points of $f(x)$. Then determine all of the real zero by factoring.

✍ اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة ، ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلي العوامل.



$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$$

....

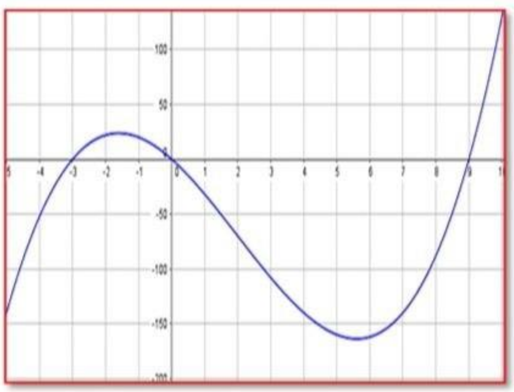
....

....

....

....

....



$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

....

....

....

....

....

....

$$g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x.$$

....

....

....

....

....

....

Key Concept **Repeated Zeros of Polynomial Functions** الأصفار المُكررة للدوال كثيرة الحدود

If $(x-c)^m$ is the highest power of $(x-c)$ that is a factor of polynomial function f, then c is a zero of multiplicity m of m, where m is a natural number.

- If a zero c has odd multiplicity, then the graph of f crosses the x-axis at x = c and the value of f(x) changes signs at x = c.
- If a zero c has even multiplicity, then the graph of f is tangent to the x-axis at x = c and the value of f(x) does not change signs at x = c.

بما أن $(x-c)^m$ أكبر قيمة أسية في (x-c) التي تعد عاملاًللدالة كثيرة الحدود f ، إذا c صفراً مُكرراً m مرة في f ، بحيث يكون m عدداً طبيعياً.

- إذا وُجد صفر c له تكرار فردي فإن التمثيل البياني للدالة f يقطع المحور الأفقي x عند x=c ويغير قيمة f(x) الإشارة عند x = c .
- إذا وُجد صفر c له تكرار زوجي ، فإن التمثيل البياني للدالة f يصبح مماساً للمحور الأفقي x عند x = c ولا تغير قيمة f(x)الإشارة عند x = c .

For each function, (a) apply the leading-term test, (b) determine the zeros and state the multiplicity of any repeated zeros, (c) find a few additional points, and then (d) graph the function.

فيما يتعلق بالدالة ، (a) طبق اختبار الحد الرئيس ، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة ، (c) جد بعض النقاط الإضافية ، (d)مثل الدالة بيانياً.

a. $f(x) = -2x\,(x-4)(3x-1)^3$

....

....

....

....

....

....

$b.\quad f(x) = x\,(2x+3)(x-1)^2$

....
....
....
....
....
....

Find a polynomial function of degree n with only the following real zeros. More than one answer is possible.

جد دالة كثيرة الحدود من الدرجة n تحتوي علي الأصفار الحقيقية التالية فقط ، قد تكون أكثر من إجابة.

a. 6, -3: $n = 4$.

....
....
....

b. 2, 1, 4: $n = 5$.

....
....
....

c. لا توجد أصفار حقيقية $n = 4$.

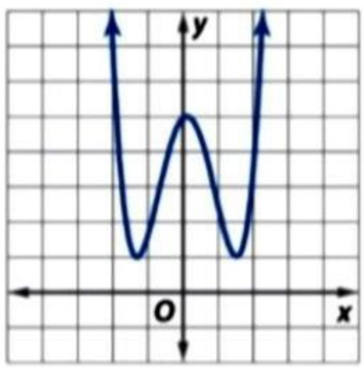
....
....
....

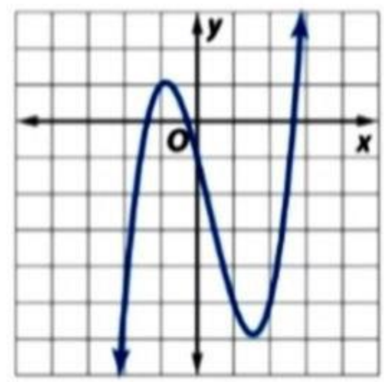
d. -1; $n = 3$.

....
....
....

