الوحدة 3

التفاضل

تعتبر مسابقة الماراثون إحدى أشهر مسابقات العدْو، وهي تمتد إلى مسافة 26 miles و385 yards فاز ستيفانو بالديني، من إيطاليا، بالماراثون الأولمبي لعام 2004 في مدة زمنية قدرها 2:10:55. باستخدام القانون المعروف باسم "المعدّل يساوي المسافة مقسومة على الزمن"، يمكننا حساب متوسط سرعة ستيفانو بالديني:

$$\frac{26+\frac{385}{1760}}{2+\frac{10}{60}+\frac{55}{3600}} \approx 12.0 \text{ mph}$$

يبيّن ذلك أن متوسط سرعة ستيفانو بالديني أقل من 5 دقائق لكل ميل بمسافة تمتد على 26 miles ومع ذلك، فاز جوستن جاتلين من الولايات المتحدة الأمريكية بسباق العدو لمسافة 100 m في 9.85 s. كما فاز شاون كراوفورد من الولايات المتحدة الأمريكية بسباق العدو لمسافة 200 m في 19.79 s. بلغت متوسّطات سرعات أولئك العدّائين

$$\frac{\frac{100}{1610}}{\frac{9.85}{3600}} \approx 22.7\,\text{mph} \quad \text{و} \quad \frac{\frac{200}{1610}}{\frac{19.79}{3600}} \approx 22.6\,\text{mph}$$

نظرًا لأن هاتين السرعتين أكبر بكثير من سرعة عدّاء الماراثون، فإن الفائزين بهذه المسابقات يُطلق عليهم "أسرع اشخاص في العالم".

يمكن عمل ربط مهم باستخدام تجربة فكرية. إذا كان الشخص نفسه قد ركض مسافة 200 m في 19.79 ثانية مع إنهاء أول 100 m خلال 9.85 s، فقارن بين متوسط سرعات المائة متر الأولى والثانية. في المائة متر الثانية، تكون المسافة التي تم ركضها $200 - 100 = 100$ متر والزمن $19.79 - 9.85 = 9.94$ s. إذًا، تكون السرعة المتوسطة هي

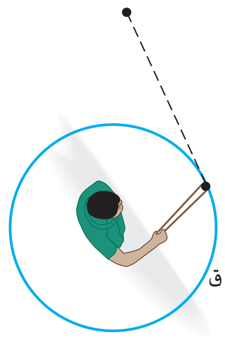
$$\frac{200 - 100}{19.79 - 9.85} = \frac{100}{9.94} \approx 10.06 \text{ m/s} \approx 22.5\,\text{mph}$$

لاحظ أن حساب السرعة باستخدام وحدة m/s هو نفسه مثل الحساب الذي يجب أن نستخدمه للميل بين النقاط (100, 9.85) و(200,19.79). الربط بين الميل والسرعة (وكميات أخرى مهمة) موضّح في هذه الوحدة.

الدرس

3-1 المماسات والسرعة المتجهة

يحمل المقلاع التقليدي صخرة على طرف حبله، بحيث تقوم بتدويره في حركة دائرية ثم تحرره. عندما تحرر الحبل، في أي اتجاه ستنطلق الصخرة؟ تم توضيح منظر رأسي لهذا في الشكل 3.1. يعتقد العديد من الأشخاص خطأً أن الصخرة ستتبع مسارًا منحنيًا، ولكن أول قانون للحركة قد وضعه نيوتن يخبرنا بأن المسار يكون مستقيمًا إذا تم النظر إليه من الأعلى. في الواقع، تسلك الصخرة مسارًا على طول المماس مع الدائرة عند نقطة الإطلاق. هدفنا في هذا الدرس هو توسيع فكرة المماس لكي تشمل المزيد من المنحنيات العامة.



الشكل 3.1
مسار الصخرة

لجعل مناقشتنا أكثر تحديدًا، على فرض أننا نريد إيجاد المماس للمنحنى $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(1, 2)$. (انظر الشكل 3.2). يلامس المماس المنحنى بالقرب من نقطة التماس. بكلمات أخرى، مثل المماس إلى الدائرة، للمماس هذا الاتجاه نفسه مثل المنحنى عند نقطة التماس. لاحظ أننا إذا قمنا بالتكبير بشكل كافٍ، يبدو التمثيل البياني أنه يقترب اكثر لينطبق مع المماس. في الشكل 3.3، نوضّح تمثيلًا بيانيًا لـ $y = x^2 + 1$، والذي تم تكبيره في مربع مستطيل صغير مُشار إليه في الشكل 3.2. والآن نختار نقطتين من المنحنى، على سبيل المثال $(1, 2)$ و$(3, 10)$، ونحسب ميل الخط الذي يربط بين هاتين النقطتين. يُطلق على مثل هذه الخطوط اسم القاطع، ويُرمز لميل القاطع بـ m_{sec}:

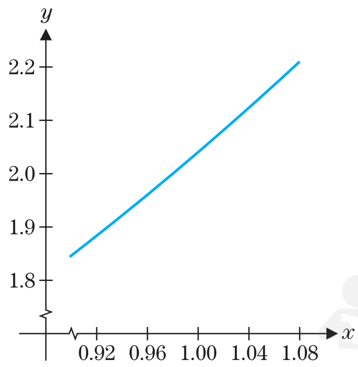
$$m_{\text{sec}} = \frac{10 - 2}{3 - 1} = 4$$

تحذير

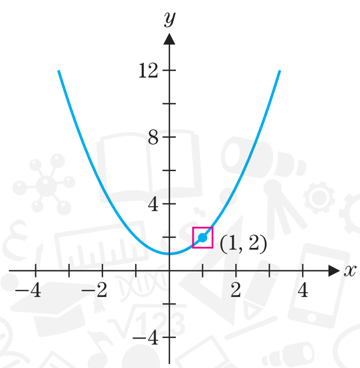
لاحظ أن "المحاور" التي تمت الإشارة إليها في الشكل 3.3 لا تتقاطع مع نقطة الأصل. نحن نوفرها فقط كإرشاد لك إلى المقياس المستخدَم لتصميم الشكل.

معادلة القاطع التي يتم تحديدها باستخدام

$$\frac{y-2}{x-1} = 4$$



الشكل 3.3
$y = x^2 + 1$



الشكل 3.2
$y = x^2 + 1$

ومنه نستنتج:
$$y = 4(x-1) + 2$$

ما يمكن ملاحظته في الشكل 3.4a هو أن القاطع لا يبدو كثيرًا انه مماس.

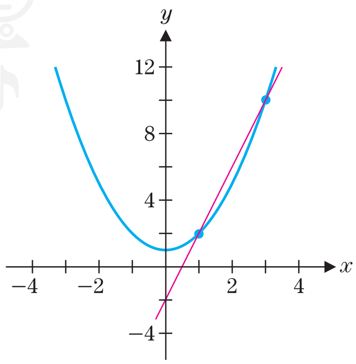
من أجل ايضاح هذا الإجراء، سنأخذ النقطة الثانية لتكون أقرب قليلًا من نقطة التماس، ليكن عند $(2, 5)$. يعطي ذلك ميل القاطع بالصيغة:

$$m_{\text{sec}} = \frac{5-2}{2-1} = 3$$

وتكون معادلة هذا القاطع $y = 3(x-1) + 2$. كما هو موضح في الشكل 3.4b. يشبه ذلك المماس بشكل أكبر ولكن ليس بالضبط. سنقوم باختيار النقطة الثانية لتكون أقرب إلى نقطة التماس، ليكن $(1.05, 2.1025)$. ينبغي أن يعطينا هذا تقريبًا أفضل. في هذه الحالة، فإنه لدينا

$$m_{\text{sec}} = \frac{2.1025-2}{1.05-1} = 2.05$$

تكون معادلة هذا القاطع $y = 2.05(x-1) + 2$. ما يمكن ملاحظته في الشكل 3.4c هو أنّ القاطع يبدو كثيرًا أنه مماس، حتى عند التكبير لدرجة كبيرة، كما هو واضح في الشكل 3.4d. سنتابع ذلك الإجراء



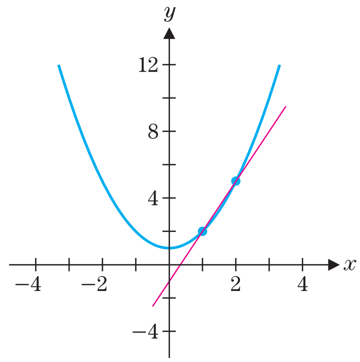
الشكل 3.4a
القاطع الذي يربط بين $(1, 2)$ و $(3, 10)$

عن طريق حساب ميل القاطع الذي يربط بين $(1, 2)$ والنقطة غير المحددة$(1+h, f(1+h))$ ، لقيمة h حيث h لها قيمة صغيرة جدًا تقترب من الصفر (لكن $h \neq 0$) . يكون ميل هذا القاطع

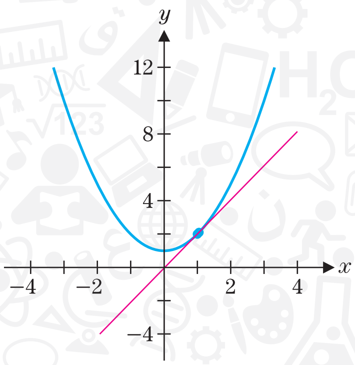
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(1+h)-2}{(1+h)-1} = \frac{[(1+h)^2+1]-2}{h}$$

$$= \frac{(1+2h+h^2)-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} \qquad \text{اضرب واختصر}$$

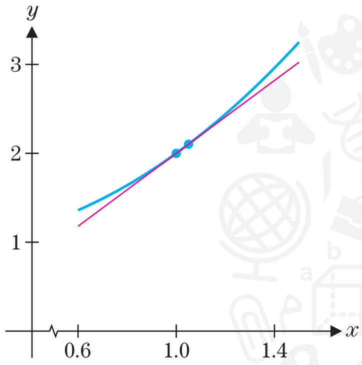
$$= \frac{h(2+h)}{h} = 2+h \qquad \text{ضع العامل المشترك } h \text{ واختصر}$$



الشكل 3.4b
القاطع الذي يربط بين
$(1, 5)$ و $(2, 5)$



الشكل 3.4c
القاطع الذي يربط بين
$(1, 2)$ و $(1.05, 2.1025)$

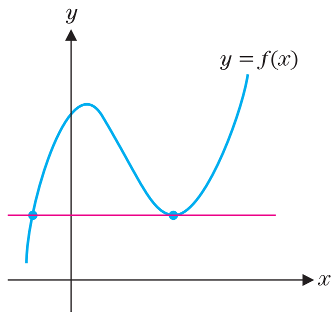


الشكل 3.4d
القاطع عن قرب

لاحظ أنه كلما اقترب h من 0، اقترب ميل القاطع من 2، والذي نعرّفه بأنه ميل المماس.

ملاحظة 1.1

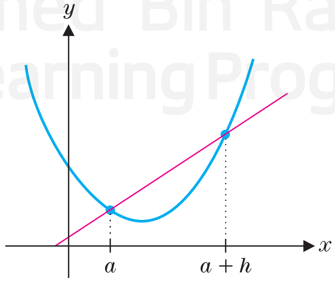
ينبغي أن نذكر ملاحظة أخرى انتقالًا إلى الحالة العامة للمماسات. على عكس الحالة بالنسبة للدائرة، قد تتقاطع المماسات مع المنحنى عند أكثر من نقطة كما هو مبين في الشكل 3.5.



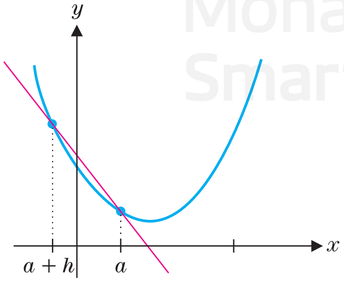
الشكل 3.5
يقطع المماس المنحنى في أكثر من نقطة واحدة

الحالة العامة

لإيجاد ميل المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$. اختر نقطتين أولًا على المنحنى. تكون إحدى النقطتين هي نقطة التماس، $(a, f(a))$. عيّن الإحداثي x للنقطة الثانية $x = a + h$. بعدد صغير ما h $(h \neq 0)$: يكون إذًا الإحداثي y المقابل هو $y = f(a + h)$. من الطبيعي أن تفكر في h على أنه موجب، كما هو موضح في الشكل 3.6a. إلا أن h قد يكون سالبًا أيضًا، كما يبين الشكل 3.6b.



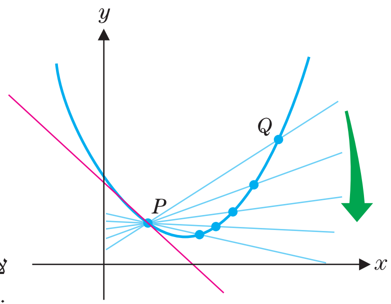
الشكل 3.6a
قاطع $(h > 0)$



الشكل 3.6b
قاطع $(h < 0)$

ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$ و $(a+h, f(a+h))$ يُعطى بالصيغة

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (1.1)$$



الشكل 3.7
اقتراب الخطوط القاطعة من المماس عند النقطة P

لاحظ أن التعبير في (1.1) (يُسمى **فرق ناتج القسمة**) يعطي ميل القاطع لأي نقطة ثانية نختارها (لأي قيمة حيث $h \neq 0$). تذكر أنه من أجل الحصول على تقريب أفضل للمماس، سنأخذ النقطة الثانية لتكون أقرب إلى نقطة التماس، والتي بدورها تجعل h أقرب إلى 0. يبيّن الشكل 3.7 ذلك الإجراء، حيث قمنا بتعيين عدد من الخطوط القاطعة حيث . لاحظ أنه كلما اقتربت النقطة Q من النقطة P (مثلًا عندما يكون $h \to 0$)، اقتربت الخطوط القاطعة من المماس عند P .

سنعرّف ميل المماس على أنه نهاية ميول الخطوط القاطعة في الصيغة (1.1) كلما تحركت h إلى 0. في حال وجود هذه النهاية.

تعريف 1.1

ميل المماس $m_{\tan}$ على المنحنى $y = f(x)$ عند $x = a$ يُعطى بالصيغة

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (1.2)$$

بشرط وجود النهاية.

يمثّل المماس المار بالنقطة $(a, f(a))$ بميل $m_{\tan}$. والذي يُعطى بالصيغ $m_{\tan} = \frac{y-f(a)}{x-a}$ أو

معادلة المماس

$$y = m_{\tan}(x-a) + f(a)$$

مثال 1.1 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$.

الحل نحسب الميل باستخدام الصيغة (1.2):

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2+1]-(1+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2+1-2}{h} \quad \text{اضرب واختصر}$$

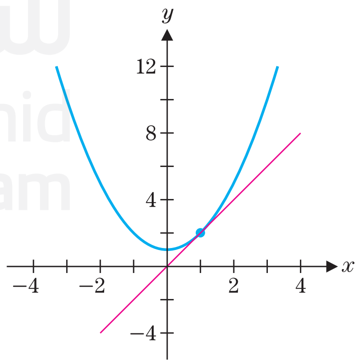
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} \quad \text{أخرج } h \text{ كعامل مشترك واختصر}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$$

لاحظ أن النقطة التي تقابل $x = 1$ هي $(1, 2)$ والخط الذي ميله 2 عند النقطة $(1, 2)$ تحدده المعادلة

$$y = 2(x-1) + 2 \text{ أو } y = 2x$$

لاحظ مدى التقابل الوثيق مع الخطوط القاطعة التي حسبناها سابقًا. نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالّة وهذا المماس في الشكل 3.8.



الشكل 3.8
$y = x^2 + 1$ والمماس عند $x = 1$

مثال 1.2 المماس للتمثيل البياني لدالّة نسبية

أوجد معادلة المماس للدالّة $y = \frac{2}{x}$ عند $x = 2$.

الحل عملًا بالصيغة (1.2)، فإنه لدينا

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{2+h}-1}{h} \qquad \text{بما أنّ } f(2+h)=\frac{2}{2+h}$$

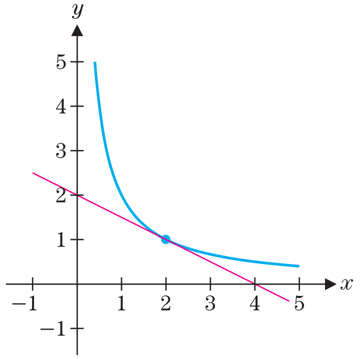
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{2-(2+h)}{(2+h)}\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{2-2-h}{(2+h)}\right]}{h} \qquad \text{اجمع الكسور واضرب}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{(2+h)h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}. \qquad \text{اختصر } h$$

النقطة المقابلة لـ $x=2$ هي $(2\,,1)$. بما أن $f(2)=1$. تكون معادلة المماس هي:

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)+1$$

نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالّة والمماس في الشكل 3.9.



الشكل 3.9

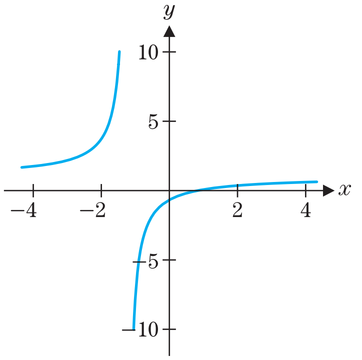
$y = \frac{2}{x}$ والمماس عند $(2, 1)$

في الحالات التي يتعذر (أو يصعب) فيها تحديد قيمة النهاية لميل المماس، يمكننا تقريب النهاية عدديًا. نوضّح ذلك في المثال 1.3.

مثال 1.3 التقريب البياني والعددي لميل المماس

قرّب ميل المماس لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ عند $x = 0$ بيانيًا وعدديًا.

الحل التمثيل البياني لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ موضح في الشكل 3.10a. نرسم المماس عند النقطة $(0, -1)$ كما في الشكل 3.10b حيث قمنا بالتكبير لتوفير تفاصيل أفضل. لتقريب الميل، نقوم بتقدير إحداثيات نقطة واحدة على المماس على ألا تكون $(0, -1)$. في الشكل 3.10b. يبدو أن المماس يمر بالنقطة $(1, 1)$. يكون تقدير الميل إذًا $m_{\tan} \approx \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$. لتقريب الميل عدديًا، نقوم باختيار عدة نقاط قريبة من $(0, -1)$ ونحسب ميول الخطوط القاطعة. على سبيل المثال، عند تقريب قيم y لأربع منازل عشرية، نحصل على

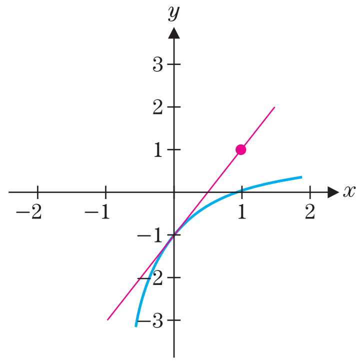


الشكل 3.10a

$y = \frac{x-1}{x+1}$

النقطة الثانية	m_{sec}	النقطة الثانية	m_{sec}
$(1, 0)$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$(-0.5, -3)$	$\frac{-3-(-1)}{-0.5-0} = 4.0$
$(0.1, -0.8182)$	$\frac{-0.8182-(-1)}{0.1-0} = 1.818$	$(-0.1, -1.2222)$	$\frac{-1.2222-(-1)}{-0.1-0} = 2.222$
$(0.01, -0.9802)$	$\frac{-0.9802-(-1)}{0.01-0} = 1.98$	$(-0.01, -1.0202)$	$\frac{-1.0202-(-1)}{-0.01-0} = 2.02$

في كلا العمودين، كلما اقتربت النقطة الثانية من $(0, -1)$، اقترب ميل القاطع الى 2. إذاً يكون التقدير المعقول لميل المماس عند النقطة $(0, -1)$ هو 2.



الشكل 3.10b

المماس

السرعة المتجهة

تُوصف السرعة المتجهة غالبًا على أنها كمية تحدد السرعة والاتجاه لجسم ما. لاحظ أنه إذا كانت سيارتك لا تشتمل على عداد سرعات، فإنه يمكنك تحديد سرعتك باستخدام القانون المعروف

$$\text{المسافة} = \text{المعدل (السرعة)} \times \text{الزمن} \tag{1.3}$$

باستخدام القانون (1.3)، يمكنك إيجاد المعدل (السرعة) ببساطة عن طريق قسمة المسافة على الزمن. بينما يشير المعدل في القانون (1.3) إلى السرعة المتوسطة خلال مدة زمنية، فنحن نهتم بالسرعة في لحظة معينة. ينبغي أن توضح القصة التالية الفرق.

في نقاط المرور، يسأل ضباط الشرطة عادةً السائقين إذا ما كانوا يعرفون السرعة التي كانوا يسيرون بها. لنفترض أن الإجابة التالية وردت من سائق شديد الحماس، والذي قد يجيب أن خلال 3 أعوام وشهرين و7 أيام و5 ساعات و45 دقيقة ماضية، قطعوا مسافة 45,259.7 ميلًا. لذا، فإن سرعتهم كانت

$$\text{المعدل (السرعة)} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{45{,}259.7 \text{ ميلًا}}{27{,}917.75 \text{ ساعة}} \approx 1.62118 \text{ mph}$$

بالطبع لن ينبهر معظم ضباط الشرطة بهذا التحليل. ولكن لماذا يعتبر خطأً؟ بينما لا يوجد شيء خطأ في القانون (1.3) أو الحساب، فمن المعقول الجدال في عدم صحة النتائج ما لم يتول أحد غيرهم قيادة السيارة طيلة فترة الأعوام الثلاثة.

على فرض أن السائق اقترح الفرضية التالية عوضًا عن ذلك: "أنا غادرت المنزل في 6:17 P.M. وقطعت 17 ميلًا بالضبط حتى اللحظة التي أوقفتني فيها في الساعة 6:43 P.M. لذلك، كانت سرعتي هي

$$\text{المعدل (السرعة)} = \frac{17 \text{ ميلًا}}{26 \text{ دقيقة}} \times \frac{60 \text{ دقيقة}}{1 \text{ ساعة}} \approx 39.2 \text{ mph}$$

وهذا أدنى من الحد الأقصى للسرعة البالغ 45 mph."

بينما يعد هذا تقديرًا أفضل بكثير للسرعة المتجهة عن 1.6 mph التي تم حسابها سابقًا، فإنها لا تزال سرعة متجهة متوسطة باستخدام مدة زمنية طويلة للغاية.

بصفة أعم، على فرض أن الدالّة $s(t)$ تعطي الموقع الذي تحرك منه جسم ما في الزمن t وسلك خطًا مستقيمًا. بمعنى أدق، $s(t)$ تعطي الإزاحة (**المسافة الموجهة**) من نقطة مرجعية ثابتة، بحيث يعني $s(t) < 0$ أن الجسم يقع $s(t)$ بعيدًا عن النقطة المرجعية، ولكن في الاتجاه السالب. إذًا، بالنسبة للمدتين الزمنيتين a و b (حيث $a < b$)، فإن $s(b) - s(a)$ يعطي المسافة الموجهة بين الموقعين $s(a)$ و $s(b)$. إذًا **السرعة المتجهة المتوسطة** v_{avg} تحددها

$$\boxed{v_{avg} = \frac{\text{المسافة الموجهة}}{\text{الزمن}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}} \tag{1.4}$$

مثال 1.4 إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة

موقع السيارة بعد t دقائق من القيادة في خط مستقيم تحدده

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t^3, \quad 0 \le t \le 4$$

حيث s يُقاس بالأميال و t بالدقائق. قرّب السرعة المتجهة في فترة زمنية طولها دقيقتان $t = 2$.

الحل لحساب المتوسط على مدى دقيقتين من $t = 2$ إلى $t = 4$، نجد من خلال الصيغة (1.4) أن

$$\begin{aligned} v_{avg} &= \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} \approx \frac{2.6667 - 1.3333}{2} \\ &\approx 0.6667 \text{ mi/min} \\ &\approx 40 \text{ mph} \end{aligned}$$

بالطبع. الفترة البالغ طولها دقيقتين تعد طويلة نسبيًا، نظرًا لأن السيارات قد تزيد السرعة وتبطئها بشكل كبير خلال دقيقتين. وسنحصل على التقريب المعدل عن طريق إيجاد المتوسط في خلال دقيقة واحدة:

$$\begin{aligned} v_{avg} &= \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} \approx \frac{2.25 - 1.3333}{1} \\ &\approx 0.91667 \text{ mi/min} \\ &\approx 55 \text{ mph} \end{aligned}$$

رغم أن التقدير الأخير يعد بالتأكيد افضل من الأول، فإنه يمكننا القيام بما هو أفضل. كلما قمنا بتقصير الفترة الزمنية أكثر وأكثر، ينبغي أن تقترب السرعة المتجهة المتوسطة أكثر وأكثر من السرعة المتجهة في اللحظة $t = 2$. يستند ذلك إلى المنطق بأنه إذا حسبنا السرعة المتجهة المتوسطة على الفترة الزمنية $[2, 2 + h]$ (حيث $h > 0$) ثم جعلنا $h \to 0$. فإن السرعات المتجهة المتوسطة الناتجة ينبغي أن تقترب أكثر وأكثر من السرعة المتجهة في اللحظة $t = 2$.

h	$\frac{s(2+h) - s(2)}{h}$
1.0	0.9166666667
0.1	0.9991666667
0.01	0.9999916667
0.001	0.999999917
0.0001	1.0
0.00001	1.0

لدينا
$$v_{avg} = \frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{s(2 + h) - s(2)}{h}$$

يبيّن الجدول الموضح سلسلة من السرعات المتجهة المتوسطة، حيث $h > 0$. بنتائج مشابهة إذا سمحنا بأن يكون h سالبًا. يبدو أن السرعة المتوسطة تقترب من ميل واحد/دقيقة (60 mph). عندما يكون $h \to 0$. ■

هذا يرشدنا إلى صياغة التعريف التالي.

تعريف 1.2

إذا كان $s(t)$ يمثل موقع جُسيم ما بالنسبة إلى مكان ثابت في الزمن t عندما تحرك الجُسيم في خط مستقيم، فإن **السرعة اللحظية** في الزمن $t = a$ تحددها الصيغة

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{(a + h) - a} = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h} \qquad (1.5)$$

بشرط وجود النهاية. **السرعة** هي القيمة المطلقة للسرعة المتجهة.

ملاحظات

(i) لاحظ إذًا أنه، على سبيل المثال، إذا كان t يُقاس بالثواني و $s(t)$ يُقاس بالأقدام، إذًا السرعة المتجهة (المتوسطة أو اللحظية) تُقاس بالقدم لكل ثانية (ft/s). (ii) عندما يُستخدم مصطلح السرعة المتجهة بدون قيد أو شرط، فإنه يشير إلى السرعة المتجهة اللحظية.

مثال 1.5 إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية

على فرض أن ارتفاع جسم يسقط بعد t ثانية من سقوطه من ارتفاع 64 ft. تمثله المعادلة $s(t) = 64 - 16t^2$ بالقدم. أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1$ و $t = 2$؛ والسرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.5$ و $t = 2$؛ والسرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.9$ و $t = 2$ والسرعة المتجهة اللحظية عند الزمن $t = 2$.

الحل السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1$ و $t = 2$ هي

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1)^2]}{1} = -48 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.5$ و $t = 2$ هي

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.5)}{2 - 1.5} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1.5)^2]}{0.5} = -56 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1.9$ و $t = 2$ هي

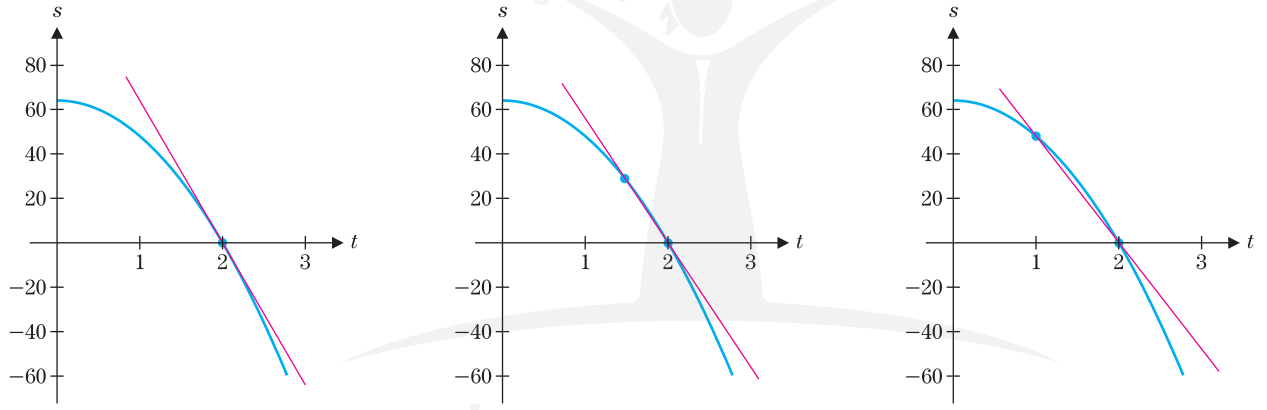
$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.9)}{2 - 1.9} = \frac{64 - 16(2)^2 - [64 - 16(1.9)^2]}{0.1} = -62.4 \text{ (ft/s)}$$

السرعة المتجهة اللحظية هي نهاية السرعات المتجهة المتوسطة. عملًا بالصيغة (1.5)، يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
v(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{s(2+h)-s(2)}{(2+h)-2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[64-16(2+h)^2]-[64-16(2)^2]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[64-16(4+4h+h^2)]-[64-16(2)^2]}{h} && \text{اضرب واختصر}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-64h-16h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-16h(h+4)}{h} && \text{أخزج } h \text{ كعامل مشترك واختصر}\\
&= \lim_{h\to 0}[-16(h+4)] = -64 \text{ ft/s}
\end{aligned}$$

تذكر أن السرعة المتجهة تشير إلى كل من السرعة والاتجاه. في هذه المسألة، $s(t)$ يقيس الارتفاع فوق سطح الأرض. لذا، المتجهة السالبة تشير إلى أن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (أو الهابط). سرعة الجسم عند مَعْلَم الثانية "2" تكون إذًا 64 ft/s. ■

لاحظ أن صيغة السرعة المتجهة اللحظية (1.5) وصيغة ميل المماس (1.2) متطابقتان. لتوثيق الارتباط أكثر، نقوم بتمثيل دالّة الموقع $s(t)=64-16t^2$ بيانيًا حيث $0\le t\le 3$ من المثال 1.5. السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1$ و $t=2$ تقابل ميل القاطع بين النقطتين عند $t=1$ و $t=2$. (انظر الشكل 3.11a). وعلى نحو مماثل، السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.5$ و $t=2$ تعطي ميل القاطع المقابل. (انظر الشكل 3.11b). أخيرًا، السرعة المتجهة اللحظية عند الزمن $t=2$ تقابل ميل المماس عند $t=2$. (انظر الشكل 3.11c).



الشكل 3.11a
القاطع بين $t=1$ و$t=2$

الشكل 3.11b
القاطع بين $t=1.5$ و $t=2$

الشكل 3.11c
المماس عند $t=2$

السرعة المتجهة هي معدل (بدقة أكبر، معدل التغير اللحظي للموقع بدلالة الزمن). بصفة عامة، **متوسط معدل التغير** لدالّة ما بين $x=a$ و $x=b$ $(a\ne b)$ تمثله الصيغة

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

صيغة معدل التغير اللحظي للدالّة $f(x)$ عند $x=a$ هي

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

بشرط وجود النهاية. وحدات معدل التغير اللحظي هي وحدات f مقسومة على (أو لكل من) وحدات x. ينبغي أن تنظر إلى هذه النهاية باعتبارها ميل المماس لـ $y=f(x)$ عند $x=a$.

مثال 1.6 **تفسير معدلات التغير**

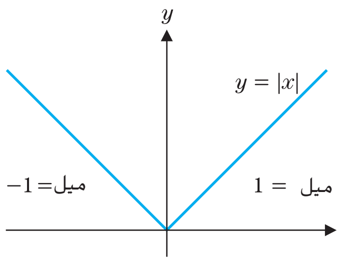
إذا كانت الدالّة $f(t)$ تمثل تعداد سكان مدينة ما بملايين الأشخاص بعد t أعوام من الأول من يناير عام 2000. فسّر كلًا من الكميات التالية بافتراض أنها تساوي الأعداد المعلومة. (a) $\frac{f(2)-f(0)}{2}=0.34$ و (b) $f(2)-f(1)=0.31$، و (c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0.3$.

الحل بما أن $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو متوسط معدل تغير الدالّة f بين a و b. فالتعبير (a) يخبرنا أن متوسط معدل التغير للدالّة f بين $a=0$ و $b=2$ هو 0.34. وهذا يعني نمو التعداد السكاني للمدينة بمعدل متوسط 0.34 مليون نسمة لكل عام بين 2000 و2002. وعلى نحو مماثل، التعبير (b) هو متوسط معدل التغير بين $a=1$ و $b=2$ مما يشير إلى نمو التعداد السكاني للمدينة بمعدل متوسط 0.31 مليون نسمة على أساس سنوي في 2001. وأخيرًا، التعبير (c) يمثل معدل التغير اللحظي لتعداد السكان في الزمن $t=2$. اعتبارًا من الأول من يناير، 2002، كان التعداد السكاني في المدينة ينمو بمعدل 0.3 مليون نسمة لكل عام. ■

قد تكون لاحظت أننا قد أضفنا العبارة "بشرط وجود النهاية" في نهاية تعريفات ميل المماس، والسرعة المتجهة اللحظية، ومعدل التغير اللحظي. ويمثل ذلك أهمية بما أن تلك النهايات المحددة لا تكون موجودة دائمًا كما سنرى في المثال 1.7.

مثال 1.7 **تمثيل بياني بدون مماس عند نقطة**

حدد إذا ما كان يوجد مماس لـ $y=|x|$ عند $x=0$.



الشكل 3.12
$y=|x|$

الحل من التمثيل البياني في الشكل 3.12. لاحظ أنه مهما قمنا بالتكبير على النقطة $(0,0)$. لن يتغير شكل التمثيل البياني عما هو عليه. (وذلك أحد أسباب عدم تحديد المقياس في الشكل 3.12) فإن هذا يشير إلى أن المماس غير موجود. علاوة على ذلك، إذا كان h هو أي عدد موجب، فميل القاطع المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(h,|h|)$ يكون 1. ومع ذلك، القاطع المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(h,|h|)$ لأي عدد سالب h يكون له الميل -1. بتحديد $f(x)=|x|$ واعتبار نهايات من جهة واحدة، إذا كان $h>0$، فإذًا $|h|=h$. وبالتالي

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

من ناحية أخرى، إذا كان $h<0$، فإذًا $|h|=-h$ (تذكر أنه إذا كان $h<0$، فإن $-h>0$). وبالتالي

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

بما أن النهايات من الجهتين تكون مختلفة، نستنتج أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \text{ غير موجودة}$$

وذلك يشير إلى أن المماس غير موجود. ■

تمارين 3.1

تمارين كتابية

1. بصفة عامة، السرعة اللحظية لجسم ما لا يمكن حسابها بشكل مباشر؛ وعملية النهاية هي الطريقة الوحيدة لحساب السرعة في لحظة معينة من دالّة الموقع المرتبطة به. مع أخذ ذلك في الاعتبار، كيف يحسب عداد السرعات في السيارة السرعة؟ (إرشاد: ابحث عن هذا الموضوع في كتاب مرجعي أو على الإنترنت).

2. ابحث في وسائل الإعلام، واكتشف مراجع إلى خمسة معدلات مختلفة على الأقل. لقد عرّفنا معدل التغير على أنه نهاية فرق ناتج قسمة الدالّة. اذكر الدالّة الأساسية في أمثلتك الخمسة بأكبر قدر ممكن من

الدقة. هل المعدل مُعطى كنسبة مئوية أم عدد؟ في حساب التفاضل والتكامل، نحسب عادةً المعدلات باعتبارها أعدادًا. هل هذا يتسق مع الاستخدام القياسي؟

3. ارسم التمثيل البياني لدالّة تكون غير متصلة عند $x = 1$. ثم ارسم التمثيل البياني لدالّة تكون متصلة عند $x = 1$ ولكن ليس لها مماس عند $x = 1$. في كلتا الحالتين. فسّر سبب عدم وجود مماس عند $x = 1$.

في التمارين 8-1، استخدم التعريف 1.1 لإيجاد معادلة المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$. مثّل $y = f(x)$ والمماس بيانيًا للتحقق من حصولك على المعادلة الصحيحة.

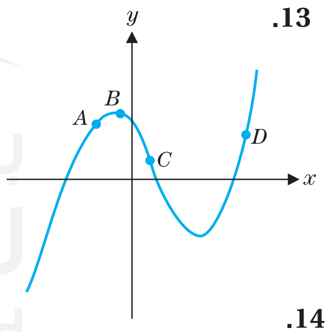
1. $f(x) = x^2 - 2,\ a = 1$
2. $f(x) = x^2 - 2,\ a = 0$
3. $f(x) = x^2 - 3x,\ a = -2$
4. $f(x) = x^3 + x,\ a = 1$
5. $f(x) = \dfrac{2}{x+1},\ a = 1$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x-1},\ a = 0$
7. $f(x) = \sqrt{x+3},\ a = -2$
8. $f(x) = \sqrt{x+3},\ a = 1$

في التمارين 12-9، احسب ميل القاطع بين النقاط عند (a) $x = 1$ و $x = 2$، (b) $x = 2$ و$x = 3$، (c) $x = 1.5$ و $x = 2$، (d) $x = 2$ و $x = 2.5$، (e) $x = 1.9$ و$x = 2$، (f) $x = 2$ و$x = 2.1$، (g) واستخدم الأجزاء (a)—(f) والحسابات الأخرى عند الحاجة لتقدير ميل المماس عند $x = 2$.

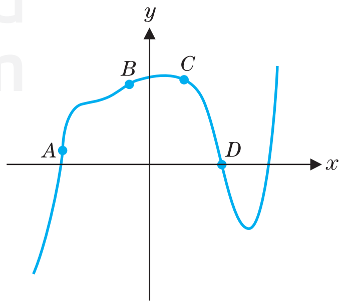
9. $f(x) = x^3 - x$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
11. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
12. $f(x) = e^x$

في التمرينين 13 و14، نظّم لائحة للنقاط A، و B، و C، و D تمثل اشارات قيم الميل اشارات قيم للمماسات.

.13



.14



في التمارين 18-15، استخدم دالّة الموقع s (بالأمتار) لإيجاد السرعة المتجهة عند الزمن $t = a$ ثانية.

15. $s(t) = -4.9t^2 + 5$, (a) $a = 1$; (b) $a = 2$
16. $s(t) = 4t - 4.9t^2$, (a) $a = 0$; (b) $a = 1$
17. $s(t) = \sqrt{t + 16}$, (a) $a = 0$; (b) $a = 2$
18. $s(t) = 4/t$, (a) $a = 2$; (b) $a = 4$

في التمارين 22-19، تمثل الدالّة موقع جسم ما بالقدم عند الزمن t ثانية. أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين (a) $t = 0$ و $t = 2$، (b) $t = 1$ و $t = 2$، $t = 1.9$ و $t = 2$، (d) $t = 2$ و $t = 1.99$. و (e) قدّر السرعة المتجهة اللحظية عند $t = 2$.

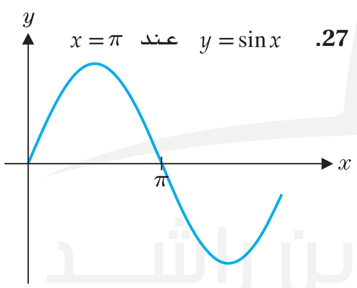
19. $s(t) = 16t^2 + 10$
20. $s(t) = 3t^3 + t$
21. $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$
22. $s(t) = 3\sin(t - 2)$

في التمارين 26-23، استخدم البرهان البياني والعددي لشرح سبب عدم وجود مماس للتمثيل البياني للدالّة $y = f(x)$ عند $x = a$.

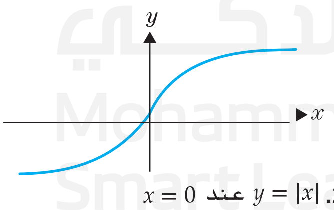
23. $f(x) = |x - 1|\quad a = 1$
24. $f(x) = \dfrac{4x}{x-1}\quad a = 1$
25. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ عند $a = 0$
26. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ x^2 - 4x, & x > 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

في التمارين 30-27، ارسم مماسًا مقبولًا عند النقطة المعلومة أو حدد إذا كان غير موجود.

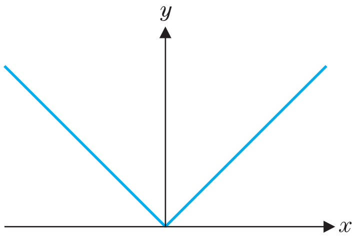
.27 $y = \sin x$ عند $x = \pi$



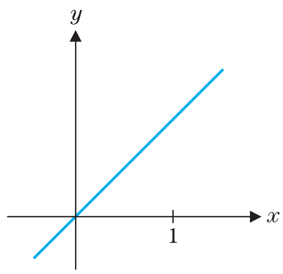
.28 $y = \tan^{-1} x$ عند $x = 0$



.29 $y = |x|$ عند $x = 0$



30. $x = 1$ عندما $y = x$



عند
$x = 1$

في التمرينين 31 و32، فسّر (a) إلى (c) كما في المثال 1.6.

31. على فرض أن $f(t)$ تمثل الرصيد بالدرهم في حساب بنكي بعد t أعوام من الأول من يناير عام 2000.
(a) $\frac{f(4)-f(2)}{2} = 21{,}034$، و (b) $2[f(4)-f(3.5)] = 25{,}036$
و $\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = 30{,}000$ (c)

32. على فرض أن $f(m)$ تمثل قيمة سيارة بالدرهم قطعت مسافة m ألف ميل. (a) $\frac{f(40)-f(38)}{2} = -2103$، و (b) $f(40)-f(39) = -2040$.
و $\lim_{h\to 0} \frac{f(40+h)-f(40)}{h} = -2000$ (c)

33. في بعض الأحيان، قد تنشأ إجابة صحيحة من اتباع طريقة خاطئة. بالنسبة للدوال التربيعية (لكن بالتأكيد ليس بالنسبة لمعظم الدوال الأخرى)، السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ تساوي السرعتين المتجهتين المتوسطتين عند $t = r$ و $t = s$. لتوضيح ذلك، على فرض أن $f(t) = at^2 + bt + c$ هي دالّة المسافة. بيّن أن السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ تساوي $a(s+r)+b$. بيّن أن السرعة المتجهة عند $t = r$ هي $2ar + b$ والسرعة المتجهة عند $t = s$ هي $2as + b$. وأخيرًا، بيّن أن $a(s+r)+b = \frac{(2ar+b)+(2as+b)}{2}$.

34. أوجد دالّة تكعيبية [جرّب $f(t) = t^3 + \cdots$] والعددين r و s بحيث تكون السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = r$ و $t = s$ مختلفة عن متوسط السرعتين المتجهتين عند $t = r$ و $t = s$.

35. (a) أوجد جميع النقاط التي عندها يكون ميل المماس للدالة $y = x^3 + 3x + 1$ يساوي 5.
(b) بيّن أن ميل المماس للدالّة $y = x^3 + 3x + 1$ لا يمكن أن يساوي 1 عند أي نقطة.

36. (a) بيّن أن التمثيلين البيانيين لكل من $y = x^2 + 1$ و $y = x$ لا يتقاطعان.
(b) أوجد قيمة x بحيث يكون المماسان على منحنيَي الدالتين $y = x^2 + 1$ و $y = x$ متوازيين.

37. (a) أوجد معادلة المماس على منحنى $y = x^3 + 3x + 1$ عند $x = 1$.
(b) بيّن أن المماس في الجزء (a) يقطع منحنى $y = x^3 + 3x + 1$ في أكثر من نقطة واحدة.
(c) بيّن أنه لأي عدد c المماس لـ $y = x^2 + 1$ عند $x = c$ لا يقطع $y = x^2 + 1$ إلا عند نقطة واحدة فقط.

38. بيّن أن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. (إرشاد: ليكن $h = x - a$.)

تطبيقات

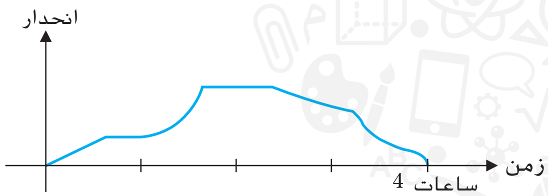
39. يوضح الجدول درجة حرارة تجمد الماء بالدرجات المئوية عند مستويات ضغط مختلفة. قدّر ميل المماس عند $p = 1$ وفسّر النتيجة. قدّر ميل المماس عند $p = 3$ وفسّر النتيجة.

p (atm)	0	1	2	3	4
°C	0	−7	−20	−16	−11

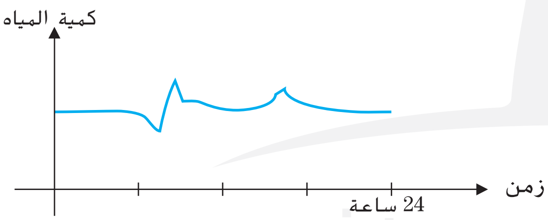
40. يوضح الجدول مدى ركلة كرة قدم انطلقت بزاوية $30°$ فوق المستوى الأفقي بسرعات أولية متعددة. قدّر ميل المماس عند $v = 50$ وفسّر النتيجة.

سرعة	30	40	50	60	70
مسافة	19	28	37	47	58

41. يوضح الجدول ارتفاع شخص ما يتسلق منحدرًا في صورة دالّة زمنية. متى بلغ المتسلق القمة؟ متى كان المتسلق يسير بأعلى معدل في طريق الصعود؟ متى كان المتسلق يسير بأعلى معدل في طريق الهبوط؟ ماذا تعتقد حدوثه في الأماكن التي يكون فيها التمثيل البياني مستويًا؟



42. يوضح الجدول كمية المياه في خزان مياه بمدينة ما في صورة دالّة زمنية. متى كان الخزان ممتلئًا أكثر؟ فارغًا اقل ما يمكن؟ متى كان الخزان يُملأ بأسرع معدل؟ متى كان الخزان يُفرغ بأسرع معدل؟ ما الوقت من اليوم الذي تعتقد أن مقدار مستوى الماء يمثله؟



43. على فرض أن كوبًا ساخنًا من القهوة تُرك في غرفة لمدة ساعتين. ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لما سوف تبدو عليه درجة الحرارة باعتبارها دالّة زمنية. ثم ارسم تمثيلًا بيانيًا لما سوف يبدو عليه معدل التغير لدرجة الحرارة.

44. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل ارتفاع القافز بالحبال. ارسم تمثيلًا بيانيًا للسرعة المتجهة الخاصة بالشخص (استخدم + للسرعة المتجهة تصاعديًا و − للسرعة المتجهة تنازليًا).

تمارين استكشافية

1. سيارة تسير على طريق في مسار يأخذ الشكل $y = x^2$. كانت تتحرك السيارة من اليسار إلى اليمين عندما أضاءت المصابيح الأمامية لتبين وجود غزال يقف عند النقطة $(1, \frac{3}{4})$. أوجد مكان السيارة. إذا كانت السيارة تتحرك من اليمين إلى اليسار، فكيف سيغير هذا الإجابة؟ هل هناك ثمة مكان (x, y) لن تصل إضاءة مصابيح السيارة الأمامية إليه أبدًا؟

2. ما السرعة القصوى بالنسبة للأشخاص؟ تم تقدير أن كارل لويس بلغ السرعة القصوى 28 mph عندما فاز بالميدالية الذهبية في دورة الأولمبياد 1992. على فرض أنه لدينا البيانات التالية لعداء ما.

الأمتار	الثواني
50	5.16666
56	5.76666
58	5.93333
60	6.1

الأمتار	الثواني
62	6.26666
64	6.46666
70	7.06666

نحن نريد تقدير السرعة القصوى. يمكننا البدء بحساب $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{100\text{ m}}{10\text{ s}} = 10\text{ m/s}$. ولكن هذه هي السرعة المتوسطة على مدى السباق بأكمله، وليست السرعة القصوى. على فرض أننا نريد حساب متوسط السرعات باستخدام قياسين متجاورين فقط (على سبيل المثال، 50 m ،56 m). كرر ذلك مع جميع الأزواج الستة المتجاورة وأوجد أكبر سرعة (إذا كنت تريد التحويل إلى mph، فاقسم على 0.447).

لاحظ أن جميع المدد الزمنية هي في الأصل مضاعفات 1/30. مما يوضح قاعدة التقاط الفيديو لــ 30 إطارًا لكل ثانية. بوضع ذلك في الاعتبار، لِمَ من المثير للشك أن تكون جميع المسافات من الأعداد الكلية؟ لمعرفة كم قد يؤثر هذا على حساباتك، غيّر بعض المسافات. مثلًا، إذا غيّرت 60 m إلى 59.8 m فكيف ستتغير الحسابات التي أجريتها لمتوسط السرعة المتجهة ؟ تتمثل إحدى طرق تحديد مكان وقوع الخطأ، في النظر إلى نمط السرعات المتوسطة المتجهة: هل تبدو منطقية؟ في الأماكن حيث يبدو النمط مثيرًا للشك، جرّب تعديل المسافات وتصميم نمط أكثر واقعيًا. جرب أن تفرض المنظور الكمي على تحليلك للأخطاء: ما أعلى (أدنى) ذروة يمكن أن تصل إليها السرعة؟

الدرس

3-2 الاشتقاق

في الدرس 3.1، تحققنا من مفهومين يبدو أنهما غير مترابطين: ميل المماس والسرعة المتجهة. ويتم التعبير عن كلتيهما بدلالة النهاية نفسها. وفي ذلك إشارة إلى قدرة علم الرياضيات؛ حيث يتم وصف مفهومين غير مترابطين بالتعبير الرياضي نفسه. كما نبين أن في تلك النهاية المعينة إفادة كبيرة حتى أنها تحمل اسمًا خاصًا.

تعريف 2.1

مشتقة الدالّة f عند النقطة $x = a$ تُعَرّف كما يأتي:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (2.1)$$

بشرط وجود النهاية. وإذا كانت النهاية موجودة، فإننا نقول إن f **قابلة للاشتقاق** عند $x = a$.

صيغة أخرى من (2.1) هي:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.2)$$

(انظر التمرين 38 في الدرس3—1).

مثال 2.1 إيجاد المشتقة عند نقطة

احسب مشتقة الدالّة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند $x = 1$.

الحل من (2.1)، فإنه لدينا

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(1+h)^3 + 2(1+h) - 1\right] - (3 + 2 - 1)}{h}$$

اضرب ثم اختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (2 + 2h) - 1 - 4}{h}$$

أخرج h كعامل مشترك ثم اختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{11h + 9h^2 + 3h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (11 + 9h + 3h^2) = 11. \blacksquare$$

على فرض أن في المثال 2.1 كان ينبغي أيضًا إيجاد $f'(2)$ و $f'(3)$ بدلًا من تكرار حساب النهاية المطول لإيجاد كل من $f'(2)$ و $f'(3)$ في المثال 2.2. سنقوم بحساب المشتقة بدون تحديد قيمة لـ x. مما يعطينا دالّة يمكن منها حساب $f'(a)$ لأي من قيم a. وذلك بمجرد التعويض عن a بـ x.

مثال 2.2 إيجاد المشتقة عند نقطة غير محددة

أوجد مشتقة الدالّة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند القيمة غير المحددة لـ x. ثم أوجد قيمة المشتقة عند $x = 1$، $x = 2$ و $x = 3$.

الحل من خلال تعويض a مكان x وفقًا لتعريف المشتقة (2.1)، يكون لدينا

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[3(x+h)^3 + 2(x+h) - 1\right] - (3x^3 + 2x - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (2x + 2h) - 1 - 3x^3 - 2x + 1}{h} && \text{اضرب واختصر} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2h}{h} && \text{أخرج } h \text{ كعامل مشترك واختصر} \\
&= \lim_{h\to 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2 + 2) \\
&= 9x^2 + 0 + 0 + 2 = 9x^2 + 2.
\end{aligned}$$

لاحظ أنه في هذه الحالة، لدينا مشتقة دالّة جديدة، $f'(x) = 9x^2 + 2$. وبمجرد التعويض بـ x سنحصل على $f'(1) = 9 + 2 = 11$ (كما حصلنا في المثال 2.1!)، $f'(2) = 9(4) + 2 = 38$ و $f'(3) = 9(9) + 2 = 83$. ■

يقودنا المثال 2.2 إلى التعريف التالي.

تعريف 2.2

مشتقة الدالّة f هي الدالّة f' التي تُعطى بالمعادلة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2.3)$$

مجال f' هو مجموعة كل قيم x التي توجد لها هذه النهاية. تُسمى عملية حساب الاشتقاق **بالتفاضل**. بالإضافة إلى ذلك، f تكون قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I.

في المثالين 2.3 و 2.4، لاحظ أن إيجاد المشتقة يتضمن كتابة تعريف النهاية ثم التوصل لطريقة ما لإيجاد قيمة هذه النهاية (التي تكون في البداية في الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$).

مثال 2.3 إيجاد مشتقة دالّة نسبية بسيطة

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$، فأوجد $f'(x)$.

الحل لدينا:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)}{h} && \text{بما إنّ } f(x+h) = \frac{1}{x+h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]}{h}$$ اجمع الكسور واختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$ اختصر h

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

لذلك $f'(x) = -x^{-2}$.

مثال 2.4 مشتقة دالّة الجذر التربيعي

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ (حيث $x \ge 0$). فأوجد $f'(x)$ حيث $x \ge 0$. وحدد مجالها

الحل لدينا:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right)$$ اضرب البسط والمقام بالمرافق $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$

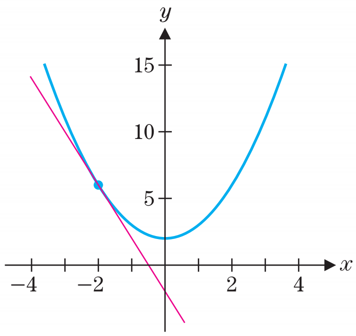
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}$$ اضرب واختصر

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right]}$$ اختصر h

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

لاحظ أن $f'(x)$ تكون معرفة فقط إذا كان $x > 0$. على الرغم من أن $f(x)$ معرفة إذا كان $x \ge 0$.

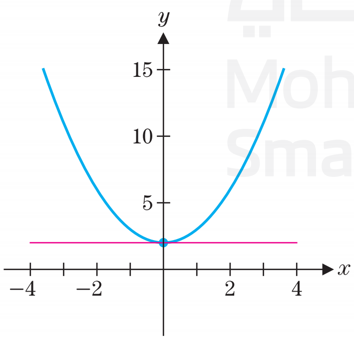


الشكل 3.13a

$m_{\tan} < 0$

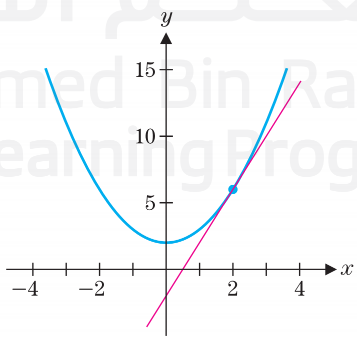
تتخطى فوائد الحصول على دالة مشتقة مجرد تبسيط حساب الاشتقاق عند نقاط متعددة. كما سنرى لاحقًا، تمدنا الدالّة المشتقة بقدر كبير من المعرفة حول الدالّة الأصلية.

ضع في الاعتبار أن قيمة الدالّة المشتقة عند نقطة ما هي ميل المماس عند هذه النقطة. في الأشكال 3.13a–3.13c، قمنا بتمثيل دالّة بيانيًا مع المماسات الخاصة بها عند نقاط ثلاث مختلفة. ميل المماس في الشكل 3.13a يكون سالبًا؛ وميل المماس في الشكل 3.13c يكون موجبًا.



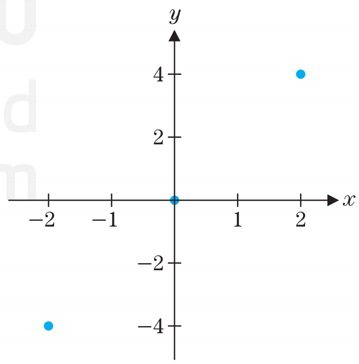
الشكل 3.13b

$m_{\tan} = 0$



الشكل 3.13c

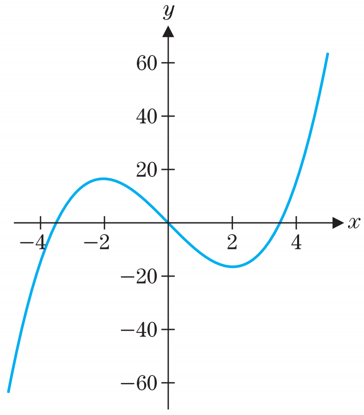
$m_{\tan} > 0$



الشكل 3.13d

$y = f'(x)$ (النقاط الثلاث)

وميل المماس في الشكل 3.13b يكون صفرًا. تعطينا المماسات الثلاثة هذه ثلاث نقاط على التمثيل البياني للدالّة المشتقة (انظر الشكل 3.13d). عن طريق تقدير قيمة $f'(x)$ عند النقاط الثلاث.



الشكل 3.14

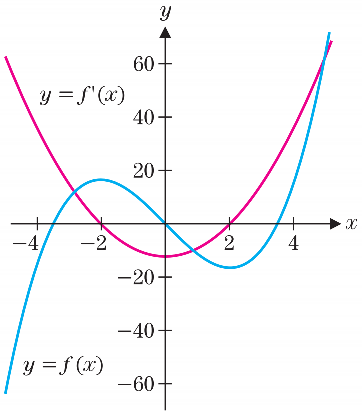
$y=f(x)$

مثال 2.5 رسم التمثيل البياني لـ f' من التمثيل البياني لـ f

من التمثيل البياني لـ f في الشكل 3.14. ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لـ f'.

الحل لا داعي للقلق حول القيم الدقيقة لــ $f'(x)$. فنحن لا نرغب سوى في إيجاد الشكل العام لتمثيلها البياني. كما في الأشكال 3.13a–3.13d. سنقوم باختيار بضع نقاط مهمة لتحليلها بعناية. ينبغي أن تركز على أي انفصالات وأماكن حيث يدور التمثيل البياني لــ f.

التمثيل البياني لــ $y=f(x)$ يصبح افقيًا عند $x=-2$ و $x=2$ تقريبًا. عند هاتين النقطتين. تكون المشتقة 0. كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين. يتزايد التمثيل البياني حيث يكون $x<-2$ ، ويتناقص حيث يكون $-2<x<2$ ويتزايد مرة ثانية حيث يكون $x>2$. وهذا يعني أن $f'(x)>0$ عندما يكون $x<-2$، $f'(x)<0$ عندما يكون $-2<x<2$ وأخيرًا $f'(x)>0$ عندما يكون $x>2$. يمكننا الإخبار بالمزيد كذلك. كلما اقترب x من -2 من جهة اليسار، لاحظ أن المماسات تخفف من الانحدار. لذلك، $f'(x)$ تصبح موجبة كلما اقتربت x من -2 من جهة اليسار. عند التحرك إلى اليمين من $x=-2$، يزداد التمثيل البياني في الانحدار حتى قرابة $x=0$ ثم يصبح أخف انحدارًا حتى يصبح افقيًا عند $x=2$. لذا، $f'(x)$ تصبح سالبة عند $x=0$ ، ثم تكون أقل سلبية عند $x=2$. أخيرا، يزداد التمثيل البياني انحدارًا كلما تحركنا إلى اليمين من $x=2$إذا جمعنا تلك النقاط معًا، فسيكون لدينا التمثيل البياني المحتمل لـ f' الموضح باللون الأحمر في الشكل 3.15، المرسوم فوق التمثيل البياني لـ f. ■



الشكل 3.15

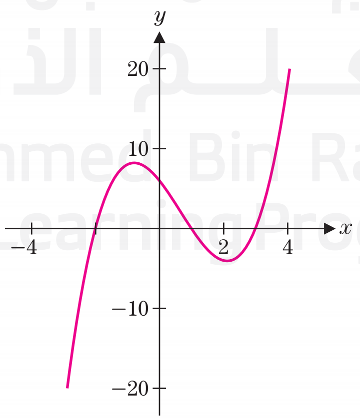
$y=f'(x)$ و $y=f(x)$

من المثير للاهتمام أكثر أن نسأل عما يبدو عليه التمثيل البياني لـ $y=f(x)$ إذا عرفنا التمثيل البياني لـ $y=f'(x)$. نوضّح ذلك في المثال 2.6.

مثال 2.6 رسم التمثيل البياني لـ f من التمثيل البياني لـ f'

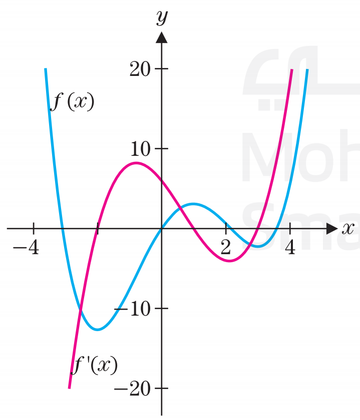
من التمثيل البياني لـ f' في الشكل 3.16. ارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لـ f.

الحل نكرر قولنا بأنه لا داعي للقلق بشأن الحصول على القيم الدقيقة للدالّة. بل إننا لا نريد سوى الشكل العام للتمثيل البياني. لاحظ من التمثيل البياني لـ $y=f'(x)$ أن $f'(x)<0$ حيث $x<-2$. وبالتالي في هذه الفترة، تكون ميول المماسات لـ $y=f(x)$ سالبة والتمثيل البياني متناقص على الفترة $(-2,1)$، $f'(x)>0$. مما يشير ذلك إلى أن المماسات للتمثيل البياني لـ $y=f(x)$ يكون لها ميل موجب ويكون التمثيل البياني متزايد. علاوة على ذلك، يخبرنا ذلك بأن التمثيل البياني يعكس إتجاهه (أي يتحول من التناقص إلى التزايد) عند $x=-2$.



الشكل 3.16

$y=f'(x)$



الشكل 3.17

$y=f'(x)$ والتمثيل البياني المعقول لـ $y=f(x)$

بالإضافة إلى ذلك، يكون $f'(x) < 0$ في الفترة $(1, 3)$، وبالتالي فإن التمثيل البياني متناقص هنا. أخيرًا، حيث $x > 3$ نحصل على $f'(x) > 0$ وبالتالي فإن التمثيل البياني متزايد هنا. ستجد تمثيلًا بيانيًا يشمل جميع تلك السلوكيات بالتركيب على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ في الشكل 3.17 (في الصفحة السابقة). قمنا برسم التمثيل البياني لـ f بحيث لا يكون "الوادي" الصغير على الطرف الأيمن للمحور y على قدر الانحدار نفسه للوادي على الطرف الأيسر من المحور y لسبب ما. انظر بعناية إلى التمثيل البياني لـ $f'(x)$ ولاحظ أن $|f'(x)|$ يصبح أكبر بكثير على الفترة $(-2, 1)$ عن الفترة $(1, 3)$. وهذا يشير إلى أن المماسات وكذلك، التمثيل البياني سيزداد انحدارها على الفترة $(-2, 1)$ عن الفترة $(1, 3)$.

الرموز البديلة للمشتقة

نحدد للدالّة المشتقة الرمز f'. توجد رموز أخرى شائعة الاستخدام لـ f'، لكل منها مزايا وعيوب. استخدم أحد مؤسسي حساب التفاضل والتكامل، غوتفريد لايبنتز، الرمز $\frac{df}{dx}$ (**رمز لايبنتز**) للمشتقة. إذا كتبنا $y = f(x)$ فإن جميع ما يلي تكون بدائل لرمز المشتقة:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

يُطلق على $\frac{df}{dx}$ التعبير **صيغة لايبنتز للتعبير عن مشتقة الدالة f بالنسبة لــ x** وهو يخبرك بأن تأخذ الاشتقاق من أي تعبير مما يلي.

في الدرس 3.1، لاحظنا أن $f(x) = |x|$ ليس لها مماس عند $x = 0$ (أي أن الدالّة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$)، على الرغم من أنها متصلة دائمًا. وبالتالي، توجد دوال متصلة تكون غير قابلة للاشتقاق. قد تكون تعجبت بالفعل مما إذا كان العكس صحيحًا. أي، هل توجد دوال قابلة للاشتقاق ولا تكون متصلة؟ الإجابة هي "لا". كما توضحه النظرية 2.1.

النظرية 2.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$، فان f تكون متصلة عند $x = a$.

البرهان

لكي تكون f متصلة عند $x = a$، نحتاج فقط إلى إثبات أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. ليكن ما يلي:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] \quad \text{اضرب واقسم ب } (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]\lim_{x \to a}(x - a) \quad \text{النظرية}$$

$$= f'(a)(0) = 0 \quad \text{بنا أن } f \text{ قابلة للإشتقاق}$$

قمنا باستخدام التعريف البديل للمشتقة (2.2) الذي ناقشناه سابقًا. بتطبيق النظرية 3.1 في الدرس 1.3، يتبع ذلك الآن ما يلي

$$0 = \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) - f(a),$$

والذي يعطينا النتيجة. ■

لاحظ أن النظرية 2.1 تخبرنا بأنه إذا كانت الدالّة غير متصلة عند نقطة ما، فإنه لن يكون لها مشتقة عند النقطة. وتبين كذلك أن الدوال تكون غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة حيث يكون تمثيلها البياني مشتملًا على رأس مُدبب كما هو الحال بالنسبة $f(x) = |x|$ عند $x = a$. (انظر المثال 2.7).

ملاحظات تاريخية

غوتفريد فيلهلم لايبنتز

(1646–1716) عالم رياضيات وفيلسوف ألماني قدّم الكثير من الرموز والمصطلحات في حساب التفاضل والتكامل ويُنسب له (بجانب السيد إسحاق نيوتن) ابتكار حساب التفاضل والتكامل. وكان لايبنتز عبقريًا؛ فما إن حصل على شهادة القانون، بدأ في نشر أبحاث في علم المنطق والأحكام القضائية في سن 20. وهو أحد رواد عصر النهضة بحق، وله إسهامات مهمة في السياسة والفلسفة وعلم اللاهوت والهندسة واللغويات والجيولوجيا والهندسة المعمارية والفيزياء، كما اشتهر بكونه أعظم المحررين في زمانه. وعلى جانب الرياضيات، فقد استمد لايبنتز العديد من القواعد الأساسية لحساب المشتقات وساعد على تحفيز تطوير حساب التفاضل والتكامل من خلال اتصالاته الواسعة. وكان للرمز البسيط والمنطقي الذي اخترعه الفضل في أن يكون حساب التفاضل والتكامل سهلًا للتناول من قبل قطاع عريض من الجمهور، ولم يتم إحداث إلا تطويرًا بسيطًا لما توصل إليه منذ 300 عام. ومن كلماته، "ميزة الاكتشاف قد تتجلى للمرء في الرموز ولكن الميزة الأعظم تكمن في تعبيرهم بإيجاز عن الشيء بطبيعته الدقيقة...ثم بالطبع يقل جهد التفكير كثيرًا".

مثال 2.7 إثبات أن الدالّة تكون غير قابلة للإشتقاق عند نقطة

أثبت أنّ

$f(x) = \begin{cases} 4 & , \; x < 2 \\ 2x & , \; x \geq 2 \end{cases}$ غير قابلة للإشتقاق $x = 2$.

الحل يشير التمثيل البياني (انظر الشكل 3.18) إلى وجود رأس مُدبب عند $x = 2$. لذا قد نتوقع عدم وجود المشتقة. للتحقق من صحة ذلك، نتحقق من المشتقة بإيجاد قيمة النهايات من جهة واحدة. حيث $h > 0$. لاحظ أن $(2 + h) > 2$ وبالتالي $f(2 + h) = 2(2 + h)$. ذلك يعطينا

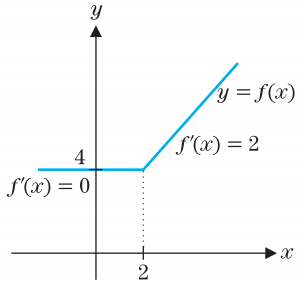
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(2+h) - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 2h - 4}{h} \quad \text{اضرب واختصر}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2. \quad \text{اختصر } h$$

وبالمثل، إذا كان $h < 0$، $(2 + h) < 2$ وبالتالي، $f(2 + h) = 4$ يكون لدينا إذًا

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{4 - 4}{h} = 0$$

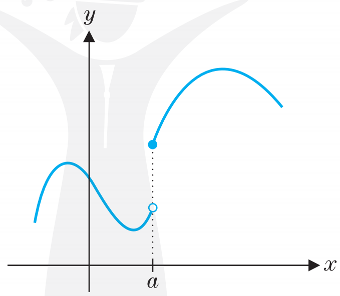


الشكل 3.18

رأس مُدبب

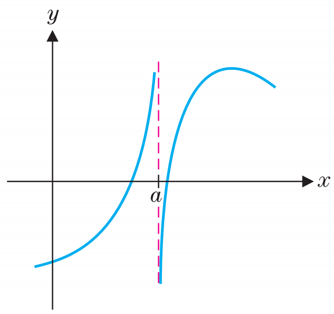
بما أن النهايات من الجهتين غير متساوية $(2 \neq 0)$. $f'(2)$ تكون غير موجودة (أي أن f غير قابلة للإشتقاق عند $x = 2$).

توضح الأشكال 3.19a–3.19d مجموعة متنوعة من الدوال التي لا يوجد $f'(a)$ لها. في كل حالة، ضع في اعتبارك أن المشتقة غير موجودة.



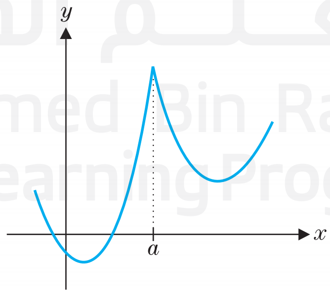
الشكل 3.19a

انفصال قفزي



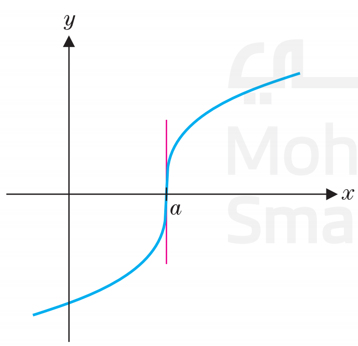
الشكل 3.19b

خط تقارب رأسي



الشكل 3.19c

رأس مُدبب



الشكل 3.19d

مماس رأسي

التفاضل العددي

في حالات عديدة أثناء التطبيقات، يكون من غير الممكن أو العملي حساب المشتقات رمزيًا. يحدث ذلك عادةً عندما يكون لديك بعض بيانات فقط (مثلًا، جدول قيم) تمثل دالّة مجهولة بشكل تام.

مثال 2.8 تقريب الاشتقاق عدديًا

قدّر مشتقة $f(x) = x^2\sqrt{x^3+2}$ عند $x = 1$ عدديًا.

الحل على الرغم من صعوبة العمل بتعريف النهاية لمشتقة هذه الدالّة، فإن التعريف يخبرنا بأن المشتقة عند $x = 1$ هي نهاية ميول الخطوط القاطعة. سنقوم بحساب بعض مما يلي أدناه:

h	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
0.1	4.7632
0.01	4.3715
0.001	4.3342

h	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
−0.1	3.9396
−0.01	4.2892
−0.001	4.3260

لاحظ أن الميول تبدو تقارب من 4.33 تقريبًا كلما اقترب h من 0. لذلك، نقوم بالتقريب $f'(1) \approx 4.33$

مثال 2.9 تقدير السرعة المتجهة عدديًا

افترض أنّ متسابقًا قطع المسافات التالية في الأوقات الزمنية المعطاة. قدّر السرعة للمتسابق عند الثانية "6".

t(sec)	5.0	5.5	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.5	7.0
$f(t)$ (ft)	123.7	141.01	151.41	154.90	158.40	161.92	165.42	175.85	193.1

الحل السرعة المتجهة اللحظية هي النهاية للسرعة المتوسطة كلما تقلصت الفترة الزمنية. نحسب أولًا السرعات المتوسطة على أقصر الفترات الزمنية المعطاة، من 5.9 إلى 6.0 ومن 6.0 إلى 6.1.

الفترة الزمنية	السرعة المتجهة المتوسطة
(5.9, 6.0)	35.0 ft/s
(6.0, 6.1)	35.2 ft/s

بما أن هذين أفضل تقديرين فرديين متاحين من البيانات، يمكننا قسمة الفرق وتقدير السرعة 35.1 ft/s. ومع ذلك، توجد معلومات مفيدة في بقية البيانات. استنادًا إلى الجدول المبين، يمكننا استنتاج أن المتسابق كان يبلغ السرعة القصوى عند الثانية "6" تقريبًا. وبالتالي، يمكننا قبول التقدير الأعلى 35.2 ft/s. ينبغي التأكيد على أنه لا توجد إجابة صحيحة وحيدة لهذا السؤال، بما أن البيانات غير مكتملة (حيث لا نعلم سوى المسافة فقط في أوقات زمنية ثابتة، بدلًا من سلسلة متصلة من الأوقات الزمنية).

الفترة الزمنية	السرعة المتجهة المتوسطة
(5.5, 6.0)	34.78 ft/s
(5.8, 6.0)	34.95 ft/s
(5.9, 6.0)	35.00 ft/s
(6.0, 6.1)	35.20 ft/s
(6.0, 6.2)	35.10 ft/s
(6.0, 6.5)	34.90 ft/s

ما وراء الصيغ

في الدروس 3.3–3.8، نستمد صيغًا عديدة لحساب المشتقات. كلما زادت معرفتك بهذه الصيغ، ضع في اعتبارك أسباب اهتمامنا بالاشتقاق. أوصلتنا دراسات دقيقة أُجريت على ميل المماس للمنحنى والسرعة المتجهة لجسم متحرك إلى النهاية نفسها، والتي أطلقنا عليها اسم الاشتقاق. بصفة عامة، تمثل المشتقة معدل التغير في كمية واحدة من حيث كمية أخرى. وقد أوصلتنا دراسة التغير بطريقة كمية إلى تقدم لا حصر له بشكل مباشر في العلوم والهندسة الحديثة.

تمارين كتابية

1. يعد الاشتقاق مهمًا بسبب العديد من الاستخدامات والتفسيرات المختلفة. صِف أربعة جوانب للاشتقاق: بيانيًا (فكّر في المماسات)، ورمزيًا، وعدديًا، ومن حيث التطبيقات.

2. غالبًا ما يستخدم علماء الرياضيات الكلمة "ملساء" لوصف الدوال التي لها خواص معينة. بيانيًا، كيف تكون الدوال القابلة للاشتقاق ملساء أكثر من الدوال التي تكون متصلة ولكن غير قابلة للاشتقاق، أو الدوال التي تكون غير متصلة؟

3. صِف بإيجاز ما تخبرك به المشتقة عن الدالّة الأصلية. على وجه الخصوص، إذا كانت المشتقة موجبة عند نقطة ما، فماذا تعلم عن اتجاه الدالّة عند هذه النقطة؟ ما الذي سيختلف إذا كانت المشتقة سالبة عند نقطة ما؟

4. مشتقة $f(x) = 3x - 5$ هي $f'(x) = 3$. اشرح سبب صحة ذلك بدلالة الميل.

في التمارين 1–4، احسب $f'(a)$ باستخدام النهايتين (2.1) و (2.2).

1. $f(x) = 3x + 1, a = 1$

2. $f(x) = 3x^2 + 1, a = 1$

3. $f(x) = \sqrt{3x + 1}, a = 1$

4. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}, a = 2$

في التمارين 5–12، احسب الدالّة المشتقة f' باستخدام تعريف المشتقة.

5. $f(x) = 3x^2 + 1$

6. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

7. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

9. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

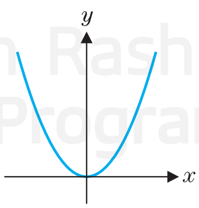
10. $f(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

11. $f(t) = \sqrt{3t + 1}$

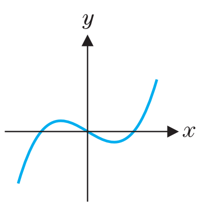
12. $f(t) = \sqrt{2t + 4}$

في التمرين 13 و 16، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f لرسم التمثيل البياني لمشتقة الدالة.

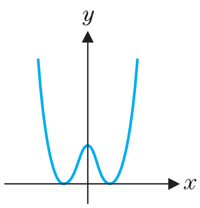
13. (a)



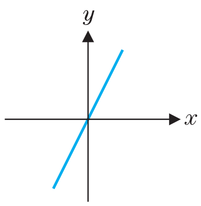
(b)



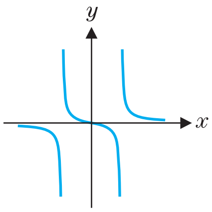
14. (a)



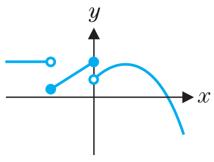
(b)



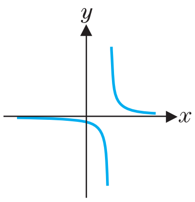
15. (a)



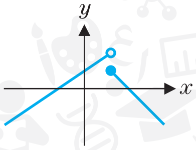
(b)



16. (a)

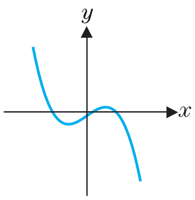


(b)

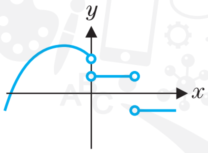


في التمرينين 17 و 18، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f' لرسم تمثيل بياني معقول لدالّة متصلة f.

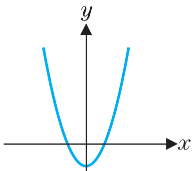
17. (a)



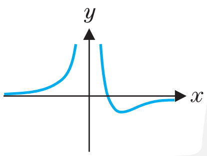
(b)



18. (a)



(b)



في التمارين 19–22، احسب المشتقة في الطرف الأيمن $D_+f(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ والمشتقة في الطرف الأيسر $D_-f(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$. هل $f'(0)$ موجودة؟

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ، \; x < 0 \\ 3x + 1 & ، \; x \geq 0 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} 0 & ، \; x < 0 \\ 2x & ، \; x \geq 0 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ، \; x < 0 \\ x^3 & ، \; x \geq 0 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 2x & ، \; x < 0 \\ x^2 + 2x & ، \; x \geq 0 \end{cases}$

في التمارين 26–23، قدّر قيمة المشتقة عدديًا.

.23 $f'(1)$ لـ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

.24 $f'(2)$ لـ $f(x) = xe^{x^2}$

.25 $f'(0)$ لـ $f(x) = \cos 3x$

.26 $f'(2)$ لـ $f(x) = \ln 3x$

في التمرينين 27 و 28، استخدم المسافات $f(t)$ لتقدير السرعة المتجهة عند $t = 2$.

.27

t	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(t)$	3.1	3.9	4.8	5.8	6.8	7.7	8.5

.28

t	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(t)$	4.6	5.3	6.1	7.0	7.8	8.6	9.3

.29 مثّل بيانيًا وحدد جميع قيم x التي عندها تكون f غير قابلة للاشتقاق (a) $f(x) = |x| + |x-2|$, (b) $f(x) = |x^2 - 4x|$

.30 مثّل بيانيًا وحدد جميع قيم x التي عندها تكون g غير قابلة للإشتقاق (a) $g(x) = e^{-2/x}$, (b) $g(x) = e^{-2/(x^3-x)}$

.31 حيث $f(x) = x^p$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية p بحيث يكون $f'(0)$ موجودًا.

.32 حيث $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x<0 \\ ax+b, & x \ge 0 \end{cases}$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية a و b بحيث يكون $f'(0)$ موجودًا.

.33 أعط مثالًا يوضح أن ما يأتي لا يتحقق لكل الدوال f: إذا كانت $f(x) \le x$، فإذًا $f'(x) \le 1$ بالنسبة لكل x.

.35 إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $x = a \neq 0$، فأوجد قيمة

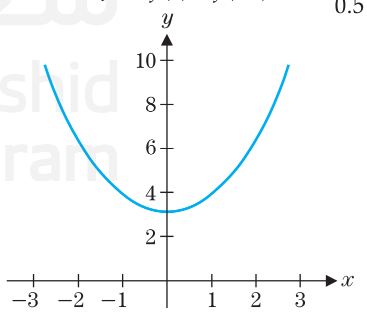
$$\lim_{x \to a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2}$$

.36 اثبت أنه إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $x = a$، فإذًا

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+ch) - f(a)}{h} = cf'(a)$$

.37 استخدم التمثيل البياني لتنظيم ما يأتي بترتيب تصاعدي:

$$f(0), f(0) - f(-1), \frac{f(0) - f(-0.5)}{0.5}, f'(0).$$



التمرينان 37 و 38

.38 استخدم التمثيل البياني لتنظيم ما يأتي بترتيب تصاعدي:

$$f(0), f(0) - f(-1), \frac{f(0) - f(-0.5)}{0.5}, f'(0).$$

.39 ارسم التمثيل البياني للدالّة بالخواص التالية:
$f(0) = 1, f(1) = 0, f(3) = 6, f'(0) = 0, f'(1) = -1$ و $f'(3) = 4$.

.40 ارسم التمثيل البياني للدالّة بالخواص التالية:
$f(-2) = 4, f(0) = -2, f(2) = 1, f'(-2) = -2, f'(0) = 2$ و $f'(2) = 1$.

.41 احسب الدالّة المشتقة للدوال x^2، x^3 و x^4. استنادًا إلى نتائجك، حدد النمط وخمّن صيغة عامة لمشتقة الدالّة x^n.

.42 اختبر تخمينك في التمرين 41 على الدالّة $\sqrt{x} = x^{1/2}$ والدالّة $1/x = x^{-1}$.

تطبيقات

.43 يوضح الجدول هامش الخطأ بالدرجات لضربات الإرسال في لعبة التنس من ارتفاع x مترًا. (البيانات مأخوذة من ج. بينيت، كلية رونوك) قدّر قيمة مشتقّة هامش الخطأ عند $x = 2.5$ وفسّرها من حيث فائدة ضرب الكرة من ارتفاعٍ أكبر.

x الأمتار	2.39	2.5	2.7	2.85	3
هامش الخطأ	1.11	1.29	1.62	1.87	2.12

.44 استخدم الجدول في التمرين 43 لتقدير المشتقة عند $x = 2.85$. قارن تقديرك بتقديرك في التمرين 43.

.45 تستخدم وكالة حماية البيئة قياس الطن/الميل في الجالون لتقييم كفاءة نقل الحركة في المركبات. ويعطى تقدير الطن/الميل في الجالون لمركبةٍ من خلال وزن المركبة (مقدرًا بالطن) مضروبًا بتقدير كفاءة استهلاك الوقود في المركبة مقدرةً بالميل في الجالون. يعطي الجدول البيانات الخاصة بسياراتٍ جديدةٍ لعدّة سنوات. قدّر معدّل تغيير الطن/الميل في الجالون خلال (a) عام 1994 و (b) عام 2000. هل تشير تقديراتك إلى أن السيارات تزداد أو تنخفض كفاءتها؟

العام	1992	1994	1996	1998	2000
طن/ميل في الجالون	44.9	45.7	46.5	47.3	47.7

.46 يوضح الجدول التالي قيم كفاءة استهلاك الوقود مقدرةً بالميل في الجالون لسياراتٍ من عام 1992 إلى 2000. قدّر معدّل التغير مقدرةً بوحدة MPG خلال (a) عام 1994 وخلال (b) عام 2000. هل تشير تقديراتك إلى أن كفاءة استهلاك الوقود في السيارات تزداد أو تنخفض؟ بمقارنة إجاباتك بالإجابات في التمرين 45، فما الذي يجب أن يحدث لوزن السيارات المتوسط؟ إذا بقي الوزن ثابتًا، فما الذي تتوقع أن يحدث لاستهلاك الوقود مقدرًا بـ MPG؟

العام	1992	1994	1996	1998	2000
MPG	28.0	28.1	28.3	28.5	28.1

في التمرينين 47 و 48، أعطِ الوحدات الخاصة بدالّة المشتقة.

(a) $f(t)$ تمثل الموقع مقدرًا بالأمتار وعند الزمن t مقدرًا بالثواني.

(b) $f(x)$ تمثل الطلب مقدرًا بعدد قطع منتجٍ عندما السعر يساوي x دولارًا.

48. (a) $c(t)$ تمثل الكمية الموجودة لمادةٍ كيميائية مقدرةً بالجرامات عند الزمن t دقيقة.

(b) $p(x)$ تمثل الكتلة مقدرةً بوحدة kg لـــ x m الأولى من أنبوب.

49. لتكن $f(t)$ تمثل قيمة تداول سهم عند الزمن t يومًا. فإذا كانت $f'(t) < 0$. فما الذي يعني ذلك بالنسبة للسهم؟ إذا كنت تحوز على بعض الأسهم من هذا النوع، فهل ينبغي عليك بيع ما بحوزتك أم شراء المزيد؟

50. افترض أن هناك سهمين قيمتا تداولهما $f(t)$ و $g(t)$، حيث $f(t) > g(t)$ و $0 < f'(t) < g'(t)$. فبناءً على هذه المعلومات، ما السهم الذي ينبغي عليك شراؤه؟ اشرح بإيجاز.