✍ **Determine whether the degree n of the poly nomial for each graph is even or odd and wheter its leading coefficient a_n is positive or negative.**

✍ **حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الرئيس فيها a_n موجباً أم سالباً.**





....

....

....

....

Outcomes نواتج التعلم The reminder and factor Theorems نظريتا الباقي والعامل 2-3

1- Divide polynomials using long division and synthetic division.
2- Use the reminder and factor theorems.

1- قسمة الدوال كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
2- استخدام نظريتي الباقي والعامل.

✍ Factor $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ completely using long division if (x-3) is a factor.

✍ حلِّل $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ بالكامل إلي العوامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان (x – 3) عاملاً.

....
....
....
....
....
....
....
....

✍ Factor each polynomial completely using the given factor and long division.

✍ حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطي والقسمة المطوَّلة.

$a.\ (8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

....
....
....
....
....
....
....
....

$b.\ \ x^3 - 7x^2 + 4x - 12; x + 6$

....
....
....
....
....
....

$c.\ \ 6x^3 - 2x^2 - 16x - 8; 2x - 4$

....
....
....
....
....
....

Synthetic division القسمة التركيبية

a. $(6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7) \div (3x + 1)$

....
....
....
....
....
....

$b.\ \ (4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3)$

....
....
....
....
....
....

$c.\ (10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \quad \div \quad (2x - 3)$

....
....
....
....
....
....

$d.\ (2x^4 - 5x^2 + 5x - 2\ ) \quad \div (x + 2)$

....
....
....
....
....
....

Key Concept **Reminder Theorem** **نظرية الباقي**

If a polynomial f(x) is divided by x – c, the reminder is r = f(c).

إذا كانت الدالة كثيرة الحدود f(x) مقسومة على x – c فإن الباقي هو r = f(c) .

$$f(x) = (\ x - c) \times q(x) + r$$

Key Concept **Factor Theorem** **نظرية العامل**

A polynomial f(x) has a factor (x – c) if and only if f (c)=0 .

يكون للدالة كثيرة الحدود f(x)العامل (x – c) فقط في حالة f(c) = 0.

Use the factor theorem to determine if the binomials given are factors of $f(x)$. Use the binomials that are factors to write a factors form of $f(x)$.

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.

a. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 22x + 24; (x-2), (x+5)$

....

....

....

....

....

....

b. $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3 \quad , (x+3), (x-1)$

....

....

....

....

....

....

c. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20 \quad , \quad (x+4), (x-5)$

....

....

....

....

....

....

✍ **FOOTBALL** **The number of tickets sold during the Northside High School football season can be modeled by**

$$t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74,$$

where x is the number of games played. Use the Remainder Theorem to find the number of tickets sold during the twelfth game of the Northside High Scholl football season.

✍ **كرة القدم يمكن تمثيل عدد التذاكر المبيعة أثناء موسم كرة القدم باستخدام**

$$t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$$

حيث إن x هو عدد المباريات التي تم لعبها ، استخدم نظرية الباقي لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشر بموسم كرة القدم.

....

....

....

....

....

✍ **Find the value of k so that each remainder is zero.**

✍ **جِد k بحيث يحتوي الناتج علي باقي صفر .**

$a.$ $\dfrac{x^3 - kx^2 + 2x - 4}{x - 2}$

....

....

....

....

....

$b.$ $\dfrac{x^3 + 4x^2 - kx + 1}{x + 1}$

....

....

....

....

....

....

Outcomes نواتج التعلم Zeros of Polynomial Functions أصفار الدوال كثيرة الحدود 2-4

1- Find real zeros of polynomial functions.
2- Find complex zeros of polynomial functions.

1- إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.
2- إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

1 Real zeros Recall that a polynomial function of degree n can have at most n real zeros. These real Zeros are either rational or irrational.

1 الأصفار الحقيقية تذكَر أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي علي n من الأصفار الحقيقية. ويمكن أن تكون هذه الأصفار الحقيقة نسبية أو غير نسبية.