51. يفترض نمط انتشار أحد الأمراض أن المرض ينتشر في البداية ببطءٍ شديد، ثم يزداد معدّل العدوى بصورةٍ تدريجيةٍ ليبلغ ذروته، ثم ينخفض من جديدٍ إلى الصفر في دلالةٍ عن نهاية الوباء. إذا كانت $I(t)$ تمثل عدد الأشخاص المصابين عند الزمن t، صمم تمثيلًا بيانيًا لكلٍ من $I(t)$ و $I'(t)$، على فرض أن أولئك المصابين لا يشفون من المرض.

52. يفترض أحد أنماط نموّ التّعداد السّكاني أن النموّ يكون سريعًا جدًا في البداية، ثم ينخفض معدّل النموّ إلى أن يبدأ التعداد السّكاني بالتناقص. فإذا كانت $P(t)$ تمثل التّعداد السّكاني عند الزمن t، صمّم تمثيلًا بيانيًا لـــ $P(t)$ و $P'(t)$.

53. تفرض شركة الاتصالات الهاتفية درهمًا واحدًا على كل اتصالٍ مدته 20 دقيقة، ثمّ 10 فلسات في الدقيقة للدقائق الـــ 60 التالية و 80 سنتًا في الدقيقة من أجل كل دقيقة إضافية بعد ذلك (أو للجزء من الدقيقة). لتكن $f(t)$ تمثل كلفة الاتصال لمدة t دقيقة مقدرةً بالفلس، بحيث $t > 0$. حدّد $f'(t)$ بأكمل قدرٍ ممكن.

54. تفرض إحدى الدول ضريبة دخلٍ بنسبة 10% على الـ $\mathrm{AED}20{,}000$ الأولى للدخل و 16% على الدخل الإضافي فوق $\mathrm{AED}20{,}000$. لتكن $f(t)$ الضريبة المفروضة من قِبَل الدولة على مبلغ $\mathrm{AED}t$ من الدخل. حدّد $f'(t)$ بأكمل قدرٍ ممكن.

تمارين استكشافية

1. افترض أن هناك دالّةً $F(x)$ بحيث $F(1) = 1$ و $F(0) = f_0$، وفيها $0 < f_0 < 1$. فإذا كانت $F'(1) > 1$. وضّح بالتمثيل البياني أن للمعادلة $F(x) = x$ حلًا q بحيث $0 < q < 1$. (إرشاد: مثلّ بيانيًا الدالّة إضافةً إلى دالّة $y = x$ معقولة $F(x)$ وابحث عن التقاطعات.) صمم تمثيلًا بيانيًا فيه $F'(1) < 1$ بحيث لا توجد حلولٌ للمعادلة $F(x) = x$ وبحيث $0 < x < 1$. للحلول صلةٌ باحتمال انقراض الحيوانات أو أسماء العائلات. افترض أنك أنت وأسلافك تنجبون أطفالًا تبعًا للاحتمالات التالية: $f_0 = 0.2$ هو احتمال عدم إنجاب أطفال و $f_1 = 0.3$ هو احتمال إنجاب طفلٍ واحدٍ فقط، $f_2 = 0.5$ هو احتمال إنجاب طفلين. عرّف $F(x) = 0.2 + 0.3x + 0.5x^2$ ووضح أنّ $F'(1) > 1$. أوجد حلّ $F(x) = x$ بين $x = 0$ و $x = 1$. هذا العدد هو احتمال انقراض "نسلك" في وقتٍ ما في المستقبل. أوجد القيم غير الصفرية لـ f_0، f_1 و f_2 بحيث تحقق الدالّة $F(x)$ المقابلة $F'(1) < 1$ وبالتالي فإن احتمال انقراض نسلك هو 1.

2. **لناتج قسمة الفرق التماثلي** لدالّة f يقع مركزها عند $x = a$ الصيغة $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$. إذا كان $f(x) = x^2 + 1$ و $a = 1$، أوضح أن قسمة الفرق التماثلي بصيغة ميل مستقيمٍ قاطعٍ عند $h = 1$ و $h = 0$ 5. بناءً على صورتك، خمّن نهاية ناتج قسمة الفرق التماثلي مع اقتراب h من 0. ثم احسب النهاية وقارن بالمشتقة $f'(1)$ التي تم إيجادها في المثال 1.1. من أجل $h = 1$ ، $h = 0.5$ و $h = 0.1$، قارن القيم $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ الفعلية لناتج قسمة الفرق التماثلي وناتج قسمة الفرق العادي. على وجه العموم، أي ناتجين لقسمة الفرق يوفّر تقديرًا أفضل للمشتقة؟ بعد ذلك، قارن قيم ناتجي قسمة الفرق عند $h = 0.5$ و $h = -0.5$ بالمشتقة $f'(1)$. فسّر بالتمثيل البياني السبب في أن أحدهما أصغر والآخر أكبر. وقارن متوسط ناتجي قسمة الفرق هذين بناتج قسمة الفرق التماثلي عند $h = 0.5$. واستخدم هذه النتيجة لشرح السبب في أن ناتج قسمة الفرق التماثلي قد يوفر تقديرًا أفضل للمشتقة. بعد ذلك، احسب العديد من نواتج قسمة الفرق التماثلي لـ $f(x) = \begin{cases} 4 & ، x < 2 \\ 2x & ، x \ge 2 \end{cases}$ التي مركزها $a = 2$. تذكّر أننا أوضحنا في المثال 2.7 أن المشتقة $f'(2)$ غير موجودة. وعند هذه المعطيات، ناقش إحدى المشكلات الرئيسة عند استخدام ناتج قسمة الفرق التماثلي للتقدير التقريبي للمشتقات. وأخيرًا، أوضح أنه إذا كانت $f'(a)$ موجودة، إذًا $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

الدرس 3-3 حساب المشتقات: قاعدة القوة

لقد حسبت الآن العديد من المشتقات باستخدام تعريف النهاية. وفي الحقيقة، قد تكون أجريت ما يكفي من الحسابات لتبدأ باستخدام بعض الطرق المختصرة. وسنكمل على هذا المنوال في هذا الدرس عبر تطوير بعض القواعد الأساسية.

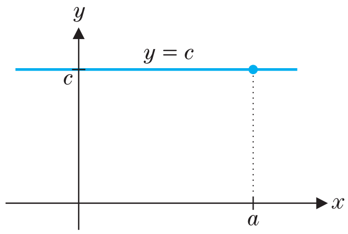
قاعدة القوة

نراجع أولًا تعريف النهاية للمشتقة لحساب مشتقتين بسيطتين جدًا.

عند أي ثابت c

$$\frac{d}{dx}c = 0 \tag{3.1}$$

لاحظ أن (3.1) تنص على أنه عند أي ثابت c ، فإن للمستقيم الأفقي مماس ميله صفر. أي أن المماس لمستقيم أفقي هو المستقيم الأفقي نفسه. (انظر الشكل 3.20).



الشكل 3.20
مستقيم أفقي

لإثبات المعادلة (3.1)، ليكن $f(x) = c$. لجميع قيم x . من تعريف النهاية، لدينا

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}c = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

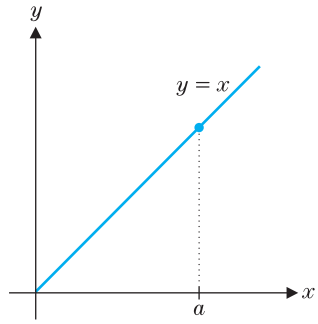
وبصورة مشابهة، لدينا

$$\frac{d}{dx}x = 1 \tag{3.2}$$

لاحظ أن (3.2) تنص على أن المماس على $y = x$ هو مستقيمٌ ميله واحد (أي $y = x$ ؛ انظر الشكل 3.21)، وهذا ليس بالأمر المفاجئ.

لإثبات المعادلة (3.2)، نجعل $f(x) = x$. من تعريف النهاية، لدينا

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\end{aligned}$$



الشكل 3.21
مماس منحنى $y = x$

يقدم الجدول المبيّن في الهامش قائمةً موجزةً لمشتقّاتٍ حُسبت مسبقًا إما بمثابة أمثلةٍ أو في التمارين باستخدام تعريف النهاية لاحظ أن قوّة x في المشتقة أصغر بواحد دائمًا من قوة x في الدالّة الأصلية. وعلاوةً على ذلك، فإن معامل x في المشتقة هو نفسه قوة x في الدالّة الأصلية. وهذا يؤدي إلى النتيجة التالية.

$f(x)$	$f'(x)$
$1 = x^0$	0
$x = x^1$	$1x^0 = 1$
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

النظرية 3.1 (قاعدة القوة)

لأي عددٍ صحيح $n > 0$ ، $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

البرهان

من تعريف النهاية المعطى في المعادلة (3.2)، إذا كان $f(x) = x^n$ ، فإن

$$\frac{d}{dx}x^n = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad (3.3)$$

لتقدير النهاية، سوف نحتاج إلى تحويل التعبير الموجود في البسط إلى أبسط صورة. تذكر أنّ $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ و $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. وبصورةٍ أكثر عمومية، عليك أن تتذكر من خلال نظرية ذات الحدين أنه لأي عدد صحيح موجب n ،

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \qquad (3.4)$$

بتعويض (3.4) في (3.3)، نحصل على

اختصر العامل x^n

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

أخرج h كعامل مشترك واختصر

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

بما أن كل حدّ ما عدا الأول له معامل يساوي h ■

من السهل جدًا تطبيق قاعدة القوة، كما نرى في المثال 3.1.

مثال 3.1 باستخدام قاعدة القوة

أوجد مشتقّة (a) $f(x) = x^8$ و (b) $g(t) = t^{107}$.

الحل (a) لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^8 = 8x^{8-1} = 8x^7.$$

(b) وبصورةٍ مشابهة،

$$g'(t) = \frac{d}{dt}t^{107} = 107t^{107-1} = 107t^{106}. \blacksquare$$

تذكر أنّنا أوضحنا في الدرس 3.2 أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad (3.5)$$

لاحظ أننا نستطيع إعادة كتابة (3.5) بالصيغة

$$\frac{d}{dx}x^{-1} = (-1)x^{-2}$$

أي أن مشتقّة x^{-1} تتبع النمط نفسه في قاعدة القوة التي أشرنا إليها للتوّ وأثبتناها للأسس الصحيحة الموجبة.

وبصورةٍ مماثلة، استخدمنا في الدرس 3.2 تعريف النهاية لنبيّن أن

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (3.6)$$

نستطيع أن نعيد كتابة (3.6) أيضًا بالصيغة $\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

بحيث تتبع مشتقة هذه القوة النسبية لـ x النمط نفسه أيضًا في قاعدة القوة التي أثبتناها من أجل الأسس الصحيحة الموجبة.

ملحوظة 3.1

كما سوف نرى، فإن قاعدة القوة تنطبق على أي قوة لـ x. لن نستطيع إثبات هذه الحقيقة لبعض الوقت الآن، وذلك نظرًا إلى أن إثبات القاعدة 3.1 لا يمكن تعميمه لكون التوسّع في المعادلة (3.4) لا ينطبق سوى على الأسس الصحيحة الموجبة. ومع ذلك، فسوف نستخدم القاعدة بطلاقةٍ عند أي قوة لـ x. نذكر هذا في النظرية 3.2

النظرية 3.2 (القاعدة العامة للقوة)

عند أي عددٍ حقيقي $r \neq 0$،

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \qquad (3.7)$$

إن قاعدة القوة سهلة الاستخدام، كما نرى في المثال 3.2.

انتبه

تأكد هنا من انك لن تقع في الخطأ المشترك:

$$\frac{d}{dx}x^{-19} \neq -19x^{-18}$$

تخبرك قاعدة القوة أنه يجب طرح العدد 1 من الأس إذا كان موجباً أو سالباً

مثال 3.2 استخدام القاعدة العامة للقوة

أوجد مشتقة (a) $f(x) = \frac{1}{x^{19}}$ ، (b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ و (c) $h(x) = x^{\pi}$.

الحل (a) من (3.7)، لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{19}}\right) = \frac{d}{dx}x^{-19} = -19x^{-19-1} = -19x^{-20} \cdot$$

(b) إذا كتبنا $\sqrt[3]{x^2}$ بصيغة قوة كسرية لـ x. فيمكننا استخدام (3.7) لحساب المشتقة، وذلك على النحو التالي.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}x^{2/3} = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \cdot$$

(c) وأخيرًا لدينا

$$h'(x) = \frac{d}{dx}x^{\pi} = \pi x^{\pi-1}.$$

لاحظ أن هناك مشكلةً معرفية أخرى في المثال 3.2 وتتمثل في تقرير ما الذي يعنيه x^{π} . بما أن الأس ليس كسري، فما الذي نقصده بالضبط عند رفع عددٍ إلى القوة غير النسبية π ؟

القواعد العامة للمشتقات

تعطينا قاعدة القوة فئةً كبيرةً من الدّوال التي يمكننا حساب مشتقاتها بسرعةٍ وبدون استخدام تعريف النهاية وتوسّع القواعد التالية لجمع المشتقات وطرحها بصورةٍ إضافيةٍ عدد المشتقات التي يمكننا حسابها بدون اللجوء إلى التعريف. خذ في الحسبان دائمًا أن المشتقة هي نهاية؛ فقواعد التفاضل الواردة في النظرية 3.3 تتبع مباشرةً القواعد المقابلة الخاصة بالنهايات.

النظرية 3.3

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للإشتقاق عند x وكان c أي ثابت، فإن

(i) $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$ ،

(ii) $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$ و

(iii) $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

البرهان

نبرهن فقط الجزء (i) من السؤال. حيث نترك برهان (ii) و (iii) بمثابة تمرينين. افترض أنّ $k(x) = f(x)+g(x)$.

وبالتالي من تعريف نهاية المشتقة (2.3)، نحصل على

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \quad \text{تعريف } k(x)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \quad \text{تجميع حدود } f \text{ وتجميع حدود } g$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \quad \text{النظرية } 3.1$$

$$= f'(x)+g'(x) \quad \text{اعد تجميع المشتقات للدالتين } f \text{ و } g \;\blacksquare$$

نوضح النظرية 3.3 عبر السير في حساب المشتقة خطوةً خطوة، مع عرض جميع التفاصيل.

مثال 3.3 إيجاد مشتقة المجموع

أوجد مشتقة $f(x) = 2x^6 + 3\sqrt{x}$.

الحل لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^6) + \frac{d}{dx}\left(3\sqrt{x}\right) && \text{النظرية 3.3 (i)} \\ &= 2\frac{d}{dx}(x^6) + 3\frac{d}{dx}(x^{1/2}) && \text{النظرية 3.3 (iii)} \\ &= 2(6x^5) + 3\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) && \text{قاعدة القوة} \\ &= 12x^5 + \frac{3}{2\sqrt{x}} && \text{بسّط} \end{aligned}$$

مثال 3.4 إعادة كتابة دالّةٍ قبل حساب المشتقة

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$.

الحل نظرًا إلى أننا لا نملك أي قاعدةٍ لحساب مشتقة ناتج قسمة، فسوف نقوم أولًا بإعادة كتابة $f(x)$ عبر التخلص من x في المقام. لدينا

$$f(x) = \frac{4x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = 4x - 3 + 2x^{-1/2}$$

من النظرية 3.3 وقاعدة القوة (3.7)، نحصل على

$$f'(x) = 4\frac{d}{dx}(x) - 3\frac{d}{dx}(1) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = 4 - 0 + 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = 4 - x^{-3/2}$$

مثال 3.5 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس على التمثيل البياني عند $x = 1$ لمنحنى $f(x) = 4 - 4x + \dfrac{2}{x}$

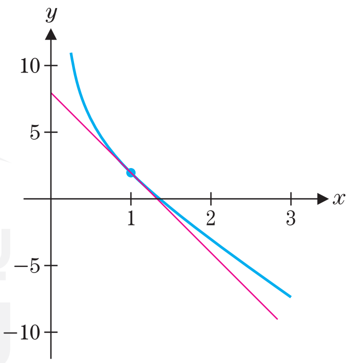
الحل لاحظ أولًا أنّ $f(x) = 4 - 4x + 2x^{-1}$. من النظرية 3.3 وقاعدة القوة، لدينا

$$f'(x) = 0 - 4 - 2x^{-2} = -4 - 2x^{-2}$$

عند $x = 1$ ميل المماس يساوي $f'(1) = -4 - 2 = -6$. فتكون معادلة المستقيم الذي ميله -6 والمار بالنقطة $(1,2)$ هي:

$$y - 2 = -6\,(x - 1)$$

نبيّن تمثيلًا بيانيًا لـ $y = f(x)$ والمماس عند $x = 1$ في الشكل 3.22.



الشكل 3.22
$y = f(x)$ والمماس عند $x = 1$

المشتقات ذات الرتب العليا

من ثمرات وجود دالّة مشتقة هو أننا نستطيع حساب المشتقّة من مشتقّة أخرى. ومن الواضح أن مثل هذه المشتقات ذات الرتب العليا لها تطبيقاتٌ هامّة.

على فرض أننا قد بدأنا بالدالّة f وحسبنا مشتقّتها f' . إذًا يمكننا حساب مشتقة f' والتي تدعى المشتقة من الرتبة الثانية لـ f وتكتب على أنها f'' . يمكننا حينها حساب مشتقة f'' والتي تدعى المشتقة من الرتبة الثالثة لـ f . وتكتب على النحو f''' . يمكننا الاستمرار في أخذ المشتقات إلى ما لا نهاية. وبعد ذلك، سنبيّن الرموز الشائعة للمشتقات الخمس الأولى لـ f [حيث نفترض أن $y = f(x)$]. لاحظ أننا نستخدم الشُرَط للإشارة إلى المشتقات الثلاث الأولى.

وبالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة أو أكثر، فإننا نكتب رتبة المشتقة بين قوسين. انتبه ألا تخلط بين هذا الرمز وبين الأسس.

الرُّتبة	المشتقة	تفاضل لايبنتز
1	$y' = f'(x)$	$\frac{df}{dx}$
2	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2f}{dx^2}$
3	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3f}{dx^3}$
4	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4f}{dx^4}$
5	$y^{(5)} = f^{(5)}(x)$	$\frac{d^5f}{dx^5}$

يتم حساب المشتقات ذات الرتب العليا ببساطةٍ عبر حساب عدّة مشتقاتٍ أولى، كما نرى في المثال 3.6.

مثال 3.6 حساب المشتقات ذات الرّتب العليا

إذا كانت لديك الدالّة $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$.

الحل

لدينا

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + 1) = 12x^3 - 4x$$

إذًا،

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(12x^3 - 4x) = 36x^2 - 4$$

$$f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}(36x^2 - 4) = 72x,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4f}{dx^4} = \frac{d}{dx}(72x) = 72,$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5f}{dx^5} = \frac{d}{dx}(72) = 0$$

وهكذا، يتبع عن ذلك أن

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n} = 0, \text{ for } n \geq 5$$

التسارع

ما المعلومات التي تقدّمها لنا المشتقة من الرتبة الثانية؟ بيانيًا، نحصل على خاصيةٍ تدعى التقعر والتي نوضّحها بالتفصيل في الوحدة 3. من التطبيقات الهامة للمشتقة من الرتبة الثانية التسارع، والتي سوف نناقشها بإيجازٍ الآن.

لعلّك تملك فكرةً عن مصطلح **التسارع**، وهو **المعدّل اللحظي لتغير السرعة**. وبالنتيجة، إذا كانت سرعة جسمٍ عند الزمن تعطى من خلال العلاقة ، فإن التسارع يساوي

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

مثال 3.7 حساب تسارع لاعب القفز الحرّ

على فرض أن ارتفاع لاعب القفزِ الحرّ بعد t ثانية من القفز من الطائرة يعطى من خلال العلاقة $f(t) = 640 - 20t - 16t^2$ قدم. أوجد تسارع ذلك الشخص عند الزمن t.

الحل بما أن التسارع هو مشتقّة السرعة، فإننا نحسب السرعة المتجهة أولًا:

$$v(t) = f'(t) = 0 - 20 - 32t = -20 - 32t \text{ ft/s}$$

يعطينا حساب مشتقة هذه الدالّة

$$a(t) = v'(t) = -32 \text{ ft/s}^2$$

بما أن المسافة تقاس بالأقدام والزمن يقاس بالثواني، فإن وحدة السرعة المتجهة هي قدم في الثانية، وبالتالي فإن وحدة التسارع هي قدم في الثانية في الثانية، وتكتب بالصيغة ft/s/s وبصورةٍ أكثر شيوعًا تكتب على أنها ft/s^2 (قدم في مربع الثانية). وهذا يشير إلى أن السرعة المتجهة تتغير بمقدار -32 ft/s كل ثانية وأن السرعة نحو الأسفل (بالاتجاه السالب) تزداد بمقدار 32 ft/s كل ثانية بسبب الجاذبية الأرضية. ■

ما وراء القوانين

إن قاعدة القوة تختصر علينا الكثير خلال حساب الكثير من المشتقّات. حيث يسعى علماء الرياضيات دائمًا إلى تسريع العمليات الحسابية وزيادة كفاءتها بالصورة القصوى. فمن خلال تجاوز الخطوات الطويلة وغير الضرورية وتوفير الجهد على أذهانهم، يفرّغ علماء الرياضيات أنفسهم لمعالجة المسائل المعقدة بطرقٍ إبداعية. ولكن من المهمّ أن تتذكر أنه ينبغي البرهان على الطرق المختصرة – كقاعدة القوة– بعناية.

التمارين 3-3

تمارين كتابية

.1 اشرح لصديقٍ ليس على معرفةٍ بأمور التفاضل والتكامل طريقة استخدام قاعدة القوة (رياضيًا). قرّر إن كان من الأفضل تقديم تفسيراتٍ منفصلةٍ حول الأسس الموجبة والسالبة، والأسس الصحيحة وغير الصحيحة، وغيرها من الحالات الخاصة.

.2 خلال القرن الثامن عشر، كانت "البراهين" غامضةً وفق المعايير الحديثة، ناهيك عن أنها كانت تفتقد إلى الدّقة. وفي عام 1734، كتب الأسقف بيركلي المختصّ في علوم ما وراء الطبيعة مقالةً أطلق عليها اسم المحلل وخاطب فيها "عالم رياضياتٍ كافر" (يعتقد أنه إدموند هالي الذي ينسب إليه اسم مذنّب هالي ذائع الصيت). يمكن وصف البرهان المتفق عليه عينها لقاعدة القوة من خلال العلاقة:

إذا زيدت x إلى $x + h$، فإن x^n تزداد إلى $(x+h)^n$. ويتبع ذلك أنّ $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = nx^{n-1} + \dfrac{n^2-n}{2}hx^{n-2} + \cdots$. الآن، لنختزل الزيادة h، وبالتالي تصبح المشتقّة تساوي nx^{n-1}.

اعترض بيركلي على هذا البرهان قائلًا:

"بيد أنه يبدو أن الاستنتاج يفتقد إلى الصحّة والشمولية. ذلك أننا إذا اختزلنا الزيادات، فسنهدم بذلك الفرضية السابقة القائلة بأن الزيادة كانت كيانًا موجودًا، أو الفرضية القائلة بأن هناك زياداتٍ في الأصل، حيث يعتمد هذا البرهان على افتراضٍ خاطئٍ في إعطائه هذه النتيجة. وهذه الطريقة في الاستنتاج...طريقة خاطئة. وبلا ريب، حين نفترض اختزال الزيادات، فحريّ بنا أن نفترض أنه يجب اختزال كل ما يتبع عن هذه الفرضية ضمن هذا التمرين."

فهل تعتقد أن اعتراض بيركلي سليم؟ وهل من المقبول من الناحية المنطقية افتراض وجود شيءٍ ما من أجل استنتاج خلاصة، ومن ثمّ افتراض أن الشيء نفسه غير موجودٍ من أجل تجنّب الاضطرار إلى قبول نتائج أخرى؟ ومن الناحية الرياضية، كيف تجعلنا النهاية لا نقع في جدلية اعتراض بيركلي على الزيادة h سواءٌ من حيث وجودها أو عدم وجودها؟

.3 إن السّرد التاريخي الوارد في التمرين 2 ليس إلا جزءًا من خلافٍ مستمرٍ بين أشخاص يستخدمون التقنيات في الرياضيات على نحوٍ أعمى بدون إثباتها وبين أولئك الذين يصرّون على البرهان الكامل لها قبل إتاحتها للاستخدام من قبل أي شخص. فإلى أيّ الفريقين تميل أنت؟ حدّد موقفك بكتابة مقالةٍ عن ذلك. وحاول خلال ذلك استباق ما قد يورده الطرف الآخر من براهين مع تفنيدها.

.4 في الحين الذي توجد فيه بين يديك طريقةٌ "سهلةٌ" لحساب مشتقّة $f(x) = x^4$، فقد تتساءل عن السبب في رغبتنا بأن تتعلّم الطريقة "الصعبة". لتقديم إجابةٍ عن ذلك، ناقش الطريقة التي يجب أن تتبعها لتجد مشتقة دالّةٍ لم تتعلّم الطريقة المختصرة لاشتقاقها من قبل.

في التمارين 1–14، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$
2. $f(x) = x^9 - 3x^5 + 4x^2 - 4x$
3. $f(t) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$
4. $f(s) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$
5. $f(w) = \dfrac{3}{w} - 8w + 1$
6. $f(y) = \dfrac{2}{y^4} - y^3 + 2$
7. $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$
8. $h(x) = 12x - x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x^2}}$
9. $f(s) = 2s^{3/2} - 3s^{-1/3}$
10. $f(t) = 3t^{\pi} - 2t^{1.3}$
11. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$
12. $f(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
13. $f(x) = x\left(3x^2 - \sqrt{x}\right)$
14. $f(x) = (x+1)(3x^2 - 4)$

في التمارين 15–20، احسب المشتقّة المطلوبة.

.15 $f''(t)$ لـ $f(t) = t^4 + 3t^2 - 2$

.16 $f'''(t)$ لـ $f(t) = 4t^2 - 12 + \dfrac{4}{t^2}$

.17 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ لـ $f(x) = 2x^4 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

.18 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ لـ $f(x) = x^6 - \sqrt{x}$

.19 $f^{(4)}(x)$ لـ $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2/\sqrt{x}$

.20 $f^{(5)}(x)$ لـ $f(x) = x^{10} - 3x^4 + 2x - 1$

في التمارين 21–24، استخدم دالّة الموقع المعطاة لإيجاد دالتي السرعة المتجهة والتسارع.

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

24. $s(t) = 10 - \dfrac{10}{t}$

في التمرينين 25 و 26، تمثل الدالّة المعطاة ارتفاع جسم ما. احسب السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن $t = t_0$. هل يتحرّك الجسم إلى الأعلى أو الأسفل؟

25. $h(t) = -16t^2 + 40t + 5,\ (a)\ t_0 = 1\ (b)\ t_0 = 2$

26. $h(t) = 10t^2 - 24t,\ (a)\ t_0 = 2\ (b)\ t_0 = 1$

في التمارين 27–30، أوجد معادلةً المماس عند $x = a$ على منحنى $y = f(x)$.

27. $f(x) = x^2 - 2, a = 2$

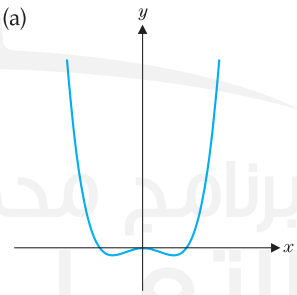
28. $f(x) = x^2 - 2x + 1, a = 2$

29. $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x, a = 4$

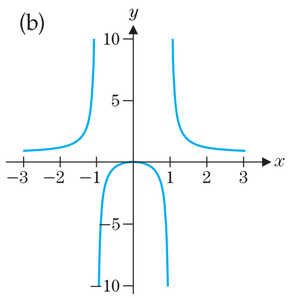
30. $f(x) = 3\sqrt{x} + 4, a = 2$

في التمرينين 31 و 32، استخدم التمثيل البياني لـ f لكي ترسم تمثيلًا بيانيًا لـ f''. (إرشاد: ارسم التمثيل البياني لـ f' أولًا.)

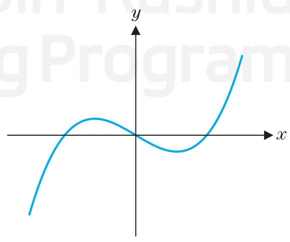
31. (a)



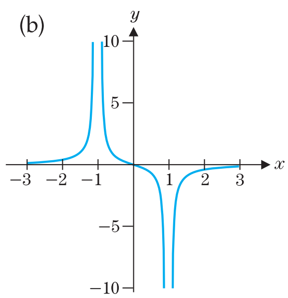
(b)



32. (a)



(b)



في التمرينين 33 و 34 (a)، حدّد قيمة (قيم) x التي يكون عندها المماس على منحنى $y = f(x)$ أفقيًا. (b) مثّل الدالّة بيانيًا لكلٍ من تلك النقاط. وحدّد الدلالة البيانية لكلٍ من تلك النقاط. (c) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها يقطع المماس على منحنى $y = f(x)$ المحور x عند زاوية قياسها $45°$

33. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 - 4x + 2$

في التمرينين 35 و 36، (a) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على منحنى $y = f(x)$. (b) مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد الدّلالة البيانية لكلّ نقطةٍ من تلك النّقاط.

35. (a) $f(x) = x^{2/3}$ (b) $f(x) = |x - 5|$ (c) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

36. (a) $f(x) = x^{1/3}$ (b) $f(x) = |x + 2|$ (c) $f(x) = |x^2 + 5x + 4|$

.37 أوجد جميع قيم x والتي يشكّل عندها المماس على منحنى $y = x^3 - 3x + 1$ (a) زاوية قياسها $45°$ مع المحور x ؛ (b) زاوية قياسها $30°$ مع المحور x ، على فرض أن الزاويتين تقاسان باتجاهٍ معاكسٍ لعقارب الساعة.

.38 أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = x^4 + x^3 + 3$ و $y = x^3 + 2x + 1$ (a) متوازيين.

.39 أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (بالصيغة $ax^2 + bx + c$) بحيث يكون (a) $f(0) = -2, f'(0) = 2$ و $f''(0) = 3$.

(b) $f(0) = 0, f'(0) =$ و $f''(0) = 1$.

.40 أوجد صيغةً عامةً لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ لـ

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

.41 أوجد مساحة المثلث الذي يحدده $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 1$. كرّر الأمر نفسه بالنسبة لمثلث يحدده $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 2$. وضّح أنك تحصل على المساحة نفسها باستخدام المماس على $y = \frac{1}{x}$ عند أيّ قيمة $x = a > 0$.

.42 وضّح أن نتيجة التمرين 41 لا تنطبق على $y = \frac{1}{x^2}$. أي أن مساحة المثلث المحدود بـ $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x = a > 0$ لا تعتمد على قيمة a .

.43 على فرض أن a عدد حقيقي، وأن f قابلة للإشتقاق لكل قيم $x \geq a$ وأن $g(x) = \max\limits_{a \leq t \leq x} f(t)$ لكل قيم $x \geq a$. أوجد $g'(x)$ في الحالتين (a) $f'(x) > 0$ و (b) $f'(x) < 0$.

.44 على فرض أن a عدد حقيقي، وأن f قابلة للإشتقاق لكل قيم $x \geq a$ وأن $g(x) = \min\limits_{a \leq t \leq x} f(t)$ لكل قيم $x \geq a$. أوجد $g'(x)$ في الحالتين (a) $f'(x) > 0$ و (b) $f'(x) < 0$.

في التمارين 45–48، أوجد دالة مُشتقتها معطاة.

45. $f'(x) = 4x^3$

46. $f'(x) = 5x^4$

47. $f'(x) = \sqrt{x}$

48. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

تطبيقات

49. بالنسبة لجميع الحيوانات التي تعيش على اليابسة، تتبع العلاقة من أجل عرض الساق w وطول الجسم b معادلةً من الصيغة $w = cb^{3/2}$ لأي ثابتٍ ما $c > 0$. أوضح أنه إذا كانت قيمة b كبيرةً بما فيه الكفاية، فإن $w'(b) > 1$. استنتج أنه بالنسبة للحيوانات الكبيرة، يزداد عرض السّاق (اللازم لحمل جسم الحيوان) بوتيرةٍ أسرع من طول الجسم. لماذا يفرض ذلك حدًا على حجم جسم الحيوانات التي تعيش على اليابسة؟

50. على فرض أن الدالّة $v(d)$ تمثّل متوسط السرعة بوحدة قياسها m/s للرقم القياسي الخاص بزمن الجري لمسافة d مترًا. فعلى سبيل المثال، إذا كان الزمن الأسرع على الإطلاق لقطع مسافة 200m يساوي 19.32 s، فإن $v(200) = 200/19.32 \approx 10.35$. اشرح ما الذي تمثّله المشتقة $v'(d)$.

51. لتكن الدالّة $f(t)$ تساوي الناتج الإجمالي المحلي (GDP) مقدرًا بمليار دولار في الولايات المتحدة الأمريكية خلال عام t . ويقدّم الجدول التالي العديد من القيم. قدّر وفسّر $f'(2000)$ و $f''(2000)$. [إرشاد: لتقدير المشتقة من الرتبة الثانية، قدّر $f'(1998)$ و $f'(1999)$ وابحث عن اتجاهٍ تتبعه النتائج.

t	1996	1997	1998	1999	2000	2001
$f(t)$	7664.8	8004.5	8347.3	8690.7	9016.8	9039.5

52. لتكن $f(t)$ الدالّة التي تعطي الوزن المتوسط للسيارات الخفيفة المنتجة محليًا خلال عام t . يعطي الجدول أدناه عدّة قيمٍ لهذا الوزن. قدّر وفسّر $f'(2000)$ و $f''(2000)$.

t	1985	1990	1995	2000
$f(t)$	4055	4189	4353	4619

53. إذا كان الموقع x لجسمٍ عند الزمن t يعطى من خلال $f(t)$ ، حيث $f'(t)$ تمثّل السرعة المتجهة و $f''(t)$ تعطي التسارع. وفقًا لقانون نيوتن الثاني، فإن التسارع يتناسب مع محصّلة القوة المؤثرة على الجسم (والتي تسبب تسارعه). فسّر المشتقة من الرتبة الثانية $f''(t)$ بدلالة القوة. يطبّق مصطلح مشتقّة التسارع في بعض الأحيان على $f'''(t)$. اشرح السبب في أن هذا المصطلح ملائم.

54. يصرّح أحد مسؤولي القطاع العام قائلًا: "لقد حققنا انخفاضًا في معدّل زيادة الدّين القومي." فإذا كانت $d(t)$ تمثّل الدّين القومي عند الزمن t مقدرًا بالأعوام. فما هي مشتقةّ $d(t)$ الذي يتمّ تخفيضه؟ وما الذي يمكنك استنتاجه عن حجم $d(t)$ بحدّ ذاته؟

تمارين استكشافية

1. تطوف طائرةٌ عند ارتفاع ميلين وعلى مسافة 10 أميال من أحد المطارات. يقع المطار عن النقطة (0 ,0) وتبدأ الطائرة بالهبوط عند النقطة (2 ,10) إلى أن تصل إلى المطار. صمم تمثيلًا بيانيًا لمسار طيرانٍ معقول $y = f(x)$ ، بحيث تمثّل y الارتفاع وتعطي x المسافة الأرضية عن المطار. (فكّر بذلك أثناء الرسم!) اشرح ما الذي تمثّله المشتقة $f'(x)$. (إرشاد: إنها ليست السرعة المتجهة.) اشرح السبب في أهمية و/أو ضرورة كون $f(0) = 0, f(10) = 2, f'(0) = 0$ و $f'(10) = 0$. إن كثيرة الحدود الأبسط التي تحقق هذه الشروط هي كثيرة حدودٍ تكعيبية $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. أوجد قيم الثوابت a, b, c و d لملائمة مسار الطائرة. [إرشاد: ابدأ بوضع $f(0) = 0$ ومن ثمّ ضع $f'(0) = 0$. قد تحتاج إلى استخدام الحاسوب لحل المعادلة.] مثّل الدالّة الناتجة بيانيًا؛ فهل تبدو صحيحة؟ على فرض أن قوانين خطوط الطيران تحظر أن تساوي المشتقة $\frac{2}{10}$ أو قيمةً أكبر من ذلك. فما المغزى من هذا القانون؟ وضّح أن مسار الطائرة الذي توصّلت إليه غير قانوني. برهن أن جميع مسارات الطيران التي تحقق الشروط الأربعة ليست قانونيةً في حقيقة الأمر. ولذلك، يتعيّن أن يبدأ الهبوط عند مسافة أبعد من 10 أميال من المطار. أوجد مسار الطائرة عند بدء الهبوط على بعد 20 ميلًا مع تحقيق كافة الشروط.

2. في كتاب التسلية الذي عنوانه Surely You're Joking Mr. Feynman، يروي الفيزيائي ريتشارد فينمان تحدٍّ انخرط فيه ضد التكنولوجيا التي كانت رائجةً في عصره (وهي المعداد). حيث يقوم التحدّي على حساب الجذر التكعيبي للعدد 1729.03. واستطاع فينمان أن يأتي بالإجابة 12.002 قبل خبير المعداد الذي استسلم في نهاية المطاف. اعترف فينمان بأن الحظّ قد تدخّل في اختيار العدد 1729.03؛ فقد كان يعلم أن القدم المكعّبة تحتوي على 1728in^3 اشرح السبب الذي استدلّ به فينمان من خلال ذلك على أنّ الإجابة أكبر بقليلٍ من 12. وكيف توصّل إلى دقّةٍ مقدارها ثلاثة أرقام؟ "لقد تعلّمتُ خلال حساب التّفاضل والتكامل أنه بالنسبة للكسور الصغيرة، تساوي الزيادة عن الجذر التكعيبيّ ثلث الزيادة عن العدد الأصلي. فالزيادة 1.03 تشكّل جزءًا واحدًا فقط من 2000 جزءٍ تقريبًا. وبالتالي فإن كلّ ما كان عليّ فعله هو إيجاد الكسر 1/1728، مقسومًا على 3 ومضروبًا بـ 12." ولكي ترى ما فعل، أوجد معادلة المماس على $y = x^{1/3}$ عند $x = 1728$ وأوجد الإحداثي y للمماس عند $x = 1729.03$

قواعد الضرب والقسمة

لقد شرحنا إلى الآن قواعد لحساب مشتقات مجموعةٍ من الدّوال، بما فيها الصيغ العامة لمشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما. وفي ضوء ذلك، قد تتساءل ما إن كانت مشتقة ناتج ضرب دالّتين تساوي ناتج ضرب مشتقّتيهما. سنختبر هذا التّخمين بإيراد مثالٍ بسيط.

قاعدة الضرب

ليكن $\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)]$. بدمج الحدّين نحصل على

$$\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] = \frac{d}{dx}x^7 = 7x^6$$

ولكن،

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}x^2\right)\left(\frac{d}{dx}x^5\right) &= (2x)(5x^4) \\ &= 10x^5 \neq 7x^6 = \frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)]\end{aligned} \qquad (4.1)$$

يمكنك أن ترى بوضوح الآن من خلال (4.1) أن مشتقّة ضربٍ لا تساوي بصورةٍ عامةٍ ناتج ضرب المشتقات الجزئية. تعطي النظرية 4.1 القاعدة الصحيحة.

النظرية 4.1 (قاعدة الضرب)

إذا كانت f و g قابلتان للإشتقاق. فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (4.2)$$

البرهان

في إطار رغبتنا ببرهان قاعدةٍ عامة، فلا سبيل لنا سوى إلى استخدام تعريف النهاية للمشتقة. من أجل $p(x) = f(x)g(x)$

لدينا :

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x}{h} \qquad (4.3)$$

لاحظ أن عناصر مشتقّتي f و g موجودة، ولكننا بحاجةٍ إلى وضعها بالصيغة الصحيحة. بجمع وطرح $f(x)g(x+h)$ في البسط، يكون لدينا

$$p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x}{h}$$

اقسم لجزئين

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0}\left[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}g(x+h)\right] + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ تعريف مشتقة الدالة f و مشتقة الدالة g

ثمّة جزئيةٌ تقنيةٌ دقيقةٌ في الخطوة الأخيرة؛ فبما أن g قابلة للإشتقاق عند x، تذكّر أنها يجب أيضًا أن تكون متصلة عند x. بحيث يكون $g(x+h) \to g(x)$ عندما $h \to 0$. ■

في المثال 4.1، لاحظ أن قاعدة الضرب تجنّبنا القيام بضربٍ اعتباطي.

مثال 4.1 باستخدام قاعدة الضرب

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (2x^4 - 3x + 5)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$.

الحل على الرّغم من أننا يمكن أن نبدأ بضرب التعبير، فإن قاعدة الضرب من شأنها أن تبسّط عملنا:

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(2x^4 - 3x + 5)\right]\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\frac{d}{dx}\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$$

$$= (8x^3 - 3)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}\right)$$

مثال 4.2 إيجاد معادلة المماس

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة

$$y = (x^4 - 3x^2 + 2x)(x^3 - 2x + 3)$$

عند $x = 0$

الحل من قاعدة الضرب، لدينا

$$y' = (4x^3 - 6x + 2)(x^3 - 2x + 3) + (x^4 - 3x^2 + 2x)(3x^2 - 2)$$

بإيجاد القيمة عند $x = 0$، يكون لدينا $y'(0) = (2)(3) + (0)(-2) = 6$. للمستقيم الذي ميله 6 والمار بالنقطة $(0, 0)$ [لماذا $(0, 0)$؟] المعادلة $y = 6x$.

قاعدة القسمة

في ضوء خبرتنا بقاعدة الضرب، فقد لا تتوقع أن مشتقة قسمةٍ تساوي قسمة المشتقّتين. ولنتحقق من الأمر، لنجرِ تجربةً بسيطة. لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

في حين أن

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^5)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{5x^4}{2x^1} = \frac{5}{2}x^3 \neq 3x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right)$$

وبما أنه من الواضح أن هاتين الإجابتين ليستا متماثلتين، فذلك يدلّنا على أن مشتقّة القسمةِ لا تساوي بصورةٍ عامةٍ ناتج قسمة المشتقّتين. والنظرية 4.2 تعطي القاعدة الصحيحة. (4.2)

النظرية 4-2 (قاعدة القسمة)

إذا كانت f و g قابلتان للإشتقاق، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (4.4)$$

بشرط أنّ $g(x) \neq 0$

البرهان

بالنسبة لـ $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، لدينا من تعريف نهاية المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = Q'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h}$$ اجمع الكسور

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$ بسّط

وكما في برهان قاعدة الضرب، نبحث عن الحدّ الصحيح للجمع والطرح ضمن البسط، بحيث نستطيع عزل تعريفي النهاية لـ $f'(x)$ و $g'(x)$. بجمع $f(x)g(x)$ وطرحهما، نحصل على

$$Q'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$ جمّع الحدّين الأولين والحدّين الآخرين وضع العامل المشترك بينهما

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x) - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$ حدد مشتقة الدالة لكلّ من f و g.

حيث استفدنا من الحقيقة القائلة أن g قابلة للإشتقاق لتوضيح أن g متصلة، بحيث يكون $g(x+h) \to g(x)$ عندما $h \to 0$. ■

لاحظ أن البسط في قاعدة القسمة يبدو مشابهًا جدًا لما ورد في قاعدة الضرب، ولكن بوجود إشارة ناقص بين الحدّين. ولهذا السّبب، عليك التعامل بحذرٍ شديدٍ مع الترتيب.

مثال 4.3 استخدام قاعدة القسمة

احسب مشتقّة $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+1}$.

الحل باستخدام قاعدة القسمة، لدينا

$$f'(x) = \frac{\left[\dfrac{d}{dx}(x^2-2)\right](x^3+1) - (x^2-2)\dfrac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - (x^2-2)(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-x^4+6x^2+2x}{(x^3+1)^2}$$

وفي هذه الحالة، أعدنا كتابة البسط لأنّ ذلك يبسّط لنا الأمر بصورةٍ دقيقة. ونقوم بهذا الإجراء غالبًا في قاعدة القسمة. ■

بما أننا نملك الآن قاعدة القسمة، فيمكننا تعليل استخدام قاعدة القوة للأسس الصحيحة السالبة. (تذكّر أننا نستخدم هذه القاعدة بدون برهانٍ منذ أن تناولنا الدرس 3.3)

النظرية 4-3 (قاعدة القوة)

لأيّ أسٍّ صحيح $n \neq -1$، فإن

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

البرهان

لقد أثبتنا هذه النظرية سابقًا مع الأسس الصحيحة الموجبة. إذًا، على فرض أنّ $n < 0$ وأنّ $M = -n > 0$. وبالتالي، باستخدام قاعدة القسمة، نحصل على

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-M} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^M}\right)$$ بما إنَ $x^{-M} = \frac{1}{x^M}$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(1)\right]x^M - (1)\frac{d}{dx}(x^M)}{(x^M)^2}$$ بإستخدام قاعدة القسمة

$$= \frac{(0)x^M - (1)Mx^{M-1}}{x^{2M}}$$ بإستخدام قاعدة القوة بما إن $M > 0$

$$= \frac{-Mx^{M-1}}{x^{2M}} = -Mx^{M-1-2M}$$ بإستخدام قواعد الأسس المعروفة

$$= (-M)x^{-M-1} = nx^{n-1}$$ ■ بما إنَ $n = -M$

كما نرى في المثال 4.4، فمن المفضّل أحيانًا إعادة كتابة دالّةٍ بدلًا من استخدام قاعدة الضرب أو القسمة بصورةٍ تلقائية.

مثال 4.4 حالة لا حاجة فيها لاستخدام قاعدتي الضرب والقسمة

احسب مشتقّة $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$.

الحل على الرّغم من أنّه قد يكون من المغري استخدام قاعدة الضرب للحدّ الأول وقاعدة القسمة للحدّ الثاني، لاحظ أنه من الأبسط أن نعيد كتابة الدالّة أولًا. يمكننا جمع قوّتي x في الحدّ الأول. وبما أن الحدّ الثاني كسرٌ بسطه ثابت، فيمكننا كتابته بصورةٍ أبسط باستخدام أسٍّ سالب. لدينا

$$f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} = x^{3/2} + 2x^{-2}$$

باستخدام قاعدة القوة، فيكون لدينا ببساطة

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} - 4x^{-3}$$ ■

تطبيقات

ستصادف استخداماتٍ هامةً لقاعدتي الضرب والقسمة خلال دراساتك الرياضية والعلمية. وسنبدأ باثنين من التطبيقات البسيطة الآن.

مثال 4.5 استكشاف معدّل تغيّر الإيراد

افترض أنّ سعر مبيع أحد المنتجات في الوقت الحالي يساوي AED25، مع زيادةٍ في السّعر بمعدّل AED2 في العام. وعند السّعر الحالي، يشتري المستهلكون 150 ألف قطعة، ولكنّ العدد المبيع يتناقص بمعدّل 8 آلاف قطعة في العام. فما معدّل تغيّر الإيراد الإجمالي؟ وهل يتزايد الإيراد الإجماليّ أم يتناقص؟

الحل للإجابة عن هذين السؤالين، فإننا بحاجةٍ إلى العلاقة الأساسية

الإيراد = الكمية × السعر

(على سبيل المثال، إذا بعت 10 قطعٍ بسعر AED 4 للقطعة الواحدة، فإنك تكسب AED 40). بما أن هاتين الكميتين تتغيران مع الزمن، فإننا نكتب $R(t) = Q(t)P(t)$، حيث $R(t)$ هو الإيراد، و $Q(t)$ هي الكمية

المبيعة و $P(t)$ هي السعر، وكلّها مقدّرة عند الزّمن t. ليست لدينا صيغٌ لأيٍّ من هاتين الدالتين، ولكن من خلال قاعدة الضرب، يكون لدينا

$$R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$$

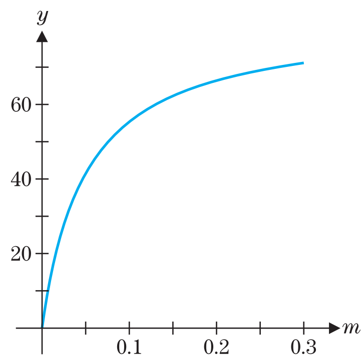
لدينا معلوماتٌ عن كلٍّ من الحدود التالية: السعر الابتدائي، $P(0)$، يساوي 25 (درهمًا)؛ ومعدّل تغيّر السعر يساوي $P'(0) = 2$ (درهمًا في العام) والكميّة الابتدائية $Q(0)$، تساوي 150 (ألف قطعة) ومعدّل تغيّر الكمية تساوي $Q'(0) = -8$ (ألف قطعةٍ في العام). لاحظ أن الإشارة السالبة لـ $Q'(0)$ ترمز إلى الانخفاض في Q. بالتالي،

$$R'(0) = (-8)(25) + (150)(2) = 100 \quad \text{ألف درهمٍ في العام}$$

بما أن معدّل التغيّر موجب، فإن الإيراد يتزايد. ■

مثال 4.6 استخدام الاشتقاق لتحليل ضربة كرة الجولف

ضُربت كرة جولف كتلتها 0.05 kg بعصًا كتلتها m kg وسرعتها 50 m/s. فكانت سرعتها الابتدائية m/s $u(m) = \dfrac{83m}{m + 0.05}$. برهن أنّ $u'(m) > 0$ وفسّر هذه النتيجة بدلالة المصطلحات المستخدمة في رياضة الجولف. قارن $u'(0.15)$ و $u'(0.20)$.



الشكل 3.23

$$u(m) = \frac{83m}{m + 0.05}$$

الحل من قاعدة القسمة، يكون لدينا

$$u'(m) = \frac{83(m + 0.05) - 83m}{(m + 0.05)^2} = \frac{4.15}{(m + 0.05)^2}$$

إن البسط والمقام موجبين، وبالتالي $u'(m) > 0$. يشير الميل الموجب لجميع المماسات إلى أن التمثيل البياني لـ $u(m)$ ينبغي أن يتزايد من الجهة اليسرى إلى الجهة اليمنى. (انظر الشكل 3.23). وبطريقةٍ أخرى نقول، تزداد $u(m)$ بزيادة m. وينصّ ذلك باستخدام مصطلحات رياضة الجولف (عند تساوي كافّة العوامل الأخرى)، أنّه كلما ازدادت كتلة العصا، كلما ازدادت السرعة المتجهة للكرة. وأخيرًا، نحسب $u'(0.15) = 103.75$ و $u'(0.20) = 66.4$. وهذا يشير إلى أن معدّل الزّيادة في سرعة الكرة يكون أقلّ بكثيرٍ للعصيّ الثقيلة منه للعصيّ الخفيفة. وبما أنّ عملية التحكّم بالعصيّ الثقيلة أكثر صعوبة، فقد لا يعوّض الانخفاض النسبي في معدّل زيادة سرعة الكرة، والناتج عن زيادة وزن العصيّ الثقيلة أصلًا، عن تناقص القدرة على التحكّم. ■

التمارين 3.4

تمارين كتابية

1. تمنحك قاعدتا الضرب والقسمة القدرة على حساب مشتقّات عدد كبير من الدّوال باستخدام الرموز. ولكن الكثير من الحاسبات وجميع أجهزة الحاسوب تقريبًا قادرةٌ على أداء هذا العمل نيابةً عنك. ناقش السّبب في ضرورة تعلّم هذه القواعد الأساسية بكلّ الأحوال. (ضع المثال 4.5 بالحسبان.)

2. يعدّ غوتفريد فيلهيلم لايبنتز (مع السّير إسحاق نيوتن) مخترع التفاضل والتكامل. وتُنسب الكثير من الطرق الأساسية والرموز المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل إلى لايبنتز. أعدّ لايبنتز قاعدة الضرب عام 1675، وذلك بالصيغة $d(xy) = (dx)y + x(dy)$. ويعطي "بالبرهان" الذي أعدّه في رسالةٍ كتبها عام 1699 من خلال النّص التالي. إذا أردنا إيجاد تفاضل xy فإننا نكتب:

$$(x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$$

ولكنّ $dx\,dy$ مرفوضةٌ هنا لأنّها أصغر بكثيرٍ من $x\,dy + y\,dx$. وبالتالي، في أي من الحالات الخاصة، يكون الخطأ أصغر من أي كميةٍ محدودة. أجب عن رسالة لايبنتز برسالةٍ تصف فيها "اكتشافك" الخاص بقاعدة الضرب لـ $d(xyz)$.

3. قد تكون لاحظت أن في المثال 4.1 لم نضرب حدود المشتقّة. فإن أردت حساب $f'(a)$ عند عددٍ ما a، ناقش إن كان من الأسهل تعويض $x = a$ أولًا ومن ثمّ تبسيط جميع الحدود أو ضربها ومن ثمّ تعويض $x = a$.

4. يفضّل الكثير من الطلاب قاعدة الضرب على قاعدة القسمة. تستخدم الكثير من أجهزة الحاسوب فعليًا قاعدة الضرب لحساب مشتقّة $f(x)[g(x)]^{-1}$ بدلًا من تطبيق قاعدة القسمة على $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. (انظر التمرين 34 في الصفحة التالية.) إذا أُعطيت تبسيطات المسائل الواردة في المثال 4.3، فسّر السّبب في أن قاعدة القسمة قد تكون مفضّلة.

في التمارين 1–16، أوجد المشتقّة لكلّ دالّة.

1. $f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$
2. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$
3. $f(x) = (\sqrt{x} + 3x)\left(5x^2 - \dfrac{3}{x}\right)$
4. $f(x) = (x^{3/2} - 4x)\left(x^4 - \dfrac{3}{x^2} + 2\right)$

5. $g(t) = \dfrac{3t-2}{5t+1}$

6. $g(t) = \dfrac{t^2+2t+5}{t^2-5t+1}$

7. $f(x) = \dfrac{3x-6\sqrt{x}}{5x^2-2}$

8. $f(x) = \dfrac{6x-2/x}{x^2+\sqrt{x}}$

9. $f(u) = \dfrac{(u+1)(u-2)}{u^2-5u+1}$

10. $f(u) = \dfrac{2u}{u^2+1}(u+3)$

11. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2+5x}$

13. $h(t) = t(\sqrt[3]{t}+3)$

14. $h(t) = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{5}{t^2}$

15. $f(x) = (x^2-1)\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+2}$

16. $f(x) = (x+2)\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$

في التمارين 20–17، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$.

17. $f(x) = (x^2+2x)(x^4+x^2+1),\ a = 0$

18. $f(x) = (x^3+x+1)(3x^2+2x-1),\ a = 1$

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2},\ a = 0$

20. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1},\ a = 1$

في التمارين 24–21، على فرض أن f و g قابلتان للإشتقاق بحيث $f(0) = -1$ و $f(1) = -2$ و $f'(0) = -1$ و $f'(1) = 3$ و $g(0) = 3$ و $g(1) = 1$ و $g'(0) = -1$ و $g'(1) = -2$. أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = h(x)$ عند $x = a$.

21. $h(x) = f(x)g(x)$; (a) $a = 0$; (b) $a = 1$

22. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

23. $h(x) = x^2 f(x)$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

24. $h(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

25. على فرض أنّ الكمية المبيعة $Q(t)$ من أحد أنواع الدّمى عند الزمن t مقدرًا بالسنوات تتناقص بمعدّل 4%؛ اشرح السّبب في أن ذلك يترجم إلى العلاقة $Q'(t) = -0.04Q(t)$. افترض أيضًا أن السّعر يزداد بمعدّل 3%؛ اكتب معادلةً مشابهةً لـ $P'(t)$ بدلالة $P(t)$. يساوي إيراد الدّمية $R(t) = Q(t)P(t)$. بتعويض تعبيري $Q'(t)$ و $P'(t)$ في قاعدة الضرب $R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$ بيّن أنّ الإيراد ينخفض بمعدّل 1%. واشرح السّبب في أنّ هذا "واضح".

26. كما في التمرين 25، افترض أنّ الكميّة المبيعة تنخفض بمعدّل 4%. فما المعدّل الذي يجب زيادة السّعر به للحفاظ على الإيراد ثابتًا؟

27. افترض أنّ سعر إحدى السّلع AED 20 للقطعة وقد بيعت 20,000 قطعة. فإذا كان السعر يزداد بمعدل AED 1.25 في العام الواحد وتزداد الكمية المبيعة بمعدّل 2000 قطعة في العام الواحد، فبأي معدل سيزداد الإيراد؟

28. افترض أنّ سعر القطعة AED 14، وأنّه قد بيعت 12,000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكميّة المبيعة بمقدار 1200 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار AED 20,000 في العام. فما المعدّل الذي يتعيّن زيادة السّعر به لتحقيق هذين الهدفين؟

29. تُضرب كرة بيسبول كتلتها 0.15 kg وسرعتها 45 m/s بمضرب بيسبول كتلته m kg وبسرعة 40 m/s (بعكس اتجاه حركة الكرة). بعد الاصطدام، بلغت السرعة الابتدائية للكرة $u(m) = \dfrac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ m/s. برهن أنّ $u'(m) > 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة البيسبول. قارن $u'(1)$ و $u'(1.2)$.

30. في التمرين 29، إذا كنت كتلة كرة البيسبول M kg وسرعتها 45 m/s وإذا كانت كتلة المضرب 1.05 kg وسرعته 40 m/s، وكانت السرعة الابتدائية للكرة $u(M) = \dfrac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$ m/s احسب $u'(M)$ وفسّر إشارته (موجبة أو سالبة) وفق مصطلحات رياضة البيسبول.

31. من المنطقي أن نفترض في المثال 4.6 أن سرعة عصا الجولف عند صدم الكرة تنخفض بزيادة كتلتها. فإذا كانت سرعة مضربٍ كتلته m تساوي $v = 8.5/m$ m/s عند صدم الكرة، فإن السرعة الابتدائية للكرة تساوي $u(m) = \dfrac{14.11}{m + 0.05}$ m/s. وضّح أن $u'(m) < 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة الجولف.

32. في المثال 4.6، إذا كانت كتلة عصا الجولف 0.17 kg وضُربت الكرة بسرعة v m/s، فيكون للكرة السرعة الابتدائية $u(v) = \dfrac{0.2822v}{0.217}$ m/s. احسب المشتقّة $u'(v)$ وفسّرها.

33. اكتب قاعدة الضرب للدالّة $f(x)g(x)h(x)$. (إرشاد: جمّع أوّل حدّين معًا في البداية.) صِف قاعدة الضرب العامّة: لعدد n دالة، ما هي مشتقّة الضرب $f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\cdots f_n(x)$؟ كم حدًّا يوجد؟ وكيف يبدو كلّ حدّ؟

34. استخدم قاعدة القسمة لتبيّن أن مشتقّة $[g(x)]^{-1}$ تساوي $-g'(x)[g(x)]^{-2}$. ثمّ استخدم قاعدة الضّرب لحساب مشتقّة $f(x)[g(x)]^{-1}$.

في التمرينين 35 و 36، أوجد مشتقّة كلّ دالّةٍ باستخدام قاعدة الضرب العامة التي وضعت في التمرين 33.

35. $f(x) = x^{2/3}(x^2-2)(x^3-x+1)$

36. $f(x) = (x+4)(x^3-2x^2+1)(3-2/x)$

37. على فرض أنّ g متصلة عند $x = 0$ وكانت $f(x) = xg(x)$. بيّن أنّ f قابلةٌ للإشتقاق عند $x = 0$. وضّح النتيجة عندما $g(x) = |x|$.

38. في التمرين 37، إذا استبدلت $x = 0$ بـ $x = a \neq 0$. فكيف ينبغي أن تعدّل تعريف $f(x)$ كي تضمن أن تكون f قابلةً للإشتقاق؟

39. بالنسبة للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. برهن أنّ الميل m للمماس على منحنى $y = f(x)$ يستوفي $\dfrac{-1}{8} \le m \le 1$ مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد نقطتي الميل العظمى والصغرى.

40. لأجل $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. برهن أنّ الميل m للمماس على منحنى $y = f(x)$ يستوفي $0 < m \le 1$. مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد نقطة اكبر ميل.

41. كرر المثال 4.4 باستخدام CAS. إذا كانت إجابته بالصيغة نفسها مثل الإجابة التي حصلنا عليها في النص، فاشرح طريقة حساب CAS إجابته.

42. استخدم CAS لإيجاد مشتقة $\sin x$. ما الدالّة التي يشبهها ذلك؟ كرر الأمر مع $2x$ و $3x$. استخدم طرقًا عامة لتخمين مشتقة $\sin kx$ لأي ثابت k.

43. أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^3 + x^2}}{x}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ عند $x > 0$ و $\dfrac{-3}{2\sqrt{3x+1}}$ عند $x < 0$. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

44. أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}\left(2x - \dfrac{2x^2}{x+1}\right)$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع الرقم 2. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

45. لنفرض أن $F(x) = f(x)g(x)$ للدوال القابلة للإشتقاق إلى ما لا نهاية f و g (بمعنى أن $f'(x)$، $f''(x)$، إلخ. موجودين لكل x). وضّح أن $F''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$. احسب $F'''(x)$. قارن بين $F''(x)$ والصيغة ذات الحدّين الخاصة بـ $(a+b)^2$ وقارن بين $F'''(x)$ والصيغة الخاصة بـ $(a+b)^3$.

46. باستخدام $F(x)$ المحدد في التمرين 45، احسب $F^{(4)}(x)$ باستخدام حقيقة أن $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

47. استخدم قاعدة ناتج الضرب لتوضيح أنه إذا كان $g(x) = [f(x)]^2$ و $f(x)$ قابلين للإشتقاق، إذًا $g'(x) = 2f(x)f'(x)$. يمكن الحصول على ذلك أيضًا باستخدام قاعدة السلسلة التي ستتم مناقشتها في الدرس 3.5.

48. استخدم النتيجة من التمرين 47 وقاعدة ناتج الضرب لتوضيح أنه إذا كان $g(x) = [f(x)]^3$ و $f(x)$ قابلين للإشتقاق، إذًا $g'(x) = 3[f(x)]^2 f'(x)$. ضع فرضية للمشتقة $[f(x)]^n$.

تطبيقات

49. تتأثر كمية **الإنزيم التفارغي** بوجود منشط. إذا كان x هو كمية المنشط وكان f هو كمية الإنزيم، فسيكون أحد نماذج التنشيط التفارغي هو $f(x) = \dfrac{x^{2.7}}{1 + x^{2.7}}$. أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ وفسّرهما. احسب $f'(x)$ وفسّره.

50. يمكن أيضًا تثبيط إنتاج الإنزيم. وفي هذه الحالة، يتم تمثيل كمية الإنزيم كدالّة لكمية المثبط باستخدام $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2.7}}$. أوجد وفسر كل من $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $f'(x)$.

51. يتم تصنيف معظم السيارات حسب الكفاءة في استخدام الوقود عن طريق تقدير الأميال لكل جالون أثناء القيادة في المدينة (c) وتقدير الأميال لكل جالون أثناء القيادة على الطريق السريعة (h). تستخدم هيئة الحماية البيئية الصيغة $r = \dfrac{1}{0.55/c + 0.45/h}$ كتصنيف شامل لها لاستخدام الغاز.

a) فكّر في c كمتغير و h كثابت، ووضح أن $\dfrac{dr}{dc} > 0$. فكّر في هذه النتيجة ضوء المسافة بالميل بالنسبة إلى الغاز.

b) فكّر في h كمتغير و c كثابت، ووضح أن $\dfrac{dr}{dh} > 0$.

c) وضّح أنه إذا كان $c = h$، إذًا $r = c$.

d) وضّح أنه إذا كان $c < h$، إذًا $c < r < h$. لفعل ذلك، افترض أن c ثابت، و $c < h$. اشرح لماذا تتضمن نتائج الأجزاء (b) و(c) أن $r > c$. ثم وضّح أن $\dfrac{dr}{dh} < 0.45$. اشرح لماذا تكون هذه النتيجة بالتماشي مع نتيجة الجزء (c) تتضمن أن $r < h$.

اشرح لماذا يجب أن تكون نتائج الأجزاء من (a)إلى (d) صحيحة إذا كانت صيغة EPA المضمنة تُعد طريقة سهلة للوصول إلى معدلات متوسطة لكل من c و h. لمعرفة شعور معين حول آلية عمل الصيغة، استخدم $c = 20$ والتمثيل البياني r كدالّة لـ h. اذكر تعليقك على سبب احتمال استخدام EPA لدالّة معينة يصبح تمثيلها البياني موسعًا مثل هذا التمثيل البياني.

تمرينات استكشافية

1. في العديد من الرياضات، يكون الاصطدام بين الكرة والمضرب شيئًا أساسيًا في المباراة. لنفرض أن وزن الكرة هو w والسرعة المتجهة هي v قبل الاصطدام ووزن المضرب (هراوة، مضرب التنس، مضرب الجولف، إلخ) هو W والسرعة المتجهة هي $-V$ قبل الاصطدام (تشير علامة السالب إلى أن المضرب يتحرك في الاتجاه المعاكس للكرة). السرعة المتجهة للكرة بعد الاصطدام ستكون $u = \dfrac{WV(1+c) + v(cW - w)}{W + w}$، حيث إن الوسيط c الذي يسمى **معامل الاسترداد**، يمثل "ارتدادات" الكرة عند الاصطدام. بمعالجة W كمتغير مستقل (مثل x) والوسائط الأخرى كثوابت، احسب الاشتقاق وتحقق من أن $\dfrac{du}{dW} = \dfrac{V(1+c)w + cvw + vw}{(W+w)^2} \geq 0$ لأن كل المعاملات غير سالبة. اشرح لماذا يتضمن ذلك أنه إذا كان ممارس الألعاب الرياضية يستخدم مضربًا أكبر (W أكبر) مع تساوي كل الأشياء الأخرى، فإن سرعة الكرة تزداد. هل هذا يطابق حدسك؟ ما المثير للشك حول افتراض أن تكون كل الأشياء الأخرى متساوية؟ احسب وفسّر بشكل مشابه كلًا من $\dfrac{du}{dw}$، $\dfrac{du}{dv}$، $\dfrac{du}{dV}$ و $\dfrac{du}{dc}$. (إرشاد: يقع الوسيط c بين 0 و 1 علمًا أن 0 يمثل حالة ثبات الكرة، و 1 يمثل حالة السرعة القصوى للكرة.)

2. لنفترض أن لاعب كرة القدم يضرب الكرة بطاقة كافية بحيث تحصل الكرة الثابتة على سرعة ابتدائية قدرها 80 mi/h. وضّح أن الضربة بالقوة نفسها على كرة تتحرك مباشرة نحو اللاعب بسرعة 40 mi/h سيجعل الكرة تنطلق بسرعة ابتدائية قدرها 100 mi/h. (استخدم صيغة الاصطدام في التمرين الاستكشافي 2 مع $c = 0.5$ وافترض أن وزن الكرة أكبر قليلًا من وزن لاعب الكرة.) وبصفة عامة، ما تناسب سرعة الكرة القادمة التي تحولها الضربة إلى سرعة إضافية في الاتجاه المعاكس؟

الدرس 3-5 قاعدة السلسلة

لا توجد لدينا حاليًا طريقة لحساب مشتقة دالّة معينة مثل $P(t) = \sqrt{100 + 8t}$، باستثناء تعريف النهاية. ومع ذلك، لاحظ أن $P(t)$ هو ناتج تركيب لدالتين $f(t) = \sqrt{t}$ و $g(t) = 100 + 8t$. لذلك $P(t) = f(g(t))$، حيث يتم حساب كل من $f'(t)$ و $g'(t)$ بسهولة. نحن نطوّر الآن قاعدة عامة لاشتقاق دالتين مركبتين.

ستساعدنا الأمثلة البسيطة التالية على تحديد صيغة قاعدة السلسلة. لاحظ ذلك من قاعدة ناتج الضرب

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2+1)^2] &= \frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^2+1)]\\ &= 2x(x^2+1) + (x^2+1)2x\\ &= 2(x^2+1)2x\end{aligned}$$

بالطبع يمكننا كتابة ذلك على شكل $4x(x^2 + 1)$، ولكن الصيغة غير المبسطة تساعدنا على فهم صيغة قاعدة السلسلة. باستخدام هذه النتيجة وقاعدة ناتج الضرب، لاحظ أن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2+1)^3] &= \frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^2+1)^2]\\ &= 2x(x^2+1)^2 + (x^2+1)2(x^2+1)2x\\ &= 3(x^2+1)^2 2x.\end{aligned}$$

نحن نتركها كتمرين مباشر لتوسيع هذه النتيجة إلى

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^4] = 4(x^2+1)^3 2x$$

يجب أن تلاحظ أنه في كل الحالات، قمنا بتقليل الأس للقوس، بمقدار واحد ثم ضربنا في $2x$، الذي هو مشتقة x^2+1 لاحظ أن بإمكاننا كتابة $(x^2+1)^4$ كدالّة تركيب $f(g(x)) = (x^2+1)^4$، حيث $g(x) = x^2+1$ و $f(x) = x^4$. وفي النهاية، لاحظ أن مشتقة دالّة التركيب هي

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}[(x^2+1)^4] = 4(x^2+1)^3 2x = f'(g(x))g'(x)$$

هذا مثال على قاعدة السلسلة الذي تستخدم الصيغة العامة التالية.

النظرية 5.1 (قاعدة السلسلة)

إذا كانت g قابلة للإشتقاق عند x وكانت f قابلة للإشتقاق عند $g(x)$، فإن

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))\, g'(x)$$

البرهان

عند تلك النقطة، يمكننا إثبات أن الحالة الخاصة فقط حيث $g'(x) \neq 0$. على فرض أنّ $F(x) = f(g(x))$. إذًا،

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$ بما أن $F(x) = f(g(x))$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$ ضرب البسط والمقام بـ $g(x+h)-g(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ تجميع الحدود

$$= \lim_{g(x+h)\to g(x)} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(g(x))g'(x)$$

حيث يكون السطر التالي إلى الأخير صالحًا لأن $h \to 0$. $g(x+h) \to g(x)$ عن طريق اتصال g. (تذكر أنه لأن g قابلة للإشتقاق، فهي متصلة أيضًا). سُيطلب منك في التمرين 44 ملء بعض الفراغات في هذا البرهان. وبوجه عام، يجب عليك تحديد لماذا نحتاج إلى $g'(x) \neq 0$ في هذا البرهان. ■

من المفيد في أغلب الأوقات التفكير في قاعدة السلسلة باستخدام صيغة ليبنز. إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$. إذًا $y = f(g(x))$ وتنص قاعدة السلسلة على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{5.1}$$

حيث يبدو أننا نختزل كل قيم du، حتى وإن لم تكن كسورًا.

ملحوظة 5.1

يجب أن تساعد قاعدة السلسلة على توصيل معنى بديهي كما يلي. نحن نفكر في $\frac{dy}{dx}$ على أنه معدل التغير اللحظي لـ y مع بالنسبة إلى x، $\frac{dy}{du}$ كمعدل تغير لحظي لـ y مع بالنسبة إلى u و $\frac{du}{dx}$ كمعدل للتغير اللحظي لـ u مع بالنسبة إلى x. لذا، إذا كان $\frac{dy}{du} = 2$ (أي y يتغير بمِثلي معدل u) و $\frac{du}{dx} = 5$ (أي u يتغير بخمسة أمثال معدل x)، ويجب أن يوضح ذلك معنى أن y يتغير بمعدل $2 \times 5 = 10$ عشرة أمثال معدل x. وهكذا، $\frac{dy}{dx} = 10$ مما تنص عليه المعادلة (5.1).

مثال 5.1 استخدام قاعدة السلسلة

حد مشتقة: $y = (x^3 + x - 1)^5$.

الحل بالنسبة إلى $u = x^3 + x - 1$. لاحظ أن $y = u^5$. من النظرية (5.1)، لدينا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^5)\frac{du}{dx} \quad \text{بما أن } y = u^5$$
$$= 5u^4 \frac{d}{dx}(x^3 + x - 1)$$
$$= 5(x^3 + x - 1)^4(3x^2 + 1) \quad ■$$

بالنسبة إلى التركيب $f(g(x))$، تتم الإشارة إلى f غالبًا على أنها الدالة الخارجية وتتم الإشارة إلى g على أنها الدالّة الداخلية. يمكن عرض الاشتقاق مع قاعدة السلسلة $f'(g(x))g'(x)$ على أنه مشتقة الدالّة الخارجية مضروبًا في مشتقة الدالّة الداخلية. في المثال 5.1، الدالّة الداخلية هي $x^3 + x - 1$ (التعبير بين الأقواس) والدالّة الخارجية هي u^5.

مثال 5.2 استخدام قاعدة السلسلة مع دالّة الجذر التربيعي

أوجد $\frac{d}{dt}(\sqrt{100 + 8t})$.

الحل على فرض أن $u = 100 + 8t$ ولاحظ أن $\sqrt{100 + 8t} = u^{1/2}$. ثم من النظرية (5.1).

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{100 + 8t}) = \frac{d}{dt}(u^{1/2}) = \frac{1}{2}u^{-1/2}\frac{du}{dt}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{100 + 8t}}\frac{d}{dt}(100 + 8t) = \frac{4}{\sqrt{100 + 8t}}$$

لاحظ أن مشتقة الدالة الداخلية هنا هي مشتقة التعبير تحت رمز الجذر التربيعي. ■

أنت الآن في موضع حساب المشتقة لرقم كبير جدًا من الدوال، عن طريق استخدام قاعدة السلسلة مع الجمع مع قواعد تفاضل أخرى.

مثال 5.3 مشتقات تتضمن قاعدة السلسلة والقواعد الأخرى

احسب مشتقة $f(x) = x^3\sqrt{4x + 1}$، $g(x) = \frac{8x}{(x^3 + 1)^2}$ و $h(x) = \frac{8}{(x^3 + 1)^2}$.

الحل لاحظ الاختلافات في هذه الدوال الثلاثة. الدالّة الأولى $f(x)$ هي ناتج ضرب دالتين، و $g(x)$ هو ناتج قسمة دالتين و $h(x)$ هو ثابت مقسوم على دالّة معينة. وهذا يطلب منا استخدام قاعدة ناتج الضرب الخاص بـ $f(x)$. وقاعدة ناتج قسمة $g(x)$ وتبسيط قاعدة السلسلة لـ $h(x)$. بالنسبة إلى الدالّة الأولى، يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3\sqrt{4x+1}\right) = 3x^2\sqrt{4x+1} + x^3\frac{d}{dx}\sqrt{4x+1} \quad \text{قاعدة الضرب}$$

$$= 3x^2\sqrt{4x+1} + x^3\frac{1}{2}(4x+1)^{-1/2}\underbrace{\frac{d}{dx}(4x+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}} \quad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= 3x^2\sqrt{4x+1} + 2x^3(4x+1)^{-1/2} \quad \text{بسّط}$$

ثم يوجد لدينا

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{8x}{(x^3+1)^2}\right] = \frac{8(x^3+1)^2 - 8x\frac{d}{dx}[(x^3+1)^2]}{(x^3+1)^4} \quad \text{قاعدة القسمة}$$

$$= \frac{8(x^3+1)^2 - 8x\left[2(x^3+1)\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}}\right]}{(x^3+1)^4} \quad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{8(x^3+1)^2 - 16x(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4}$$

$$= \frac{8(x^3+1) - 48x^3}{(x^3+1)^3} = \frac{8-40x^3}{(x^3+1)^3}. \quad \text{بسّط}$$

بالنسبة إلى $h(x)$، لاحظ أنه بدلًا من استخدام قاعدة ناتج القسمة، من الأبسط إعادة كتابة الدالّة بالصيغة $h(x) = 8(x^3+1)^{-2}$. إذًا

$$h'(x) = \frac{d}{dx}[8(x^3+1)^{-2}] = -16(x^3+1)^{-3}\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3+1)}_{\text{اشتقاق من الداخل}} = -16(x^3+1)^{-3}(3x^2)$$

$$= -48x^2(x^3+1)^{-3} \blacksquare$$

في المثال 5.4، نحن نطبق قاعدة السلسلة على دالّة مركبة معينة باستخدام مجموعة من الدوال.

مثال 5.4 مشتقة تتضمن العديد من قواعد السلسلة

أوجد مشتقة $f(x) = (\sqrt{x^2+4} - 3x^2)^{3/2}$.

الحل يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right) \quad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2+4) - 6x\right] \quad \text{قاعدة السلسلة}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}(2x) - 6x\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+4} - 3x^2\right)^{1/2}\left[x(x^2+4)^{-1/2} - 6x\right] \quad \text{بسّط} \quad \blacksquare$$

ونستخدم الآن قاعدة السلسلة لحساب مشتقة دالة عكسية مع الأخذ في الحسبان الدالّة الأساسية. على فرض أننا نكتب $g(x) = f^{-1}(x)$ إذا كان $g(f(x)) = x$ لكل قيم x

في مجال f و $f(g(x)) = x$ لكل قيم x في مجال g. من هذه المعادلة الأخيرة، على فرض أن f و g قابلتان للإشتقاق، وهذا يتبع

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}(x)$$

ومن قاعدة السلسلة يوجد لدينا الآن

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

وبحل هذا للحصول على $g'(x)$، فإننا نحصل على $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.
على فرض أننا لن نقسم على الصفر. نؤكد على هذه النتيجة استنادًا إلى النظرية 5.2.

النظرية 5.2

إذا كانت f قابلة للإشتقاق في أي مكان ولها دالة عكسية $g = f^{-1}$، فإن

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

لكل x في مجال g، بشرط أن يكون $f'(g(x)) \neq 0$.

كما سنرى في المثال 5.5. ولكي نستخدم النظرية 5.2، يجب علينا التمكن من حساب قيم الدّالة العكسية.

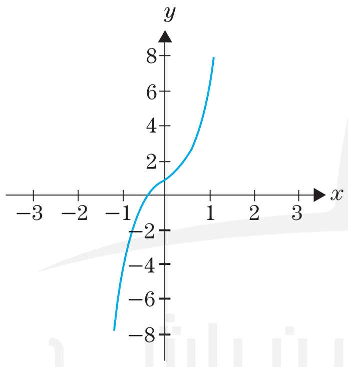
الحياة المعاصرة في الرياضيات

فان تشونغ (–1949)

عالمة رياضيات تايوانية تشتهر بحياة عملية زاخرة بالنجاح في الصناعات الأمريكية والعمل الأكاديمي. تقول فان "عندما تخرجت في تايوان، كان حولي أصدقاء جيدون والكثير من عالمات الرياضيات... يُعد التعلم من أقرانك وليس من معلميك جزءًا كبيرًا من التعليم." وقد كان التعاون صفة مميزة في حياتها العملية. "إن إيجاد المسألة الصحيحة هو في الغالب الجزء الرئيس من العمل على تأسيس الارتباط. وعادة ستعطيك المسألة الجيدة من شخص آخر دفعة في الاتجاه الصحيح والشيء التالي الذي تعرفه، هو أن لديك مسألة جيدة أخرى."

مثال 5.5 مشتقة دالة عكسية

على فرض أن الدالّة $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 1$ لها دالة عكسية g. احسب $g'(7)$.



الشكل 3.24

$y = x^5 + 3x^3 + 2x + 1$

الحل أولًا، لاحظ من الشكل 3.24 أن f تبدو كأنها واحد إلى واحد ولذلك، لها دالة عكسية. من النظرية 5.2، يوجد لدينا

$$g'(7) = \frac{1}{f'(g(7))} \tag{5.2}$$

من السهل حساب $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 2$ ولكن لاستخدام النظرية 5.2 فإننا نحتاج أيضًا إلى $g(7)$. إذا كتبنا $x = g(7)$، إذًا $x = f^{-1}(7)$. لذلك يكون $f(x) = 7$. وبشكل عام، قد يكون حل المعادلة $f(x) = 7$ أكبر من إمكانياتنا في الجبر. (حاول حل $x^5 + 3x^3 + 2x + 1 = 7$ لمعرفة ما نعنيه.) بالمحاولة والخطأ. ليس من الصعب على أي حال أن نجد أن $f(1) = 7$ لذلك $g(7) = 1$. [ضع في حسبانك أنه بالنسبة إلى الدوال العكسية، $f(x) = y$ و $g(y) = x$ يكونان عبارات متساوية.] بالرجوع إلى المعادلة (5.2)، يوجد لدينا الآن

$$g'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{16} \quad ■$$

لاحظ أن حلنا في المثال 5.5 يعتمد على إيجاد x تكون معادلته $f(x) = 7$. هذا المثال الخاص كان قابلًا للعمل على حله والخطأ في ذلك، ولكن إيجاد معظم القيم الأخرى قد يكون صعبًا قليلًا أو من المستحيل حلّه بعبارة أكثر دقة.

ما وراء الصيغ

إذا كنت تعتقد أن الطريقة المستخدمة في المثال 5.5 غير مباشرة، فحينئذ توجد لديك الفكرة الصحيحة. تعطينا قاعدة السلسلة بشكل خاص وحساب التفاضل والتكامل بشكل عام طرقًا لتحديد الكميات التي لا يمكن حسابها مباشرة. في حالة المثال 5.5، نحن نستخدم خصائص إحدى الدوال لتحديد خصائص دالّة أخرى. والأساس في قدرتنا على فعل ذلك هو فهم النظرية وراء قاعدة السلسلة.

تمارين 3.5

تمارين كتابية

1. إذا كان الترس 1 يدور بمعدل 10 rpm وكان الترس 2 يدور بشكل أسرع بمعدل ضعف الترس 1، فما السرعة التي يدور بها الترس 2؟ الإجابة واضحة لمعظم الأشخاص. قم بصياغة هذه المسألة البسيطة كحساب لقاعدة السلسلة واستنتج أن قاعدة السلسلة (في هذا السياق) واضحة.

2. إن التحدي الأكبر في حساب مشتقات $\sqrt{(x^2+4)(x^3-x+1)}$، $(x^2+4)\sqrt{x^3-x+1}$ و $x^2+4\sqrt{x^3-x+1}$ هو معرفة أي قاعدة (ناتج الضرب، السلسلة، إلخ) سيتم استخدامها ومتى يتم ذلك. ناقش الطريقة التي ستعرف من خلالها أي قاعدة سيتم استخدامها ووقت حدوث ذلك. (إرشاد: فكّر في الترتيب الذي ستنفذ به العمليات لحساب قيمة كل دالّة لخيار معين لـــ x.)

3. من التطبيقات البسيطة لقاعدة السلسلة: إذا كان $g(x) = f(x-a)$ فإن $g'(x) = f'(x-a)$ اشرح هذا المشتقة بيانيًا: وكيف يقارَن $g(x)$ مع $f(x)$ بيانيًا ولماذا توجد علاقة بين ميول المماسات كما يبين القانون؟

4. من التطبيقات البسيطة الأخرى لقاعدة السلسلة: إذا كان $h(x) = f(2x)$ فإن $h'(x) = 2f'(2x)$ اشرح هذا المشتقة بيانيًا: وكيف يقارَن $h(x)$ مع $f(x)$ بيانيًا ولماذا توجد علاقة بين ميول المماسات كما يبين القانون؟

في التمارين 1–4، جد المشتقة بدون استخدام قاعدة السلسلة.

1. $f(x) = (x^3-1)^2$
2. $f(x) = (x^2+2x+1)^2$
3. $f(x) = (x^2+1)^3$
4. $f(x) = (2x+1)^4$

في التمارين 5–16، جد المشتقة لكل دالّة.

5. (a) $f(x) = (x^3-x)^3$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$
6. (a) $f(x) = (x^3+x-1)^3$ (b) $f(x) = \sqrt{4x-1/x}$
7. (a) $f(t) = t^5\sqrt{t^3+2}$ (b) $f(t) = (t^3+2)\sqrt{t}$
8. (a) $f(t) = (t^4+2)\sqrt{t^2+1}$ (b) $f(t) = \sqrt{t(t^{4/3}+3)}$
9. (a) $f(u) = \dfrac{u^2+1}{u+4}$ (b) $f(u) = \dfrac{u^3}{(u^2+4)^2}$
10. (a) $f(v) = \dfrac{v^2-1}{v^2+1}$ (b) $f(v) = \dfrac{v^2+4}{(v^3)^2}$
11. (a) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$
12. (a) $g(x) = x^2\sqrt{x+1}$ (b) $g(x) = \sqrt{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)^3}$
13. (a) $h(w) = \dfrac{6}{\sqrt{w^2+4}}$ (b) $h(w) = \dfrac{\sqrt{w^2+4}}{6}$
14. (a) $h(w) = \dfrac{(w^3+4)^5}{8}$ (b) $h(w) = \dfrac{8}{(w^3+4)^5}$
15. (a) $f(x) = (\sqrt{x^3+2}+2x)^{-2}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^3+2+2x^{-2}}$
16. (a) $f(x) = \sqrt{4x^2+(8-x^2)^2}$ (b) $f(x) = (\sqrt{4x^2+8}-x^2)^2$

في التمارين 17–22، f لها معكوس g. استخدم النظرية 5.2 لإيجاد $g'(a)$.

17. $f(x) = x^3+4x-1,\ a=-1$
18. $f(x) = x^5+4x-2,\ a=-2$
19. $f(x) = x^5+3x^3+x,\ a=5$
20. $f(x) = x^3+2x+1,\ a=-2$
21. $f(x) = \sqrt{x^3+2x+4},\ a=2$
22. $f(x) = \sqrt{x^5+4x^3+3x+1},\ a=3$

في التمارين 23–26، اذكر اسم الطريقة (قاعدة السلسلة، قاعدة ناتج الضرب، قاعدة ناتج القسمة) التي قد تستخدمها أولًا لإيجاد مشتقة الدالّة. ثم اذكر أي قاعدة (قواعد) أخرى قد تستخدمها، بالترتيب. لا تحسب المشتقة.