Rational Zeros الأصفار النسبية	Irrational zeros الأصفار غير النسبية
$F(x) = 3x^2 + 7x - 6$ or $f(x) = (x + 3)(3x-2)$ These are two rational zeros, -3 or $\frac{2}{3}$.	$G(x) = x^2-5$ or $g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ There are two irrational zeros, $\pm\sqrt{5}$.
$F(x) = 3x^2 + 7x - 6$ or $f(x) = (x + 3)(3x-2)$ يوجد صفران نسبيان -3 or $\frac{2}{3}$.	$G(x) = x^2-5$ or $g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ يوجد صفران غير نسبيين $\pm\sqrt{5}$.

✍ List all possible rational zeros of each function. Then determine which, if any, are zeros.

✍ اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة ، ثم حدد أياً منها أصفاراً ، إن وجدت.

1. $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21$

....
....
....
....
....

2. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

4. $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

5. $h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$

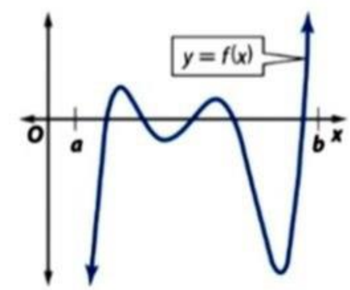
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

6. $h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

One way to narrow the search for real zeros is to determine an interval within which all real zeros of a function are locates. A real number a is a lower bound for the real zeros of f if $f(x) \neq 0$ for $x < a$, similarly, b is an upper bound for the real zeros of f if $f(x) \neq 0$ for $x > b$.

ثمة طريقة لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية وهي تحديد الفترة التي يتم تحديد مواقع الأصفار الحقيقية للدالة. العدد الحقيقي a هو القيمة الصغري للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x < a$ وبالمثل ، b هو القيمة العظمي للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x > b$



The real zeros of f are in the interval [a, b].

Key Concept Upper and Lower Bound Tests. اختبارات القيمتين العظمي والصغري

Let f be a polynomial function of degree $n \geq 1$, real coefficients, and a positive leading coefficient. Suppose f(x) is divided by x – c using synthetic division.

- If $c \leq 0$ and every number in the last line of the division is alternately nonnegative and nonpositive, then c is a lower bound for the real zeros of f.
- If $c \geq 0$ and every number in the last line of the division is nonnegative, then c is an upper bound for the real zeros of f.

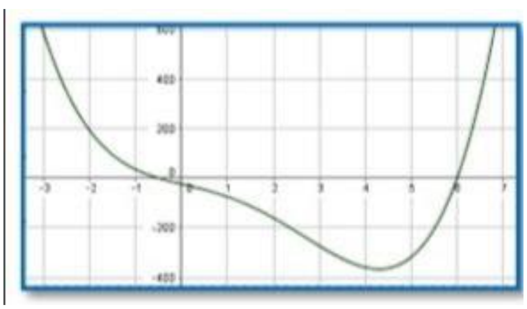
لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية و a معامل الحد الرئيس موجب ، لنفرض أن f(x) تمت قسمته علي x – c باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في أخر سطر بالقسمة تتبدل الاشارة بين غير سالب ، وغير موجب ، فإن c هي قيمة صغري للأصفار الحقيقية للدالة f.
- إذ كان $c \geq 0$ وكل عدد في اخر سطر بالقسمة غير سالب ، فإن c هي قيمة عظمي للأصفار الحقيقية للدالة f.

✍ determine an interval in which all real zeros of $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ must lie.
Explain your reasoning using the upper and lower bound tests. Then find all the real zeros.

✍ حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ ، اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغري ، ثم جد كل الأصفار الحقيقة.

$$h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$$



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Key Concept **Descartes' Rules of Signs** **قاعدة ديكارت للإشارات**

If $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots. + a_1x + a_0$ is a polynomial function with real coefficients, then

- The number of positive real zero of f is equal to the number of variations in sign of f(x) or less than that number by some even number and
- The number of negative real zeros of f is the same as the number of variations in sign of f(-x) or less than that number by some even number.

إذا كانت $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots. + a_1x + a_0$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية ، فإن

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة f يساوي عدد تغيرات الإشارة للدالة f(x) أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي .
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة f يساوي عدد تغيرات الإشارة للدالة f(-x) أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي محدد.

✍ **Describe the possible real zeros of** ✍ وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لـ

a. $f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

……
……
……
……

b. $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$

……
……
……
……

c. $h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

……
……
……
……

Outcomes نواتج التعلم Rational Functions الدوال النسبية 2-5

1- Analyze and graph rational functions.
2- Solve rational equations.

1- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانياً.
2- حل المعادلات النسبية.

1 Rational Functions

A rational function $f(x)$ is the quotient of two polynomial functions $a(x)$ and $b(x)$, where b s nonzero

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}, b(x)\neq 0$$

1- الدوال النسبية

الدالة النسبية $f(x)$ تساوي ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود a(x) و b(x) ، حيث b لا يساوي صفراً.

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}, b(x)\neq 0$$

Key Concept Vertical and Horizontal Asymptotes خطوط التقارب الرأسية والأفقية

Words التوضيح بالكلمات

The line x = c is a vertical asymptote of the graph of f if

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty \text{ or } \lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$$

X=c هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان

$$\text{or } \lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$$

Words التوضيح بالكلمات

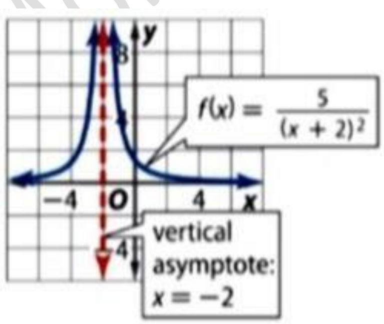
The line y = c is a horizontal asymptote of the graph of if

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \ or \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

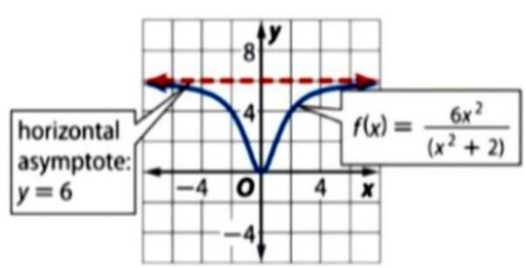
Y=c هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \ or \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

Example مثال



Example مثال



✍ Find the domain of each function and the equations of the vertical or horizontal asymptotes if any.

✍ جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية ، إن وُجدت.

$$f(x) = \frac{x+4}{x-3}$$

……
……
……
……
……

Key Concept **Graphs of Rational Functions** التمثيلات البيانية للدوال النسبية

If the rational function given by

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + .. + b_0 x + b_0}$$

Where $b(x) \neq 0$ and a(x) and b(x) have no common factors other than ± 1, then graph of f has the following characteristics.

Vertical Asymptotes Vertical asymptotes may occur at the real zeros of b(x).

Horizontal Asymptote The graph has either one or no horizontal asymptotes as determined by comparing the degree n of a(x) to the degree m of b(x).

- If $n < m$, the horizontal asymptote is y = 0.
- If n = m, the horizontal asymptote is $y = \frac{a_n}{b_m}$.
- If $n > m$, there is no horizontal asymptote.

Intercepts The x-intercepts, if any, occur at the real zeros of a(x). The y-intercept, if it exist, is the value of f when x = 0.

إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقاً للمعطيات

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+..+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+..+b_0x+b_0}$$

حيث إن $b(x)\neq 0$ و a(x) و b(x) ليس لها عوامل مشتركة غير ± 1 ، إذا التمثيل البياني للدالةf له الخصائص التالية.

خطوط التقارب الرأسية قد تحدث خطوط التقارب الرأسية عند الأصفار الحقيقي للمعادلة b(x).

خطوط التقارب الأفقي قد يحتوي التمثيل البياني علي خط تقارب أفقي واحد أو لا يحتوي علي خط تقارب أفقي كما هو محدد بمقارنة الدرجة n من a(x) بالدرجة m من b(x).