23. $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x^4+2x\sqrt[4]{\dfrac{8}{x+2}}}}$
24. $f(x) = \dfrac{3x^2+2\sqrt{x^3+4/x^4}}{(x^3-4)\sqrt{x^2+2}}$
25. $f(t) = \sqrt{t^2+4/t^3}\left(\dfrac{8t+5}{2t-1}\right)^3$

26. $f(t) = \left(3t + \dfrac{4\sqrt{t^2+1}}{t-5}\right)^3$

في التمرينين 27 و 28، أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = f(x)$ عند $x = a$.

27. $f(x) = \sqrt{x^2+16}, a = 3$

28. $f(x) = \dfrac{6}{x^2+4}, a = -2$

في التمرينين 29 و 30، استخدم دالّة الموقع لإيجاد السرعة المتجهة عند الزمن $t = 2$. (على فرض أن الوحدات بالأمتار والثواني).

29. $s(t) = \sqrt{t^2+8}$

30. $s(t) = \dfrac{60t}{\sqrt{t^2+1}}$

في التمرينين 31 و 32، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب المشتقة $h(x) = f(g(x))$.

31. $h'(1)$ ، حيث:
$f'(2)=3, f'(1)=4, g(1)=2, f(1)=3, g'(1)=-2, g'(3)=5$

32. $h'(2)$ ، حيث:
$f'(3)=-3, f'(2)=-1, g(2)=3, f(2)=1, g'(1)=2, g'(2)=4$

الدالّة f تكون **دالّة زوجية** إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x وتكون **دالّة فردية** إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x. اِثبت أن مشتقة دالّة الزوجية هي دالة فردية، وأن مشتقة دالّة الفردية هي دالة زوجية.

إذا كان التمثيل البياني للدالّة القابلة للإشتقاق f متماثلًا حول المستقيم $x = a$. فماذا يمكنك القول عن تماثل التمثيل البياني لـ f'؟

في التمارين 35—38 أوجد المشتقة للدالة f.

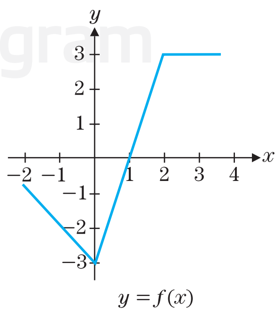
35. (a) $f(x^2)$ (b) $[f(x)]^2$ (c) $f(f(x))$

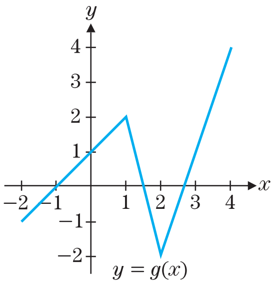
36. (a) $f(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{f(x)}$ (c) $f(xf(x))$

37. (a) $f(1/x)$ (b) $1/f(x)$ (c) $f\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)$

38. (a) $1+f(x^2)$ (b) $[1+f(x)]^2$ (c) $f(1+f(x))$

في التمرينين 39 و 40، استخدم التمثيلات البيانية لإيجاد مشتقة الدالّة المركبة عند النقطة إذا كانت موجودة.





39. $f(g(x))$ عند (a) $x = 0$ (b) $x = 1$ و (c) $x = 3$

40. $g(f(x))$ عند (a) $x = 0$ (b) $x = 1$ و (c) $x = 3$

في التمرينين 41 و 42، أوجد المشتقة من الرتبة الثانية لكل دالّة.

41. (a) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ (b) $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}$

42. (a) $h(t) = (t^3+3)^2$ (b) $g(s) = \dfrac{3}{(s^2+1)^2}$

43. (a) أوجد كل قيم x التي تجعل $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}$ غير قابلة للإشتقاق. صِف الخاصّية في التمثيل البياني التي تمنع وجود المشتقة.

(b) كرر الجزء a بالنسبة لـ $f(x) = \sqrt{x^4-3x^3+3x^2-x}$

ما الخطوات في اللمحة العامة الخاصة بإثبات قاعدة السلسلة التي لم يتم توثيقها بشكل جيد؟ أين استخدمنا افتراض أن $g'(x) \neq 0$؟

في التمارين 45—48، أوجد الدالّة g التي تجعل $g'(x) = f(x)$.

45. $f(x) = (x^2+3)^2\,(2x)$

46. $f(x) = x^2(x^3+4)^{2/3}$

47. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

48. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

تمارين استكشافية

1. القانون الثاني لنيوتن والخاص بالحركة هو $F = ma$ حيث m هو كتلة الجسم الذي يخضع للتسارع a بسبب القوة المستخدمة F. هذا القانون دقيق عند السرعات البطيئة. وعند السرعات العالية، نستخدم القانون المقابل من نظرية النسبية لأينشتين، $F = m\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right)$. حيث $v(t)$ هي دالّة السرعة المتجهة و c هي سرعة الضوء. احسب $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right)$ ما الذي يجب إهماله لتبسيط هذا التعبير إلى التسارع $a = v'(t)$ في القانون الثاني لنيوتن؟

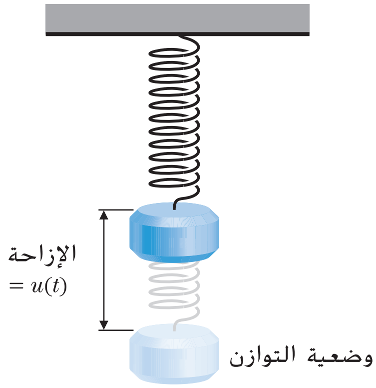
2. على فرض أن f هي دالّة حيث $f(1) = 0$ و $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ لكل $x > 0$.

(a) إذا كان $g_1(x) = f(x^n)$ و بالنسبة إلى $x > 0$. فوضّح أن $g_1'(x) = g_2'(x)$. نظرًا لأن $g_1(1) = g_2(1) = 0$. هل يمكنك استنتاج أن $g_1(x) = g_2(x)$ لكل $x > 0$؟

(b) بالنسبة إلى الدوال الموجبة القابلة للإشتقاق h_1 و h_2. حدد $g_3(x) = f(h_1(x)h_2(x))$ و $g_4(x) = f(h_1(x)) + f(h_2(x))$. وضّح أن $g_3'(x) = g_4'(x)$. هل يمكنك استنتاج أن $g_3(x) = g_4(x)$ لكل x؟

(c) إذا كان f لها معكوس g. فأوجد $g'(x)$

الدرس 3-6 مشتقات الدوال المثلثية

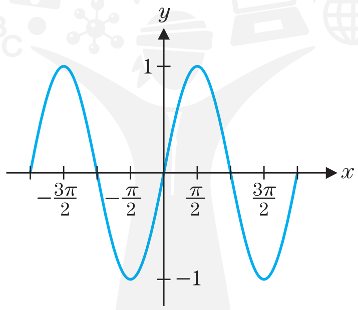


الشكل 3.25
نظام الزنبرك–الكتلة

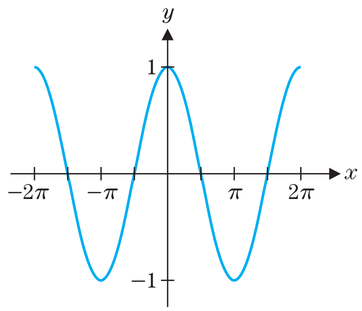
تخيل وجود وزن يتدلى من زنبرك معلق في السقف. (انظر الشكل 3.25). عندما يتحرك الجسم، فإنه سيرتفع إلى أعلى وإلى أسفل في حركات نظامية تقل باستمرار حتى يصبح في حالة سكون مجددًا (اتزان).

إذا جذبنا الوزن إلى أسفل، فإن حركته الرأسية من موقع اتزانه ستكون سالبة. يتأرجح الوزن بعد ذلك إلى الأعلى حيث تكون الحركة موجبة، ويتأرجح إلى أسفل وتكون حركة سالبة وهكذا. توجد دالتان توضحان هذا النوع من السلوك وهما دالتا الـ sine والـ cosine للزاوية. نحن نحسب مشتقات هذه الدوال والدوال المثلثية الأخرى في هذا الدرس.

يمكننا تعلم المزيد حول مشتقات $\sin x$ و $\cos x$ من تمثيلاتهم البيانية. من التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ في الشكل 3.26a. لاحظ المماسات الأفقية عند $x = -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2$ و $3\pi/2$ عند قيم x هذه. يجب أن تساوي المشتقة 0. للمماسات ميل موجب لـ $-2\pi < x < -3\pi/2$ وميل سالب لـ $-3\pi/2 < x < -\pi/2$ وهكذا. بالنسبة لكل فترة تكون المشتقة عندها موجبًا أو (سالبًا) يبدو التمثيل البياني أكثر انحدارًا عند وسط الفترة؛ على سبيل المثال من $x = -\pi/2$ يصبح التمثيل البياني أكثر انحدارًا حتى يصل إلى $x = 0$ ثم يقل انحداره حتى يستقر عند $x = \pi/2$ يجب أن يبدو الرسم الخاص بالتمثيل البياني للاشتقاق مثل التمثيل البياني في الشكل 3.26b، الذي يبدو مثل التمثيل البياني لـ $y = \cos x$ نحن نوضح هنا أن هذا التخمين صحيح في الواقع.



الشكل 3.26a
$y = \sin x$



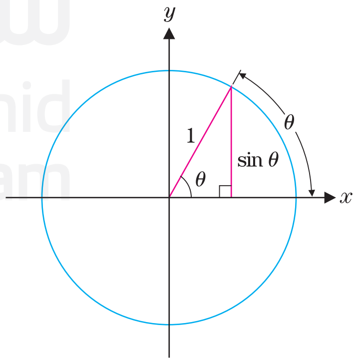
الشكل 3.26b
مشتقة $f(x) = \sin x$

قبل أن ننتقل إلى حساب مشتقات الدوال المثلثية الست، يجب أولًا الأخذ في الاعتبار نهايات قليلة تشمل الدوال المثلثية. (نحن نشير إلى هذه النتائج على أنها نظريات مثبتة–صغيرة تؤدي إلى بعض النتائج الأكثر أهمية.) ستجد بعد وقت قصير لماذا نضع في اعتبارنا هذا أولًا

النتيجة 6.1

$$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0.$$

تبدو هذه النتيجة منطقية بالتأكيد، وخصوصًا عندما نضع في حسباننا التمثيل البياني لـ $y = \sin x$. وفي الواقع، لقد استخدمنا ذلك لبعض الوقت الآن، وذكرنا هذا (بدون برهان) كجزء من النظرية 3.4. ونحن الآن نثبت النتيجة.



الشكل 3.27
تعريف $\sin\theta$

البرهان

بالنسبة إلى $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. من الشكل 3.27. لاحظ أن

$$0 \le \sin\theta \le \theta \qquad (6.1)$$

بما أنّ

$$\lim_{\theta\to 0^+} 0 = 0 = \lim_{\theta\to 0^+} \theta \qquad (6.2)$$

تتبع من نظرية الشطيرة، ومن (6.1) و(6.2) أن

$$\lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta = 0$$

نحن نتركها كتدريب لتوضيح أن

$$\lim_{\theta\to 0^-} \sin\theta = 0$$

بما أن كلا النهايتين اللذين لهما نهاية واحدة فقط متماثلان، فهذا يتبع

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0 \ \blacksquare$$

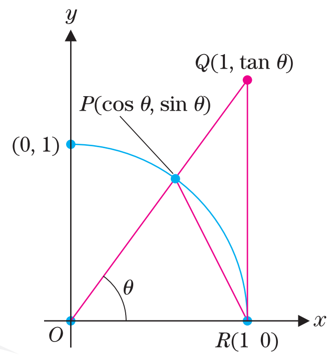
النتيجة 6.2

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

تم تخمين أن تكون النتيجة التالية صحيحة (وفقًا لتمثيل بياني وبعض الحسابات) عندما فحصنا النهايات لأول مرة. يمكننا الآن أن نثبت النتيجة

النتيجة 6.3

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$



الشكل 3.28

البرهان

على فرض أن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

بالعودة إلى الشكل 3.28. لاحظ أن منطقة القطاع الدائري **OPR** أكبر من منطقة المثلث **OPR**. ولكنها أصغر من منطقة المثلث **OQR**. أي إنّ:

$$0 < \Delta OPR \text{ مساحة} < OPR \text{ مساحة القطاع الدائري} < \Delta OQR \text{ مساحة} \qquad (6.3)$$

يمكنك أيضًا من خلال الشكل 3.29 معرفة أن

$$OPR \text{ مساحة القطاع الدائري} = (\text{نصف القطر})^2\, \pi\, (\text{الكسر الذي يُمثله القطاع من الدائرة})$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(1^2)\,\pi = \frac{\theta}{2} \qquad (6.4)$$

أيضًا.

$$\Delta OPR \text{ مساحة} = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}(1)\sin\theta \qquad (6.5)$$

و

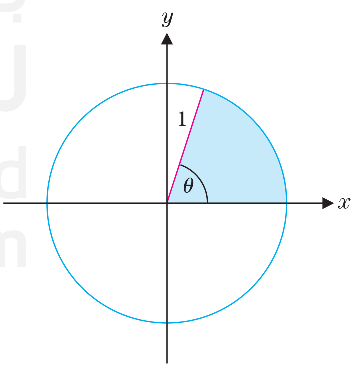
$$\Delta OQR \text{ مساحة} = \frac{1}{2}(1)\tan\theta \qquad (6.6)$$

وهكذا من (6.3) و(6.4)، و(6.5)، و(6.6) يوجد لدينا

$$0 < \frac{1}{2}\sin\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta. \qquad (6.7)$$

إذا قسمنا (6.7) على $\frac{1}{2}\sin\theta$ (لاحظ أن هذا موجب، لذلك لا تتأثر المتباينات). نحصل على

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$



الشكل 3.29

قطاع دائري

بأخذ المعكوسات الضربية (ومرة أخرى، كل شيء هنا موجب)، نجد

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta. \qquad (6.8)$$

نتركها كتمرين لتوضيح أن المتباينة (6.8) تبقى كما هي إذا كان $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. وفي النهاية، لاحظ أن

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 = \lim_{\theta\to 0} 1.$$

ولذلك تتبع النظرية (6.8) ونظرية الشطيرة التي تنص على أن النظرية

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

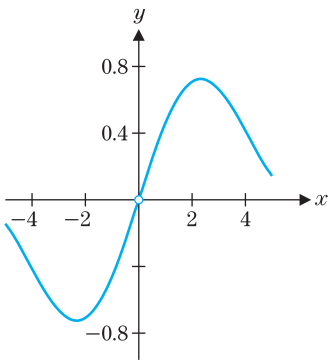
أيضًا. ■

نحتاج إلى نتيجة نهاية اضافية ثانية قبل معالجة مشتقات الدوال المثلثية.

النتيجة 6.4

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

بالعودة إلى التمثيل البياني لـ $y = \dfrac{1-\cos x}{x}$ في الشكل 3.30 وجداول قيم الدوال التي تتبعها، يجب أن تكون النتيجة معقولة.



الشكل 3.30

$y = \dfrac{1-\cos x}{x}$

x	$\dfrac{1-\cos x}{x}$
0.1	0.04996
0.01	0.00499996
0.001	0.0005
0.0001	0.00005

x	$\dfrac{1-\cos x}{x}$
−0.1	−0.04996
−0.01	−0.00499996
−0.001	−0.0005
−0.0001	−0.00005

البرهان

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) && \text{اضرب البسط والمقام بـ } 1+\cos\theta \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} && \text{اضرب البسط والمقام.} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} && \text{بما أن } \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left[\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right] \\
&= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) && \text{افصل الحدود لأن النهايتين موجودتين} \\
&= (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0,
\end{aligned}$$

كما تم تخمينه. ■

نحن في النهاية في موقع حساب مشتقات دوال الـــ sine و الـــ cosine.

النظرية 6.1

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

البرهان

من تعريف النهاية للمشتقة. بالنسبة لـ $f(x) = \sin x$. يوجد لدينا

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h - \sin x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h} \\
&= (\sin x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + (\cos x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x,
\end{aligned}$$

متطابقات مثلثية $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

تجميع حدود $\sin x$ و حدود $\sin h$ بشكل منفصل.

تحليل الى عامل $\sin x$ من الحد الأول و $\cos x$ من الحد الثاني.

من النظريتين التابعتين 6.3 و 6.4. ■

تم ترك إثبات النتيجة التالية كتمرين.

النظرية 6.2

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

اشتقاق الدوال المثلثية الأربعة المتبقية التي تتبع قاعدة ناتج القسمة.

النظرية 6.3

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$$

البرهان

باستخدام قاعدة ناتج القسمة.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\right](\cos x) - (\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

■

تم ترك اشتقاقات الدوال المثلثية المتبقية كتمارين. تم تلخيص مشتقات كل الدوال المثلثية أدناه.

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

يوضح المثال 6.1 أين تكون قاعدة ناتج الضرب ضرورية.

مثال 6.1 مشتقة قاعدة ناتج الضرب

أوجد مشتقة $f(x) = x^5 \cos x$

الحل من قاعدة ناتج الضرب، لدينا

$$\frac{d}{dx}(x^5 \cos x) = \left[\frac{d}{dx}(x^5)\right]\cos x + x^5 \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= 5x^4 \cos x - x^5 \sin x.$$

مثال 6.2 حساب بعض المشتقات الاعتيادية

احسب مشتقات (a) $f(x) = \sin^2 x$ و (b) $g(x) = 4\tan x - 5\csc x$

الحل بالنسبة إلى (a). نعمل أولًا على إعادة كتابة الدالّة على شكل $f(x) = (\sin x)^2$ واستخدام قاعدة السلسلة. لدينا

$$f'(x) = (2\sin x)\underbrace{\frac{d}{dx}(\sin x)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = 2\sin x \cos x.$$

بالنسبة إلى (b)، لدينا

$$g'(x) = 4\sec^2 x + 5\csc x \cot x$$

يجب عليك الاهتمام بالتمييز بين التسميات المشابهة التي لها معانٍ مختلفة كليًا، كما نوضح في المثال 6.3.

مثال 6.3 مشتقات بعض الدوال المثلثية المتشابهة

احسب اشتقاق (a) $f(x) = \cos x^3$. (b) $g(x) = \cos^3 x$ و (c) $h(x) = \cos 3x$

الحل لاحظ الاختلافات بين هذه الدوال الثلاثة. باستخدام الأقواس المضمنة التي لا يضرنا وضعها، يوجد لدينا $f(x) = \cos(x^3)$, $g(x) = (\cos x)^3$ و $h(x) = \cos(3x)$. بالنسبة إلى (a) يوجد لدينا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x^3) = -\sin(x^3)\underbrace{\frac{d}{dx}(x^3)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = -\sin(x^3)(3x^2) = -3x^2\sin x^3.$$

ثم بالنسبة إلى (b) يوجد لدينا

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x)^3 = 3(\cos x)^2 \underbrace{\frac{d}{dx}(\cos x)}_{\text{مشتقة من الداخل}}$$
$$= 3(\cos x)^2(-\sin x) = -3 \sin x \cos^2 x.$$

وفي النهاية، بالنسبة إلى (c) يوجد لدينا

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 3x) = -\sin(3x) \underbrace{\frac{d}{dx}(3x)}_{\text{مشتقة من الداخل}} = -\sin(3x)(3) = -3\sin 3x.$$

بالجمع بين القواعد المثلثية وقواعد ناتج الضرب وناتج القسمة والسلسلة، يمكننا ايجاد الاشتقاق للعديد من الدوال المعقدة.

مثال 6.4 مشتقة تشتمل على قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج القسمة

أوجد مشتقة $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

الحل لدينا

قاعدة السلسلة

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+1}\right)}_{\text{مشتقة من الداخل}}$$

قاعدة ناتج القسمة

$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2(x+1)-2x(1)}{(x+1)^2}$$
$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}.$$

مثال 6.5 إيجاد معادلة مماس

أوجد معادلة المماس على منحنى

$$y = 3\tan x - 2\csc x$$

عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل المشتقة هي:

$$y' = 3\sec^2 x - 2(-\csc x \cot x) = 3\sec^2 x + 2\csc x \cot x.$$

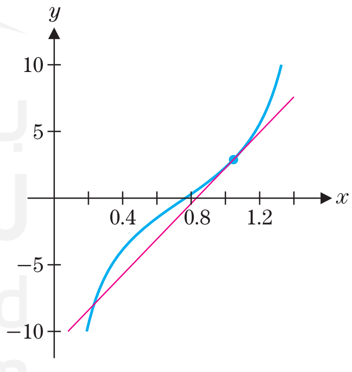
عند $x = \frac{\pi}{3}$، يوجد لدينا

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3(2)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

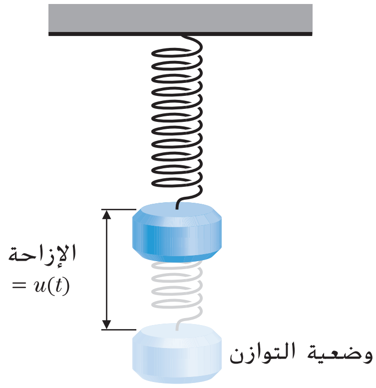
ميل المماس $\frac{40}{3}$ ونقطة التماس $\left(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ فتكون معادله المماس

$$y = \frac{40}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

نحن نبيّن تمثيلًا بيانيًا للدالّة والمماس في الشكل 3.31.



الشكل 3.31
$y = 3\tan x - 2\csc x$
والمماس عند $x = \frac{\pi}{3}$



الشكل 3.32
نظام الزنبرك–الكتلة

تطبيقات

تبرز اهمية الدوال المثلثية بشكل طبيعي إلى حدٍ ما في حل العديد من المسائل الفيزيائية. على سبيل المثال، يمكن توضيح أن الحركة الرأسية لكتلة معينة معلقة من زنبرك، في غياب الاحتكاك (على سبيل المثال، عندما توجد مقاومة للحركة مثل مقاومة الهواء، يتم إلغاؤها)، ويتم حسابها باستخدام

$$u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

حيث $u(t)$ هو التردد، و t هو الزمن و a و b هم الثوابت. (راجع الشكل 3.32 للحصول على تصور لنظام الزنبرك–الكتلة مثل هذا).

مثال 6.6 تحليل نظام الزنبرك–الكتلة

لنفترض أن $u(t)$ يقيس الإزاحة (المُقيسة بالبوصة) لكتلة معلقة من زنبرك لمدة t ثانية بعد تحريرها وأن

$$u(t) = 4\cos 2t$$

أوجد السرعة المتجهة في أي زمن t وحدد أقصى سرعة متجهة.

الحل بما أن $u(t)$ يمثل الموقع (الإزاحة). يتم تحديد السرعة المتجهة باستخدام $u'(t)$. يوجد لدينا

$$u'(t) = 4(-\sin 2t)\cdot 2 = -8\sin 2t$$

حيث يتم قياس $u'(t)$ بالبوصة في الثانية. وبالطبع فإن $\sin 2t$ يتذبذب بين -1 و 1 ولذلك، فإن أكبر قيمة يصل إليها $u'(t)$ يمكن أن تكون $8 = (-1)8-$ بوصة في الثانية. يحدث ذلك عندما يكون $\sin 2t,= -1$. وهكذا عند $t = 3\pi/4$ ، $t = 7\pi/4$ وما إلى ذلك. لاحظ أن في هذه الأوقات $u(t) = 0$. لذا تتحرك الكتلة بأسرع شكل عندما تمر من خلال موقع اتزانها. ■

تمارين 3.6

تمارين كتابية

1. يرسم معظم الأشخاص منحنيات sine الزاوية التي تتسم بالانحدار والاستدارة الشديدين. ومع الأخذ في الحسبان نتائج هذا الدرس، ناقش الشكل الفعلي لمنحنى sine الزاوية. بالبدء عند (0, 0)، ما مدى الانحدار الذي يجب أن يكون عليه التمثيل البياني؟ ما التمثيل البياني الأكثر انحدارًا الذي يجب رسمه في أي مكان؟ في أي المناطق يكون التمثيل البياني مستقيمًا تقريبًا وأين يكون منحنيًا بدرجة كبيرة؟

2. في الكثير من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، يجعل الحد $\sin x$ الحسابات صعبة. يوجد تبسيط عام وهو استبدال $\sin x$ بـ x مصحوبًا بتفسير "$\sin x$ يساوي تقريبًا x للزوايا الصغيرة". ناقش هذا التقريب في ضوء المماس مع $y = \sin x$ عند $x = 0$. ما مدى الحجم الصغير للزاوية الصغيرة التي يكون تقريبها جيدًا؟ المماس مع $y = \cos x$ عند $x = 0$ هو ببساطة $y = 1$. ولكن التبسيط "$\cos x$ يساوي 1 تقريبًا لكل الزوايا الصغيرة" لا يتم استخدامه أبدًا. لماذا سيكون هذا التقريب أقل فائدة من $\sin x \approx x$؟

3. استخدم التحليل البياني كما في النص لمناقشة أن مشتقة $\cos x$ هي $-\sin x$.

4. إذا كانت دالّة f قابلة للإشتقاق لها دورة تتكون من p. فاشرح لماذا f' أيضًا له دورة تتكون من p.

في التمارين 1–18، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = 4\sin 3x - x$
2. $f(x) = 4x^2 - 3\tan 2x$
3. $f(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$
4. $f(t) = t^2 + 2\cos^2 4t$
5. $f(x) = x\cos 5x^2$
6. $f(x) = x^2 \sec 4x$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{\csc^4 2x}$
9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$
10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$
11. $f(w) = \dfrac{1}{\sin 4w}$
12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$
13. $f(x) = 2\sin 2x \cos 2x$
14. $f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$
15. $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1}$
16. $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$
17. $f(x) = \sin^3\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$
18. $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3+2x))$

في التمارين 19–22، أوجد مشتقة كل دالّة.

19. (a) $f(x) = \sin x^2$ (b) $f(x) = \sin^2 x$ (c) $f(x) = \sin 2x$
20. (a) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ (c) $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$
21. (a) $f(x) = \sin x^2 \tan x$ (b) $f(x) = \sin^2(\tan x)$ (c) $f(x) = \sin(\tan^2 x)$
22. (a) $f(x) = \sec x^2 \tan x^2$ (b) $f(x) = \sec^2(\tan x)$ (c) $f(x) = \sec(\tan^2 x)$

في التمارين 23–26، أوجد معادلة المماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a$.

23. $f(x) = \sin 4x,\ a = \frac{\pi}{8}$

24. $f(x) = \tan 3x,\ a = 0$

25. $f(x) = x^2 \cos x,\ a = \frac{\pi}{2}$

26. $f(x) = x \sin x,\ a = \frac{\pi}{2}$

في التمارين 27–30، استخدم دالّة الموقع لإيجاد السرعة المتجهة في الزمن $t = t_0$. على فرض أن الوحدات بالأقدام والثواني.

27. $s(t) = t^2 - \sin 2t,\ t_0 = 0$

28. $s(t) = 4 + 3 \sin t,\ t_0 = \pi$

29. $s(t) = \frac{\cos t}{t},\ t_0 = \pi$

30. $s(t) = t \cos(t^2 + \pi),\ t_0 = 0$

31. يهتز زنبرك معلق من السقف إلى أعلى وإلى أسفل. وقد حُدد موقعه الرأسي في الزمن t باستخدام $f(t) = 4 \sin 3t$. (a) أوجد السرعة المتجهة للزنبرك في الزمن t. (b) ما أقصى سرعة للزنبرك؟ (c) ما الموقع عندما يصل إلى أعلى سرعة له؟

32. في التمرين 31، (a) متى تكون قيم السرعة المتجهة تساوي 0؟ (b) ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة تساوي 0؟ (c) متى يغير الزنبرك اتجاهاته؟

33. استخدم النهايات الأساسية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ لإيجاد النهايات التالية:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{4t}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{5x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

34. استخدم النهايات الأساسية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ لإيجاد النهايات التالية:

(a) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{2t}{\sin t}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

35. إذا كان $f(x) = \sin 2x$، أوجد $f^{(75)}(x)$ و $f^{(150)}(x)$.

36. إذا كان $f(x) = \cos 3x$، أوجد $f^{(77)}(x)$ و $f^{(120)}(x)$.

37. بالنسبة للنظرية التابعة 6.1، وضّح أن $\lim\limits_{\theta\to 0^-} \sin\theta = 0$.

38. استخدم النظرية التابعة 6.1 والمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لإثبات النظرية التابعة 6.2.

39. استخدم المتطابقة $\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ لإثبات النظرية 6.2.

40. استخدم قاعدة ناتج القسمة لاشتقاق القوانين الخاصة بمشتقات $\cot x, \sec x$ و $\csc x$.

41. كرر التمرين 13 باستخدام CAS. إذا لم تكن إجابته بالشكل نفسه لإجابتنا في نهاية الكتاب، فاشرح طريقة حساب CAS إجابته.

42. كرر التمرين 14 باستخدام CAS. إذا لم تكن إجابته تساوي 0، فاشرح طريقة حساب CAS لإجابته.

43. أوجد مشتقة $f(x) = 2\sin^2 x + \cos 2x$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع الرقم 0. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

44. أوجد مشتقة $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\sec x \tan x$ اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

45. بالنسبة للدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ,\ x \neq 0 \\ 1 & ,\ x = 0 \end{cases}$ (a) وضّح أن f متصلة وقابلة للإشتقاق عند كل x. (إرشاد: ركّز على $x = 0$.) (b) وضّح أن المشتقة $f'(x)$ متصلة.

46. في إثبات $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$، أين نستخدم افتراض أن x يكون في قياس دائري؟ إذا كنت تتمتع بإمكانية الدخول إلى برنامج CAS، فأوجد مشتقة $\sin x°$؛ واشرح من أين حصلنا على $\pi/180$.

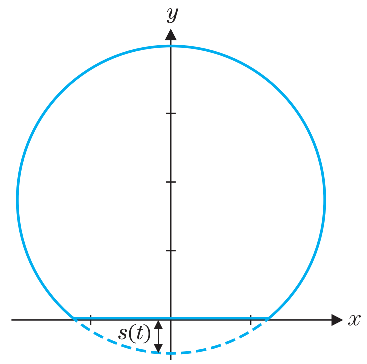
47. ارسم التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ ومماسه عند $x = 0$. جرّب تحديد عدد مرات تقاطعه عن طريق التكبير في التمثيل البياني (ولكن لا تستغرق الكثير من الوقت في عمل ذلك). وضّح أن الـ $f(x) = \sin x$، $f'(x) < 1$ لكل $0 < x < 1$. وضّح لماذا يتضمن هذا أن $\sin x < x$ لكل $0 < x < 1$. استخدم برهانًا مشابهًا لتوضيح أن $\sin x > x$ لكل $-1 < x < 0$. اشرح لماذا يتقاطع $y = \sin x$ مع $y = x$ في نقطة واحدة فقط.

48. بالنسبة إلى القيم الموجبة لـ k، حدد كم عدد المرات التي يتقاطع فيها $y = \sin kx$ مع $y = x$. وعلى وجه الخصوص، ما أكبر قيمة لـ k والتي يوجد تقاطع وحيد لها؟ جرّب تحديد أكبر قيمة لـ k حيث يوجد لها ثلاثة تقاطعات.

تمارين استكشافية

1. للدالّة $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$ العديد من الخصائص غير الاعتيادية. وضّح أن f متصلة وقابلة للإشتقاق عند $x = 0$ ومع ذلك، فإن $f'(x)$ غير متصلة عند $x = 0$. لرؤية ذلك، وضّح أن $f'(x) = -1$ لـ $x = \frac{1}{2\pi}, x = \frac{1}{4\pi}$ وهكذا. ثم وضّح أن $f'(x) = 1$ لـ $x = \frac{1}{\pi}, x = \frac{1}{3\pi}$ وهكذا. اشرح لماذا يثبت ذلك أن $f'(x)$ لا يمكن أن تكون متصلة عند $x = 0$.

2. عندما ترتد كرة، نعتقد غالبًا أن الارتداد يحدث لحظيًا. لا يأخذ ذلك في الحسبان أن الكرة تنضغط بالفعل وتبقى متصلة بالأرض لفترة وجيزة من الزمن. كما هو موضح في كتاب جون ويسون *the Science of Soccer* (علم كرة القدم)، المقدار s الذي تنضغط فيه الكرة يحقق المعادلة $s''(t) = -\frac{cp}{m}s(t)$، حيث c هو محيط الكرة، p هو ضغط الهواء داخل الكرة و m هو كتلة الكرة.



كرة تنضغط

لنفرض أن الكرة تصدم الأرض في الزمن 0 مع سرعة متجهة قدرها v m/s. ثم $s(0) = 0$ و $s'(0) = v$. وضّح أن $s(t) = \frac{v}{k}\sin kt$ يلبي الشروط الثلاثة $s''(t) = -\frac{cp}{m}s(t)$، و $s(0) = 0$ و $s'(0) = v$ مع $k = \sqrt{\frac{cp}{m}}$ استخدم خصائص دالّة الـ sin لتوضيح مدة الارتداد وهي $\frac{\pi}{k}$ ثانية وأوجد أقصى قدر للانضغاط. بالنسبة إلى كرة قدم مع القيم $c = 0.7$ m، $p = 0.86 \times 10^5$ N/m^2، $v = 15$ m/s. ونصف القطر $R = 0.112$ m و $m = 0.43$ kg. احسب الارتداد وأقصى قدر للانضغاط.

مع الجمع بين الفيزياء لما قبل الارتداد وأثناءه وبعده، نحصل على ارتفاع مركز كرة نصف قطرها R:

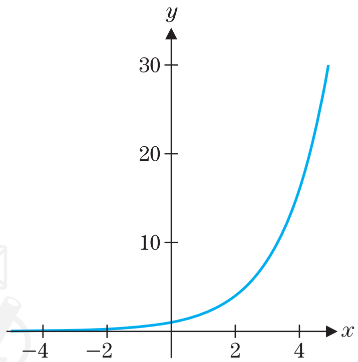
$$h(t) = \begin{cases} -4.9t^2 - vt + R & ، \quad t < 0 \\ R - \frac{v}{k}\sin kt & ، \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{k} \\ -4.9(t - \frac{\pi}{k})^2 + v(t - \frac{\pi}{k}) + R & ، \quad t > \frac{\pi}{k}. \end{cases}$$

حدد ما إذا كانت $h(t)$ متصلة لكل قيم t وارسم تمثيلًا بيانيًا معقولًا لهذه الدالّة.

الدرس 7-3 اشتقاق الدوال الأسيّة والدوال اللوغاريتمية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية هي دوال من بين أكثر الدوال المعروفة التي نقابلها في التطبيقات. نحن نبدأ بتطبيق بسيط في الأعمال.

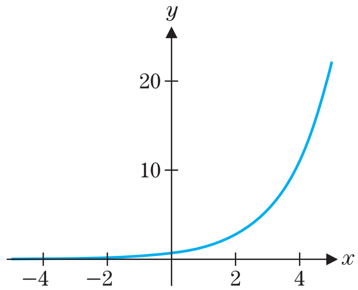
على فرض أن لديك استثمارًا تتضاعف قيمته كل عام. إذا بدأ الاستثمار بمبلغ AED 100، فستكون قيمة الاستثمار بعد عام واحد هي $\text{AED } 100(2)$ أو AED 200. بعد عامين، ستكون قيمته هي $\text{AED } 100(2)(2) = \text{AED } 400$ وبعد ثلاث سنوات ستكون قيمته $\text{AED } 100(2^3) = \text{AED } 800$. وبصفة عامة، بعد t عامًا، ستكون قيمة استثمارك هي $\text{AED } 100(2^t)$. وبما أن القيمة تتضاعف كل عام، فيمكنك وصف المعدل العائد على الاستثمار بأنه 100% (ويسمى عادةً **النسبة المئوية السنوية للمردود** أو **APY**). بالنسبة إلى طالب يدرس التفاضل والتكامل، لا بد أن يشير المصطلح معدل إلى المشتقة.



الشكل 3.33
$y = 2^x$

نحن نضع في حسباننا أولًا $f(x) = a^x$ بالنسبة لثابت معين $a > 1$ (يُسمى **الأساس**). إن التمثيل البياني سيبدو متشابهًا إلى حدٍ ما مع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$، الموضح في الشكل 3.33.

لاحظ أنك حينما تنظر من اليسار إلى اليمين، يرتفع التمثيل البياني. لذلك تكون ميول المماسات، وأيضًا قيم المشتقة موجبة دائمًا. وأيضًا، كلما نظرت إلى أقصى اليمين، كلما زاد انحدار التمثيل البياني وكلما، زادت القيمة الموجبة للمشتقة. وعلى يسار نقطة الأصل، تكون المماسات أفقية تقريبًا، ومن ثم تكون المشتقة موجبة ولكنها قريبة من الصفر. الرسم الخاص بـ $y = f'(x)$ الموضح في الشكل 3.34 متسق مع كل المعلومات أعلاه. (استخدم الحاسوب لإنشاء سلاسل من التمثيلات البيانية لـ $y = a^x$ للعديد من القيم المختلفة لـ a. لكل من $0 < a < 1$ و $a > 1$. بالتماشي مع التمثيلات البيانية للمشتقات المقابلة وسيمكنك معرفة نمط معين.) وعلى وجه الخصوص، لاحظ أن رسم المشتقة يمثل بدرجة قريبة التمثيل البياني للدالّة نفسها.



الشكل 3.34
مشتقة $f(x) = 2^x$

اشتقاق الدوال الأسيّة

يعطينا تعريف النهاية للمشتقة $f(x) = a^x$ لـ $a > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} \qquad \text{من قواعد الأسس}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} \qquad \text{إخراج العامل المشترك } a^x \qquad (7.1)$$

ولسوء الحظ، لا يوجد لدينا في الوقت الحالي وسائل لحساب النهاية في (7.1). ومع ذلك، على فرض وجود النهاية، ينص (7.1) على أن

$$\frac{d}{dx}a^x = (\text{ثابت})\, a^x \tag{7.2}$$

وعلاوة على ذلك فإن (7.2) متسق مع ما لاحظناه بيانيًا في الأشكال 3.33 و 3.34. السؤال الذي نواجهه الآن هو: هل النهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

موجودة لكل (أو أي) قيم لـ $a > 0$ ؟ نحن نستكشف هذه النهاية عدديًا في الجدول التالي الخاص بـ $a = 2$.

h	$\frac{2^h-1}{h}$
0.01	0.6955550
0.0001	0.6931712
0.000001	0.6931474
0.0000001	0.6931470

h	$\frac{2^h-1}{h}$
−0.01	0.6907505
−0.0001	0.6931232
−0.000001	0.6931469
−0.0000001	0.6931472

يقترح الإثبات العددي أن النهاية في السؤال موجودة وأن

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\approx 0.693147$$

نتركها كتمرين لتوضيح أن الإثبات العددي يقترح أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\approx 1.098612$$

القيم التقريبية لهذه النهايات لا تلفت الانتباه كثيرًا حتى تلاحظ أن

$\ln 3 \approx 1.098612$ و $\ln 2 \approx 0.693147$

ستجد نتائج مشابهة إذا وضعت في حسبانك النهايةالموجودة في (7.1) بالنسبة إلى قيم $a > 0$ (جرّب تقدير العديد من تلك القيم بنفسك.) يقترح هذه النتيجة العامة التالية.

النظرية 7.1

بالنسبة إلى أي ثابت $a > 0$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \tag{7.3}$$

إثبات هذه النتيجة ليس كاملًا. وهذا بسبب أننا لا نعرف طريقة حساب النهاية في (7.1). والآن، يجب أن توافق على الإثباتات العددية والبيانية والبراهين الجبرية (المكتملة تقريبًا) التي تدعم هذا التخمين.

مثال 7.1 إيجاد معدل التغيّر لاستثمار معين

إذا كانت قيمة استثمار معين هي 100 درهم إماراتي تتضاعف كل عام، ستكون القيمة بعد t عام محسوبة باستخدام $v(t) = 100\, 2^t$. أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغيّر في القيمة.

الحل المعدل اللحظي للتغير هو المشتقة

$$v'(t) = 100\, 2^t \ln 2$$

سيكون معدل التغيّر الصلة هو

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{100\ 2^t \ln 2}{100\ 2^t} = \ln 2 \approx 0.693$$

سيكون التغير بالنسبة المئوية حوالي 69.3% في العام. هذا مدهش بالنسبة إلى معظم الأشخاص. ستسبب نسبة 69.3% مضاعفة استثمارك في كل عام إذا كانت مركبة "باستمرار". ■

القاعدة الأكثر استخدامًا (بدرجة كبيرة) هي العدد غير النسبي e (يحدث بشكل طبيعي). لا بد أن تلاحظ على الفور أهمية هذا الخيار. بما أن $\ln e = 1$، فإن مشتقة $f(x) = e^x$ في أبسط صورة

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x$$

بالرغم من أن هذه حالة خاصة ببساطة للنظرية 7.1، فهذه النتيجة مهمة بما يكفي بحيث نذكرها كنتيجة مستقلة.

النظرية 7.2

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

من المحتمل أنك ستوافق على أن هذا هو أسهل قانون للاشتقاق يمكن تذكره. في الدرس 3.6، نظرنا إلى نموذج بسيط من اهتزازات كتلة تتعلق من زنبرك. ونوضح الآن مزيدًا من مواقف الحياة اليومية بشكل أكبر.

مثال 7.2 قاعدة السلسلة مع الدوال الأسيّة

أوجد مشتقة $f(x) = 3e^{x^2}$ (a)، $g(x) = xe^{2/x}$ (b) و $h(x) = 3^{2x^2}$ (c).

الحل (a) من قاعدة السلسلة نحصل على

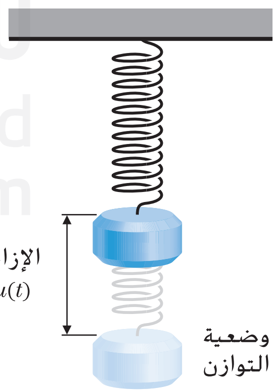
$$f'(x) = 3e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 3e^{x^2}(2x) = 6xe^{x^2}$$

(b) باستخدام قاعدة ناتج الضرب وقاعدة السلسلة، نحصل على

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1)e^{2/x} + xe^{2/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= e^{2/x} + xe^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right) \\ &= e^{2/x} - 2\frac{e^{2/x}}{x} \\ &= e^{2/x}(1 - 2/x) \end{aligned}$$

(c) في النهاية، يوجد لدينا

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3^{2x^2}\ln 3\frac{d}{dx}(2x^2) \\ &= 3^{2x^2}\ln 3\,(4x) \\ &= 4x(\ln 3)3^{2x^2} \end{aligned}$$ ■



الشكل 3.35

مثال 7.3 إيجاد السرعة المتجهة لكتلة معلّقة

إذا صممنا مضائلة (أي مقاومة للحركة بسبب الاحتكاك على سبيل المثال) في نموذج نظام الزنبرك-الكتلة، (راجع الشكل 3.35)، الإزاحة الرأسيّة في الزمن t.