- إذا كانت $n<m$ ، فإن خط التقارب الأفقي y=0.
- إذا كانت n=m ، فإن خط التقارب الأفقي $y=\frac{a_n}{b_m}$.
- إذا كانت $n>m$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

نقاط التقاطع تقع نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x ، إن وُجدت ، عند الأصفار الحقيقية للمعادلة a(x) ، يكون التقاطع مع المحور الرأسي y ، إن وُجد ، هو قيمة الدالة F عندم x=0 .

To graph a rational function, simplify f , if possible, and then follow these steps.

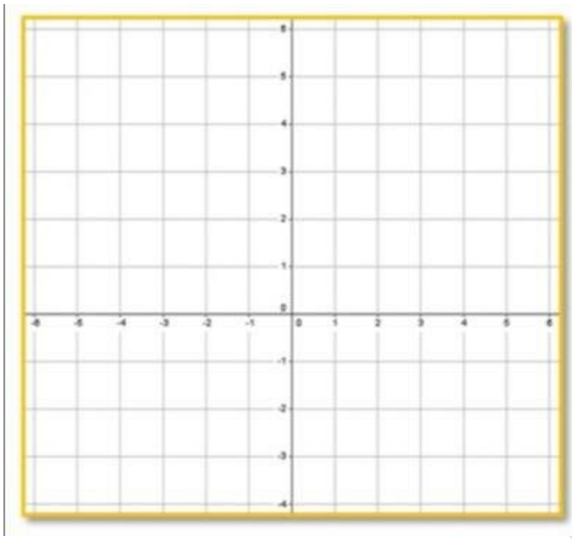
لتمثيل دالة نسبياً بيانياً ، بسط f ، إن أمكن ، ثم اتبع هذه الخطوات.

Step 1 الخطوة 1	Find the domain. جد المجال
Step 2 الخطوة 2	Find and sketch the asymptotes, if any. جد مجال خطوط التقارب وارسمها ، إن وُجدت.
Step 3 الخطوة 3	Find and plot the x-intercepts and y-intercept, if any. جد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y وارسمها ، إن وُجدت.
Step 4 الخطوة 4	Find and plot at least one point in the test intervals determined by any x-intercepts and vertical asymptotes. جد نقطة واحدة علي الأقل من فترات الاختبار المحددة بأي نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x وخطوط التقارب الرأسية وارسمها.

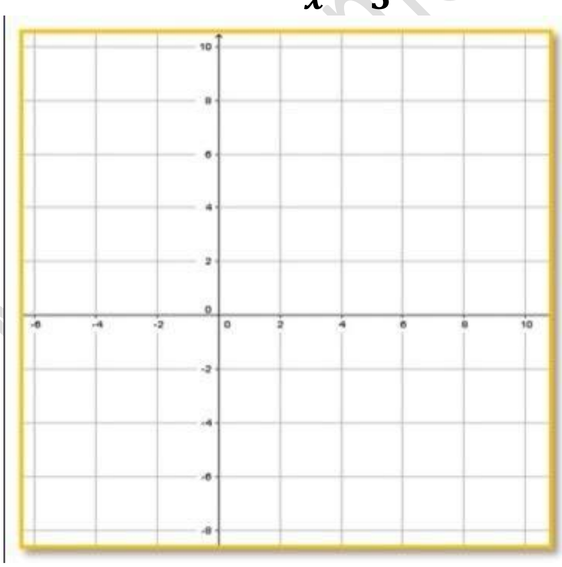
For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

في كل دالة ، حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع ، ثم مثّل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