للكتلة المعلّقة من زنبرك معين يمكن وصفها باستخدام

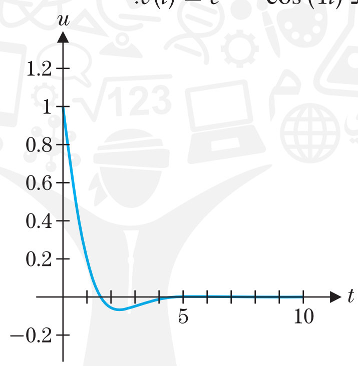
$$u(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\omega t) + Be^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

حيث يكون كل من A، B، α وω ثوابت. بالنسبة إلى كل من

(a) $u_1(t) = e^{-t}\cos t$ و (b) $u_2(t) = e^{-t/6}\cos 4t$

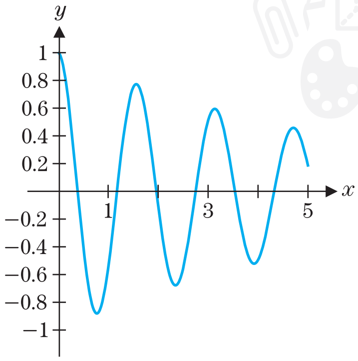
ارسم تمثيلًا بيانيًا لحركة الثقل واحسب السرعة المتجهة عند أي زمن t

الحل الشكل 3.36a يوضح تمثيلًا بيانيًا لـ $u(t) = e^{-t}\cos t$. لاحظ أنه يبدو مهتزًا لفترة قصيرة ثم يتوقف بسرعة عند $u = 0$. (بالرغم من أن التمثيل البياني يستمر في التذبذب، فإن هذه التذبذبات بسيطة جدًا ببساطة حتى تتم رؤيتها باستخدام هذا المقياس عند $t > 5$.) هذا بالضبط هو نوع السلوك الذي تتوقعه من نظام التعليق في سيارتك (نظام مشابه للزنبرك – الكتلة) عندما تصطدم بنتوء في الطريق. إذا كان نظام التعليق لسيارتك يحتاج إلى إصلاح. فربما تحصل على سلوك مشابه بدرجة أكبر لما تم توضيحه في الشكل 3.36b ، وهو التمثيل البياني لـ $v(t) = e^{-t/6}\cos(4t)$.



الشكل 3.36a

$u(t) = e^{-t}\cos t$



الشكل 3.36b

$y = e^{-t/6}\cos(4t)$

يتم تحديد السرعة المتجهة للكتلة باستخدام قاعدة اشتقاق. ناتج الضرب، نحصل على

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-t})\cos t + e^{-t}\frac{d}{dt}(\cos t) \\ &= e^{-t}\frac{d}{dt}(-t)\cos t - e^{-t}\sin t \\ &= -e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

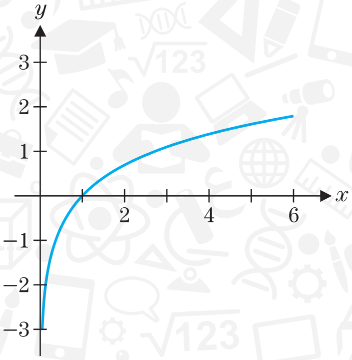
$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-t/6})\cos(4t) + e^{-t/6}\frac{d}{dt}[\cos(4t)] \\ &= e^{-t/6}\frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{6}\right)\cos(4t) + e^{-t/6}[-\sin(4t)]\frac{d}{dt}(4t) \\ &= -\frac{1}{6}e^{-t/6}\cos(4t) - 4e^{-t/6}\sin(4t). \end{aligned}$$

في اللمحة الأولى، قد تبدو قاعدة السلسلة للدوال الأسيّة مختلفة قليلًا بشكل جزئي لأن ما "بداخل" الدالّة الأسيّة $e^{f(x)}$ هو الأس $f(x)$. احرص على عدم تغيير الأس عند حساب مشتقة دالّة أسيّة.

مشتقة اللوغاريتم الطبيعي

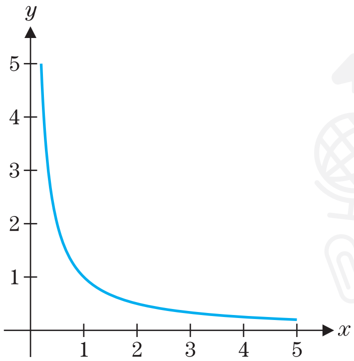
ترتبط دالّة اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ بدرجة قريبة من الدوال الأسيّة. لقد رأيناها بالفعل تزداد كجزء من قانون الاشتقاق الأسي العام (7.3). إن التمثيل البياني للوغاريتم الطبيعي يبدو مثل الموضّح في الشكل 3.37a.

يتم تعريف الدالّة فقط لـ $x > 0$ وبينما تنظر إلى اليمين يرتفع التمثيل البياني دائمًا. وهكذا، ميول المماسات أيضًا وأيضًا تكون قيم المشتقة موجبة دائمًا. وعلاوة على ذلك، بما أن $x \to \infty$، فإن ميول المماسات تصبح موجبة بدرجة أقل وتبدو أنها تقترب من 0. ومن ناحية أخرى، بما أن x يقترب من 0 لجهة اليمين، فإن التمثيل البياني يصبح أكثر انحدارًا ومن ثم تصبح المشتقة أكبر وأكبر بدون قيود. يتوافق التمثيل البياني في الشكل 3.37b مع كل هذه الملاحظات. هل يبدو هذا التمثيل البياني مثل أي تمثيل بياني لأي دالّة تعرفها؟



الشكل 3.37a

$y = \ln x$



الشكل 3.37b

مشتقة $f(x) = \ln x$

باستخدام تعريف المشتقة، نحصل على ما يلي لـ $f(x) = \ln x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

لسوء الحظ، نحن لا نعرف طريقة لايجاد قيمة هذه النهاية أو حتى حقيقة ما إذا كانت موجودةً أو لا، بالرغم من أنه يسعنا تقريب قيمتها لأي قيمة معلومة لـ x.

ومن ناحية أخرى، تذكر أن بالنسبة إلى $x > 0$ ، $y = \ln x$ إذا كان وفقط $e^y = x$. من النظريتين 5.2 و 7.2 يوجد لدينا ذلك لـ $g(x) = \ln x$ و $f(x) = e^x$ ، $f'(x) = e^x$ وهكذا،

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

والذي يثبت النتيجة التالية.

النظرية 7.3

لكل $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad (7.4)$$

مثال 7.4 مشتقات اللوغاريتميات

أوجد مشتقة ما يأتي: (a) $f(x) = x \ln x$ ، (b) $g(x) = \ln x^3$ و (c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$.

الحل (a) باستخدام قاعدة ناتج الضرب، نحصل على

$$f'(x) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1$$

(b) يمكننا بالتأكيد استخدام قاعدة السلسلة لاشتقاق $g(x)$. ومع ذلك، باستخدام خصائص اللوغاريتميات، تذكر أن بإمكاننا إعادة كتابة $g(x) = \ln x^3 = 3\ln x$ واستخدام (7.4) ، ونحصل على

$$g'(x) = 3\frac{d}{dx}(\ln x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

(c) باستخدام قاعدة السلسلة $h(x)$، نحصل على

$$h'(x) = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$ ■

وكبديل لتعليم قانون اشتقاق منفصل للدالّة الأسيّة العامة، لاحظ أنه بالنسبة إلى أي أساس $a > 0$، يمكننا كتابة

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

باستخدام القواعد العادية للأسس واللوغاريتميات. ثم يتبع ذلك

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \times \frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{x\ln a} \times \ln a$$
$$= a^x \times \ln a$$

وهذا يمثل نتيجة النظرية 7.1

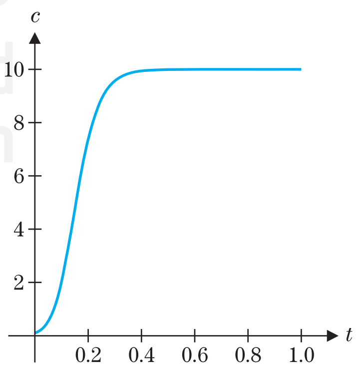
مثال 7.5 تحليل تركيز مادة كيميائية

يتم تحديد التركيز c لمادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-20t}+1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 10.

الحل قبل حساب المشتقة، انظر بعناية إلى الدالّة c. المتغير المستقل هو t والحد الوحيد الذي يشمل t موجود في هذا المقام. لذا فإننا لا نحتاج إلى استخدام قاعدة ناتج القسمة. وبدلًا من ذلك، اكتب أولاً الدالّة بالصيغة $c(t) = 10(9e^{-20t}+1)^{-1}$ واستخدم قاعدة السلسلة يوجد لدينا

$$c'(t) = -10(9e^{-20t}+1)^{-2}\frac{d}{dt}(9e^{-20t}+1)$$
$$= -10(9e^{-20t}+1)^{-2}(-180e^{-20t})$$
$$= 1800e^{-20t}(9e^{-20t}+1)^{-2}$$
$$= \frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2} > 0$$

بما أن لكل المماسات ميل موجب، فإن التمثيل البياني لـ $y = c(t)$ يزداد من اليسار إلى اليمين كما هو موضح في الشكل 3.38.



الشكل 3.38
التركيز الكيميائي

بما أن التركيز يزداد في كل الوقت، فإن التركيز يظل دائمًا أقل من القيمة المحددة $\lim_{t\to\infty} c(t)$ والتي يمكن حسابها بسهولة لتصبح

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10}{9e^{-20t}+1} = \frac{10}{0+1} = 10$$ ■

التفاضل اللوغاريتمي

توجد طريقة ممتازة تسمى **التفاضل اللوغاريتمي** تستخدم قواعد اللوغاريتميات للمساعدة على إيجاد مشتقات دوال معينة لا يوجد لدينا لها حاليًا قوانين اشتقاق. على سبيل المثال، لاحظ أن الدالة $f(x) = x^x$ ليست دالة أسيّة لأن الأساس ليس ثابتًا وليست دالة قوّة لأن الأسّ ليس ثابتًا. في المثال، 7.6 نوضح طريقة الاستفادة من خصائص اللوغاريتميات لإيجاد مشتقة دالة مثل تلك.

مثال 7.6 التفاضل اللوغاريتمي

أوجد مشتقة $f(x) = x^x$، لـ $x > 0$.

كما تمت ملاحظته بالفعل، لا تنطبق أي من قواعد الاشتقاق الموجودة لدينا. لقد بدأنا بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي المعادلة $f(x) = x^x$. لدينا

$$\begin{aligned} \ln[f(x)] &= \ln(x^x) \\ &= x \ln x \end{aligned}$$

من الخصائص المعتادة للوغاريتميات. نقوم الآن بتفاضل كلا الطرفين لهذه المعادلة الأخيرة. باستخدام قاعدة السلسلة على الطرف الأيسر وقاعدة ناتج الضرب على الطرف الأيمن، نحصل على

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (1)\ln x + x\frac{1}{x}$$

أو

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$$

وبالحل لإيجاد $f'(x)$، فإننا نحصل على

$$f'(x) = (\ln x + 1) f(x) = (\ln x + 1) x^x$$

تمارين 3.7

تمارين كتابية

1. التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ تتجه المنحنيات لأعلى في الفترة من $x = -1$ إلى $x = 1$. بتفسير $f'(x) = e^x$ كميول للمماسات وملاحظة أن كلما زاد x زاد e^x. اشرح لماذا يتجه التمثيل البياني لأعلى. بالنسبة إلى القيم الأكبر لـ x يبدو أن التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ يتجه مباشرة لأعلى بدون منحنى. باستخدام المماس، حدد هل هذا صواب أم مجرد خداع بصري.

2. يبدو أن التمثيل البياني لـ $f(x) = \ln x$ يصبح أوسع كلما زاد x. فسِّر المشتقة $f'(x) = \frac{1}{x}$ كميول للمماسات لتحديد هل هذا صواب أم مجرد خداع بصري.

3. قارن وقابل بيانيًا بين الدوال x^2، x^3، x^4 و e^x لـ $x > 0$. ارسم التمثيلات البيانية لقيمة x الكبيرة (والتمثيل البياني لقيمة y الكبيرة جدًا) وقارن بين معدلات النمو النسبي للدوال. وبصفة عامة، كيف يمكن مقارنة دالّة أسيّة بكثيرات الحدود؟

4. قارن وقابل بيانيًا بين الدوال $x^{1/2}$، $x^{1/3}$، $x^{1/4}$ و $\ln x$ لـ $x > 1$. ارسم التمثيلات البيانية لقيمة x الكبيرة وقارن بين معدلات النمو النسبي للدوال. وبصفة عامة، كيف يمكن المقارنة بين $\ln x$ و $\sqrt[n]{x}$ ؟

في التمارين 1–24، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = x^3 e^x$
2. $f(x) = e^{2x}\cos 4x$
3. $f(t) = t + 2^t$
4. $f(t) = t4^{3t}$
5. $f(x) = 2e^{4x+1}$
6. $f(x) = (1/e)^x$
7. $h(x) = (1/3)^{x^2}$
8. $h(x) = 4^{-x^2}$
9. $f(u) = e^{u^2+4u}$
10. $f(u) = 3e^{\tan u}$
11. $f(w) = \dfrac{e^{4w}}{w}$
12. $f(w) = \dfrac{w}{e^{6w}}$
13. $f(x) = \ln 2x$
14. $f(x) = \ln\sqrt{8x}$
15. $f(t) = \ln(t^3 + 3t)$
16. $f(t) = t^3 \ln t$
17. $g(x) = \ln(\cos x)$
18. $g(x) = \cos x \ln(x^2 + 1)$
19. (a) $f(x) = \sin(\ln x^2)$ (b) $g(t) = \ln(\sin t^2)$
20. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ (b) $g(t) = \dfrac{\ln\sqrt{t}}{t}$
21. (a) $h(x) = e^x \ln x$ (b) $f(x) = e^{\ln x}$
22. (a) $h(x) = 2^{e^x}$ (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

23. (a) $f(x) = \ln(\sin x)$ (b) $f(t) = \ln(\sec t + \tan t)$

24. (a) $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x}x^3}$ (b) $f(w) = \sqrt[3]{e^{2w} + w^3}$

في التمارين 28–25، أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = f(x)$ عند $x = 1$.

25. $f(x) = 3e^{x^2}$ **26.** $f(x) = 3^{x^e}$

27. $f(x) = x^2 \ln x$ **28.** $f(x) = 2\ln x^3$

في التمرينين 29 و 30، أوجد كل قيم x التي يكون المماس لمنحنى $y = f(x)$ أفقيًا.

29. (a) $f(x) = xe^{-2x}$ (b) $f(x) = xe^{-3x}$

30. (a) $f(x) = x^2e^{-2x}$ (b) $f(x) = x^2e^{-3x}$

في التمارين 34–31، قيمة الاستثمار في الزمن t تُحدد باستخدام $v(t)$. أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغيّر.

31. $v(t) = 100\ 3^t$ **32.** $v(t) = 100\ 4^t$

33. $v(t) = 40\ e^{0.4t}$ **34.** $v(t) = 60\ e^{-0.2t}$

35. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاثة مرّات كل يوم. أوجد قانونًا للتكاثر بعد t يومًا وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

36. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 500 ويتضاعف كل أربعة أيام. أوجد قانونًا للتكاثر بعد t يومًا وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

37. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{6}{2e^{-8t} + 1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 6 أبدًا.

38. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-10t} + 2}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 5.

في التمارين 44–39 استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد المشتقة.

39. $f(x) = x^{\sin x}$ **40.** $f(x) = x^{4-x^2}$

41. $f(x) = (\sin x)^x$ **42.** $f(x) = (x^2)^{4x}$

43. $f(x) = x^{\ln x}$ **44.** $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

45. أوجد قيمة a بحيث يكون المماس على منحنى $\ln x$ عند $x = a$ خطًا مستقيمًا يمر بنقطة الأصل. أوجد قيمة a بحيث يكون هذا المماس مع e^x عند $x = a$ خطًا مستقيمًا يمر بنقطة الأصل. احسب ميول الخطوط.

46. قدّر النهاية عدديًا في (7.1) عند $a = 3$ وقارن بين إجابتك وبين $\ln 3$. قدّر النهاية عدديًا في (7.1) عند $a = \frac{1}{3}$ وقارن بين إجابتك وبين $\ln\frac{1}{3}$.

47. أوجد مشتقة $f(x) = e^{\ln(-x^2)}$ في برنامج CAS. الإجابة الصحيحة هي أنها غير موجودة. اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما. أوجد مشتقة $f(x) = e^{\ln(x^2-4)}$ في برنامج CAS. اشرح لماذا $2x$ يُعد إجابة غير كاملة.

48. أوجد مشتقة $f(x) = \ln\sqrt{4e^{3x}}$ في برنامج CAS. قارن إجابته مع $\frac{3}{2}$ اشرح طريقة حصولنا على هذه الإجابة والإجابة الخاصة ببرنامج CAS، في حالة وجود اختلاف بينهما.

49. **تقريب بادي** للترتيب (1, 1) لـ e^x هو دالّة بالصيغة $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$ وتكون فيها القيم الخاصة بـ $f(0)$، $f'(0)$ و $f''(0)$ مطابقة للقيم المقابلة الخاصة بـ e^x. أوجد قيم a، b و c التي تجعل $f(0) = 1$، $f'(0) = 1$ و $f''(0) = 1$. قارن بين التمثيلات البيانية لكل من $f(x)$ و e^x.

50. تقريب تايلور للدرجة الثانية للدالة e^x هي دالّة كثيرة الحدود بالصيغة $f(x) = a + bx + cx^2$ تكون فيها قيم $f(0)$، $f'(0)$ و $f''(0)$ مطابقة للقيم المقابلة الخاصة بـ e^x. أوجد قيم كل من a، b وc. قارن بين التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، e^x وتقريب بادي للتمرين 49.

51. في الإحصاء، يتم استخدام الدالّة $f(x) = e^{-x^2/2}$ لتحليل كميات عشوائية تشمل توزيعًا على شكل الناقوس. تعطي حلول المعادلة $f''(x) = 0$ لعلماء الإحصاء قياسًا لقابلية تغير الكمية التي يتم تحليلها. أوجد كل الحلول.

52. كرر التمرين 51 مع الدالّة $f(x) = e^{-x^2/8}$. بالمقارنة بين التمثيلات البيانية للدالتين، اشرح لماذا قد تقول أن هذا التوزيع منتشر بدرجة أكبر مقارنة بالتمرين 51.

53. كرر التمرين 51 للدالّة العامة $f(x) = e^{-(x-m)^2/2c^2}$، حيث يكون كل من m و c ثوابت.

54. في التمرين 53، أوجد الحل للمعادلة $f'(x) = 0$. تُعرف هذه القيمة بأنها المنوال (أو المتوسط) للتوزيع.

تطبيقات

55. يتم وصف حركة زنبرك معين باستخدام $f(t) = e^{-t}\cos t$. احسب السرعة المتجهة في الزمن t. ارسم دالّة السرعة المتجهة. متى تكون السرعة المتجهة صفرًا؟ ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا؟

56. يتم وصف حركة زنبرك معين باستخدام $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$. احسب السرعة المتجهة في الزمن t. ارسم دالّة السرعة المتجهة. متى تكون السرعة المتجهة صفرًا؟ ما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا؟

57. في التمرين 55، قدّر بيانيًا قيمة $t > 0$ التي يتم الوصول إلى أقصى سرعة متجهة عندها.

58. في التمرين 56، قدّر بيانيًا قيمة $t > 0$ التي يتم الوصول إلى أقصى سرعة متجهة عندها.

59. يتم استخدام **دوال هيل** $f(x) = \dfrac{Ax^n}{\theta^n + x^n}$ للثوابت الموجبة A، n و θ لوضع نموذج للعديد من العمليات الكيميائية والأحيائية. وضّح أن $f'(x) > 0$ لـ $x > 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. إذا كان $u = \ln x$ و $v = \ln\left(\dfrac{f(x)/A}{1 - f(x)/A}\right)$ فوضح أن v هي دالّة خطية

ل u. لمعرفة لماذا تُعد هذه الحقائق مهمة، ضع في حسبانك البيانات التالية التي تم جمعها في دراسة عن الارتباط بين الأكسجين والهيموجلوبين. وهنا، يكون x النسبة المئوية للأكسجين في الهواء و y هو النسبة المئوية للهيموجلوبين المتشبع بالأكسجين.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	13	32	52	67	77	84	88	91

ارسم نقاط البيانات هذه. وكما أوضحت بالفعل فإن دوال هيل لها ميل موجب وثبات عند خط التقارب الأفقي. استخدم القيمة المحددة لـ $f(x)$ لشرح السبب في مجموعة البيانات هذه، $A = 100$. ثم بالنسبة إلى كل زوج x-y، احسب u و v كما هو محدد أعلاه. ارسم نقاط u-v ووضح أنها خطية (أو تقريبا خطية تمامًا). أوجد الميل واستخدم ذلك لتحديد قيم n و θ.

60. في أحد كتب *World Almanac* (رزنامة العالم)، ابحث عن سكان الولايات المتحدة حسب العقد (كل عشر سنوات) لأكبر عدد ممكن من السنوات. إذا لم توجد عناوين تشير إلى النمو حسب العقد، سواء عدديًا أو بالنسبة المئوية فاحسبه بنفسك. (إن وجود ورقة بيانات هنا مفيد). للولايات المتحدة فترات نمو خطي وأسي. اشرح لماذا يتوافق النمو الخطي مع زيادة عددية ثابتة. في أي عقد كان النمو العددي ثابتًا (تقريبًا)؟ اشرح لماذا يتوافق النمو الأسي مع زيادة عددية ثابتة. في أي عقد كانت النسبة المئوية للنمو ثابتة (تقريبًا)؟

تمارين استكشافية

1. وجدنا مسبقًا أن e هي نهاية $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. في هذا الدرس، يتم تحديد e كقيمة خاصة بالأساس a مثل $\frac{d}{dx}a^x = a^x$. يوجد اختلاف بين الخصائص المهمة الأخرى لهذا العدد المهم. نحن نكشف عن إحداها هنا. مثّل بيانيًا الدوال x^2 و 2^x بالنسبة إلى $x > 0$. كم عدد المرات التي تتقاطع فيها؟ مثّل بيانيًا الدوال x^3 و 3^x. بالنسبة إلى $x > 0$. كم عدد المرات التي تتقاطع فيها؟ جرّب استخدام الزوج $x^{2.5}$ و 2.5^x والزوج x^4 و 4^x. ما الذي قد يمثل تخمينًا مقبولًا لعدد التقاطعات $(x > 0)$ للدوال x^a و a^x؟ اشرح لماذا سيكون $x = a$ دائمًا حلًا. في أي ظروف يوجد حل آخر اصغر من a ؟ وفي أي ظروف يوجد حل أكبر من a ؟ بالتجربة والخطأ، تحقق من أن e هو قيمة a التي يتغير عندها الحل "الآخر".

2. بالنسبة إلى $n = 1$ و $n = 2$ قم باستقصاء حول $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x^n}$ عدديًا وبيانيًا. خمّن قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x^n}$ لأي عدد صحيح موجب n واستخدم تخمينك مع بقية التمرين. بالنسبة إلى $f(x) = \begin{cases} 0 & ، x \le 0 \\ e^{-1/x} & ، x > 0 \end{cases}$ وضّح أن f قابلة للاشتقاق عند كل x وأن $f'(x)$ متصلة بالنسبة إلى كل x. ثم وضّح أن $f''(0)$ موجود وقارن بين العمل المطلوب لتوضيح أن $f'(x)$ متصلة عند $x = 0$ والعمل المطلوب لتوضيح أن $f''(0)$ موجودة.

الدرس

3-8 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

قارن بين الدالتين التاليتين اللتين تصفان منحنيات معروفة:

$$y = x^2 + 3 \quad \text{(قطع مكافئ)}$$

و

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{(دائرة)}$$

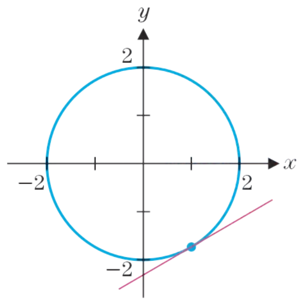
المعادلة الأولى تحدد y كدالّة في x بوضوح لأن بالنسبة إلى كل x تعطي المعادلة قانونًا صريحًا لإيجاد القيمة المقابلة لـــ y. ومن ناحية أخرى، لا تحدد المعادلة الثانية دالّة معينة، لأن الدائرة في الشكل 3.39 لا تجتاز اختبار الخط الرأسي. ومع ذلك، يمكنك حل وايجاد دالتين على الأقل يتم تحديدهما ضمنياً باستخدام المعادلة $x^2 + y^2 = 4$.

على فرض أننا نريد إيجاد ميل المماس للدائرة $x^2 + y^2 = 4$ عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$. (انظر الشكل 3.39). يمكننا التفكير في الدائرة كتمثيل بياني لأنصاف دوائر يتم تحديدها باستخدام $y = \sqrt{4 - x^2}$ و $y = -\sqrt{4 - x^2}$. بما أننا مهتمون بالنقطة $(1, -\sqrt{3})$، فإننا نستخدم المعادلة التي تصف نصف الدائرة السفلي $y = -\sqrt{4 - x^2}$ لحساب المشتقة

$$y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

لذا فإن ميل المماس عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$ سيكون $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

لم يكن هذا الحساب صعبًا بشكل خاص، بالرغم من أننا سنرى قريبًا طريقة أسهل للقيام به. وعلاوة على ذلك، ليس من الممكن دائمًا إيجاد حل لدالّة معينة يتم تعريفها ضمنيًا باستخدام معادلة معطاة.



الشكل 3.39

المماس عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$

وبدلًا من ذلك، على فرض أن المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ تعرّف إحدى الدوال القابلة للاشتقاق أو أكثر للمتغير x: $y = y(x)$. فتكون المعادلة

$$x^2 + [y(x)]^2 = 4 \tag{8.1}$$

عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة (8.1) بالنسبة لـ x، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left\{x^2 + [y(x)]^2\right\} = \frac{d}{dx}(4)$$

ومن قاعدة السلسلة، $\frac{d}{dx}[y(x)]^2 = 2y(x)y'(x)$ ولذلك يوجد لدينا

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

عند حل هذه المعادلة للحصول على $y'(x)$، نحصل على

$$y'(x) = \frac{-2x}{2y(x)} = \frac{-x}{y(x)}$$

لاحظ أن هنا، يتم التعبير عن المشتقة $y'(x)$ بدلالة كل من x و y. للحصول على الميل عند النقطة $(1, -\sqrt{3})$، نقوم بتعويض $x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$، بحيث يكون

$$y'(1) = \left.\frac{-x}{y(x)}\right|_{x=1} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن هذا هو الميل نفسه الذي وجدناه مسبقًا عن طريق الحل أولًا للحصول على y بشكل صريح ثم القيام بالاشتقاق. يُطلق على عملية اشتقاق كل من طرفي معادلة معينة بدلالة x ثم الحل للحصول على $y'(x)$ **الاشتقاق الضمني**.

وخلال هذا الدرس، نفترض أن كل معادلة تحدد ضمنيًا إحدى الدوال القابلة للاشتقاق أو أكثر $y = y(x)$. عند مقابلة معادلة مثل تلك، قم باشتقاق كلا الطرفين بالنسبة لـ x، مع مراعاة إدراك أن اشتقاق أي دالّة لـ y سيتطلب قاعدة السلسلة:

$$\boxed{\frac{d}{dx}g(y) = g'(y)y'(x).}$$

ثم جمّع أي حدود مع عامل $y'(x)$ في أحد طرفي المعادلة، مع وضع المتبقية في الطرف الآخر من المعادلة ثم أوجد حل $y'(x)$. نوضح هذه العملية بالأمثلة التالية.

مثال 8.1 ايجاد مماس ضمنيًا

أوجد $y'(x)$ لـ $x^2 + y^3 - 2y = 3$. ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$.

الحل نظرًا لأننا لا يمكننا إيجاد حل (بسهولة) لـ y، بشكل صريح بدلالة x، فإننا نحسب الاشتقاق ضمنيًا. عند اشتقاق كلا طرفي المعادلة بالنسبة لـ x، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^3 - 2y) = \frac{d}{dx}(3)$$

وهكذا،

$$2x + 3y^2y'(x) - 2y'(x) = 0$$

وبطرح $2x$ من كلا طرفي المعادلة وأخذ $y'(x)$ كعامل مشترك من الحدين المتبقيين، نحصل على

$$(3y^2 - 2)y'(x) = -2x$$

وبالحل لإيجاد $y'(x)$، فإننا نحصل على

$$y'(x) = \frac{-2x}{3y^2 - 2}$$

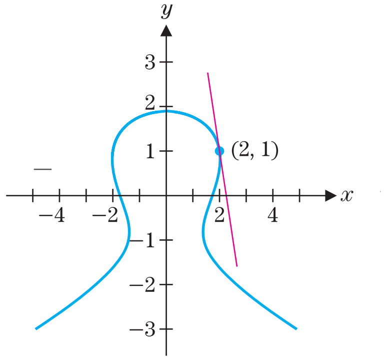
وبتعويض $x = 2$ و $y = 1$، نجد أن ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$ هو

$$y'(2) = \frac{-4}{3-2} = -4$$

وبالتالي فإن معادلة المماس ستكون

$$y - 1 = -4(x - 2)$$

لقد رسمنا تمثيلا بيانيًا للمعادلة وللمماس في الشكل 3.40 باستخدام وضع الرسم الضمني الخاص بالحاسوب.



الشكل 3.40

المماس عند النقطة $(2, 1)$

مثال 8.2 إيجاد مماس باستخدام الاشتقاق الضمني

أوجد $y'(x)$ لــ $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$. ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2, -2)$.

الحل عند اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لــ x، نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(4 - 4y)$$

وبما أن الحد الأول هو نتاج ضرب x^2 و y^2، فيجب علينا استخدام قاعدة ناتج الضرب. يوجد لدينا

$$2xy^2 + x^2(2y)y'(x) - 2 = 0 - 4y'(x)$$

عند تجميع الحدود التي تشمل $y'(x)$ في أحد الأطراف، نحصل على

$$(2x^2y + 4)y'(x) = 2 - 2xy^2$$

لذا فإن

$$y'(x) = \frac{2 - 2xy^2}{2x^2y + 4}$$

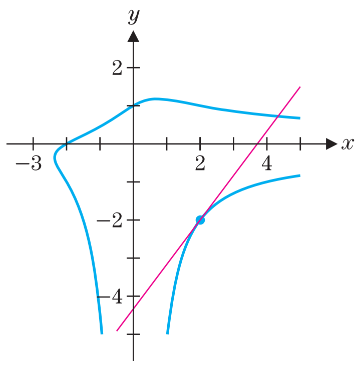
عند تعويض $x = 2$ و $y = -2$، نحصل على ميل المماس،

$$y'(2) = \frac{2 - 16}{-16 + 4} = \frac{7}{6}$$

وفي النهاية يتم تحديد معادلة المماس باستخدام

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2)$$

لقد رسمنا المنحنى والمماس عند $(2, -2)$ في الشكل 3.41 باستخدام وضع الرسم الضمني الخاص بالحاسوب.



الشكل 3.41

المماس عند النقطة $(2, -2)$

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد الاشتقاق المطلوب من أي معادلة يمكنك كتابتها فعليًا. سنوضح ذلك في ما بعد لتطبيق معين.

مثال 8.3 معدل تغير الحجم بالنسبة إلى الضغط

في ظل ظروف معينة، تكون معادلة فان دير والز التي تربط بين الضغط P والحجم V لغاز معين هي

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03) = 9.7 \qquad (8.2)$$

على فرض أن المعادلة (8.2) تحدد ضمنيًا الحجم V كدالة للضغط P استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5, 1)$.

الحل عند اشتقاق طرفي (8.2) بالنسبة لـ P، نحصل على

$$\frac{d}{dP}[(P + 5V^{-2})(V - 0.03)] = \frac{d}{dP}(9.7)$$

من قاعدة ناتج الضرب وقاعدة السلسلة، نحصل على

$$\left(1 - 10V^{-3}\frac{dV}{dP}\right)(V - 0.03) + (P + 5V^{-2})\frac{dV}{dP} = 0$$

عند تجميع الحدود التي تشتمل على $\frac{dV}{dP}$ ، نحصل على

$$[-10V^{-3}(V - 0.03) + P + 5V^{-2}]\frac{dV}{dP} = 0.03 - V$$

لذا فإن

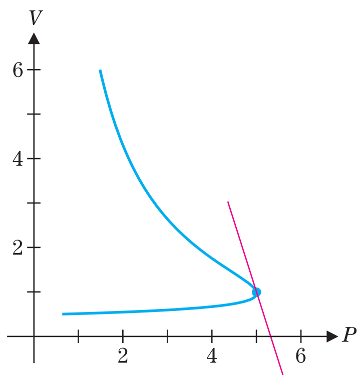
$$\frac{dV}{dP} = \frac{0.03 - V}{-10V^{-3}(V - 0.03) + P + 5V^{-2}}$$

يوجد الآن لدينا

$$V'(5) = \frac{0.03 - 1}{-10(1)(0.97) + 5 + 5(1)} = \frac{-0.97}{0.3} = -\frac{97}{30}$$

(الوحدات بدلالة الحجم لكل وحدة ضغط).

نحن نوضح تمثيلًا بيانيًا لمعادلة فان دير والز، بالتوافق مع المماس مع التمثيل البياني عند النقطة $(5, 1)$ في الشكل 3.42. ■



الشكل 3.42

مثّل بيانيا معادلة فان دير والز والمماس عند النقطة $(5, 1)$

وبالطبع، بما أن بإمكاننا إيجاد مشتقة واحدة ضمنيًا، يمكننا أيضًا إيجاد المشتقات من الرتبة الثانية وذات الرتب الأعلى ضمنيًا، كما نوضح في المثال 8.4 .

مثال 8.4 إيجاد مشتقة من الرتبة الثانية ضمنيًا

أوجد $y''(x)$ ضمنيًا لـ $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. ثم أوجد قيمة y'' عند النقطة $(0, 2)$.

الحل نحن نبدأ باشتقاق طرفي المعادلة بدلالة x . لدينا

$$\frac{d}{dx}(y^2 + 2e^{-xy}) = \frac{d}{dx}(6)$$

من قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج الضرب، يوجد لدينا

$$2yy'(x) + 2e^{-xy}[-y - xy'(x)] = 0 \tag{8.3}$$

لاحظ أننا لسنا بحاجة إلى إيجاد حل ذلك لإيجاد $y'(x)$ بإخراج العامل المشترك 2 وإجراء الاشتقاق مرة أخرى، نحصل على

$$y'(x)y'(x) + yy''(x) - e^{-xy}[-y - xy'(x)][y + xy'(x)]$$
$$- e^{-xy}[y'(x) + y'(x) + xy''(x)] = 0$$

وبتجميع كل الحدود التي تشمل $y''(x)$ في طرف واحد من المعادلة نحصل على

$$yy''(x) - xe^{-xy}y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)$$

وبأخذ العامل المشترك $y''(x)$ على الطرف الأيسر، نحصل على

$$(y - xe^{-xy})y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)$$

لذا فإن

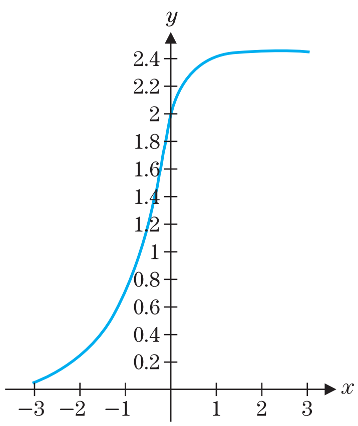
$$y''(x) = \frac{-[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)}{y - xe^{-xy}} \tag{8.4}$$

لاحظ أن (8.4) تعطينا قانونًا (غير محدد إلى حدٍ ما) لـ $y''(x)$ بدلالة x, y و $y'(x)$. إذا كنا نحتاج إلى $y''(x)$ بدلالة x و y فقط، يمكننا فقط حل (8.3) لإيجاد $y'(x)$ والتعويض في (8.4) . ومع ذلك، لسنا بحاجة إلى إجراء ذلك لايجاد $y''(0)$. وبدلًا من ذلك، عوّض أولا $x = 0$ و $y = 2$ في (8.3) للحصول على $4y'(0) + 2(-2) = 0$

ومن ذلك نستنتج أن $y'(0) = 1$ ثم عوّض $x = 0$ و $y = 2$ و $y'(0) = 1$ في (8.4) للحصول على

$$y''(0) = \frac{-1-(2)^2+2}{2} = -\frac{3}{2}$$

انظر الشكل 3.43 لتطّلع على تمثيلٍ بياني لــ $y^2 + 2e^{-xy} = 6$ بالقرب من النقطة $(0, 2)$.



الشكل 3.43

$y^2 + 2e^{-xy} = 6$

تذكر انّه عند هذه النقطة، قد أثبتنا قاعدة القوى

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

فقط للأسس الصحيحة (ارجع للنظرية 3.1 و 4.3). بالرغم من أننا كنا نستخدم هذه النتيجة بحريّة لأي أس حقيقي، r . والآن لقد طورنا اشتقاقًا ضمنيًا وعلى أي حال، توجد لدينا أدوات نحتاج إليها لإثبات قاعدة القوى في حالة وجود أي أس نسبي.

النظرية 8.1

لأي أس نسبي، r ، $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.

البرهان

على فرض أن r هو أي عدد نسبي. إذًا، $r = \frac{p}{q}$ لبعض الأعداد الصحيحة p و q. فلتكن

$$y = x^r = x^{p/q} \tag{8.5}$$

إذًا، برفع طرفي المعادلة (8.5) إلى القوة q، فإننا نحصل على

$$y^q = x^p \tag{8.6}$$

عند اشتقاق طرفي المعادلة (8.6) بدلالة x ، سنحصل على

$$\frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(x^p)$$

ومن قاعدة السلسلة يوجد لدينا $qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$

وبالحل للحصول على $\frac{dy}{dx}$ ، نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q(x^{p/q})^{q-1}} \quad \text{بما ان } y = x^{p/q}$$

$$= \frac{px^{p-1}}{qx^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} \quad \text{استخدام قاعدة الأس}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}, \quad \text{بما ان } \frac{p}{q} = r$$

كما هو مرغوب. ■

مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة

تُعد الدوال المثلثية المعكوسة مفيدة في أي عدد من التطبيقات. نحن نطوّر الآن قواعد اشتقاق لهذه الدوال. يجب عليك الانتباه الشديد للمجالات والمدى لهذه الدوال.

وبوجه خاص، يتم تحديد دالة معكوس sine (أو arcsine) بتعريف مجال sine في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بشكل خاص، وقد حصلنا على

$y = \sin^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$ و $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

بإجراء الاشتقاق للمعادلة $\sin y = x$ ضمنيًا، نحصل على

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x$$

وهكذا،

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

وبحل ذلك لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ نجد (مع $\cos y \neq 0$) أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

هذا ليس كافيًا بشكل تام، بالرغم من أن ذلك يعطينا المشتقة بدلالة y . لاحظ أن $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ، $\cos y \geq 0$ ومن ثم،

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

وهذا يعطينا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

بالنسبة إلى $-1 < x < 1$ أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1 \text{ لـ}}$$

وبدلًا من ذلك، يمكننا اشتقاق هذا القانون باستخدام النظرية 5.2 في الدرس 3.5.

وبالمثل، يمكننا توضيح أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1 \text{ لـ}}$$

لإيجاد $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$ تذكر أن لدينا

$y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

وباستخدام الاشتقاق الضمني، نحصل على

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x$$

وهكذا،

$$(\sec^2 y) \frac{dy}{dx} = 1$$

سنحل هذا لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ للحصول على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

أي إنّ:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

نترك مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة المتبقية كتمارين. تم تلخيص مشتقات الدوال المثلثية المعكوسة الست هنا.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{عند } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{عند } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \text{عند } |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \text{عند } |x| > 1$$

مثال 8.5 إيجاد مشتقة دالّة مثلثية معكوسة

احسب مشتقة (a) $\cos^{-1}(3x^2)$، و (b) $(\sec^{-1} x)^2$، و (c) $\tan^{-1}(x^3)$.

الحل من قاعدة السلسلة نحصل على

(a)
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(3x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{-6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

(b)
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)^2 = 2(\sec^{-1} x)\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = 2(\sec^{-1} x)\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

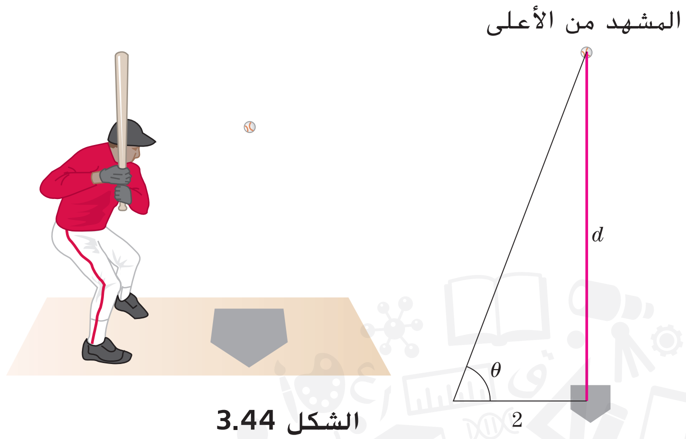
(c)
$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(x^3)] = \frac{1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6}.$$

مثال 8.6 نمذجة معدل التغير في نظر لاعب كرة

من أهم المبادئ الإرشادية لمعظم الرياضات هو "إبقاء النظر إلى الكرة". في البيسبول، يقف ضارب الكرة على بُعد قدمين من اللوح الرئيس بينما يتم إلقاء رمية بسرعة متجهة تصل إلى 130 ft/s (حوالي 90 mph). على فرض أن الكرة تتحرك أفقيًا فقط، ما المعدل الذي تحتاج زاوية نظر ضارب الكرة أن تتغير به لمتابعة الكرة بينما تعبر اللوح الرئيس؟

الحل انظر أولًا إلى المثلث المعروض في الشكل 3.44 (في الصفحة التالية). نشير إلى المسافة من الكرة إلى اللوح الرئيس باستخدام d وزاوية النظر باستخدام θ . نظرًا لأن الزاوية تتغير مع الزمن، فنكتب $d = d(t)$. السرعة المتجهة التي تصل إلى 130 ft/s تعني أن $d'(t) = -130$. [لماذا قد يكون $d'(t)$ سالبًا؟] من الشكل 3.44، لاحظ أن

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{2}\right]$$



الشكل 3.44
نظر ضارب الكرة

سيكون معدل تغير الزاوية

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{d(t)}{2}\right]^2} \frac{d'(t)}{2}$$

$$= \frac{2d'(t)}{4 + [d(t)]^2} \text{ rad/sec}$$

عندما يكون $d(t) = 0$ (أي، عندما تعبر الكرة اللوح الرئيس)، سيكون معدل التغير هو

$$\theta'(t) = \frac{2(-130)}{4} = -65 \text{ rad/sec}$$

ثمة مشكلة معينة في ذلك وهي أن معظم الأشخاص يمكنهم تعقب الأشياء بدقة فقط بمعدل 3 راديان في الثانية(rad/sec). لذا فإن إبقاء العين على الكرة في هذه الحالة مستحيل فيزيائيًا. (اطلع على كتاب واتس وبيل إبقاء العين على الكرة.) ■

ما وراء القوانين

يتيح لنا الاشتقاق الضمني إيجاد مشتقة دالّة معينة حتى لو لم يكن لدينا قانون للدالّة. هذه النتيجة المهمة تعني أن لدينا تقريبًا أي معادلة للعلاقة بين كميتين، ويمكننا إيجاد معدل التغير لإحدى الكميات بالنسبة إلى الثانية. هذه حالة حيث تتطلب الرياضيات تفكيرًا إبداعيًا لما يتجاوز استذكار القانون.