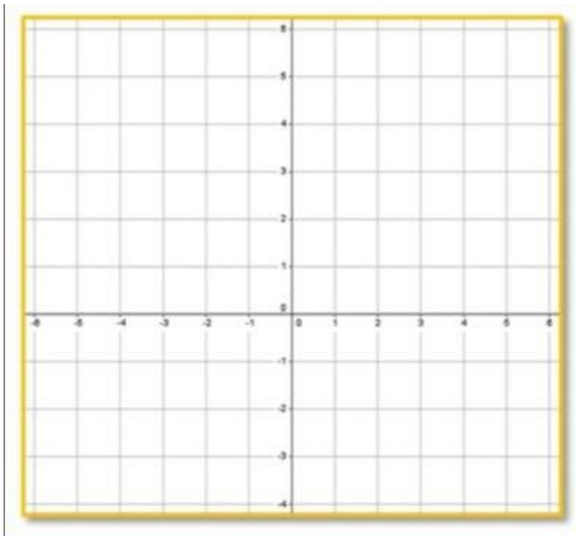
$$g(x) = \frac{6}{x+3}$$



$$k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$$



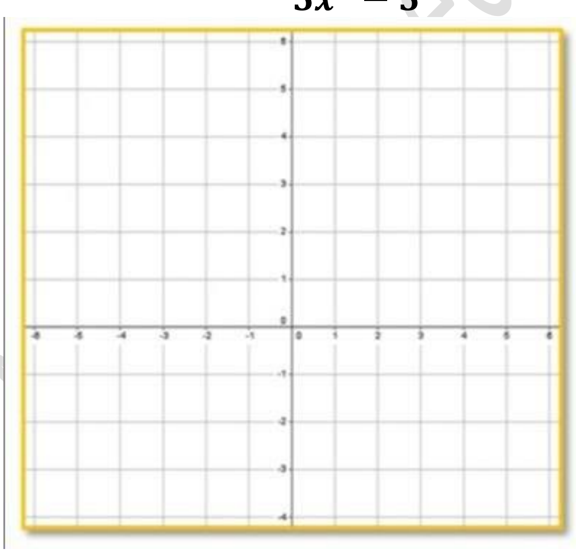
$$h(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$



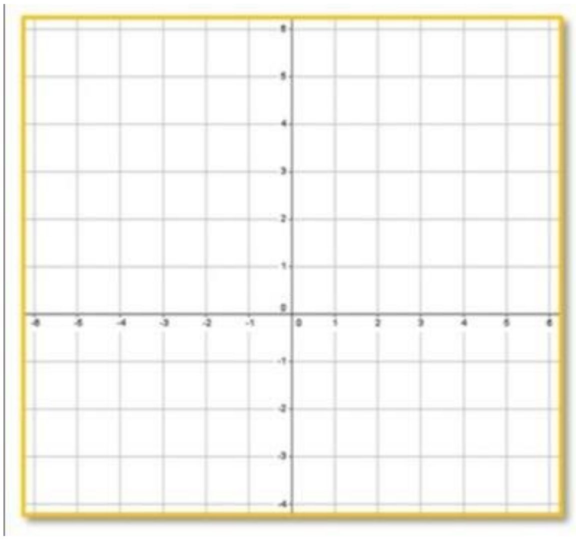
For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function and state its domain.

في كل دالة ، حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع ، ثم مثّل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 5}$$



$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$$



....
....
....
....
....
....
....
....

Key Concept **Oblique Asymptotes** **خطوط التقارب المائلة**

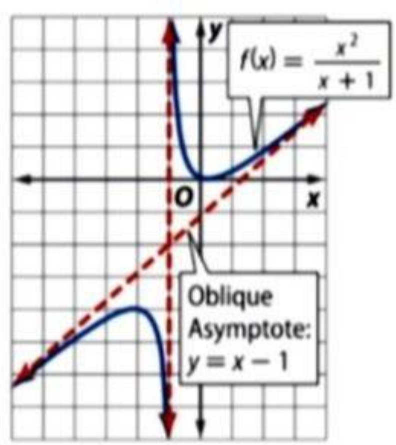
If f is the rational function given by

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + .. + b_0 x + b_0}$$

Where b(x) has a degree greater than 0 and a(x) and b(x) have no common factors other than 1, then the graph of f has an oblique asymptote if n = m +1. The function for the oblique asymptote is the quotient polynomial q(x) resulting from the division of a(x) by b(x).

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{q(x)}_{\text{Function for oblique asymptote}} + \frac{r(x)}{b(x)}$$

Example مثال



إذا كانت f هي الدالة المسبية وفقاً للمعطيات

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+..+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+..+b_0 x+b_0}$$

حيث إن b(x) لها درجة أكبر من صفر و a(x) ولا توجد عوامل مشتركة للمعادلتين b(x) غير 1 ، إذا التمثيل البياني للدالة f يحتوي علي خط تقارب مائل إذا كانت قيمى n = m +1 ، تكون دالة خط التقارب المائل هي ناتج قسمة كثيرات الحدود q(x) الناتج من قسمة a(x)علي b(x) .