التمارين 3.8

تمارين كتابية

1. بالنسبة إلى الاشتقاق الضمني، نفترض أن y هي دالّة في x؛ ونكتب x لنذكّر أنفسنا بذلك. ومع ذلك، بالنسبة إلى الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ليس من الصحيح أن y هي دالّة في x. وبما أن $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ توجد دالتان بالفعل (على الأقل) في x تم تعريفهما ضمنيًا. اشرح لماذا لا يمثل هذا تعارضًا فعليًا؛ أي اشرح بدقة لماذا نفترض أننا ننفذ اشتقاقًا ضمنيًا.

2. لإجراء الاشتقاق الضمني في معادلة معينة مثل $x^2y^2 + 3 = x$ نبدأ باشتقاق كل الحدود. ونحصل على $2xy^2 + x^2(2y)y' = 1$. يتعلم الكثير من الطلاب القواعد بتلك الطريقة: أخذ المشتقات "العادية" لكل الحدود والتثبيت عند y' في كل مرة يتم فيها أخذ مشتقة y. اشرح لماذا يصلح ذلك، وأعد صياغة القاعدة بدقة أكبر وبصيغة أسهل للفهم.

3. في الاشتقاق الضمني، تمثل المشتقة عادة دالّة معينة لكل من x و y؛ على سبيل المثال، في الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$

يوجد لدينا $y' = -x/y$. إذا أخذنا مشتقة $-x/y$ وعوّضنا أي قيم لـــ x و y ، فهل ستكون المشتقة دائمًا ميلًا للمماس؟ وهكذا، هل توجد أي متطلبات خاصة بتحديد قيم كل من x و y التي يمكن التعويض فيها؟

4. في كل مثال من هذا الدرس، بعدما قمنا باشتقاق المعادلة المعطاة، كان يمكننا إعادة كتابة المعادلة الناتجة بالصيغة $f(x, y)y'(x) = g(x, y)$ بالنسبة إلى بعض الدوال $f(x, y)$ و $g(x, y)$. اشرح لماذا يمكن القيام بذلك دائمًا؛ أي لماذا ينتج عن قاعدة السلسلة دائمًا حد مثل $[y'(x)]^2$ أو $[y'(x)]^2$ ؟

في التمارين 4—1, احسب ميل المماس عند النقطة المحددة بشكل صريح (أوجد حلًا أولًا لـــ y دالّة في x) وضمنيًا.

1. $x^2 + 4y^2 = 8$ at $(2, 1)$

2. $x^3y - 4\sqrt{x} = x^2y$ at $(2, \sqrt{2})$

3. $y - 3x^2y = \cos x$ at $(0, 1)$

4. $y^2 + 2xy + 4 = 0$ at $(-2, 2)$

في التمارين 16—5، أوجد المشتقة $y'(x)$ ضمنيًا.

5. $x^2y^2 + 3y = 4x$ **6.** $3xy^3 - 4x = 10y^2$

7. $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$ **8.** $\sin xy = x^2 - 3$

9. $\dfrac{x+3}{y} = 4x + y^2$ **10.** $3x + y^3 - \dfrac{4y}{x+2} = 10x^2$

11. $e^{x^2y} - e^y = x$ **12.** $xe^y - 3y\sin x = 1$

13. $y^2\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$ **14.** $x\cos(x+y) - y^2 = 8$

15. $e^{4y} - \ln(y^2+3) = 2x$ **16.** $e^{x^2}y - 3\sqrt{y^2+2} = x^2 + 1$

في التمارين 22—17، أوجد معادلة المماس عند النقطة المعطاة. إذا كان لديك برنامج CAS سيعمل على التمثيل البياني للمنحنيات ضمنيًا، فارسم المنحنى والمماس.

17. $x^2 - 4y^3 = 0$ عند $(2, 1)$ **18.** $x^2y^2 = 4x$ عند $(1, 2)$

19. $x^2y^2 = 3y + 1$ عند $(2, 1)$ **20.** $x^3y^2 = -2xy - 3$ عند $(-1, -3)$

21. $x^4 = 4(x^2 - y^2)$ عند $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **22.** $x^4 = 8(x^2 - y^2)$ عند $(2, -\sqrt{2})$

في التمارين 28—23، أوجد المشتقة من الرتبة الثانية $y''(x)$.

23. $x^2y^2 + 3x - 4y = 5$ **24.** $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

25. $y^2 = x^3 - 6x + 4\cos y$ **26.** $e^{xy} + 2y - 3x = \sin y$

27. $(y-1)^2 = 3xy + e^{4y}$ **28.** $(x+y)^2 - e^{y+1} = 3x$

في التمرينين 29 و34، أوجد مشتقة كل دالّة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$ (b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$ (b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ (b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$ (b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

33. (a) $f(x) = 4\sec(x^4)$ (b) $f(x) = 4\sec^{-1}(x^4)$

34. (a) $f(x) = \sin^{-1}(1/x)$ (b) $f(x) = \csc^{-1} x$

35. في المثال 8.6، تم التوضيح أن بمرور الزمن ستصل كرة البيسبول إلى اللوح الرئيس، وسيكون معدل دوران نظر اللاعب (θ') سريعًا جدًا بصورة لا يقدر على تعقبها الإنسان. مع العلم بأن أقصى معدل للدوران $\theta' = -3$ قياس دائريّ (راديان) في الثانية، أوجد d بحيث يكون $\theta' = -3$. وهكذا، أوجد مدى القرب من اللوح حيث يمكن أن يتعقب اللاعب الكرة منه. في إعداد الدوري الرئيس، يجب على اللاعب البدء بالأرجحة عندما تكون الكرة في منتصف الطريق $(30')$ من اللوح الرئيس. كيف يتوافق هذا مع المسافة التي يفقد فيها اللاعب متابعته للكرة؟

36. على فرض أن سرعة ضرب الكرة d' في المثال 8.6 مختلفة. إذًا، سيكون θ' مختلفًا وستتغير قيمة d التي لها $\theta' = -3$. أوجد d كدالّة لـــ d' لـــ d' تتراوح بين 30 ft/s (كرة ناعمة وبطيئة) إلى 140 ft/s (كرة سريعة للدوري الرئيس)، وارسم التمثيل البياني.

37. في المثال 8.6، كم يبلغ معدل التغير θ' إذا وقف اللاعب على بُعد 3 أقدام من اللوح الرئيس؟

38. كم المسافة التي يجب أن يقف اللاعب عندها بعيدًا عن اللوح الرئيس في المثال 8.6 للوقوف ومتابعة الكرة طوال سيرها؟

في التمرينين 39 و 40، أوجد مواقع كل المماسات الأفقية والرأسية.

39. $x^2 + y^2 - 3y = 0$ **40.** $x^2 + y^2 - 2y = 3$

41. اذكر اسم الطريقة بتحديد هل ستجد المشتقة مباشرة أم ضمنيًا.

(a) $x^2y^2 + 3y = 4x$ (b) $x^2y + 3y = 4x$

(c) $3xy + 6x^2\cos x = y\sin x$ (d) $3xy + 6x^2\cos y = y\sin x$

42. اوجد قيمة $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ بشكل كامل بقدر الإمكان [إرشاد: جزء من الإجابة هو $f(x)=x$ لـــ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$]. هل يكون $f'(x)=1$ ؟

43. أوجد وحوّل لأبسط صورة مشتقة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ واستخدم النتيجة لكتابة معادلة تربط بين $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$.

44. أوجد وحوّل لأبسط صورة مشتقة $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. استخدم النتيجة لكتابة معادلة تربط بين $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ و $\tan^{-1} x$.

45. استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد $y'(x)$ لـــ $x^2y - 2y = 4$. وفقًا لهذه المعادلة، لماذا قد تتوقع أن يتم إيجاد المماسات الرأسية عند $x = \pm\sqrt{2}$ والمماسات الأفقية عند $y = 0$ ؟ وضّح أنه لا توجد نقاط لهذه القيم. لمعرفة ماذا يحدث، حل المعادلة الاساسية لـــ y وارسم التمثيل البياني. صِف ماذا يحدث عند $x = \pm\sqrt{2}$ و $y = 0$.

46. وضّح أن أي منحنى بالصيغة $xy = c$ لبعض الثوابت c يتقاطع مع أي منحنى بالصيغة $x^2 - y^2 = k$ لبعض الثوابت k عند الزوايا القائمة (وهكذا، تكون المماسات للمنحنيات

عند نقاط التقاطع متعامدة). وفي هذه الحالة، نقول أن عائلة المنحنيات تكون متعامدة.

في التمارين 50–47، وضّح أن عائلة المنحنيات تكون متعامدة. (انظر التمرين 46).

.47 $y = \frac{c}{x}$ و $y^2 = x^2 + k$

.48 $x^2 + y^2 = cx$ و $x^2 + y^2 = ky$

.49 $y = cx^3$ و $x^2 + 3y^2 = k$

.50 $y = cx^4$ و $x^2 + 4y^2 = k$

.51 وفقًا للتمرينين 49 و 50. خمّن لمعرفة عائلة من الدوال المتعامدة على $y = cx^n$. وضّح أن تخمينك صحيح. هل توجد أي قيم n التي يجب استبعادها؟

.52 ما الخطأ في الحساب الخاطئ التالي؟

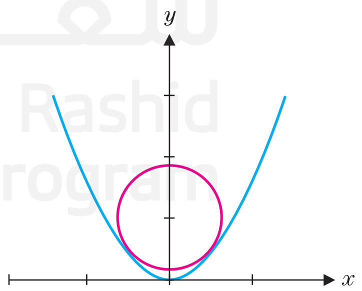
$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \sec^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

.53 بالنسبة إلى المنحنيات البيضاوية، توجد طرق جيدة لإيجاد النقاط ذات الإحداثيات النسبية راجع مقالة عزرا بروون *"Three Fermat Trails to Elliptic Curves"* المنشورة في شهر مايو لعام 2000 في صحيفة مجلة الرياضيات في الكلية).

(a) وضّح أن النقاط $(-3, 0)$ و $(0, 3)$ تقع على منحنى بيضاوي يتم تعريفه باستخدام $y^2 = x^3 - 6x + 9$. أوجد الخط الذي يمر بهذه النقاط ووضح أن الخط يتقاطع مع المنحنى في نقطة أخرى ذات إحداثيات نسبية (عدد صحيح في هذه الحالة).

(b) بالنسبة إلى المنحنى البيضاوي $y^2 = x^3 - 6x + 4$ ، وضّح أن النقطة $(-1, 3)$ تقع على المنحنى. أوجد المماس للمنحنى عند تلك النقطة ووضح أنها تتقاطع مع المنحنى في نقطة أخرى ذات إحداثيات نسبية.

.54 على فرض أن دائرة نصف قطرها هو r ومركزها $(0, c)$ محاطة بالقطع المكافئ $y = x^2$ عند نقطة التماس، يجب أن تكون الميول نفسها. أوجد ميل الدائرة ضمنيًا ووضح ذلك عند نقطة التماس $y = c - \frac{1}{2}$. ثم استخدم معادلات الدائرة والقطع المكافئ لتوضيح أن $c = r^2 + \frac{1}{4}$



تطبيقات

.55 على فرض أنك تضع ملصقات على الحائط. يمتد الإطار من 6 إلى 8 أقدام فوق الأرض. يقف شخص على مسافة x قدمًا من الجدار وينظر إلى الملصق بزاوية رؤية تتكون بالشعاع من عين الشخص (5 أقدام فوق الأرض) إلى قمة الإطار والشعاع من عين الشخص إلى الجزء السفلي من الإطار. أوجد قيمة x التي تزيد زاوية الرؤية إلى أقصى حد A .

.56 ما الاختلافات في التمرين 55 إذا كانت أعين الشخص فوق الأرض بمقدار 6 أقدام؟

.57 على فرض أن لدينا مقلاع (انظر الدرس 3.1) يدور باتجاه معاكس لعقارب الساعة عبر دائرة $x^2 + y^2 = 9$ وتم إطلاق صخرة منه عند النقطة $(2.9, 0.77)$. إذا كانت الصخرة تنطلق لمسافة 300 قدم، فإلى أين ستصل؟ [إرشاد: أوجد المماس عند النقطة $(2.9, 0.77)$، وأوجد النقطة (x, y) على ذلك الخط بحيث تكون المسافة $\sqrt{(x-2.9)^2 + (y-0.77)^2} = 300$.]

تمارين استكشافية

.1 يمر خط الملكية لصاحب أرض بالمسار $y = 6 - x$. يريد صاحب الأرض حفر قناة ري من خزان مُحاط بالقطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$. يريد صاحب الأرض حفر أقصر قناة ممكنة من الخزان إلى أقرب نقطة للمماس. نحن نستكشف طريقة لإيجاد أفضل مسار. ارسم الخط والقطع الناقص، وارسم مماس إلى القطع الناقص الذي يوازي خط الملكية. على فرض أن القناة يجب أن تبدأ عند نقطة التماس وتسير بشكل متعامد على الخطين. سنبدأ بتحديد النقطة على الطرف الأيمن من القطع الناقص باستخدام مماس يوازي $y = 6 - x$. أوجد ميل المماس إلى القطع الناقص عند (x, y) واجعله مساويًا لـــ -1 . أوجد حلًا لـــ x وعوّض في معادلة القطع الناقص. أوجد حلًا لـــ y ولديك النقطة على القطع الناقص التي ستبدأ القناة عندها. أوجد معادلة للمستقيم (الطبيعي) الذي يمر من خلال هذه النقطة ويكون عموديًا على $y = 6 - x$ وأوجد التقاطع مع المستقيم الطبيعي و $y = 6 - x$. تنتهي القناة عند هذه النقطة.

.2 في هذا التمرين، ستصمم أنت مسرحًا للأفلام مع توفير كل المقاعد التي تتميز برؤية متساوية للشاشة. لنفرض أن الشاشة تمتد رأسيًا من 10 إلى 30 قدمًا فوق الأرض. يبعُد الصف الأول مسافة 15 قدمًا عن الشاشة. مهمتك هي تحديد دالّة معينة $h(x)$ بحيث إذا كانت المقاعد تبعد عن الشاشة بمقدار x قدمًا وارتفعت بمقدار $h(x)$ فوق مستوى الأرض، تكون الزاوية من الجزء السفلي للشاشة إلى المشاهد إلى أعلى الشاشة هي الزاوية نفسها لمشاهد يجلس في الصف الأول. ستتمكن من إتمام ذلك عند نطاق محدود من قيم x. وبما يتجاوز أقصى حد مثل x أوجد الارتفاع الذي يزيد زاوية الرؤية إلى أقصى حد. [إرشاد: اكتب الزاوية كفرق بين المماسات المعكوسة واستخدم القانون $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.]

الدرس 3-9 دوال القطع الزائد


قوس جيت واي في ميسوري

قوس جيت واي في ميسوري هو أحد الهياكل المعمارية المميزة والمشهورة في الولايات المتحدة الأمريكية. يعتقد معظم الأشخاص أن له ارتفاع أطول من عرضه، ولكن هذا نتيجة خداع بصري. وفي الواقع، فإن عرض القوس وارتفاعه متساويان. ويجد خطأ بسيط غامض في فهم أن القوس على شكل قطع مكافئ. وبالأحرى فإن شكله يتوافق مع التمثيل البياني لدالّة الـ Cosine للقطع الزائد ويسمى سلسلي). تم شرح هذه الدالّة والدوال الخمس الأخرى للقطع الزائد في هذا الدرس.

دوال القطع الزائد ليست جديدة كليًا، لأنها ببساطة عبارة عن تجميعات لدوال أسيّة. نحن ندرسها بسبب فائدتها في التطبيقات وملاءمتها في حل المسائل (وبصفة خاصة معادلات التفاضل).

تعرّف **دالّة الـ Sine للقطع الزائد** كما يأتي:

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},}$$

لكل $x \in (-\infty, \infty)$ تعرّف **دالّة القطع الزائد** الـ Cosine كما يأتي:

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},}$$

ومجددًا لكل $x \in (-\infty, \infty)$ سنتركه كتمرين لاستخدام التعريفات للتحقق من صحة التعريف المهم

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (9.1)$$

لكل x . لاحظ أننا إذا أخذنا $x = \cosh u$ و $y = \sinh u$ ثم من (9.1) باستخدام u بدلًا من x نحصل على:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

وهذا ما يجب عليك معرفته كمعادلة للقطع الزائد الأربع المتبقية. هذا التعريف هو مصدر الاسم "قطع زائد" لهذه الدوال. ويجب عليك أيضًا ملاحظة أن بعض التوازي مع الدوال المثلثية وهي $\cos x$ و $\sin x$.

نعرّف دوال القطع الزائد الأربع المتبقية بدلالة دوال Sinh، Cosh. بطريقة تشبه مقابلاتها في الدوال المثلثية. وهكذا نعرّف Tan **القطع الزائد** بالدالّة $\tanh x$. و Cot **القطع الزائد بالدالة** $\coth x$. Sec **القطع الزائد** بالدالّة $\operatorname{sech} x$ و Csc القطع الزائد بالدالّة $\operatorname{csch} x$ كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x}, \quad & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x}. \end{aligned}}$$

يسهل استخدام هذه الدوال جدًا، ويمكننا تحديد سلوكها بسهولة باستخدام ما نعرفه بالفعل عن الدوال الأسيّة. لاحظ أولًا أن

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.}$$

وكذلك، يمكننا إنشاء قوانين المشتقات المتبقية:

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad \text{و}$$

هذه هي كل التطبيقات الأولية لقواعد الاشتقاق السابقة وتم تركها كتمرين.

مثال 9.1 حساب مشتقة دالّة القطع الزائد

حساب مشتقة $f(x) = \sinh^2(3x)$.

الحل من قاعدة السلسلة نحصل على

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sinh^2(3x) = \frac{d}{dx}[\sinh(3x)]^2 \\ &= 2\sinh(3x)\frac{d}{dx}[\sinh(3x)] \\ &= 2\sinh(3x)\cosh(3x)\frac{d}{dx}(3x) \\ &= 2\sinh(3x)\cosh(3x)(3) \\ &= 6\sinh(3x)\cosh(3x) \end{aligned}$$

بالنسبة لـ $f(x) = \sinh x$، نلاحظ أن

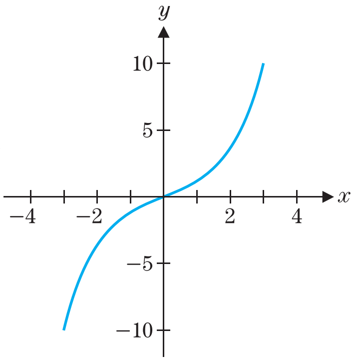
$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \begin{cases} > 0\ ,\ x > 0 \\ < 0\ ,\ x < 0 \end{cases}$$

تم ترك هذا كتمرين. بما أن $f'(x) = \cosh x > 0$ ، فإن المماسات على منحنى $y = \sinh x$ لها ميل موجب لكل x . وفي النهاية، يمكنك بسهولة التحقق من أن

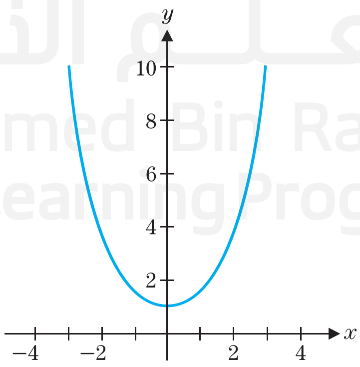
$$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$$

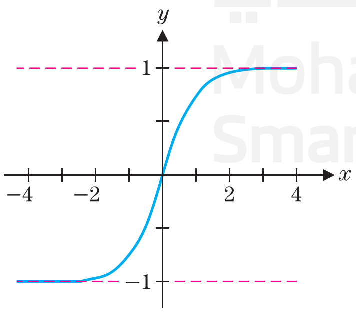
نحن نوضح تمثيلًا بيانيًا لـ $y = \sinh x$ في الشكل 3.45. التمثيلات البيانية لـ $\cosh x$ و $\tanh x$ موضحة في الأشكال 3.46a و 3.46b، على الترتيب.



الشكل 3.45
$y = \sinh x$



الشكل 3.46a
$y = \cosh x$



الشكل 3.46b
$y = \tanh x$

إذا كان السلك أو الشريط المرن (مثل شريط القوة أو شريط الهاتف) معلق بين برجين، فسيتخذ شكل منحنى **سلسلي** (مشتق من الكلمة اللاتينية *catena* وتعني "سلسلة". ويناظر التمثيل البياني لدالّة الـ Cosine القطع الزائد $f(x) = a\cosh(\frac{x}{a})$

دوال القطع الزائد المعكوسة

يجب أن تلاحظ من التمثيلات البيانية لكل من $\sinh x$ و $\tanh x$ أن هذه الدوال هي دوال واحد إلى واحد (وذلك وفقًا لاختبار المستقيم الأفقي). وأيضًا دالّة $\cosh x$ $x \geq 0$ هي دالّة واحد إلى واحد لـ x. وهكذا يمكننا تعريف معكوسات هذه الدوال كما يلي. لكل $x \in (-\infty, \infty)$. فإننا نعرّف معكوس الـ Sine **زاوية القطع الزائد** باستخدام

$$y = \sinh^{-1} x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \sinh y = x$$

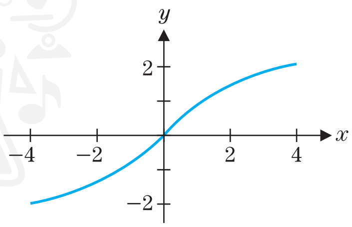
لكل $x \geq 1$ ، فإننا نعرّف معكوس الـ Cosine **زاوية القطع الزائد** باستخدام

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \cosh y = x. \quad \text{و} \quad y \geq 0$$

وفي النهاية، لكل $x \in (-1, 1)$ ، فإننا نعرّف معكوس الـ tan **زاوية القطع الزائد** باستخدام

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \tanh\ y = x$$

يمكن تعريف معكوسات دوال القطع الزائد الثلاثة المتبقية بشكل مشابه. نرسم التمثيلات البيانية لـــ $y = \sinh^{-1} x$ ، $y = \cosh^{-1} x$ و $y = \tanh^{-1} x$ في الأشكال 3.47a، 3.47b و 3.47c على الترتيب. وكالعادة، يمكنك الحصول على تلك عن طريق عكس التمثيل البياني للدالّة الأساسية حول المستقيم $y = x$.)



الشكل 3.47a
$y = \sinh^{-1} x$

يمكننا إيجاد المشتقات لدوال القطع الزائد المعكوسة باستخدام الإشتقاق الضمني، تمامًا مثلما فعلنا مع الدوال المثلثية المعكوسة. بما أنّ

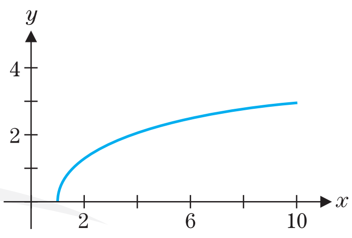
$$y = \sinh^{-1} x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \sinh y = x \tag{9.2}$$

مع اشتقاق كلا الطرفين في هذه المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$\frac{d}{dx}\sinh y = \frac{d}{dx}x$$

أو

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$



الشكل 3.47b
$y = \cosh^{-1} x$

وبالحل للحصول على المشتقة، نجد أن

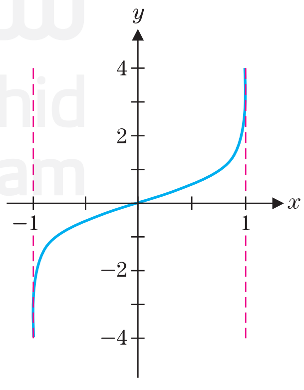
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

وبما أننا نعرف أن

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

من (9.1). وهكذا، لقد وضحنا أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.}$$



الشكل 3.47c
$y = \tan^{-1} x$

لاحظ أن التشابه مع قانون الاشتقاق لـ $\sin^{-1} x$. ويمكننا كذلك صياغة قوانين اشتقاق للدوال الخمس الأخرى المعكوسة للقطع الزائد. يمكن تنظيم لائحة بالمشتقات الباقية.

من أجل الإستكمال

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}\qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

وقبل الانتهاء من هذا الدرس، نتمنى التركيز على أن دوال القطع الزائد المعكوسة لها ميزة مهمة عن الدوال العكسية السابقة التي ناقشناها. يوضح ذلك أنه يمكننا إيجاد حل للدوال العكسية بشكل صريح بدلالة المزيد من الدوال الأولية.

مثال 9.2 إيجاد قانون لدالّة قطع زائد معكوسة

أوجد قانونًا صريحًا لـ $\sinh^{-1}x$.

الحل تذكر من (9.2) أن

$y=\sinh^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $\sinh y=x$

باستخدام هذا التعريف يوجد لدينا

$$x=\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2} \tag{9.3}$$

يمكننا حل هذه المعادلة لإيجاد y كما يلي. أولًا تذكر أيضًا أن

$$\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

والآن، لاحظ أن بإضافة هاتين المعادلتين الأخيرتين واستخدام المتطابقة (9.1)، يوجد لدينا

بما أن $\cosh y>0$

$$\begin{aligned}e^y&=\sinh y+\cosh y=\sinh y+\sqrt{\cosh^2 y}\\&=\sinh y+\sqrt{\sinh^2 y+1}\\&=x+\sqrt{x^2+1},\end{aligned}$$

من (9.3) . وفي النهاية، عند أخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين، نحصل على

$$y=\ln(e^y)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

وهكذا، وجدنا قانونًا لدالّة Sine القطع الزائد المعكوسة:

$$\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$ ■

وبالمثل، يمكننا توضيح أن لكل $x\geq 1$ ،

$$\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

ولكل $-1<x<1$.

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

سنترك ذلك كتمرين لاشتقاق هذه الدوال والدوال المقابلة الخاصة بدوال القطع الزائد المعكوسة المتبقية. توجد نقطة صغيرة في تذكر أي من هذه القوانين. كل ما تحتاجه فقط هو إدراك أن تلك القوانين متوفرة دائمًا عن طريق إجراء بعض عمليات الجبر الأولية.

تمارين كتابية

.1 قارن بين مشتقة الدوال المثلثية ومشتقات دوال القطع الزائد. لاحظ أيضًا أن المتطابقة المثلثية $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ تختلف فقط بإشارة الطرح عن متطابقة القطع الزائد المناظرة $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

.2 وكما تمت ملاحظته في النص، فإن دوال القطع الزائد ليست مجرد دوال جديدة. حيث إنها توفر أسماءً لمجموعات مفيدة من الدوال الأسيّة. اشرح لماذا يكون من المفيد تخصيص أسماءٍ معينة لهذه الدوال بدلًا من تركها كدوال أسيّة.

.3 صِف باختصار التمثيلات البيانية لـ $\sinh x$ و $\cosh x$ و $\tanh x$. أي كثيرات الحدود البسيطة التي تمثلها التمثيلات البيانية لـ $\sinh x$ و $\cosh x$ ؟

.4 السلسلي (القطع الزائد Cosine) هو شكل ينتج عن سلك معلق لأن ذلك يوزع وزن السلك بالتساوي على أجزاء السلك. وبمعرفة هذا، لماذا كان من الجيد بناء قوس جيت واي بهذا الشكل؟ لماذا قد تشك في أن مظهر البيضة له الشكل نفسه؟

في التمارين 4–1 ، ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالّة.

1. $f(x) = \cosh 2x$ 2. $f(x) = \cosh 3x$

3. $f(x) = \tanh 4x$ 4. $f(x) = \sinh 3x$

في التمارين 12–5 ، أوجد مشتقة كل دالّة.

5. (a) $f(x) = \cosh 4x$ (b) $f(x) = \cosh^4 x$

6. (a) $f(x) = \sinh \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{\sinh x}$

7. (a) $f(x) = \tanh x^2$ (b) $f(x) = (\tanh x)^2$

8. (a) $f(x) = \operatorname{sech} 3x$ (b) $f(x) = \operatorname{csch}^3 x$

9. (a) $f(x) = x^2 \sinh 5x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\operatorname{csch}^2 x}$

10. (a) $f(x) = \dfrac{\cosh 4x}{x+2}$ (b) $f(x) = x^2 \tanh(x^3+4)$

11. (a) $f(x) = \cosh^{-1} 2x$ (b) $f(x) = \sinh^{-1} x^2$

12. (a) $f(x) = \tanh^{-1} 3x$ (b) $f(x) = x^2 \cosh^{-1} 4x$

.13 أثبت كل مشتقة $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ و $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$.

.14 أوجد مشتقة كل دالة $\coth x$ و $\operatorname{sech} x$ و $\operatorname{csch} x$.

.15 باستخدام خصائص الدوال الأسيّة، اثبت أن $\sinh x > 0$ إذا كان $x > 0$ و $\sinh x < 0$ إذا كان $x < 0$.

.16 اثبت أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

.17 أوجد قانونًا صريحًا، كما في المثال 9.2 لـ $\cosh^{-1} x$.

.18 أوجد قانونًا صريحًا، كما في المثال 9.2 . لـ $\tanh^{-1} x$.

.19 أثبت أن $e^x = \cosh x + \sinh x$. في الواقع، سنوضح أن تلك هي الطريقة الوحيدة لكتابة e^x كمجموع للدوال الزوجية والفردية. لرؤية ذلك، على فرض أن $e^x = f(x) + g(x)$ حيث f دالّة زوجية و g دالّة فردية. أثبت أن $e^{-x} = f(x) - g(x)$. عند جمع المعادلات والقسمة على اثنين، استنتج أن $f(x) = \cosh x$. ثم استنتج أن $g(x) = \sinh x$.

.20 أثبت أن $\cosh(-x) = \cosh x$ (أي $\cosh x$ يمثل دالّة زوجية) وأن $\sinh(-x) = -\sinh x$ (أي، $\sinh x$ هي دالّة فردية).

.21 أثبت أن $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.

.22 أثبت أن $\tanh x = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

تطبيقات

.23 معادلة عامة بشكل أكبر للشكل السلسلي $y = a\cosh \frac{x}{b}$. أوجد a و b لمطابقة الخصائص التالية لسلك معلق. تكون الأطراف بعيدة بمقدار 40 m وارتفاعها $y = 20\,\text{m}$ ويكون الارتفاع في المنتصف $y = 10\,\text{m}$.

.24 الحد الأدنى لارتفاع سلك معلق هو $y = 10\,\text{m}$. والمسافة بين الأطراف هي 40 m ، مع ارتفاع الطرف الأيسر بمقدار 30 m ، وارتفاع الطرف الأيمن بمقدار 20 m . أوجد معادلة الشكل السلسلي.

.25 على فرض أنّ السرعة المتجهة الرأسيّة $v(t)$ لجسم يسقط كتلته m تخضع للجاذبية وسحب الهواء يمكن حسابها بالمعادلة

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)$$

لثابت معين موجب k .

(a) أوجد السرعة المتجهة النهائية عن طريق حساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) أثبت أن جاذبية السرعة المتجهة النهائية (mg) متوازنة بسحب الهواء (kv^2).

.26 اثنان من المحلقين في الهواء وزنهما 800 N يسقطان من ارتفاع 1000 m . المحلق الأول يطير في الهواء ورأسه إلى الأمام مع معامل سحب قدره $k = \frac{1}{8}$. المحلق الثاني يطير في الهواء بوضعية النسر الذي يفرد جناحيه مع $k = \frac{1}{2}$. قارن بين السرعتين المتجهتين النهائيتين.

.27 اشتق لونج وويس المعادلة التالية للسرعة المتجهة الأفقية لمكوك الفضاء أثناء إعادة الدخول $v(t) = 7901\tanh(-0.00124t + \tanh^{-1}(v_0/7901))\ \text{m/s}$. حيث v_0 هي السرعة المتجهة في الزمن $t = 0$. أوجد أقصى عجلة يختبرها المكوك من هذه الحركة الأفقية (أي، أكبر قيمة لـ $|v'(t)|$. (إرشاد: الحد الأدنى لقيمة $\cosh x$ هو 1. عندما $x = 0$.)

تمرين استكشافي

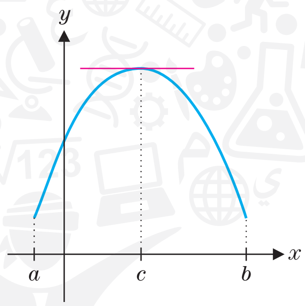
.1 يبلغ طول قوس جيت واي 630 قدمًا ويبلغ ارتفاعه 630 قدمًا. يشبه شكله القطع المكافئ تمامًا، ولكنه سلسلي في الواقع. ستكتشف الاختلاف بين الشكلين في هذا التمرين. أولًا

فكّر في النموذج $y = 757.7 - 127.7\cosh(x/127.7)$ لكل $y \geq 0$. أوجد التقاطعات مع محوري x و y ووضّح أن هذا النموذج يطابق (تقريبًا) قياسات القوس التي تصل إلى 630 قدمًا للعرض و 630 قدمًا للارتفاع. ماذا ستكون 127.7 في النموذج بهذا القياس لكي يطابق القياسات تمامًا؟ والآن، ضع في حسبانك نموذج القطع المكافئ. للحصول على التقاطعات مع المحور x $x = -315$ و $x = 315$، اشرح لماذا يجب أن يشمل النموذج الصيغة $y = -c(x + 315)(x - 315)$ لثابت معين موجب c . ثم أوجد c لمطابقة التقاطع المرغوب به مع المحور y ويصل إلى 630. مثّل بيانيًا القطع المكافئ والشكل السلسلي على المحاور نفسها لكل $-315 \leq x \leq 315$. ما الاختلاف بين التمثيلات البيانية؟ قدّر أقصى مسافة بين المنحنيات. لقد اطلع المؤلفون على كتب رياضيات حيث يتم تمثيل القوس عن طريق القطع المكافئ. ما الخطأ في فعل ذلك؟

الدرس 3-10 نظرية القيمة المتوسطة

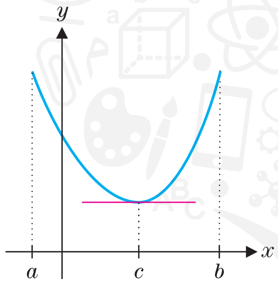
في هذا الدرس، نتناول نظرية القيمة المتوسطة التي تُعد بالغة الأهمية لأننا سنستنبط منها أفكارًا جديدة لعدد من الوحدات المقبلة. وقبل دراسة النتيجة الأساسية، سنطلع على حالة خاصة يُطلق عليها نظرية رول.

تتسم نظرية رول بالبساطة الشديدة. في أي دالّة تكون فيها f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b). وحيث إن $f(a) = f(b)$. فإنه يجب أن تكون هناك نقطة على الأقل بين $x = a$ و $x = b$ بحيث يكون المماس على منحنى $y = f(x)$ أفقيًا. في الأشكال من 3.48a إلى 3.48c. نرسم عددًا من التمثيلات البيانية التي تستوفي المعايير السابقة. لاحظ أن كل تمثيل بياني يوجد فيه على الأقل نقطة واحدة لها مماس أفقي. ارسم التمثيلات البيانية الخاصة بك لتزداد قناعتك أنه في ظل هذه الظروف لا يمكن التوصيل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بدون وجود مماس أفقي واحد على الأقل.



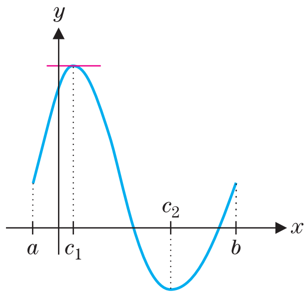
الشكل 3.48a

تمثيل بياني بشكل متزايد في البداية



الشكل 3.48b

تمثيل بياني بشكل متناقص في البداية



الشكل 3.48c

تمثيل بياني بمماسين أفقيين

لاحظ أنه بما أن $f'(x) = 0$ عند المماس الأفقي، فإن هذا يعني أنه ثمة نقطة واحدة على الأقل c في (a, b). حيث $f'(c) = 0$. (انظر الأشكال من 3.48a إلى 3.48c.)

النظرية 10.1 (نظرية رول)

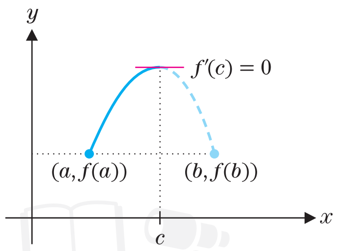
إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$. وقابلة للإشتقاق في الفترة (a, b) وكان $f(a) = f(b)$. فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = 0$.

يعتمد برهان نظرية رول على نظرية القيم القصوى. ونحن حتى الآن نتناول الأفكار الأساسية للبرهان من وجهة نظر التمثيلات البيانية. يقدّم الملحق A برهانًا على هذه النظرية. لاحظ أولًا أنه إذا كانت $f\ (x)$ ثابتة على $[a, b]$ ، فإن $f'(x) = 0$ بالنسبة لكل قيم x التي تقع بين a و b. من ناحية أخرى، إذا كانت $f(x)$ غير ثابتة على $[a, b]$ ، فإنه عند النظر من اليسار إلى اليمين يجب على التمثيل البياني أن يبدأ في التناقص أو التزايد. (انظر الشكلين 3.49a و3.49b.) وفي حال بدأ التمثيل البياني في التزايد، لاحظ أنه، للعودة إلى المستوى الذي بدأ عنده، يجب أن يتحول في نقطة ما ويبدأ في التناقص. (فكر في الأمر بهذه الطريقة: إذا بدأت

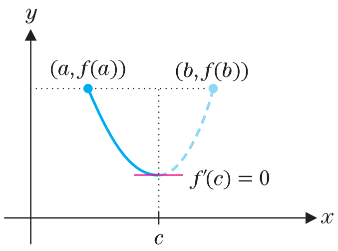
ملاحظات تاريخية

ميشيل رول (1652-1719)
عالم رياضيات فرنسي أثبت صحة نظرية رول في كثيرات الحدود. نشأ رول في بيئة فقيرة واعتمد على نفسه في تعليمه وناضل في عدد متنوع من الوظائف؛ فعمل محاميًا وكاتبًا ومعلّمًا للصفوف الابتدائية. كان عضوًا فعالًا في الأكاديمية الفرنسية للعلوم، وكان يناقش ألمع العقول في الأكاديمية أمثال ديكارت على فرض أنه إذا كان $a < b$ فإن $-b < -a$ (فيمكننا على سبيل المثال استنتاج أن $-1 < -2$). والغريب أن رول كان مشهورًا برفضه لحساب التفاضل والتكامل المتطور الجديد. وكان يُطلق عليه "مجموعة من المغالطات العبقرية".

في تسلق جبل، فإن الارتفاع يزداد؛ وإذا أردت العودة للأسفل إلى نقطة البداية، فسيتوجب عليك التحول عند نقطة ما وعندها سيبدأ الارتفاع في التناقص.)



الشكل 3.49a
يتزايد التمثيل البياني ثم يتحول ليتناقص إلى المكان الذي بدأ منه.



الشكل 3.49b
يتناقص التمثيل البياني ثم يتحول للتزايد إلى المكان الذي بدأ منه.

إذًا، ثمة نقطة واحدة على الأقل يتحول عندها التمثيل البياني ويتغيّر من التزايد الى التناقص. (انظر الشكل 3.49a). وبالمثل، في الحالة التي بدأ فيها التمثيل البياني بالتناقص، يجب أن يتحول من التناقص إلى التزايد. (انظر الشكل 3.49b). نطلق على هذه النقطة $x = c$. وبما أننا نعرف أن $f'(c)$ موجودة، فإن $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$ أو $f'(c) = 0$. نريد أن نثبت أن $f'(c) = 0$ كما يتضح من الشكلين 3.49a و3.49b. ولإثبات ذلك، من السهل توضيح أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$. إذا كان من الصحيح افتراض أن $f'(c) > 0$، فإنه من التعريف البديل للمشتقة الواردة في المعادلة (2.2) من الدرس 2—3، نجد أن

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

يعني ذلك أنه لكل x قريبة بما يكفي من c، يكون

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \tag{10.1}$$

على وجه الخصوص، بالنسبة للتمثيل البياني المتزايد في بدايته، إذا كان $x - c > 0$ (بمعنى أن $x > c$). فيعني ذلك أن $f(x) - f(c) > 0$ أو $f(x) > f(c)$. وهذا غير ممكن لكل قيم $x > c$ (عندما تكون x قريبة بما يكفي من c) إذا تحوّل التمثيل البياني عند c وبدأ في التناقص. بالتالي، نستنتج مما سبق أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) > 0$. وبالمثل، يمكننا توضيح أنه من الخطأ أن تكون $f'(c) < 0$. إذًا، $f'(c) = 0$. وهو المطلوب إثباته. تكاد تكون الحالة التي بدأ التمثيل البياني فيها بالانحدار متطابقة.

سنحاول الآن توضيح استنتاج نظرية رول.

مثال 10.1 توضيح لنظرية رول

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

في الفترة $[0, 1]$.

الحل نثبت أولًا أنه تم استيفاء فرضيات النظرية: f قابلة للإشتقاق ومتصلة لكل قيم x [بما أن $f(x)$ كثيرة حدود وجميع كثيرات الحدود متصلة وقابلة للإشتقاق دائمًا]. كذلك، $f(0) = f(1) = 2$. لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

ثم سنحاول إيجاد قيم c حيث إن

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0$$

وباستخدام القانون العام، نجد أن $c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.5774$ [ليست في الفترة $(0, 1)$] و $c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42265 \in (0, 1)$. ■

ملاحظة 10.1

نود التأكيد على أن المثال 10.1 هو مجرد مثال لتوضيح نظرية رول. إيجاد العدد (الأعداد) c التي تحقق استنتاج نظرية رول ليس النقطة التي نناقشها. في المقابل، نهتم بنظرية رول بشكل أساسي لأننا نستخدمها لإثبات إحدى النتائج الأساسية لأساسيات حساب التفاضل والتكامل، وهي نظرية القيمة المتوسطة.

رغم أن نظرية رول هي نتيجة بسيطة، إلا أنه يمكننا استخدامها في استنتاج عدد كبير من خصائص الدوال. فنحن نهتم على سبيل المثال بإيجاد الأصفار في الدالّة f (وهي حل المعادلة $f(x) = 0$). وعلى وجه الخصوص، عادةً ما يكون من الصعب تحديد عدد الأصفار للدالّة. تكمن فائدة نظرية رول هنا.

النظرية 10.2

إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$، وكانت قابلة للإشتقاق في الفترة (a, b) ويوجد لـ $f(x) = 0$ حلان في $[a, b]$. فإن $f'(x) = 0$ لها حل واحد على الأقل في (a, b).

البرهان

هذه حالة خاصة من نظرية رول. حدد الصفرين الموجودين في $f(x)$ إذا كان $x = s$ و $x = t$. حيث $s < t$. بما أن $f(s) = f(t)$. فإن نظرية رول تضمن وجود عدد مثل c بحيث $s < c < t$ (وبالتالي $a < c < b$) حيث $f'(c) = 0$. ■

يمكننا ببساطة أن نعمّم نتيجة النظرية 10.2، كما هو الحال في النظرية التالية.

النظرية 10.3

لأي عدد صحيح $n > 0$. إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ وكانت قابلة للإشتقاق في الفترة (a, b) ويوجد لـ $f(x) = 0$ n من الحلول بالفترة $[a, b]$. فإن $f'(x) = 0$ لها على الأقل $(n - 1)$ من الحلول بالفترة (a, b).

البرهان

من النظرية 10.2. بين كل زوج من الحلول لـ $f(x) = 0$ يوجد حل واحد على الأقل لـ $f'(x) = 0$. في هذه الحالة، هناك حلولٌ متتابعة عددها $(n - 1)$ لكل $f(x) = 0$ وتتبع النتيجة ذلك. ■

يمكننا استخدام النظرية 10.2 والنظرية 10.3 للتحقق من عدد الأصفار في دالّة ما. (تذكّر أننا ندرس هنا الأصفار الحقيقية فقط لدالّة ما وليس الأصفار المركبة).

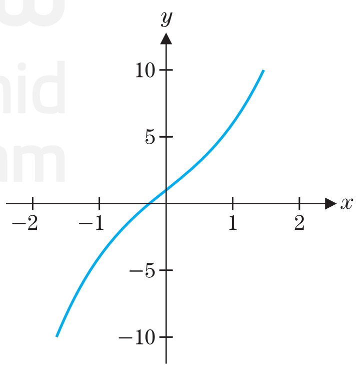
مثال 10.2 تحديد عدد الأصفار لدالّة

أثبت أن $x^3 + 4x + 1 = 0$ لها حل واحد فقط.

الحل تبدو من الشكل 3.50 النتيجة مقبولة. لكن كيف يمكننا التأكد من عدم وجود أصفار خارج النافذة المعروضة؟ لاحظ أنه للدالة $f(x) = x^3 + 4x + 1$. فإن نظرية القيمة الوسطية تضمن وجود حل واحد، حيث إن $f(-1) = -4 < 0$ و $f(0) = 1 > 0$. كما أن:

$$f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$$

لكل قيم x. باستخدام نظرية 10.2. إذا كانت $f(x) = 0$ لديها حلان. فإن $f'(x) = 0$ سيكون لديها حل واحد على الأقل. وبما أن $f'(x) \neq 0$ لكل قيم x ، فإنه من الخطأ أن يكون لدى $f(x) = 0$ حلان (أو أكثر). إذًا، $f(x) = 0$ لديها حل واحد بالضبط. ■



الشكل 3.50
$y = x^3 + 4x + 1$

لقد قمنا الآن بتعميم نظرية رول إلى إحدى أهم النتائج الخاصة بأساسيات حساب التفاضل والتكامل.

النظرية 10.4 (نظرية القيمة المتوسطة)

إذا كانت f متصلة في الفترة $[a\ b]$ وكانت قابلة للإشتقاق بالفترة (a, b). فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ حيث إن

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (10.2)$$

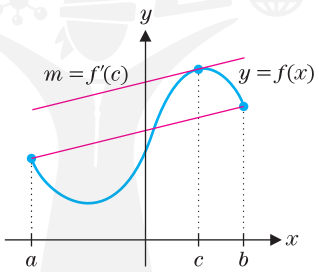
البرهان

ملاحظة

لاحظ أن الحالة الخاصة التي يكون $f(a) = f(b)$, (10.2). تبسّط الاستنتاج الخاص بنظرية رول أن $f'(c) = 0$.

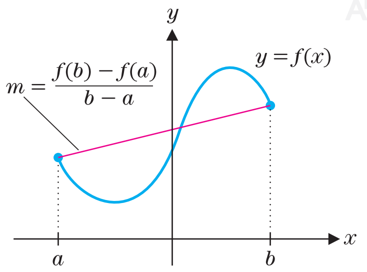
لاحظ أن الفرضيات متطابقة بالنسبة لفرضيات نظرية رول، عدا أنه لا يوجد افتراض حول قيم f عند النقطتين الطرفيتين. يمثل التعبير $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ميل القاطع الواصل بين النقطتين الطرفيتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

تؤكد النظرية على وجود مماس للمنحنى عند النقطة $x = c$ في (a, b) وله الميل نفسه كالمستقيم القاطع (وبالتالي يوازيه). (انظر الشكلين 3.51 و3.52). إذا أملت رأسك بحيث تظهر القطعة المستقيمة وكأنها أفقية، فإن الشكل 3.52 سيأخذ مظهر أشكال نظرية رول (الشكلان 3.49a و3.49b). تكمن فكرة البرهان في "إمالة" الدالّة، ثم تطبيق نظرية رول.



الشكل 3.51

المستقيم القاطع



الشكل 3.52

نظرية القيمة المتوسطة

معادلة القاطع المار بالنقطتين الطرفيتين هي

$$y - f(a) = m(x - a)$$

حيث

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

عرّف الدالّة "المائلة" g على أنها الفرق بين f والدالّة التي يكون تمثيلها البياني عبارة عن القاطع:

$$g(x) = f(x) - [m(x - a) + f(a)] \qquad (10.3)$$

لاحظ أن g متصلة في $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق في (a, b). وذلك لأن f لها الخصائص نفسها. علاوة على ذلك،

$$g(a) = f(a) - [0 + f(a)] = 0$$

و

$$g(b) = f(b) - [m(b - a) + f(a)]$$

$$= f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

بما إن $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$

بما أن $g(a) = g(b)$. فإنه باستخدام نظرية رول يمكننا تأكيد وجود عدد c في الفترة (a, b) حيث إن $g'(c) = 0$ وبإجراء إشتقاق لـ (10.3). نحصل على

$$0 = g'(c) = f'(c) - m \qquad (10.4)$$

في النهاية، يُنتج حل (10.4) لإيجاد قيمة $f'(c)$

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهو المطلوب. ■

قبل استعراضنا لبعض نقاط قوة نظرية القيمة المتوسطة، سنستعرض بإيجاز استنتاجها.

مثال 10.3 توضيح لنظرية القيمة المتوسطة

أوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

في الفترة $[0, 2]$.

الحل لاحظ أن f متصلة في $[0, 2]$ وقابلة للإشتقاق في $(0, 2)$. تنص نظرية القيمة المتوسطة بعد ذلك على وجود عدد c في $(0, 2)$ يكون فيه

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$

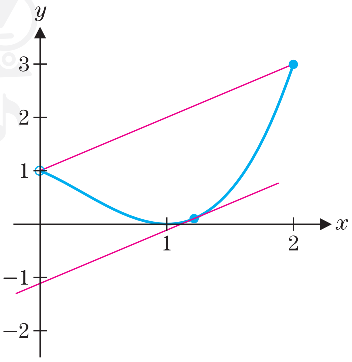
لإيجاد هذا العدد c، نحدّد ما يلي

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 1 = 1$$

أو

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

باستخدام القانون العام، سنوجد $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. في هذه الحالة، حلًا واحدًا وهو $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ موجود في الفترة $(0, 2)$. في الشكل 3.53، توضّح التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$، والمستقيم القاطع للنقطتين الطرفيتين لجزء من المنحنى في الفترة $[0, 2]$ والمماس عند $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$



الشكل 3.53

نظرية القيمة المتوسطة

إن التوضيح الوارد بالمثال 10.3، الذي أوجدنا فيه العدد c وأكدت نظرية القيمة المتوسطة وجوده، لا يمثّل محور اهتمام النظرية. في الحقيقة، عادةً ما تبقى قيم c مجهولة. وتكمن أهمية نظرية القيمة المتوسطة في أنها تربط الفرق بين قيم الدوال بالفرق بين قيم x المقابلة لها، كما هو الحال في المعادلة (10.5) أدناه.

لاحظ أنه، إذا أخذنا نتيجة نظرية القيمة المتوسطة بعين الاعتبار (10.2) وضربنا الطرفين في الكمية $(b - a)$، فسنحصل على

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (10.5)$$

كما تبيّن أن عددًا كبيرًا من أكثر النتائج أهمية في حساب التفاضل والتكامل (بما في ذلك النتيجة المعروفة بالنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل) يتبع نظرية القيمة المتوسطة. ويدور السؤال حول عدد الدوال التي لها المشتقة نفسها.

تذكر أنه لأي ثابت c، يكون

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

ثمة سؤال لم تفكّر فيه على الأرجح، وهو: هل من دوال أخرى تكون مشتقتها صفرًا؟ الإجابة هي لا، وتوضح ذلك النظرية 10.5.

النظرية 10.5

إذا كانت $f'(x) = 0$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I، فإن $f(x)$ ثابتة في I.

البرهان

اختر أي عددين مثل a وb في I، حيث $a < b$. بما أن f قابلة للإشتقاق في I و $(a, b) \subset I$، فإن f متصلة في $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق في (a, b). باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه بالنسبة للعدد $c \in (a, b) \subset I$، يكون

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

بما أن $f'(x) = 0$ لجميع قيم $x \in I$، فإن $f'(c) = 0$ وينتج عن ذلك

$$f(b) - f(a) = 0 \quad \text{أو} \quad f(b) = f(a)$$

بما أن a و b هما نقطتين عشوائيتين في I، فإن f ثابتة في I، وهو المطلوب. ■

يرتبط السؤال التالي بالنظرية 10.5. نعلم على سبيل المثال أن

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x$$

ولكن، هل يوجد دوال أخرى لها المشتقة نفسها؟ ينبغي عليك ذكر عدة أمثلة على ذلك. على سبيل المثال، $x^2 + 3$ و $x^2 - 4$ لهما المشتقة $2x$. وفي الحقيقة،

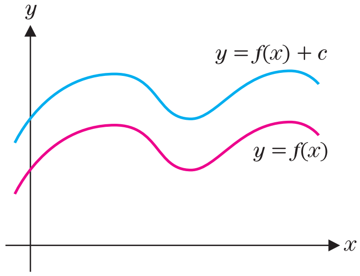
$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

بالنسبة لأي ثابت c. هل يوجد أي دوال لها المشتقة $2x$؟ تنص النتيجة 10.1 على أنه لا وجود لمثل هذه الدوال.

النتيجة 10.1

إذا كانت $g'(x) = f'(x)$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I، فإنه بالنسبة للثابت c،

$$\boxed{g(x) = f(x) + c \quad \text{لكل} \quad x \in I.}$$



الشكل 3.54

تمثيلان بيانيان متوازيان

لاحظ أن النتيجة 10.1 تنص على أنه إذا وجد تمثيلان بيانيان لديهما الميل نفسه عند كل نقطة على فترة ما، فإن التمثيلين البيانيين سيختلفان فقط بالازاحة الرأسية. (انظر الشكل 3.54).

البرهان

لنعرّف $h(x) = g(x) - f(x)$. إذًا $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$

لكل قيم x في I. في النظرية 10.5، يكون $h(x) = c$ للثابت c. ثم يتبع ذلك النتيجة بشكل مباشر من تعريف $h(x)$. ■

نجد أن النتيجة 10.1 لها تطبيقات مهمة عندما نحاول عكس عملية الإشتقاق (يُطلق على ذلك الإشتقاق العكسي). لنلقِ نظرة على هذا المثال 10.4.

مثال 10.4 إيجاد جميع الدوال التي لها مشتقة معطاة

أوجد جميع الدوال التي مشتقتها تساوي: $3x^2 + 1$.

الحل نكتب أولًا (من واقع خبرتنا مع الاشتقاق) دالّة واحدة لها مشتقة صحيحة: $x^3 + x$. ثم، ستخبرنا النتيجة 10.1 أن أي دالّة أخرى لها المشتقة نفسها تختلف عنها بثابت واحد على الأكثر. إذًا، كل دالّة تساوي مشتقتها $3x^2 + 1$ يكون لها الشكل $x^3 + x + c$ بالنسبة للثابت c.

وكمثال أخير، نوضح طريقة استخدام نظرية القيمة المتوسطة لوضع متباينة ذات فائدة.

مثال 10.5 إثبات متباينة لـ $\sin x$

أثبت أن

$$|\sin a| \le |a| \text{ for all } a$$

الحل أولًا، لاحظ أن $f(x) = \sin x$ متصلة وقابلة للإشتقاق على أي فترة ولكل a.

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|$$

بما أن: $\sin 0 = 0$، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه (إذا كان $a \ne 0$)

$$\frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c \tag{10.6}$$

للعدد c بين a و0. لاحظ أنه، إذا قمنا بضرب الطرفين من (10.6) في a وأخذنا القيم المطلقة، فسوف نحصل على

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c|\,|a - 0| = |\cos c|\,|a| \tag{10.7}$$

ولكن، $|\cos c| \le 1$، لكل الأعداد الحقيقية c؛ إذًا باستخدام (10.6)، نجد أن

$$|\sin a| = |\cos c|\,|a| \le (1)\,|a| = |a|$$

وهو المطلوب. ■

أبعد من القوانين

تتسم نظرية القيمة المتوسطة بتعقيدها، لكن تطبيقاتها بعيدة المدى. ورغم أن التوضيح في الشكل 3.52 يجعل النتيجة واضحة، إلا أن نتائج نظرية القيمة المتوسطة، مثل المثال 10.4، ضخمة وليست جميع أجزائها واضحة. على سبيل المثال، يعتمد معظم بقية حساب التفاضل والتكامل الوارد في هذا الكتاب على نظرية القيمة المتوسطة، سواء بطريقة مباشرة أو غير مباشرة. قد يؤدي الفهم الكامل لنظرية حساب التفاضل والتكامل إلى استنتاجات مهمة، ولا سيما عندما تفوق المسائل ما يمكن لحدسك التعامل معه. ما النظريات الأخرى التي تعلمتها ولا تزال تقدّم لك رؤية ثاقبة لما وراء سياقها الأصلي؟

التمارين 3.10

تمارين كتابية

1. بالنسبة لكل من نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة، على فرض أن f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b). إذا فرضنا أن f قابلة للإشتقاق في $[a, b]$، فإنه لا يجب علينا ذكر الاتصال. اشرح لماذا. لكن وضّح لماذا يستبعد هذا الافتراض $f(x) = x^{2/3}$ في $[0, 1]$، التي تنطبق فيها نظرية القيمة المتوسطة.

2. إحدى نتائج هذا الدرس هي أنه إذا كان $f'(x) = g'(x)$ في الفترة المفتوحة I، فإن $g(x) = f(x) + c$ في I للثابت c. اشرح هذه النتيجة بيانيًا.

3. اشرح النتيجة 10.1 في ما يتعلق بدالّتي الموقع والسرعة المتجهة. بمعنى أنه إذا كان لدى جسمين دالّة السرعة المتجهة نفسها، فما الذي تعرفه عن المواقع النسبية للجسمين؟

4. يمكن استنباط نظرية رول من نظرية القيمة المتوسطة عبر إثبات $f(a) = f(b)$. نظرًا لذلك، قد يكون من الغريب معرفة أن نظرية رول اسم خاص وجزء في هذا الكتاب. ولتوضيح السبب وراء قيامنا بذلك، سنناقش طرقًا تسهّل فهم نظرية رول أكثر من نظرية القيمة المتوسطة.

في التمارين 1-6، تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة، وجِدْ قيمة c الذي يجعل الاستنتاج الخاص بالنظريتين صحيحًا. اشرح الاستنتاج برسم تمثيل بياني.

1. $f(x) = x^2 + 1, [-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 + 1, [0, 2]$
3. $f(x) = x^3 + x^2, [0, 1]$
4. $f(x) = x^3 + x^2, [-1, 1]$
5. $f(x) = \sin x, [0, \pi/2]$
6. $f(x) = \sin x, [-\pi, 0]$

7. أثبت أنّ $x^3 + 5x + 1 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

8. أثبت أنّ $x^3 + 4x - 3 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

9. أثبت أنّ $x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ لها حلان بالضبط.

10. أثبت أنّ $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ لها حلان بالضبط.

11. أثبت أنّ $x^3 + ax + b = 0$ لها حل واحد بالضبط لكل $a > 0$.

12. أثبت أنّ $(a > 0, b > 0)$ $x^4 + ax^2 - b = 0$ لها حلان بالضبط.

13. أثبت أنّ $x^5 + ax^3 + bx + c = 0$ لها حل واحد بالضبط لكل من $a > 0, b > 0$.

14. أثبت أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (مكعّبة) بها ثلاثة أصفار على الأكثر. (يمكنك استخدام القانون العام).

في التمارين 22-15، أوجد الدالّة g التي تجعل $g'(x) = f(x)$.

15. $f(x) = x^2$

16. $f(x) = 9x^4$

17. $f(x) = 1/x^2$

18. $f(x) = \sqrt{x}$

19. $f(x) = \sin x$

20. $f(x) = \cos x$

21. $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$

22. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

23. على فرض أن f دالّة قابلة للإشتقاق بحيث $f(0) = f'(0) = 0$ و $f''(0) > 0$. أثبت أنه يوجد ثابت موجب $a > 0$ حيث $f(x) > 0$ لكل قيم x في الفترة $(0, a)$. هل يُمكن استنباط أي شيء حول $f(x)$ بالنسبة لقيم x السالبة؟

24. وضّح أنه بالنسبة لأي عددين حقيقيين u وv، $|\cos u - \cos v| \le |u - v|$.

25. أثبت أن $|\sin a| < |a|$ لكل قيم $a \neq 0$. واستخدم النتيجة لتوضيح أن الحل الوحيد للمعادلة $\sin x = x$ هو $x = 0$. ماذا سيحدث إذا حاولت إيجاد جميع نقاط التقاطع باستخدام حاسبة التمثيل البياني؟

26. أثبت أن $|\tan^{-1} a| < |a|$ لكل قيم $a \neq 0$. واستخدم هذه المتباينة لإيجاد جميع حلول المعادلة $\tan^{-1} x = x$.

27. أثبت أن $|x| < |\sin^{-1} x|$ حيث $0 < |x| < 1$.

28. أثبت أن $|x| \le |\tan x|$ حيث $|x| < \frac{\pi}{2}$.

29. إذا كان $f'(x) > 0$ لكل قيم x. فأثبت أن $f(x)$ هي دالّة متزايدة؛ بمعنى أنه إذا كان $a < b$. فإن $f(a) < f(b)$.

30. إذا كان $f'(x) < 0$ لكل قيم x. فأثبت أن $f(x)$ هي دالّة متناقصة؛ بمعنى أنه إذا كان $a < b$. فإن $f(a) > f(b)$.

في التمارين 38-31، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك.

31 $f(x) = x^3 + 5x + 1$

32. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$

33. $f(x) = -x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

35. $f(x) = e^x$

36. $f(x) = e^{-x}$

37. $f(x) = \ln x$

38. $f(x) = \ln x^2$

39. على فرض أن $s(t)$ تحدّد موقع جسم ما في الزمن t. وإذا كانت s قابلة للإشتقاق في الفترة $[a, b]$. فأثبت أنه عندما $t = c$. تكون السرعة اللَحْظِيّة عند $t = c$ مساوية للسرعة المتجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$.

40. بدأ عدّاءان سباقًا في الزمن 0. وبعد مرور فترة من الزمن $t = a$. تصدر عدّاء السباق، ولكن المتسابق الثاني نزع منه صدارة السباق بمرور الزمن $t = b$. أثبت أنه عند الزمن $t = c > 0$. كان العدّاءان يجريان بالسرعة نفسها بالضبط.

41. إذا كانت f و g دالّتين قابلتين للإشتقاق في الفترة $[a, b]$ حيث $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$. فأثبت أنه عند نقطة ما في الفترة $[a, b]$. f و g لهما مماسان متوازيان.

42. أثبت أن نتيجة التمرين 41 لا تزال قائمة إذا كان الافتراضان $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$ مستخدمين في المعطى $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$.

في التمارين 46-43، اشرح لمَ لا يصح استخدام نظرية القيمة المتوسطة. إذا كانت الفرضيات غير صحيحة، فإن النظرية لا تفيدك بأي شيء حول صحة الاستنتاج. في ثلاث أو أربع حالات، وضِّح أنه لا توجد قيمة لـ c تجعل نتيجة النظرية صحيحة. في الحالة الرابعة، أوجد قيمة c.

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}, [-1, 1]$

44. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, [-1, 2]$

45. $f(x) = \tan x, [0, \pi]$

46. $f(x) = x^{1/3}, [-1, 1]$

47. في $f(x) = \begin{cases} 2x & x \le 0 \\ 2x-4 & x > 0 \end{cases}$. وضّح أن f متصلة في الفترة $(0, 2)$ وقابلة للإشتقاق في الفترة $(0, 2)$ ويوجد بها $f(0) = f(2)$. وضّح أنه لا توجد قيمة لـ c تجعل $f'(c) = 0$. ما فرضية نظرية رول غير المستوفاة؟

48. على فرض أن f دالّة قابلة للإشتقاق بحيث $f(0) = f'(0) = 0$. وضّح بالمثال أنه من غير الضروري أن تكون $f(x) = 0$ صحيحة بالنسبة لجميع قيم x. جِدْ الخطأ في "البرهان" المزيف التالي. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة حيث $a = x$ و $b = 0$. نجد أن $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. بما أن $f(0) = 0$ و $f'(c) = 0$. كذلك $\dfrac{f(x)}{x} = 0$. إذًا $f(x) = 0$.

تمارين استكشافية

1. إذا كانت لديك سرعة متجهة متوسطة بمقدار 60 mph على ساعة واحدة، وحدود السرعة هي 65 mph. فلن تستطيع إثبات أنك لم تتجاوز حدود السرعة. ما أطول فترة زمنية يمكنك استخدامها في حساب المتوسط 60 mph وتضمن عدم تخطي حدود السرعة؟ يمكننا استخدام نظرية القيمة المتوسطة للإجابة عن السؤال، وذلك بعد توضيح سؤالين أساسيين. السؤال الأول، أثبت أننا نحتاج إلى معرفة الحد الأقصى لتسارع السيارة، وأن الحد الأقصى للتسارع الموجب قد يختلف عن الحد الأقصى للتسارع السالب. وفق خبرتك، ما أكبر تسارع (زيادة السرعة) قد تصل إليها سيارتك؟ ما أكبر تباطؤ (خفض السرعة) قد تصل إليه سيارتك؟ ادعم تقديراتك ببعض البيانات الحقيقية (مثل تتحرك سيارتي من 0 إلى 60 في غضون 15 ثانية). أطلق على العدد الأكبر اسم A (استخدم وحدات mph في الثانية). ثم أثبت أن التسارع (مشتقة السرعة المتجهة) ثابت، ثم أثبت أن دالّة السرعة المتجهة هي دالّة خطية. لذلك، إذا كانت

السرعة المتجهة تختلف من 55 mph إلى 65 mph بمعدل تسارع ثابت، فإن السرعة المتجهة المتوسطة ستصبح 60 mph. والآن، طبِّق نظرية القيمة المتوسطة على دالّة السرعة المتجهة $v(t)$ في الفترة الزمنية $[0, T]$، حيث تغيّر السرعة المتجهة من 55 mph إلى 65 mph بمعدل تسارع ثابت A. إذًا $v'(c) = \dfrac{v(T) - v(0)}{T - 0}$ و $A = \dfrac{65 - 55}{T - 0}$. ما مدى جودة الضمان؟

2. على فرض إلقاء إحدى الملوّثات في بحيرة بمعدل $p'(t) = t^2 - t + 4$ طن في الشهر. وقد بلغ معدل إلقاء هذا الملوّث في البحيرة خلال الشهرين الأولين $A = p(2) - p(0)$. باستخدام $c = 1$ (النقطة المتوسطة في الفترة)، قدِّر $p(t)$ من خلال تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على $p(t)$ في الفترة $[0, 2]$. للحصول على تقدير أفضل، طبِّق نظرية القيمة المتوسطة على الفترات $[0, 1/2]$، $[1/2, 1]$، $[1, 3/2]$ و $[3/2, 2]$. إذا تمكّنت من استخدام CAS، فاحصل على تقديرات أفضل من خلال قسمة الفترة $[0, 2]$ إلى أجزاء أكثر وأكثر، ثم حاول تخمين نهاية التقديرات.

3. تنصّ نتيجة تُعرَف باسم نظرية القيمة المتوسطة لكوشي على أنه إذا كان f و g دالتين قابلتين للإشتقاق في الفترة (a, b) ومتصلتين في $[a, b]$، فيوجد عدد c يكون فيه $a < c < b$ و $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$. أوجد جميع الأخطاء الموجودة في المحاولة غير الصالحة لإثبات النتيجة، ثم أوجد البرهان الصحيح. المحاولة غير الصالحة: إن فرضيات نظرية القيمة المتوسطة مستوفاة في كلا الدالّتين، لذلك يوجد عدد c يكون فيه $a < c < b$ و $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ و $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$. إذًا، $b - a = \dfrac{f(b) - f(a)}{f'(c)} = \dfrac{g(b) - g(a)}{g'(c)}$؛ لذلك $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

تمارين مراجعة

تمارين كتابية

تتضمن القائمة التالية مصطلحات المعرفة ونظريات واردة في هذه الوحدة. بالنسبة لكل مصطلح أو نظرية، (1) اذكر تعريف أو عبارة دقيقة، (2) اذكر معنى المصطلح أو النظرية بعبارات عامة، و(3) صف أنواع المسائل ذات الصلة بالمصطلح أو النظرية.

المماس	السرعة المتجهة	السرعة المتجهة المتوسطة
اشتقاق	قاعدة القوة	التسارع
قاعدة ناتج الضرب	قاعدة ناتج قسمة	قاعدة السلسلة
الإشتقاق الضمني	نظرية القيمة المتوسطة	نظرية رول

أوجد مشتقة كل دالة:

$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x,$
$\cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \csc^{-1} x, e^x, b^x, \ln x, \log_b x$

صواب أم خطأ

اذكر إذا ما كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة وبيّن السبب باختصار. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" عن طريق تعديل العبارة الموضّحة إلى عبارة جديدة صحيحة.

1. إذا كانت دالّة متصلة عند $x = a$. فسيكون لها مماس عند $x = a$.

2. السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$ هي متوسط السرعات المتجهة عند $t = a$ و $t = b$.

3. ينتج الميل عن مشتقة الدالّة.

4. إذا أخذنا التمثيل البياني لـ $f'(x)$ بعين الاعتبار، فيمكنك إنشاء التمثيل البياني لـ $f(x)$.

5. ينتج عن قاعدة القوى قاعدة لحساب مشتقة أي كثيرة حدود.

6. إذا تمت كتابة دالّة في صورة ناتج قسمة، فاستخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقتها.

7. ينتج عن قاعدة السلسلة مشتقة تركيب دالتين. الترتيب غير مهم في هذه الحالة.

8. مشتقة الدالّة العكسية هو معكوس مشتقة الدالّة.

9. لا يكون منحنى $f(x) = \sin 4x$ أبدًا أكبر من 1.

10. مشتقة أي دالّة كثيرة الحدود هي نفسها.

11. مشتقة $f(x) = \ln ax$ هي $\dfrac{1}{x}$ لأي $a > 0$.

12. في الإشتقاق الضمني، لا يجب عليك حل y بصفتها دالّة x لإيجاد قيمة $y'(x)$.

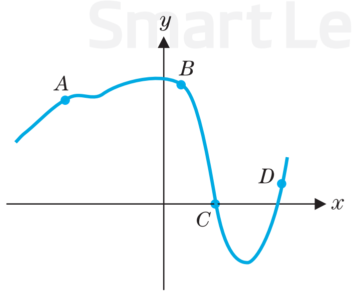
13. تُعد نظرية القيمة المتوسطة ونظرية رول حالتان خاصتان بالنسبة لبعضهما.

14. يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة لتوضيح أنه في كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة، يكون $f'(x) = 0$ بالنسبة كحد أقصى لأربع قيم لـ x.

1. قدِّر قيمة $f'(1)$ من البيانات المعطاة.

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	2.0	2.6	3.0	3.4	4.0

2. نظم لائحة النقاط A و B و C و D بترتيب الميل المتزايد للمماس على المنحنى.



في التمارين 3-8، استخدم تعريف النهاية لإيجاد المشتقة المطلوبة.

3. $f'(2)$ for $f(x) = x^2 - 2x$
4. $f'(1)$ for $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
5. $f'(1)$ for $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f'(0)$ for $f(x) = x^3 - 2x$
7. $f'(x)$ for $f(x) = x^3 + x$
8. $f'(x)$ for $f(x) = \frac{3}{x}$

في التمارين 9-14، أوجد معادلة المماس.

9. $y = x^4 - 2x + 1$ at $x = 1$
10. $y = \sin 2x$ at $x = 0$
11. $y = 3e^{2x}$ at $x = 0$
12. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ at $x = 0$
13. $y - x^2y^2 = x - 1$ at $(1, 1)$
14. $y^2 + xe^y = 4 - x$ at $(2, 0)$

في التمارين 15-18، استخدم دالّة الموقع المُعطى لإيجاد السرعة المتجهة والتسارع.

15. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$
16. $s(t) = -9.8t^2 - 22t + 6$
17. $s(t) = 10e^{-2t} \sin 4t$
18. $s(t) = \sqrt{4t + 16} - 4$

19. في التمرين 15، تعطي الدالة $s(t)$ ارتفاع الكرة في الزمن t. أوجد السرعة المتجهة للكرة عند $t = 1$؛ هل ترتفع الكرة أم تسقط؟ أوجد السرعة المتجهة للكرة عند $t = 2$؛ هل ترتفع الكرة أم تسقط؟

20. في التمرين 17، تعطي الدالة $s(t)$ موقع كتلة مرتبطة بزنبرك في الزمن t. قارن السرعتين المتجهتين عند $t = 0$ و $t = \pi$. هل تتحرّك الكتلة في الاتجاه نفسه أم في اتجاهين متضادين؟ ما الزمن الذي تتحرك فيه الكتلة بسرعة؟

في التمرينين 21 و22، احسب ميول المستقيمات القاطعة بين $x = 2$ و $x = 1$ (a)، $x = 1.5$ و $x = 1$ (b)، $x = 1.1$ و $x = 1$ (c)، و(d) قدّر ميل المماس عند $x = 1$.

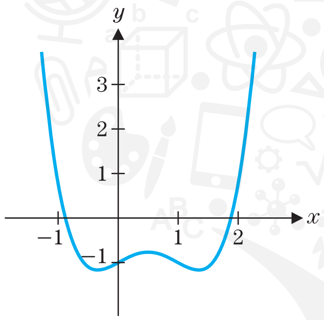
21. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
22. $f(x) = e^{2x}$

في التمارين 23-50، أوجد مشتقة الدالّة المعطاة.

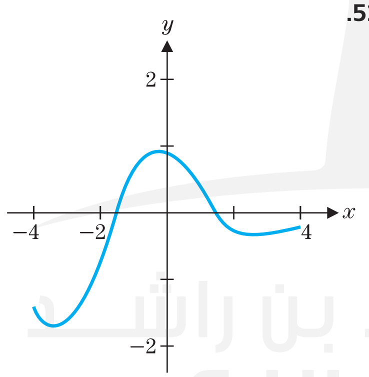
23. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$
24. $f(x) = x^{2/3} - 4x^2 + 5$
25. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$
26. $f(x) = \frac{2 - 3x + x^2}{\sqrt{x}}$
27. $f(t) = t^2(t + 2)^3$
28. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 - 3t + 2)$
29. $g(x) = \frac{x}{3x^2 - 1}$
30. $g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x}$
31. $f(x) = x^2 \sin x$
32. $f(x) = \sin x^2$
33. $f(x) = \tan \sqrt{x}$
34. $f(x) = \sqrt{\tan x}$
35. $f(t) = t \csc t$
36. $f(t) = \sin 3t \cos 4t$
37. $u(x) = 2e^{-x^2}$
38. $u(x) = (2e^{-x})^2$
39. $f(x) = x \ln x^2$
40. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$
41. $f(x) = \ln \sqrt{\sin 4x}$
42. $f(x) = e^{\tan(x^2+1)}$
43. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$
44. $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$
45. $f(t) = te^{4t}$
46. $f(x) = \frac{6x}{(x-1)^2}$
47. $\sin^{-1}(2x^2 + 1)$
48. $\sin(\cos^{-1} x^2)$
49. $\tan^{-1}(\cos 2x)$
50. $\sec^{-1}(3x^2)$

في التمرينين 51 و52، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لرسم التمثيل البياني $y = f'(x)$.

.51



.52



في التمارين 53-60، أوجد المشتقة المطلوبة.

53. $f''(x)$ for $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1$
54. $f'''(x)$ for $f(x) = \sqrt{x + 1}$
55. $f'''(x)$ for $f(x) = xe^{2x}$
56. $f''(x)$ for $f(x) = \frac{4}{x + 1}$

57. $f''(x)$ for $f(x) = \tan(2x)$

58. $f^{(4)}(x)$ for $f(x) = (x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 7x + 1)^2$

59. $f^{(26)}(x)$ for $f(x) = \sin 3x$

60. $f^{(31)}(x)$ for $f(x) = e^{-2x}$

61. تساوي الإيرادات الثمن مضروبًا في الكمية. على فرض أن السعر الحالي هو AED 2.40، وتم بيع 12,000 قطعة بهذا السعر. إذا كان السعر يزداد بمعدل 10 فلسات في العام الواحد وتقل الكمية المبيعة بمعدل 1500 قطعة في العام الواحد، فبأي معدل تتغير الإيرادات؟

62. يمكننا إيجاد القيمة (بالدرهم) للاستثمار بصفته دالّة زمن (أعوام) باستخدام $v(t) = 200\left(\frac{3}{2}\right)^t$. أوجد النسبة المئوية لمعدل التغير اللحظي في قيمة الاستثمار.

63. يمكننا إيجاد الموقع في الفترة الزمنية t لزنبرك يتحرك بشكل رأسي باستخدام $f(t) = 4\cos 2t$. أوجد موقع الزنبرك عندما يكون لديه (a) سرعة متجهة قيمتها صفر، و(b) حد أقصى للسرعة المتجهة، و(c) حد أدنى للسرعة المتجهة.

64. يمكننا إيجاد الموقع في الفترة الزمنية t لزنبرك يتحرك بشكل رأسي باستخدام $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$. أوجد سرعة الزنبرك المتجهة في أي زمن t.

في التمارين 68-65، أوجد المشتقة $y'(x)$.

65. $x^2y - 3y^3 = x^2 + 1$

66. $\sin(xy) + x^2 = x - y$

67. $\dfrac{y}{x+1} - 3y = \tan x$

68. $x - 2y^2 = 3e^{x/y}$

69. إذا تمكّنت من استخدام CAS، فارسم التمثيل البياني في التمرين 65. أوجد قيمة y التي تتوافق مع $x = 0$. أوجد ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة. كذلك، أوجد $y''(0)$.

70. إذا تمكّنت من استخدام CAS، فارسم التمثيل البياني في التمرين 67. أوجد قيمة y التي تتوافق مع $x = 0$. أوجد ميل المماس مع المنحنى عند هذه النقطة. كذلك، أوجد $y''(0)$.

في التمارين 74-71، أوجد جميع النقاط التي يكون عندها المماس للمنحنى (a) أفقيًا، و(b) رأسيًا.

71. $y = x^3 - 6x^2 + 1$

72. $y = x^{2/3}$

73. $x^2y - 4y = x^2$

74. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

75. أثبت أنّ المعادلة $x^3 + 7x - 1 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

76. أثبت أنّ المعادلة $x^5 + 3x^3 - 2 = 0$ لها حل واحد بالضبط.

في التمرينين 77 و78، حل الجزأين بدون إيجاد المعكوس: (a) أوجد مشتقة المعكوس عند $x = a$ و(b) مثّل المعكوس بيانيًا.

77. $x^5 + 2x^3 - 1,\ a = 2$

78. $e^{x^3+2x},\ a = 1$

79. أثبت أنّ $|\cos x - 1| \le |x|$ لكل x.

80. أثبت أنّ $x + x^3/3 + 2x^5/15 < \tan x < x + x^3/3 + 2x^5/5$ لكل $0 < x < 1$

81. إذا كانت $f(x)$ قابلة للإشتقاق عند $x = a$، فوضّح أن $g(x)$ متصلة عند $x = a$ حيث

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{إذا } x \ne a \\ f'(a) & \text{إذا } x = a \end{cases}$$

82. إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $x = a$ والمماس هو $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ عند $x = a$ على المنحنى $f(x)$. فأثبت أن $f(x) - T(x) = e(x)(x - a)$ للدالّة الخطأ $e(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to a} e(x) = 0$

في التمرينين 83 و84، أوجد قيمة c بالشكل الذي تحققه نظرية القيمة المتوسطة.

83. $f(x) = x^2 - 2x$ في الفترة $[0, 2]$

84. $f(x) = x^3 - x$ في الفترة $[0, 2]$

في التمرينين 85 و86، أوجد جميع دوال g حيث $g'(x) = f(x)$.

85. $f(x) = 3x^2 - \cos x$

86. $f(x) = x^3 - e^{2x}$

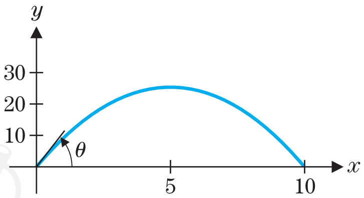
87. يكون لكثيرة الحدود $f(x)$ **جذر مكرر** من الرتبة 2 عند $x = a$ إذا كان $(x-a)^2$ عاملًا لـ $f(x)$ لكن $(x-a)^3$ ليس كذلك. لدى الخط الذي يمر بالنقطة $(1, 2)$ وميله m المعادلة $y = m(x-1) + 2$. أوجد m بحيث يكون لدى $f(x) = x^3 + 1 - [m(x-1) + 2]$ جذر مكرر من الرتبة 2 عند $x = 1$. وضّح أن $y = m(x-1) + 2$ هو المماس لـ $y = x^3 + 1$ عند النقطة $(1, 2)$.

88. كرّر التمرين 87 بالنسبة لـ $f(x) = x^3 + 2x$ والنقطة $(2, 12)$

89. يبلغ طول وتر غيتار L، وتبلغ كثافته p، ويتذبذب الشد T بالتردد $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{p}}$. احسب الإشتقاق $\dfrac{df}{dT}$، عندما نتعامل مع T على أنه متغيّر مستقل، ونتعامل مع p وL على أنهما ثابتين. فسّر هذا الإشتقاق من وجهة نظر عازف غيتار يخفف الوتر أو يحرّره "لضبط نغمته". أوجد $\dfrac{df}{dL}$ وفسّر من وجهة نظر عازف غيتار يعزف نوتة من خلال الضغط على الوتر بطوق.

تمارين استكشافية

1. تُعد معرفة أين ينبغي تصويب الكرة مهارة مهمة في العديد من النشاطات الرياضية. إذا لم تتبع الكرة خطًا مستقيمًا (بفعل الجاذبية أو عوامل أخرى)، فإن التصويب قد يكون مهمة صعبة. عند إلقاء كرة قاعدة على سبيل المثال، يجب على اللاعب أخذ الجاذبية بعين الاعتبار والتصويب على ارتفاع أعلى من الهدف. وعند تجاهل مقاومة الهواء وأي حركات جانبية، يمكن تقريب حركة الكرة المتحركة باستخدام $y = -\dfrac{16}{v^2 \cos^2 \theta}x^2 + (\tan \theta)x$. إذًا، تم إلقاء الكرة من الموضع $(0, 0)$ بالسرعة الابتدائية v ft/s عند الزاوية θ من المستقيم الأفقي.



إذ ا أخذنا هذا الميل بعين الاعتبار، فيمكننا حساب ميل المماس عند $x = 0$. إنما كيف يمكننا حساب الزاوية المناسبة θ؟ وضِّح أنه إذا كان m هو ميل المماس عند $x = 0$، فإن $\tan \theta = m$. (إرشاد: ارسم مثلثًا باستخدام المماس والمحور x. وتذكّر أنّ الميل هو الارتفاع الرأسي على الامتداد الأفقي). ألا تظن أنّ المماس اسم جيد؟ فلنتناول الآن بعض مسائل كرة القاعدة. سوف نتأمل الآن مدى الارتفاع الذي يحتاج اللاعبون إلى رفع الكرة إليه لجعل التمريرات سهلة في الإمساك بها. يُعدّ ارتفاع التمريرة هو ارتفاع الالتقاط الجيد. إذا كان L (ft) هو طول التمريرة، ونريد من الكرة الوصول إلى الارتفاع نفسه عند إطلاقها (كما هو موضح في الشكل)، ويمكن تحديد القطع المكافئ من خلال العلاقة التالية بين الزاوية والسرعة المتجهة: $\sin 2\theta = 32L/v^2$. يجب على لاعب القاعدة الثالثة الذي يمرّر الكرة بسرعة 130 ft/s (حوالي 90 mph) أن يُمرّر بسرعة 120 ft للوصول إلى القاعدة الأولى. أوجد قاعدة إطلاق الكرة (عوّض عن L و v؛ ومن خلال المحاولة والخطأ، أوجد قيمة θ المناسبة). وميل المماس، والارتفاع الذي يجب فيه على لاعب القاعدة الثالثة تصويب الكرة (وهو الارتفاع الذي ستصل إليه الكرة مع افتراض انعدام الجاذبية). ما مدى التغير الذي سيطرأ في حالة إجراء تمريرة مرنة بسرعة 100 ft/s؟ ماذا عن تمريرة لاعب الدفاع للكرة لمسافة 300 قدم بسرعة 130 ft/s؟ ينكر معظم لاعبو كرة القاعدة أنهم يصوّبون الكرة بهذا الارتفاع. فما الشيء المتأصل في خبراتهم ويجعل من الصعب عليهم تصديق هذه الحسابات؟