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}=\underbrace{q(x)}+\frac{r(x)}{b(x)}$$

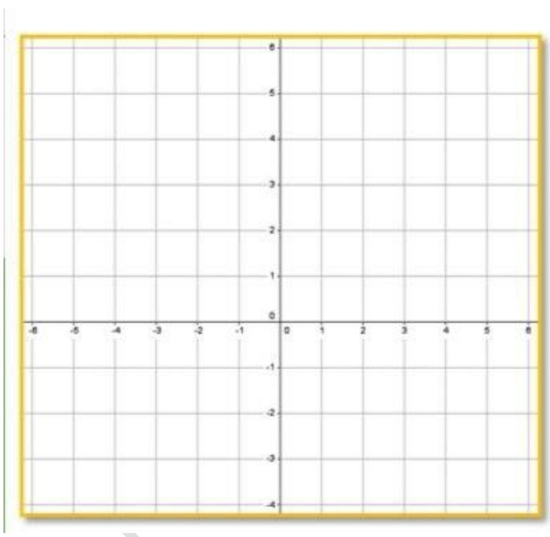
دالة خط التقارب المائل

✍ Determine any asymptotes and intercepts for $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+x-12}$. Then graph the function, and state.

✍ حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع للدالة

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2+x-12}$$

ثم مثل بيانيا واذكر مجالها.



....

....

....

....

....

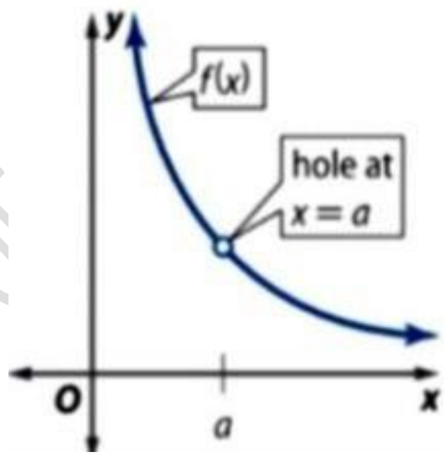
....

....

....

When the numerator and denominator of a rational function have common factors, the graph of the function has removable discontinuities called holes, at the zeros of the common factors. Be sure to indicated these points of discontinuity when you graph the function.

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-a)}(x-b)}{\cancel{(x-a)}(x-c)}$$



Divide out the common factor in the numerator and denominator. The zero of x -a is a.

عندما يكون لبسط الدالة النسبية ومقامها معاملات مشتركة. يكون للتمثيل البياني للدالة نقاط انفصال يمكن إزالتها تُسمي فجوات. عند النواتج الصفرية للعواكل المشتركة ، تأكد من توضيح نقاط الانفصال هذه عندما تقوم بتمثيل الدالة بيانياً.

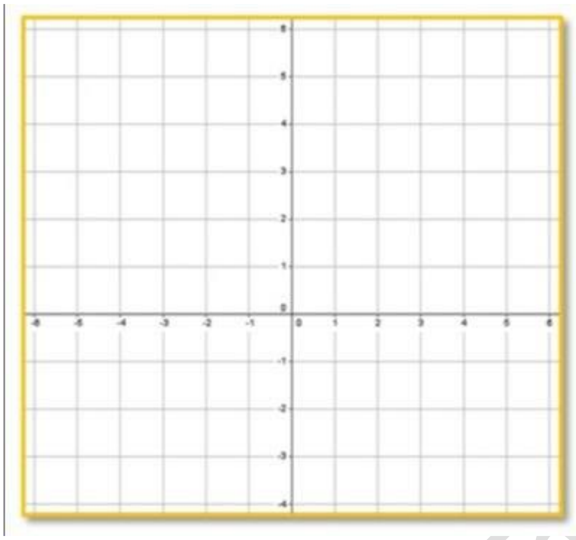
$$f(x)=\frac{\cancel{(x-a)}(x-b)}{\cancel{(x-a)}(x-c)}$$

اختصر العامل المشترك في البسط والنقام بالقسمة علي، يكون الناتج الصفري لـ a-x هو a .

✍ حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع للدالة ، ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

✍ **Determine any vertical and horizontal asymptotes, holes, and intercepts for $h(x)$. Then graph the function, and state its domain.**

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$$



Solve a Rational Equation حل المعادلات النسبية

✍ حل كل معادلة من المعادلات الأتية

✍ **Solve each equation.**

$a.\ \dfrac{9x}{x-2} = 6$

b. $x + \dfrac{6}{x-8} = 0$

....
....
....
....
....
....

c. $\dfrac{20}{x+3} - 4 = 0$

....
....
....
....
....
....

d. $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{3}{x-6} = \dfrac{27}{x^2 - 3x - 18}$

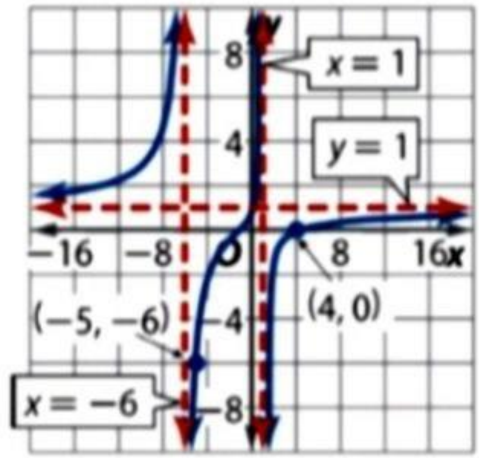
....
....
....
....
....
....

e. $\dfrac{4}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{2}{x-4}$

....
....
....
....
....
....

✍ use your knowledge of asymptotes and the provided points to express the function represented by each graph.

✍ استخدم معرفتك بخطوط التقارب والنقاط المذكورة للتعبير عن الدالة الموضحة في كل تمثيل بياني.



Outcomes نواتج التعلم Nonlinear Inequalities المتباينات غير الخطية 2-6

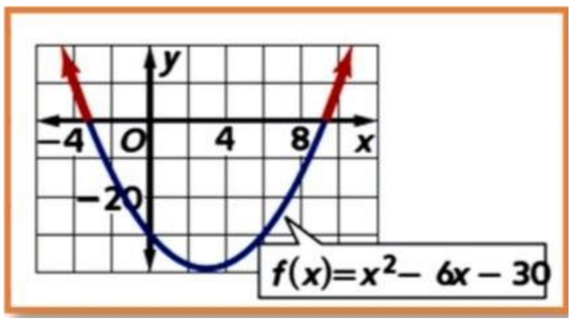
1- Solve polynomial inequalities.
2- Solve rational inequalities.

1- حل المتبانيات كثيرة الحدود.
2- حل المتباينات النسبية.

Solve each inequality

حل كل من المتباينات التالية

1. $x^2 - 6x - 30 > -3$



2. $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$

3. $x^2 + 5x + 6 < 20$

4. $2x^3 + 7x^2 - 12x - 45 \geq 0$

....
....
....
....
....

5. $2x^2 - 10x \leq 2x - 16$

....
....
....
....
....

Polynomial Inequalities With Unusual Solution sets

المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

Solve each inequality. حل كل من المتباينات التالية

1. $x^2 + 5x + 8 < 0$

....
....
....
....
....

2. $x^2 - 10x + 25 > 0$

....
....
....
....
....

3. $x^2 + 2x + 5 > 0$

....
....
....
....
....

4. $x^2 - 2x - 15 \leq -16$

....
....
....
....
....

5. $x^2 + 5x + 8 \geq 0$

6. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

7. $x^2 + 2x + 5 \leq 0$

8. $x^2 - 2x - 15 > -16$

Solve a Rational Inequality حل متباينة نسبية

Solve each inequality. حل كل متباينة

1. $\dfrac{x-3}{x+4} > 3$

2. $\dfrac{2x+1}{x-6} \geq 4$

....

....

3. $\dfrac{x+6}{x-5} \le 1$

....

....

....

....

....

....

....

4. $\dfrac{4}{x-6} + \dfrac{2}{x+1} > 0$

....

....

....

....

....

....

....